09. Квадратурные формулы левых, правых, и средних прямоугольников, трапеций, Симпсона. Малые и составные формулы, их остаточные члены.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 4, 2020

1 Квадратурные формулы

Так называются формулы для вичисления определённых интегралов.

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

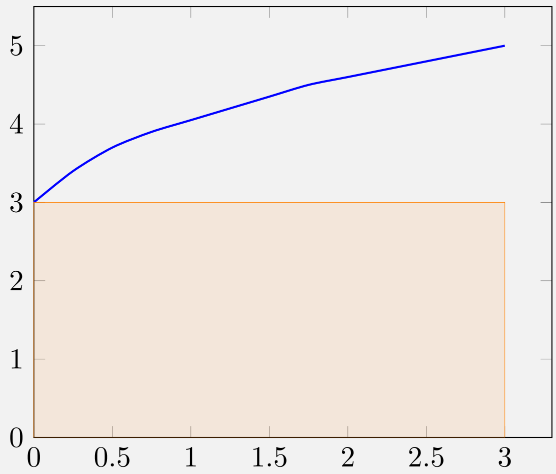
$$I \approx \int_a^b f(x_0)\ dx = (b-a)f(x_0)$$

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b Q_m(x)\ dx$$

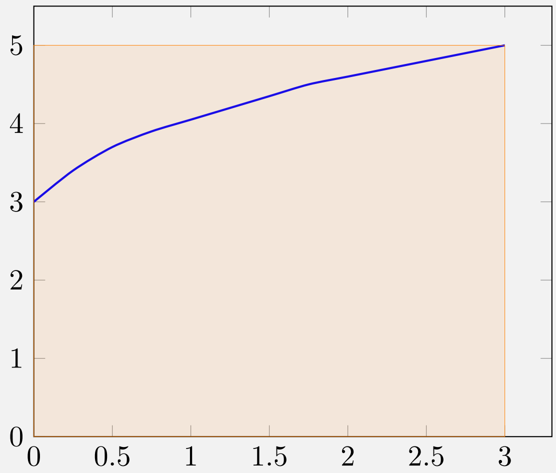
$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x)\ dx$$

$$x_0 = a \Rightarrow I \approx (b-a)f(a) \tag{1}$$



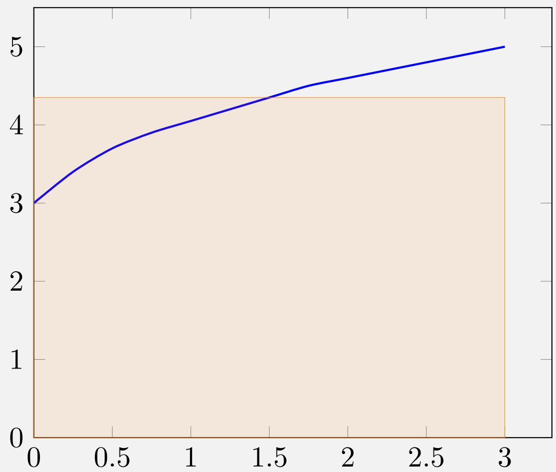
Квадратурная формула левых прямоугольников.

$$x_0 = b \Rightarrow I \approx (b-a)f(b) \tag{2}$$



Квадратурная формула правых прямоугольников.

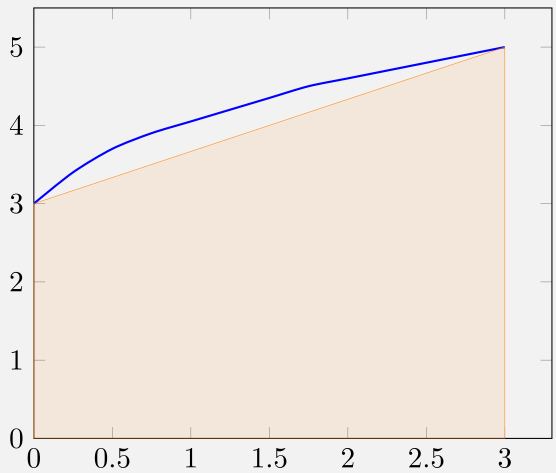
$$x_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow I \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{3}$$



Квадратурная формула средних прямоугольников.

$$Q_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

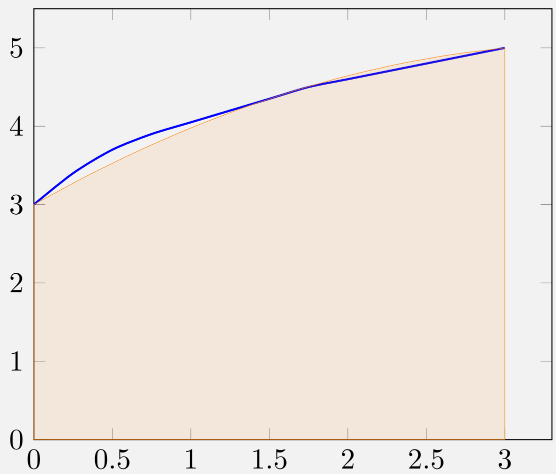
$$I \approx \int_a^b Q_1(x)\,dx = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \tag{4}$$



Квадратурная формула трапеций.

$$Q_2(x); x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$$

$$I \approx \int_a^b Q_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) \tag{5}$$



Метод параболы или квадратурная формула Симпсона.

Для повышения точности исходный промежуток разбивается на участки, на каждом из них применяется какая-то квадратурная формула, а результаты складываются. Эти квадратурные формулы получили название

2 Составные квадратурные формулы

Разобьём исходный промежуток на m участков одинаковой длины: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_{N-1}, x_N]*$ На каждом участке вычисляем (*) интеграл:

$$x_k = x_0 + k\frac{b-a}{N}$$

$$x_0 = a, x_N = b$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{N}$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{N} f(x_k)$$

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) \qquad (1^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} f(x_k) \qquad (2^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k + \frac{b-a}{2N}) \qquad (3^*)$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{2N} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

$$I \approx \frac{b-a}{2N} \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \qquad (4^*)$$

В формуле Симпсона выберем N чётных. Количество промежутков будет $N/2$, каждый промежуток будет вдвое большей длины.

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{3N} (f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}))$$

$$\begin{aligned} I \approx \frac{b-a}{3N} &(f(a) + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{N-1}) \\ &+ 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{N-2}) + f(b)) \qquad (5^*) \end{aligned}$$

3 Погрешности квадратурных формул

Теорема о 'средней' точке:

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = g(c)\int_a^b f(x)\ dx, c \in [a, b]$$

Чтобы теорема работала, функция, стоящая под знаком интеграла, должна быть знакопостоянна. Теорема о 'средней' точке-2:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1} N f(x_k) = f(\eta)$$

3.1 Погрешности несоставных формул

$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x)\ dx$$

Погрешность равна интегралу от остаточного члена интерполяционного полинома.

$$R_0(x) = \frac{x-a}{1!}f^{'}(\eta)$$

$$\varepsilon_{\text{л.пр.}} = \int_a^b \frac{x-a}{1!}f^{'}(\eta)\ dx = \int_a^b (x-a)\ dx\ f^{'}(\eta^*) = \frac{(b-a)^2}{2}f^{'}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}} = \int_a^b \frac{x-b}{1!}f^{'}(\eta)\ dx = -\frac{(b-a)^2}{2}f^{'}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{трап.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!}f^{''}(\eta)\ dx = -\frac{(b-a)^2}{12}f^{''}(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{x-\frac{a+b}{2}}{1!}f^{'}(\eta)\ dx$$

Теорема о 'среднем' здесь не работает, используется другой способ. Рассмотрим разложение функции в степенной ряд Тейлора до ^{2} в точке $\frac{a+b}{2}$:

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{x-\frac{a+b}{2}}{1!}f^{'}(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x-\frac{a+b}{2})}{2!}f^{''}(\eta)$$

Проинтегрируем слева и справа на $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \mathbf{0} + \underbrace{\int_a^b \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2!}f^{''}(\eta)\ dx}_{\varepsilon_{\text{ср.пр.}}}$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{(x-\frac{a+b}{2})^2}{2!}f^{''}(\eta)\ dx = \frac{(b-a)^3}{24}f^{''}(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{3!} f'''(\eta)\, dx$$

Теорема о 'среднем' не работает, погрешность выводится по другому.

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f''''(\eta^*)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\text{л.пр.}} &= \frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*) \\
\varepsilon_{\text{пр.пр.}} &= -\frac{(b-a)^2}{2} f'(\eta^*) \\
\varepsilon_{\text{трап.}} &= -\frac{(b-a)^2}{12} f''(\eta^*) \\
\varepsilon_{\text{ср.пр.}} &= \frac{(b-a)^3}{24} f''(\eta^*) \\
\varepsilon_{\text{симп.}} &= -\frac{(b-a)^5}{2880} f''''(\eta^*)
\end{aligned}$$

3.2 Погрешности составных формул

Погрешность составной формулы равна сумме погрешностей, допущенных на отдельных участках.

$\boxed{\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{л.пр.}}:}$

$$[x_k, x_{k+1}] \to \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2} f'(\eta_k^*) = \frac{(b-a)^2}{2N^2} f'(\eta_k^*)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{л.пр.}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b-a)^2}{2N^2} f'(\eta_k^*) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2N} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f'(\eta_k^*) \qquad (1^{**}) \\
&= \frac{(b-a)^2}{2N} f'(\eta^{**})
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Аналогично:}}$

$$\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{пр.пр.}} = -\frac{(b-a)^2}{2N} f'(\eta^{**}) \qquad (2^{**})$$

$\boxed{\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{трап.}}:}$

$$[x_k, x_{k+1}] \to -\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12} f''(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^3} f''(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{трап.}} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f''(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f''(\eta^{**}) \qquad (3^{**})$$

$\boxed{\text{Аналогично:}}$

$$\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{ср.пр.}} = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f''(\eta^{**}) \qquad (4^{**})$$

$\boxed{\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{симп.}}:}$

$$[x_k, x_{k+2}] \to -\frac{(x_{k+2}-x_k)^5}{2880} f(4)(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{90N^5} f^{(4)}(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{симп.}} = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} \times \frac{1}{N/2} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} f^{(4)}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\eta^{**}) \qquad (5^{**})$$

Если продолжать увеличивать степень интерполяционного полинома, то погрешность составных формул имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \alpha \frac{(b-a)^{S+1}}{N^S} f^{(S)}(\eta), \alpha = const$$

На практике погрешность оценивается одним из следующих способов:

1. По формулам выше (используется крайне редко).
2. Наиболее популярный - вычисляют интеграл по какой-то квадратурной формуле для N и $2N$, результаты сравнивают. Если погрешность велика, N удваивается.
3. В тех случаях, когда увеличение N невозможно, сравнивают две разные квадратурные формулы с одним N.