15. Ортогонализация по Шмидту. Примеры ортогональных полиномов

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 8, 2020

Перейти от линейно независмой функции к ортогональной позволяет метод ортогонализации Грама-Шмидта.

1 Метод Ортогонализации Грамма-Шмидта

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x) \qquad\qquad [a, b], p(x) > 0$$

Требуется построить новый набор функций $g(x)$, удовлетворяющий следующим условиям:

- функции ортогональны на промежутке $[a, b]$ с весом $p(x)$,
- функции являются линейной комбинацией $\varphi_k(x)$.

$\widetilde{g_k}$ - функция ортогональная, но не нормированная.
$g_k(x)$ строится так, чтобы она была ортогональна всем функциям $g_i(x)$, *построенным до нее.*

$$\widetilde{g_0}(x) = \varphi_0(x)$$

$$\int_a^b \underbrace{p(x)}_{>0} \underbrace{\widetilde{g_0}^2(x)}_{>0} \, dx = \alpha_0^2$$

$$\textit{нормируем} \Rightarrow g_0(x) = \frac{\widetilde{g_0}(x)}{\alpha_0} \text{ и дальше по индукции}$$

$$\widetilde{g_m}(x) = \varphi_m(x) - \sum_{k=0}^{m-1} C_{m,k} \times g_k(x) \quad \Big| g_i(x), p(x), \int_a^b$$

$C_{m,k}$ - коэффициенты, подлежащие определению,
$g_k(x)$ - функции, построенные до $\widetilde{g_m}(x)$
$[i = 0, 1, \ldots, m-1]$

$$0 = \int_a^b p(x)\widetilde{g_m}(x)g_i(x)dx = \int_a^b p(x)\varphi_m(x)g_i(x)\,dx - $$
$$- C_{m,i} \times \int_a^b p(x)g_i^2(x)\,dx$$

$$C_{m,i} = \frac{\int_a^b p(x)\varphi_m(x)g_i(x) \times dx}{\underbrace{\int_a^b p(x)g_i^2(x)\,dx}_{=1,\text{ т.к. } g_i(x) \text{ нормированы}}}$$

$$\int_a^b p(x)\widetilde{g_m}^2(x)\,dx = \alpha_m^2$$

$$g_m(x) = \frac{\widetilde{g_m}(x)}{\alpha_m} \text{ - \textit{нормируем.}}$$

2 Примеры ортогональных полиномов

Различные семейства ортогональных полиномов главным образом отличаются друг от друга весовой функцией $p(x)$.

Ортогональные полиномы строят для стандартного промежутка (чаще всего $[-1,1]$, $[0,1]$), а затем при необходимости переходят к произвольному промежутку $[a,b]$ при помощи замены переменных:

$$\boxed{x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \times t}$$

$$t \in [-1,1], x \in [a,b].$$

2.1 Ортогональные полиномы Лежандра

$$[-1,1], \quad p(x) \equiv 1$$

$$\boxed{L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!2^n} \times \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^n\right]}$$

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = x,\ L_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$

$L_n(x)$ ортогональны, но не нормированы.

Для полиномов Лежандра имеет место следующее рекурентное соотношение:

$$(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1)xL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0.$$

Разностное уравнение второго порядка относительно n

Нули полиномов Лежандра являются нулями (узлами) квадратурных формул Гаусса.

2.2 Ортогональные полиномы Чебышёва

$$[-1, 1],\ \ p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\boxed{T_n(x) = cos(n \times arccos(x))}$$
$$T_0(x) = 1,\, T_1(x) = 1,\, T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

Получим рекурентное соотношение для полиномов Чебышёва:

$$\varphi = arccos(x)$$
$$cos((n+1)\varphi) + cos((n-1)\varphi) = 2cos\varphi \times cos(n\varphi)$$
$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Разностное уравнение второго порядка относительно n