

22. Методы бисекции, секущих, обратной
параболической интерполяции для решения
нелинейных уравнений. Подпрограмма ZEROIN

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 16, 2020

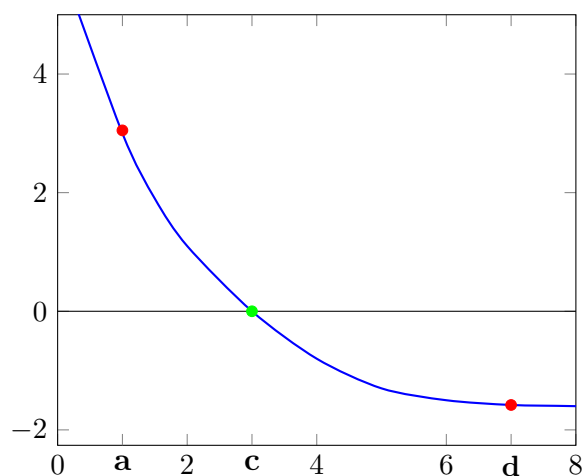
1 Решение нелинейных уравнений

Остановимся на уравнении

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Решению уравнения (1) предшествует подготовительный этап выявления промежутка $[a, b]$, на котором только один 0 и $f(a)f(b) < 0$. Так будет найден единственный вещественный корень уравнения.

1.1 Метод бисекции (или метод *дихотомии*, или метод *половинного деления*)



Вычисляем значение функции в точке

$$c = \frac{a + b}{2}$$

и вычисляем $f(c)$. Если $\text{sign}(f(a)) = \text{sign}(f(c))$, то "отбрасываем" эту половину, иначе "отбрасываем" вторую половину. Далее рекурсия...

За одно вычисление $f(x)$ на шаге промежуток гарантированно сокращается *в два раза* независимо от вида функции. Если поведение функции хорошо прогнозируется и она имеет простой вид, то ответ можно получить и быстрее.

1.2 Метод секущих

По двум точкам строим интерполяционный полином Лагранжа первой степени и очередное приближение - 0 этого полинома

$$Q_1(x) = \frac{x - b}{a - b} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b),$$
$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Метод секущих с разделенной разностью выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Новый промежуток будет $[c, b]$ или $[a, c]$ в зависимости от знака $f(x)$ в точке c . Замедление сходимости метода часто происходит, когда очередное приближение получается слишком близко к одному из концов промежутка.

1.3 Метод обратной параболической интерполяции

Если функция вычислена более, чем в двух точках, то эту информацию тоже можно использовать.

По трем точкам x_k, x_{k-1}, x_{k-2} строится интерполяционный полином второй степени для *обратной* функции, при этом выполняются условия $x_i = g(f_i)$, $i = k, k-1, k-2$. В качестве следующего приближения берется $x_{k+1} = g(0)$. Одна из предыдущих точек удаляется.

Важно, чтобы три значения f_i были бы различными, чтобы избежать деления на 0 (см. формулы "Метода секущих").

2 Подпрограмма ZEROIN

Всегда работает хорошо.

$$\underbrace{ZEROIN}_{function}(A, B, \underbrace{F}_{f(x)}, EPS).$$

Внутри программы два алгоритма:

- метод обратной параболической интерполяции (основной),
- метод бисекции (используется на несколько шагов, если основной метод замедляется).