05. Аппроксимация функций. Задача интерполирования.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 5, 2020

1 Введение в аппроксимацию

Исходная функция чаще всего записывается в следующем виде:

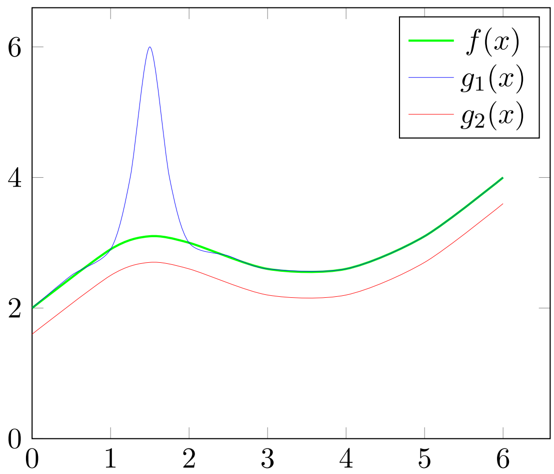
1. Аналитически
2. Графически
3. Таблично
4. Алгоритмически

Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой с точки зрения решаемой задачи.

Для сравнения различных аппроксимирующих функций вводится критерий близости:
Пусть $f(x)$ - исходная функция, $g(x)$ - её аппроксимация.

1. $\boxed{(\delta = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \to \min)}$ **минимаксный критерий**.
2. $\boxed{(\rho^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \to \min)}$ **среднеквадратичный критерий**.
   Если функция задана таблично, то есть дискретный аналог среднеквадратичного критерия: $(\rho^2 = \underline{\sum_{k=1}^{n}}(f(x_k) - g(x_k))^2 \to \min)$

1.1 Сравнение критериев



Функция $g_1(x)$ лучше аппроксимирует по критерию 2, а $g_2(x)$ - по критерию 1.

На практике лучше та аппроксимация, которая нужна для конкретной задачи.

2 Основы интерполирования функций

Будем приближать исходную функцию, заданную таблично.

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\cdots$	$\cdots$
x_m	$f(x_m)$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi_k(x) \tag{1}$$

Аппроксимирующая функция (1) - обобщённый многочлен, где $\phi_k(x)$ - заданный набор линейно независимых функций, a_k подлежат определению.

Потребуем, чтобы во всех узлах таблицы *аппроксимирующая и исходная функции совпадали.*

$$Q_m(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, m \tag{2}$$

Если эти условия выполняются, то $Q_m(x)$ - интерполяционный многочлен, а x_k - узлы интерполирования.

Система (2) - это линейная система из $m+1$ уравнения относительно $m+1$ неизвестных a_k.
Если определитель этой системы не равен 0, то задача всегда имеет единственное решение.

Самая популярная интерполяция - интер-ия полиномом - $\varphi_k(x) = x^k$. При такой интерполяции определитель системы 2 приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} \tag{3}$$

Определитель (3) - **определитель Вандермонда**, не равный 0.

*По **n** точкам однозначно строится интер-ый полином **(n-1)**й степени.*