17. 7 теорем о матричных функциях

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 16, 2020

1 Теоремы

Определение 1. Матрицы A и B называются подобными, если найдется такая неособенная матрица S ($det(S) \neq 0$), что $B = SAS^{-1}$.

Теорема 1. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Доказательство.

$$det(B - \lambda E) =$$
$$= det(SAS^{-1} - \lambda SS^{-1}) = det(S(A - \lambda E)S^{-1}) = det(S)det(A - \lambda E)det(S^{-1}) =$$
$$= det(A - \lambda E).$$

Характеристические полиномы для обоих матриц совпали, следовательно, совпали и собственные значения. $\square$

Теорема 2. Если матрицы A и B подобны, то матричные функции от них тоже подобны, то есть если $B = SAS^{-1}$, то $f(B) = Sf(A)S^{-1}$.

Доказательство.

$$f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \boxed{=}$$
$$B^k = SA\underbrace{S^{-1}S}_{E}AS^{-1} \ldots SAS^{-1} = SA^kS^{-1}$$
$$\boxed{=} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k SA^kS^{-1} = S\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k\right)}_{\text{степ. матр. ряд}} S^{-1} = f(B) = Sf(A)S^{-1}. \quad \square$$

Теорема 3. Если собственные значения матрицы A различны, то она подобна диагональной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения матрицы A.

Доказательство.

$$A \to \lambda_k(\text{собственные значения}), u_k(\text{собственные векторы}),$$
$$Au_k = \lambda_k u_k,$$
$U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – матрица, столбцами которой являются все собственные векторы;
$$AU = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \ldots, \lambda_n u_n) = U\varLambda,$$
$$\varLambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n); AU = U\varLambda,$$
$$U^{-1}AU = \varLambda, \underline{A = U\varLambda U^{-1}}. \quad \square$$

Теорема 4. Две матричные функции от одной и той же матрицы A коммутируют
$$f(A)\cdot g(A) = g(A)\cdot f(A).$$

Доказательство.

$$\text{По теореме 3: } A = U\varLambda U^{-1},$$
$$\text{По теореме 2: } f(A) = Uf(\varLambda)U^{-1} \quad \text{и} \quad g(A) = Ug(\varLambda)U^{-1},$$

$$\underline{f(A)g(A)} = Uf(\varLambda)\underbrace{U^{-1}\cdot U}_{=E}g(\varLambda)U^{-1} = U\underbrace{f(\varLambda)g(\varLambda)}_{\text{диаг. матрицы}}U^{-1} =$$
$$= Ug(\varLambda)UU^{-1}f(\varLambda)U^{-1} = \underline{g(A)f(A)}. \quad \square$$

Теорема 5. Если у матрицы A собственные значения λ_k, то у матричной функции $f(A)$ собственные значения - $f(\lambda_k)$.

Доказательство.

$$A \to \lambda_k, \qquad \text{по теореме 3: } A = U\varLambda U^{-1},$$
$$f(A) \to f(\lambda_k) \qquad \text{по теореме 2: } f(A) = Uf(\varLambda)U^{-1}.$$

$$f(A) = Uf(\varLambda)U^{-1} = \left[f(\varLambda) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\varLambda^k\right] =$$
$$= U\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda_n^k \end{pmatrix}U^{-1} \quad = \quad U\begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix}U^{-1},$$

Что и означает, что $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$ являются собственными значениями матрицы $f(A)$, т.к. преобразование подобия не меняет собственных значений. $\square$

Следствие 1. Матричный ряд $f(A)$ сходится $\Leftrightarrow$ когда сходятся скалярные степенные ряды, стоящие на диагонали $f(\varLambda)$, а они сходятся $\Leftrightarrow$ когда все собственные значения удовлетворяют условию:
$$|\lambda_k| < R,$$
которое является *необходимым* и *достаточным* условием сходимости матричного ряда.

Следствие 2.

$$\| A \| < R \text{ - достаточное условие,}$$
$$|\lambda_k| < R \text{ - необходимое условие}$$
$$\Rightarrow |\lambda_k| \leq \| A \| .$$

Предположим, что $|\lambda_k| >\| A \|$, тогда существует такой R, что $\| A \|< R$, а $|\lambda_k| > R$, получается, что достаточное условие выполняется, а необходимое - нет, это противоречие.

Теорема 6. (Формула Кели-Гамильтона). Всякая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Пусть

$$Q(\lambda) = \alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n$$

характеристический полином, а

$$Q(\lambda) = 0$$

характеристическое уравнение, тогда

$$Q(A) = 0 = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \cdots + \alpha_n E.$$

Доказательство. По теореме 3: $A = U\Lambda U^{-1}$

$$Q(A) = UQ(\Lambda)U^{-1} = U \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1} = 0. \quad \square$$

Теорема 7. (Формула Лагранжа-Сильвестра.) Любая функция матрицы A, имеющей различные собственные значения, может быть представлена в виде:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_n E)}{()\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)$, построим для нее интерполяционный полином Лагранжа степен $(n-1)$, взяв вместо узлов интерполирования собственные значения матрицы $A : \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.
Тогда

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x).$$

Подставим в эту формулу A вместо x

$$f(A) = Q_{n-1}(A) + R_{n-1}(A).$$

$$R_{n-1}(A) = \frac{\omega(x)}{n!} f^(n)(\eta),$$

$\omega(A) = (A-\lambda_1 E)(A-\lambda_2 E)\ldots(A-\lambda_n E)$ - характеристический полином матрицы A.

По теореме 6: $\omega(A) = 0 \Rightarrow R_{n-1}(A) = 0$,

$$f(A) = Q_{n-1}(A) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) \frac{(A-\lambda_1 E)\ldots(A-\lambda_{k-1}E)(A-\lambda_{k+1}E)\ldots(A-\lambda_n E)}{()\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})\ldots(\lambda_k-\lambda_n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) S_k(A, \lambda_k), \quad S_k(A,\lambda_k) \text{ - матричный множитель.} \quad \square$$

2 Некоторые свойства матричной экспоненты

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots + \frac{A^kt^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \qquad (1)$$

Ряд Тейлора

1.

$$\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A}$$

Доказательство.

$$\frac{d}{dt}e^{At} = [\text{по формуле (1)}] = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^{k-1}}{(k-1)!} =$$
$$= A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{At} = [\text{по теореме 4}] = e^{At}A. \quad \square$$

2.

$$\boxed{\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}}$$

Доказательство.

$$e^{At}e^{-At} = (E + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots)(E - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \dots) =$$
$$= E - \cancel{At} + \cancel{\frac{A^2t^2}{2!}} - \dots + \cancel{At} - \cancel{A^2t^2} + \cancel{\frac{A^3t^3}{2!}} - \dots +$$
$$+ \cancel{\frac{A^2t^2}{2!}} - \cancel{\frac{A^3t^3}{2!}} + \cancel{\frac{A^4t^4}{4}} - \dots = E. \quad \square$$

3.

$$\boxed{e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}}$$

Доказательство.

$$e^Ae^B = (E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots)(E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots) =$$
$$= E + A + B + \underbrace{\frac{A^2}{2!} + AB + \frac{B^2}{2!}} + \dots$$

$$e^{A+B} = (E + A + B + \frac{(A+B)^2}{2!} + \dots) =$$
$$= (E + A + B + \underbrace{\frac{A^2}{2!} + \frac{AB+BA}{2!} + \frac{B^2}{2!}} + \dots) \quad \square$$

Для того, чтобы $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, матрицы A и B должны коммутировать.

4.

$$\boxed{e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}}$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущими результатами.

$$\begin{aligned}
e^{At}e^{Aq} &= E + At + Aq + \frac{A^2t^2}{2!} + AtAq + \frac{A^2q^2}{2!} + \dots = \\
&= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots \\
e^{A(t+q)} &= E + At + Aq + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots = \\
&= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots
\end{aligned}$$

Здесь никаких проблем с коммутативностью матриц нет, поэтому доказательство очевидно. □