

Андрей Бареков и Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 4, 2020

08. Сплайн-интерполяция. Подпрограммы
SPLINE и **SEVAL**. Интерполирование по
Эрмиту. Обратная задача интерполирования

На практике интерполяционные полиномы высоких степеней строят редко, т.к. они очень чувствительны к погрешности в исходных данных. В таких случаях возможно *разбиение исходного промежутка на ряд участков*, на каждом из которых строится полином относительно невысокой степени.

На практике так поступают часто, однако в ряде приложений требуется дифференцируемость функции, а она отсутствует в точках сопряжения соседних полиномов. Решить проблему позволяет *сплайн-интерполяция*.

1 Сплайн-интерполяция

Имеется N точек и $N - 1$ промежутков:

$$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{N-1}, x_N]$$

На каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ строится интерполяционный полином третьей степени:

$$[x_k, x_{k+1}] \rightarrow S_k(x) = \overbrace{a_k}^{=f_k} + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3$$

Возникшая степень свободы используется для гладкого сопряжения соседних полиномов

Итак, имеем $4 \times (N - 1) = 4N - 4$ параметра.

Потребуем, чтобы во всех *внутренних точках* совпадали соседние полиномы, их первые и вторые производные - это и будет условием гладкого сопряжения.

$$\begin{cases} S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \\ S'_k(x_{k+1}) = S'_{k+1}(x_{k+1}) \\ S''_k(x_{k+1}) = S''_{k+1}(x_{k+1}) \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 2$$

Выходит $3 \times (N - 2) = 3N - 6$ условий, $+N$ условий интерполирования (совпадение полиномов и их функции в узлах) $= 4N - 6$ условий.

N уравнений отражают
требование интер-ния: $S_k(x_k) = f_k$
 $k = 1, 2, \dots, N - 1$ (по N точкам $N - 1$ ст.)
Обратим внимание: $S_{N-1}(x_N) = f_N$

Недостающие два уравнения чаще всего задаются на концах промежутка в точках x_1 и x_N . Эти уравнения должны удовлетворять двум условиям одновременно:

1. Возникшая система уравнений должна как можно проще решаться.
2. Эти уравнения должны быть согласованы с характером поведения функции на концах промежутка.

В предлагаемом ПО строится интерполяционный полином третьей степени $Q_3(x)$ по первым четырём точкам и приравняется:

$$S_1'''(x_1) = Q_3'''(x_1) \Rightarrow 6d_1 = \text{const} \text{ (дифференцировали)}$$

$$\begin{aligned} d_1(x-x_k)^3, \\ 3d_1(x-x_k)^2, \\ 6d_1(x-x_k), \\ 6d_1 = \text{const} \end{aligned}$$

Аналогично, по последним четырём точкам строится полином $\tilde{Q}_3(x)$ и приравняется:

$$S_{N-1}'''(x_N) = \tilde{Q}_3'''(x_N)$$

2 Программное обеспечение

ПО состоит из двух программ:

2.1 SPLINE

$$SPLINE(\underbrace{N}_{\text{Кол-во точек}}, \underbrace{X_K}_{\text{Вектор с узлами}}, \underbrace{F_K}_{\text{Вектор с знач.}}, \underbrace{B, C, D}_{\text{Выходные параметры } b_k, c_k, d_k})$$

Решает систему уравнений относительно коэффициентов полиномов.

2.2 SEVAL

$$\underbrace{SEVAL}_{\text{function}}(N, X, X_K, F_K, \underbrace{B, C, D}_{\text{Получены из SPLINE}})$$

Вычисляет значение сплайна в некоторой точке $X, X \in [x_k, x_{k+1}]$.

$S_k(x_k) = a_k = f_k$ (поэтому ищем только b, c, d).

Программа изначально определяет промежуток, на котором находится X , а потом высчитывает полином. Номер полинома находится двоичным поиском.

3 Интерполирование по Эрмиту

Так называется задача интерполирования, когда в таблице кроме значений функции присутствуют еще и производные.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x_0	f_0	f'_0	
x_1	f_1	f'_1	f''_1
x_2	f_2		

$$\begin{cases} H(x_k) = f_k, k = 0, 1, 2 \\ H'(x_k) = f'_k, k = 0, 1 \\ H''(x_k) = f''_k, k = 1 \end{cases}$$

Степень полинома Эрмита равна общему количеству условий -1 . Аналогично полиному Лагранжа можно записать полином Эрмита в готовом виде, не решая систему уравнений. Наиболее простой вид он имеет, когда количество условий во всех узлах одинаково.

3.1 Пример

Рассмотрим разложение функции в степенной ряд Тейлора в точке x_0 :

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots}_{P_2(x)}$$

Первые три слагаемых - частная сумма ряда Тейлора в x_0 .

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2'(x_0) = f'(x_0) \\ P_2''(x_0) = f''(x_0) \end{cases}$$

Так как полином $P(x)$ удовлетворяет условиям выше, то частная сумма ряда Тейлора - частный случай полинома Эрмита с одним узлом интерполирования.

4 Обратная задача интерполирования

x	$f(x)$	
x_0	$f(x_0)$	$x^* \Rightarrow f(x^*) = ?$ прямая задача интерполирования
x_1	$f(x_1)$	
\dots	\dots	<u>$f(x^*) = f^* \Rightarrow x^* = ?$ восстановить аргумент</u>
x_m	$f(x_m)$	

I. *Строим интерполяционный полином*, приравниваем значение функции, ищем корни: $Q_m(x) = f^*$. Возникшее уравнение решается либо аналитически, либо приближённо численными методами.

II. *Меняем местами столбцы таблицы*, строим интерполяционный полином для обратной функции, и вычисляем значение этого полинома в точке f^* и находим x^* .

Ограничение: Для существования обратной функции, исходная должна быть строго монотонной. В противном случае делим на промежутки монотонности.