08. Сплайн-интерполяция. Подпрограммы **SPLINE** и **SEVAL**. Интерполирование по Эрмиту. Обратная задача интерполирования.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 4, 2020

На практике интерполяционные полиномы высоких степеней строят редко, т.к. они очень чувствительны к погрешности в исходных данных.
В таких случаях возможно *разбиение исходного промежутка на ряд участков*, на каждом из которых строится полином относительно невысокой степени.
На практике так поступают часто, однако в ряде приложений требуется дифференцируемость функции, а она отсутствует в точках сопряжения соседних полиномов. Решить проблему позволяет *сплайн-интерполяция*.

1 Сплайн-интерполяция

Имеется N точек и $N-1$ промежутков:

$$[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{N-1}, x_N]$$

На каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ строится интерполяционный полином третьей степени:

$$[x_k, x_{k+1}] \to S_k(x) = \overbrace{a_k}^{=f_k} + b_k(x-x_k) + c_k(x-x_k)^2 + d_k(x-x_k)^3$$

Возникшая степень свободы используется для гладкого сопряжения соседних полиномов

Итак, имеем $\underline{4 \times (N-1) = 4N-4}$ <u>параметра</u>.

Потребуем, чтобы во всех *внутренних точках* совпадали соседние полиномы, их первые и вторые производные - это и будет условием гладкого сопряжения.

$$\begin{cases} S_k(x_{k+1}) = S_{k+1}(x_{k+1}) \\ S_k^{'}(x_{k+1}) = S_{k+1}^{'}(x_{k+1}) \\ S_k^{''}x_{k+1} = S_{k+1}^{''}(x_{k+1}) \end{cases}, k = 1, 2, \ldots, N-2$$

Выходит $3 \times (N-2) = 3N-6$ условий, $+N$ условий интерполирования (совпадение полиномов и их функции в узлах) $\underline{= 4N-6}$ <u>условий</u>.

N уравнений отражают
требование интер-ния: $S_k(x_k) = f_k$
$k = 1, 2, ..., N-1$ (по N точкам $N-1$ ст.)
Обратим внимание: $S_{N-1}(x_N) = f_N$

<u>Недостающие два</u> уравнения чаще всего задаются на концах промежутка в точках x_1 и x_N. Эти уравнения должны удовлетворять двум условиям одновременно:

1. Возникшая система уравнений должна как можно проще решаться.

2. Эти уравнения должны быть согласованы с характером поведения функции на концах промежутка.

В предлагаемом ПО строится интерполяционный полином третьей степени $Q_3(x)$ по первым четырём точкам и приравнивается:

$$S_1^{'''}(x_1) = Q_3^{'''}(x_1) \Rightarrow 6d_1 = const \text{ (дифференцировали)}$$

$d_1(x-x_k)^3$,
$3d_1(x-x_k)^2$,
$6d_1(x-x_k)$,
$6d_1 = \text{const}$

Аналогично, по последним четырём точкам строится полином $\widetilde{Q}_3(x)$ и приравнивается:

$$S_{N-1}^{'''}(x_N) = \widetilde{Q}_3^{'''}(x_N)$$

2 Программное обеспечение

ПО состоит из двух программ:

2.1 SPLINE

$$SPLINE(\underbrace{N}_{\text{Кол-во точек}}, \underbrace{X_K}_{\text{Вектор с узлами}}, \underbrace{F_K}_{\text{Вектор с знач.}}, \underbrace{B, C, D}_{\textbf{Выходные параметры } b_k, c_k, d_k})$$

Решает систему уравнений относительно коэффициентов полиномов.

2.2 SEVAL

$$\underbrace{SEVAL}_{\textbf{function}}(N, X, X_K, F_K, \underbrace{B, C, D}_{\text{Получены из SPLINE}})$$

Вычисляет значение сплайна в некоторой точке $X, X \in [x_k, x_{k+1}]$.
$S_k(x_k) = a_k = f_k$ (поэтому ищем только b, c, d).
Программа изначально определяет промежуток, на котором находится X, а потом высчитывает полином. Номер полинома находится двоичным поиском.

3 Интерполирование по Эрмиту

Так называется задача интерполирования, когда в таблице кроме значений функции присутствуют еще и производные.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x_0	f_0	f_0'	
x_1	f_1	f_1'	f_1''
x_2	f_2		

$$\begin{cases} H(x_k) = f_k,\ k = 0, 1, 2 \\ H'(x_k) = f_k',\ k = 0, 1 \\ H''(x_k) = f_k'',\ k = 1 \end{cases}$$

Степень полинома Эрмита равна общему количеству условий -1. Аналогично полиному Лагранжа можно записать полином Эрмита в готовом виде, не решая систему уравнений. Наиболее простой вид он имеет, когда количество условий во всех узлах одинаково.

3.1 Пример

Рассмотрим разложение функции в степенной ряд Тейлора в точке x_0:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f^{'}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f^{''}(x_0)}_{P_2(x)} + \dots$$

Первые три слагаемых - частная сумма ряда Тейлора в x_0.

$$\begin{cases} P_2(x_0) = f(x_0) \\ P_2^{'}(x_0) = f^{'}(x_0) \\ P_2^{''}(x_0) = f^{''}(x_0) \end{cases}$$

Так как полином $P(x)$ удовлетворяет условиям выше, то частная сумма ряда Тейлора - частный случай полинома Эрмита с одним узлом интерполирования.

4 Обратная задача интерполирования

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\dots$	$\dots$
x_m	$f(x_m)$

$x^* \Rightarrow f(x^*) = ?$ прямая задача интерполирования

$f(x^*) = f^* \Rightarrow x^* = ?$ восстановить аргумент

I. *Строим интерполяционный полином*, приравниваем значение функции, ищем корни: $Q_m(x) = f^*$. Возникшее уравнение решается либо аналитически, либо приближённо численными методами.

II. *Меняем местами столбцы таблицы*, строим интерполяционный полином для обратной функции, и вычисляем значение этого полинома в точке f^* и находим x^*.
Ограничение: Для существования обратной функции, исходная должна быть строго монотонной. В противном случае делим на промежутки монотонности.