

## 21. Метод последовательных приближений для решения линейных систем

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 10, 2020

Методы последовательных приближений (*итерационные* методы) дают возможность для системы  $Ax = b$  строить последовательность векторов  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ , пределом которой должно быть точное решение  $x^*$ :

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

$$Ax = b, \quad \det(A) \neq 0. \quad (1)$$

Эквивалентными преобразованиями система (1) сводится к виду

$$x = Cx + d. \quad (2)$$

Точное решение системы (2) имеет вид:

$$x^* = (E - C)^{-1}d, \quad (3)$$

$$x^* = x_n + \varepsilon_n.$$

Вместо системы (2) будем решать систему разностных уравнений

$$x_{n+1} = Cx_n + d \quad (4)$$

пошаговым методом, при  $x_n \rightarrow x^* (n \rightarrow \infty)$ .

Система (4) имеет вид системы линейных разностных уравнений (вопрос "18. Решение систем..."), поэтому ее решение записывается в виде

$$x_n = C^n x_0 + (E - C^n)(E - C)^{-1}d. \quad (5)$$

Из (3) вычитаем (5)

$$\begin{aligned} x^* - x_n = \varepsilon_n &= -C^n x_0 + C^n \underbrace{(E - C)^{-1}d}_{x^*} \\ &= C^n (x^* - x_0) = C^n \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Для обеспечения условия сходимости для точного решения ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ) необходимо, чтобы элементы матрицы  $C^n$  при  $n \rightarrow \infty$  стремились бы к 0. Для этого необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы  $C^n$  были по модулю меньше единицы.

Если все собственные значения матрицы различны, то по *теореме 7*:

$$C^n = \sum_{k=1}^N T_k \lambda_k^n,$$

Условие сходимости:

$$|\lambda_k| < 1, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Из следствия 2 к теореме 5

$$|\lambda_k| \leq \|C\|,$$

поэтому на практике вместо необходимого и достаточного условия (6) используют достаточное условие

$$\|C\| < 1. \quad (7)$$

Процесс сходится тем быстрее, чем меньше  $\lambda_k$ . Выбор  $x_0$  не влияет на факт сходимости, но его удачный выбор сокращает количество итераций.

Искусство пользователя заключается в том, чтобы перейти от системы (1) к системе (2) так, чтобы выполнялись условия (6) и (7).

Универсального алгоритма малой трудоемкости нет, поэтому используют различные приемы для конкретного вида матриц.

*Пример.*

$$Ax = b, \quad (1)$$

Пусть диагональные элементы матрицы  $A$  по модулю значительно превышают остальные элементы соответствующих строк.

Разделим каждое уравнение на диагональные элементы

$$\begin{aligned} A^*x &= b^*, \\ x &= \underbrace{(E - A^*)}_C x + b^*. \end{aligned} \quad (1^*)$$

$\|C\| \ll 1$ , потому что на главной диагонали матрицы  $A^*$  стоят единицы, а у матрицы  $(E - A^*)$  расположены нули. Вне главной диагонали у обеих матриц находятся малые по модулю элементы, что вместе и обеспечивает условия (6) и (7).