16. Обратная матрица, собственные числа и векторы. Задачи на матрицы. Норма матрицы, сходимость матричного степенного ряда, функции от матрицы

Андрей Бареков   Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 9, 2020

1 Элементы теории матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad det(A), \quad \underbrace{\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}}_{\text{норма матрицы}} \quad \text{определитель матрицы.}$$

1.1 Определения

- Транспонированная матрица $B = A^T$, $b_{ij} = a_{ji}$.
- $X = 0$ - нулевая матрица, все ее элементы равны 0.
- Матрица называется левый (нижний) треугольник, если все ее элементы *выше* главной диагонали равны 0.
- Соответственно - правый (верхний) треугольник, если элементы *ниже* главной диагонгали равны 0.
- Диагональная матрица - все элементы, кроме диагональных, равны 0: $D = diag(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{mn})$.
  Диагональная матрица называется *единичной*, если все диоагональные элементы равны 1
  $$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Операции

1. $C = A + B, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
2. $C = \alpha A, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}$, α - скаляр.
3. $C = AB$,
   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$
   $AB \neq BA$, если же $AB = BA$, то такие матрицы называются коммутирующие или перестановочные.
4. Вместо операции деления вводится *умножение на обратную матрицу*;
   Обратная матрица:
   $$X = A^{-1},$$

$$AX = E, XA = E$$

Пусть x_k - k-й столбец обратной матрицы, а e_k - k-й столбец единичной матрицы, тогда $Ax_k = e_k,\ k = 1, 2, \dots, n$. Если $det(A) \neq 0$, то система имеет единственное решение, если $det(A) = 0$, то матрица называется особенной.

2 Собственные значения и векторы

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

λ - *собственные значения*, вектор x - *собственный вектор.*

$$(A - \lambda E)x = 0 \tag{2}$$

Пусть $det(A - \lambda E) \neq 0$, тогда система (2) имеет единственное решение $x = 0$.
Чтобы найти вектор x, отличный от нулевого, нужно потребовать, чтобы определитель

$$det(A - \lambda E) = 0 \tag{3}$$

$$det(A - \lambda E) = (-1)^n \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0$$

характеристическое уравнение, его n корней - собственные значения.

Для каждого λ_i можно найти решение x_i однородной системы $Ax_i = \lambda_i x_i$, т.е. собственный вектор.

Таким образом, для матрицы малой размерности может быть предложен следующий алгоритм:

- из уравнения (3) находим все собственные значения,
- для каждого собственного значения из системы (2) находим собственный вектор.

3 Задачи на матрицы

1. $(AB)^T = B^T A^T$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

4. DA - при умножении на диагональную матрицу *слева* все *строки* матрицы умножаются на соответствующие диагональные элементы.

5. AD - при умножении на диагональную матрицу *справа* все *столбцы* матрицы умножаются на соответствующие диагональные элементы.

6.
$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad \text{получили тот же тип.}$$

7.
$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

8. Собственные значения диагональной матрицы равны ее диагональным элементам.

9. Собственные значения треугольной матрицы тоже равне ее диагональным элементам.

10. Сумма собственных значений матрицы равна сумме ее диагональных элементов
$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} a_{kk}}_{\text{след матрицы}},$$
а произведение - ее определителю
$$\prod_{k=1}^{N} \lambda_k = det(A).$$
Если матрица особенная ($det(A) = 0$), то хотя бы одно собтвенное значение равно 0.

4 Дифференцирование и интегрирование матриц по параметру

$$B(t) = \frac{d}{dt}A(t), \;\; b_{ij}(t) = \frac{d}{dt}a_{ij}(t),$$
$$F = \int_a^b A(t)\; dt, \;\; f_{ij} = \int_a^b a_{ij}(t)\; dt.$$

$$A^k = \underbrace{AA\dots A}_{k},\ A^0 \equiv E$$

$$\frac{d}{dt}A^2(t),$$
$$B(t) = A^2(t),\ \ b_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(t)a_{kj}(t),$$
$$\frac{d}{dt}B(t) = \frac{dA}{dt}A + A\frac{dA}{dt},$$
$$\text{для } A^{17} : \frac{d}{dt}B(t) = A\frac{dA}{dt}A^{15} + A^2\frac{dA}{dt}A^{14} + \dots$$

Найдем производную от обратной матрицы

$$AA^{-1} = E,$$
$$\frac{dA}{dt}A^{-1} + A\frac{d}{dt}A^{-1} = 0,\ \ \frac{d}{dt}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

5 Норма матрицы $\| A \|$

Нормой матрицы называется число, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1. норма матрицы не отрицательна $\| A \| > 0$, $\| A \| = 0 \Rightarrow A = 0$,
2. $\| \alpha A \| = |\alpha| \cdot \| A \|$,
3. $\| A + B \| \ \leq \ \| A \| + \| B \|$,
4. $\| AB \| \ \leq \ \| A \| \cdot \| B \|$.

Норма называется *канонической*, если дополнительно выполняются еще две аксиомы:

$$5.\ \| A \| \geq |a_{ij}|,\ \ 6.\ |b_{ij} > |a_{ij}| \Rightarrow \| B \| > \| A \|\ .$$

Все 3 следующие нормы являются каноническими:

$$\| A \|_I = max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\| A \|_{II} = max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|,$$
$$\| A \|_{III} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\| A \|_I = 24, \\ &\| A \|_{II} = 18, \\ &\| A \|_{III} \approx 16.9. \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &\| A \|_I = 1, \\ &\| A \|_{II} = 1, \\ &\| A \|_{III} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Знак сравнения между нормами $I - III$ ставить *нельзя*.

6 Матричный ряд

$$P_m(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k A^k,$$

α - скалярный коэффициент, как и прочие строчные греческие буквы,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k \text{ - матричный степенной ряд,}$$

Матричный ряд будет сходящимся, если сходятся все n^2 скалярных рядов для элементов матрицы $P(A)$.

$$P(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k, \quad p_{ij},$$

Введем матрицу $U^{(k)} = \alpha_k A^k, \quad u_{ij}^{(k)}$,

$$|p_{ij}| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_{ij}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| u_{ij}^{(k)} \right| \overset{5}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} \| U^{(k)} \| = \sum_{k=0}^{\infty} \| \alpha_k A^k \| \overset{2}{=}$$
$$\overset{2}{=} \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \, \| A^k \| \overset{4}{\leq} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| \, \| A \|^k}_{\text{скалярный степенной ряд}} .$$

В результате *достаточным* условием сходимости матричного ряда является выполнение условия

$$\boxed{\| A \| < R}$$

являющегося, в свою очередь, условием абсолютной сходимости скалярного степенного ряда. R - радиус сходимости скалярного степенного ряда.

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \| A \|_I = 24, \| A \|_{II} = 18, \| A \|_{III} = 16.9,$$

$R = 17.5$ - ряд сходится,
$R = 16.7$ - достаточное условие не выполянется, сходится ли ряд - не знаем.

Если матричный ряд сходится, то его сумму будем называть *матричной функцией*.

Примеры матричных функций:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}, \qquad R = \infty,$$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \Rightarrow cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k A^{2k}}{(2k)!}, \qquad R = \infty,$$

$$\underbrace{\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k}_{\text{геом. прогрессия}} \Rightarrow (E-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \qquad R = 1.$$