

01. Конечные разности и их свойства.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 3, 2020

1 Конечные разности

x	$f(x)$	$\Delta_h f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)$ $f_k \stackrel{\text{def}}{=} f(k)$ $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = f_{k+1} - f_k$
x_0	$f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	
\dots	\dots	
x_m	$f(x_m)$	

$$x_k = x_0 + k \times h$$

1.1 Свойства конечных разностей

1. $\Delta \alpha = \alpha - \alpha = 0$
2. $\Delta(\alpha \times f_k) = \alpha \Delta f_k$
3. $\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k$
4. $\Delta(f_k g_k) = f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \pm f_{k+1} g_k =$
 $= f_{k+1} \Delta g_k + g_k \Delta f_k = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$
5. $\Delta k^S = (k+1)^S - k^S = k^S + S k^{S-1} + \frac{S(S-1)}{2!} k^{S-2} + \dots - k^S =$
 $= \frac{S!}{1!(S-1)!} k^{S-1} + \frac{S!}{2!(S-2)!} k^{S-2} + \dots + \frac{S!}{(S-1)!1!} k + 1$

Конечная разность от полинома степени S это полином степени $S - 1$.

1.2 Таблица конечных разностей

1. $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k(a - 1)$
2. $\Delta \sin k = \sin(k+1) - \sin k = 2 \sin \frac{1}{2} \cos(k + \frac{1}{2})$
3. $\Delta \cos k = \cos(k+1) - \cos k = -2 \sin \frac{1}{2} \sin(k + \frac{1}{2})$

2 Разделённые разности

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Аналогично производным высших порядков вводятся разделённые разности:

$$\begin{aligned} f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) &= \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} \\ &\dots \\ f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) &= \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+s}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s-1})}{x_{k+s} - x_k} \end{aligned}$$

Аналогично вводятся конечные разности высших порядков:

$$\begin{aligned} \Delta f_k &= f_{k+1} - f_k \\ \Delta^2 f_k &= \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k \\ \Delta^3 f_k &= \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k \\ &\dots \end{aligned}$$

Если узлы таблицы равноотстоящие, то можно использовать и конечные, и разделённые разности.

2.1 Связь между конечными и разделёнными разностями для равноотстоящих узлов

$$\begin{aligned} f(x_k; x_{k+1}) &= \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h} \\ f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) &= \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2} \end{aligned}$$

По индукции легко показать, что:

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{\Delta^s f_k}{s! \times h^s}$$

3 Суммирование функций

$$\Delta F(k) = \varphi(k) \quad (1)$$

$$\Delta F(k) = \varphi(k)$$

$$\begin{cases} F_1 - F_0 = \varphi_0 \\ F_2 - F_1 = \varphi_1 \\ \dots \\ F_{n+1} - F_n = \varphi_n \end{cases} \Leftrightarrow F_{n+1} - F_0 = \sum_{k=0}^n \varphi_k \quad (2)$$

По $\varphi(k)$
ищем $F(k)$

Уравнение (2) является дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница.

3.1 Формула Абеля суммирования по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b u dv &= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ \int_a^b \left| \frac{d}{dx} (U(x)v(x)) \right| &= u(x)v(x) + U(x) \frac{dv(x)}{dx} \\ \int_a^b u(x)v(x) dx &= U(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b U(x) \frac{dv}{dx} dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \left| \Delta(U_k v_k) \right| &= [u_{k+1} v_{k+1}]^{(*)} + U_k \Delta v_k \\ \sum_{k=m}^n u_{k+1} v_{k+1} &= U_k v_k \Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^n U_k \Delta v_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \\ \Delta(f_k g_k) &= f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k \\ \Delta(f_k) &= f_{k+1} - f_k \\ \Delta U(k) &= \sum_{i=0}^{k+1} u(i) - \\ &\quad - \sum_{i=0}^k u(i) = u(k+1) \end{aligned}$$

(4)

Формула (4) - формула Абеля суммирования по частям.

3.2 Примеры

$$\sum_{k=0}^N k a^k$$

Будем использовать формулу Абеля суммирования по частям:

$$\sum_{k=m}^n u_{k+1} v_{k+1} = U_k v_k \Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^n U_k \Delta v_k$$

Но, чтобы произвести замену, нам нужно сдвинуть индекс $k + 1$ на единицу, то есть

$$v_k = k - 1 u_k = a^{k-1}$$

Тогда получим U_k

$$\begin{aligned}
 U_k &= \sum_{i=0}^k a^{i-1} = \frac{1}{a} \times \left[\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \right]^{(*)} \\
 \sum_{k=0}^N k a^k &= \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} (k - 1) \Big|_0^{N+1} - \left[\sum_{k=0}^N N \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \right]^{(**)} = \\
 &= \frac{1}{a} \frac{a^{N+2} - 1}{a - 1} N + \frac{1}{a} - \frac{1}{a - 1} \sum_{k=0}^N a^k + \frac{N + 1}{a(a - 1)} = \\
 &= \frac{N a^{N+2} - N a^{N+1} - a^{N+1} + a}{(a - 1)^2} = \frac{N a^{N+1}}{a - 1} - \frac{a^{N+1} - a}{(a - 1)^2}
 \end{aligned}$$

(*)Формула
геометрической
прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n * q - 1}{q - 1}$$

(**)Расписали
сумму:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^N N \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} &= \\
 &= \sum_{k=0}^N a^k + \sum_{k=0}^N \frac{1}{a(a - 1)}
 \end{aligned}$$