

27. Глобальная погрешность. Устойчивость
метода. Ограничение на шаг. Явление
жёсткости и методы решения жёстких систем

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 14, 2020

1 Устойчивость метода и ограничение на шаг

Для обеспечения малой величины глобальной погрешности необходимо обеспечить не только малую локальную погрешность, но и **устойчивость метода**.

Устойчивость методов будем анализировать на примере тестовой системы - линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей. Нелинейная система в малой окрестности какой-то точки может быть хорошо аппроксимирована линейной системой, и если метод плохой для линейной системы, то и в общем случае он плохой.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1) \quad x_{n+1} = Bx_n$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2) \quad |\lambda_k(B)| < 1$$
$$\Re(\lambda_k) < 0$$

Пусть λ_k матрицы A лежат в левой полуплоскости, тогда решение системы (2) будет *асимптотически устойчивым*. Для качественного соответствия точного и приближённого решения необходимо, чтобы решение разностного уравнения численного метода также было асимптотически устойчиво.

Обратимся к явному методу ломаных Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + hAx_n = (E + hA)x_n \quad (3)$$

Чтобы x_n было асимптотически устойчивым, необходимо, чтобы $|\lambda_k(E + hA)| < 1$. Если у матрицы A - собственные значения λ_k , то у матрицы $E + hA$ собственные значения $1 + h\lambda_k$.

Условие принимает вид $|1 + h\lambda_k| < 1$.

a) $\lambda_k \in \mathbb{R}, \lambda_k < 0$

$$-1 < 1 + h\lambda_k < 1$$

Правое неравенство соблюдается всегда, а левое:

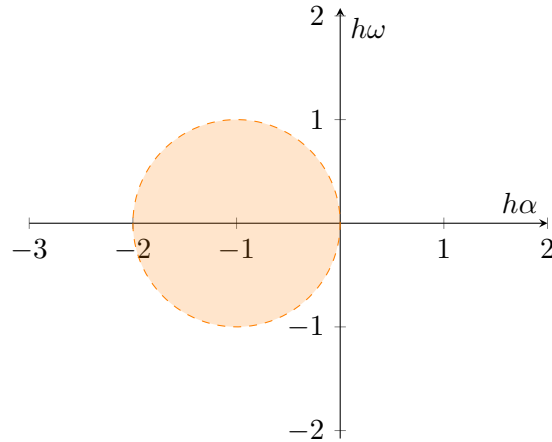
$$-h\lambda_k < 2 \Leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda_k|_{max}} \quad (4)$$

Т.к. $|\lambda_k| \leq \|A\|$, то на практике часто используют достаточное условие устойчивости

$$h < \frac{2}{\|A\|} \quad (4^*)$$

б) $\lambda_k = \alpha + i\omega, \alpha < 0$

$$\begin{aligned} |1 + h\lambda_k| &< 1 \\ |1 + h\alpha + ih\omega| &< 1 \\ (1 + h\alpha)^2 + h^2\omega^2 &< 1 \end{aligned} \quad (5)$$



Множество значений $h\lambda$, удовлетворяющее условию устойчивости, называется *областью устойчивости* данного метода.

Является ли ограничение на шаг (4) обременительным на практике?

Пример 1. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$e^{-3} < 0.05$$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$$e^{-5} < 0.01$$

Будем строить график на промежутке $t \in [0; T]$, $T = 3$. Формула (4) даёт $h < 1$.

$$\begin{aligned} h &= 0.1 - 0.5 \\ \text{П. } h &= 0.1 \end{aligned}$$

Вывод: условие (4) проблем не создаёт.

Пример 2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20000$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2 \cdot 10^4 t}$$

t определяется самой "медленной" экспонентой. Будем строить график на промежутке $t \in [0; T]$, $T = 3$. Формула (4) даёт $h < 10^{-4}$.

Описанная ситуация будет проявляться тем острее, чем больше разброс между собственными значениями матрицы. На практике $T \sim \frac{1}{|\lambda_{k|min}|}$,

$h < \frac{1}{|\lambda_{k|max}|}$. Тогда число шагов $= \frac{T}{h} \sim \frac{|\lambda_{k|max}|}{|\lambda_{k|min}|} \gg 1$ пропорционально числу обусловленности матрицы. Чем хуже матрица обусловлена, тем

больше шагов.

Такие системы дифференциальных уравнений с плохо обусловленной матрицей получили название **жесткие системы** дифференциальных уравнений.

2 Жесткие системы и их решение

Для решений жестких систем характерны два участка:

1. Участок малой продолжительности ($\tau_{\text{нс}}$) называется *пограничным слоем*. На нём решение меняется очень быстро и обладает большими производными.
2. На остальной части промежутка (T) решение меняется относительно медленно: $\tau_{\text{нс}} \ll T$

Рассмотрим метод Эйлера-Коши:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^* &= x_n + hf(t_n, x_n) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}^*)) \\ &= x_n + \frac{h}{2}(Ax_n + A(x_n + hAx_n)) \\ &= (E + hA + \frac{h^2 A^2}{2})x_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \lambda_k(E + hA + \frac{h^2 A^2}{2}) \right| &< 1 \\ \left| 1 + h\lambda_k + \frac{h^2 \lambda_k^2}{2} \right| &< 1 \end{aligned}$$

Ограничимся случаем, когда λ_k вещественны.

$$-1 < 1 + h\lambda_k + \frac{h^2 \lambda_k^2}{2} < 1$$

Левое неравенство выполняется всегда,¹ а правое:

$$\begin{aligned} h\lambda_k + \frac{h^2 \lambda_k^2}{2} &< 0 \\ 1 + \frac{h\lambda_k}{2} &> 0 \Leftrightarrow h < \frac{2}{\lambda_k} \end{aligned}$$

¹ $h\lambda_k$ всегда отрицательно, после преобразований можно получить выражение $-4 - 2h\lambda_k < (h\lambda_k)^2$, что при любых значениях h верно.

Выходит то же самое, что и в (4), хоть и будут различия, при переходе в \mathbb{C} .

Аналогичные ограничения имеют все явные методы Рунге-Кутты и Адамса:

$$RK2 \rightarrow h|\lambda_k| < 2$$

$$RK4 \rightarrow h|\lambda_k| < 2.785 \dots$$

$$Adams2 \rightarrow h|\lambda_k| < 1$$

$$Adams4 \rightarrow h|\lambda_k| < 0.3$$

Для решения жёстких систем хотелось бы применять методы, область устойчивости которых включала бы в себя всю или почти всю левую полуплоскость.

Рассмотрим неявный метод ломаных Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + hAx_{n+1}$$

$$(E - hA)x_{n+1} = x_n$$

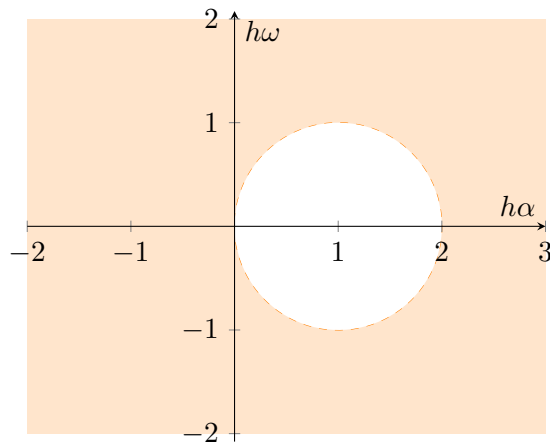
$$x_{n+1} = (E - hA)^{-1}x_n$$

Пусть $\lambda_k = \alpha + i\omega$.

$$|\lambda_k(E - hA)^{-1}| < 1, \quad \frac{1}{|1 - h\lambda_k|} < 1$$

$$|1 - h\lambda_k| > 1$$

$$|1 - h\alpha - ih\omega| > 1, \quad (1 - h\alpha)^2 + h^2\omega^2 > 1$$



Для $\lambda_k < 0$ ограничение по устойчивости отсутствует, и он может выбираться только из соображений точности. Большой объём вычислений на шаге

по сравнению с явным методом для жёстких систем с лихвой окупается выигрышем в величине шага.

Рассмотрим неявный метод трапеций:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) = x_n + \frac{h}{2}(Ax_n + Ax_{n+1})$$

$$\begin{aligned} \left(E - \frac{hA}{2}\right)x_{n+1} &= \left(E + \frac{hA}{2}\right)x_n \\ x_{n+1} &= \left(E - \frac{hA}{2}\right)^{-1} \left(E + \frac{hA}{2}\right)x_n \end{aligned}$$

Пусть $\lambda_k = \alpha + i\omega$.

$$\begin{aligned} \left| \lambda_k \left(\left(E - \frac{hA}{2}\right)^{-1} \left(E + \frac{hA}{2}\right) \right) \right| &< 1 \\ \left| \frac{1 + \frac{h\lambda_k}{2}}{1 - \frac{h\lambda_k}{2}} \right| &< 1, \quad \left| 1 + \frac{h\lambda_k}{2} \right| < \left| 1 - \frac{h\lambda_k}{2} \right| \\ \left| 1 + \frac{h\alpha}{2} + \frac{ih\omega}{2} \right| &< \left| 1 - \frac{h\alpha}{2} - \frac{ih\omega}{2} \right| \\ \left(1 + \frac{h\alpha}{2}\right)^2 + \frac{h^2\omega^2}{4} &< \left(1 - \frac{h\alpha}{2}\right)^2 + \frac{h^2\omega^2}{4} \\ \underline{1} + h\alpha + \frac{h^2\alpha^2}{4} &< \underline{1} - h\alpha + \frac{h^2\alpha^2}{4} \\ 2h\alpha &< 0 \\ h\alpha &< 0 \end{aligned}$$

Область устойчивости метода трапеций в точности равна левой полуплоскости.

Методы, пригодные для решения жёстких систем, как правило, являются неявными.