06. Интерполяционный полином Лагранжа. Остаточный член полинома Лагранжа.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 2, 2020

1 Интерполяционный полином Лагранжа

$$Q_m(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, m \tag{1}$$

Построить интерполяционный полином можно и в явном виде, не решая систему (1).

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m)$$

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} = (x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_m)$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0} m \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k) \tag{2}$$

Уравнение 2 - интерполяционный полином (в форме) Лагранжа.
По построению очевидно, что $Q_m(x)$ - полином степени m.

$$Q_m(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)}{\omega_i(x_i)} f(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, m$$

$\omega_k(x_i) = 0$, если $k \neq i$

1.1 Алгоритм построения полинома Лагранжа

1. Числитель с пропущенной точкой

2. Знаменатель - числитель, где вместо x подставляем пропущенную точку

3. Значение функции в пропущенной точке

Пример для полинома Q_2:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

$$Q_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$Q_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

2 Остаточный член интерполяционного полинома Лагранжа

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x)$$

$R_m(x)$ - остаточный член интерполяционного полинома, или погрешность интерполяционного полинома.

$$\varphi(z) = f(z) - Q_m(z) - k\omega(z)^{(*)}$$

Пусть x - точка в которой оценивается погрешность, не совпадающая с узлами интерполирования.

$(*) x_0, x_1, \dots, x_m$ - узлы; k - некоторый параметр.

$$\varphi(x_i) = 0,\ i = 0, 1, \dots, m$$

Выберем k таким образом, чтобы $\varphi(z)$ была равна 0.

$$\varphi(x) = 0 \Rightarrow k \frac{f(x) - Q_m(x)}{\omega(x)}$$

Таким образом, $\varphi(z)$ имеет по меньшей мере $m+2$ нуля: $x_0, x_1, \dots, x_m, x$.

$$\begin{gathered} \varphi^{'}(z) \to m+1 \\ \varphi^{''}(z) \to m \\ \dots \\ \varphi^{(m+1)}(z) \to 1 \Rightarrow \varphi^{(m+1)}(\eta) = 0 \end{gathered}$$

Продифференцируем φ $m+1$ раз и подставим η:

$$0 = \varphi^{(m+1)}(\eta) = f^{(m+1)}(\eta) - 0 - k * (m+1)! \Rightarrow k = \frac{f^{(m+1)}(\eta)}{(m+1)!}$$

Подставляем выражение для k:

$$f(x) = Q_m(x) + \frac{\omega(x)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\eta)$$

Точка η зависит от вида функции f, выбора узлов интерполирования и от точки, в которой оценивается погрешность.