01. Конечные разности и их свойства.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

December 1, 2019

1 Конечные разности

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\cdots$	$\cdots$
x_m	$f(x_m)$

$$\Delta_h f(x_k) = f(x_{k+1} - f(x_k)) = f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)$$

$$f_k \overset{\text{def}}{=} f(k)$$

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = f_{k+1} - f_k$$

$x_k = x_0 + k \times h$

1.1 Свойства конечных разностей

1. $\Delta\alpha = \alpha - \alpha = 0$
2. $\Delta(\alpha \times f_k) = \alpha\Delta f_k$
3. $\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k$
4. $\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k \pm f_{k+1}g_k =$
   $= f_{k+1}\Delta g_k + g_k\Delta f_k = f_k\Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k$
5. $\Delta k^S = (k+1)^S - k^S = k^S + Sk^{S-1} + \frac{S(S-1)}{2!}k^{S-2} + \cdots - k^S =$
   $= \frac{S!}{1!(S-1)!}k^{S-1} + \frac{S!}{2!(S-2)!}k^{S-2} + \cdots + \frac{S!}{(S-1)!1!}k + 1$

   Конечная разность от полинома степени S это полином степени $S-1$.

1.2 Таблица конечных разностей

1. $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k(a-1)$
2. $\Delta \sin k = \sin(k+1) - \sin k = 2\sin\frac{1}{2}\cos(k+\frac{1}{2})$
3. $\Delta \cos k = \cos(k+1) - \cos k = -2\sin\frac{1}{2}\sin(k+\frac{1}{2})$

2 Разделённые разности

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Аналогично производным высших порядков вводятся разделённые разности:

$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$
$$\dots$$
$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+s}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s-1})}{x_{k+s} - x_k}$$

Аналогично вводятся конечные разности высших порядков:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$
$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$
$$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k$$
$$\dots$$

Если узлы таблицы равноотстоящие, то можно использовать и конечные, и разделённые разности.

2.1 Связь между конечными и разделенными разностями для равноотстоящих узлов

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$
$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2}$$

По индукции легко показать, что:

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{\Delta^s f_k}{s! \times h^s}$$

3 Суммирование функций

$$\Delta F(k) = \phi(k) \tag{1}$$

$$\begin{cases} F_1 - F_0 = \phi_0 \\ F_2 - F_1 = \phi_1 \\ \dots \\ F_{n+1} - F_n = \phi_n \end{cases} \Leftrightarrow F_{n+1} - F_0 = \sum_{k=0}^{n} \phi_k \tag{2}$$

Уравнение (2) является дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница.

3.1 Примеры

3.2 Формула Абеля суммирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\begin{gathered} \int_a^b \Bigg| \frac{d}{dx}(U(x)v(x)) = u(x)v(x) + U(x)\frac{dv(x)}{dx} \\ \int_a^b u(x)v(x)\,dx = U(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b U(x)\frac{dv}{dx}\,dx \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=m}^{n} \Bigg| \Delta(U_k v_k) = [u_{k+1}v_{k+1}]^{(*)} + U_k \Delta v_k \\ \sum_{k=m}^{n} u_{k+1}v_{k+1} = U_k v_k\Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^{n} U_k \Delta v_k \end{gathered} \tag{4}$$

(*)
$\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$
$\Delta(f_k) = f_{k+1} - f_k$
$\Delta U(k) = \sum_{i=0}^{k+1} u(i) -$
$- \sum_{i=0}^{k} u(i) = u(k+1)$

Формула (4) - формула Абеля суммирования по частям.