

02. Суммирование функций. Формула Абеля суммирования по частям

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 5, 2020

1 Суммирование функций

$$\Delta F(k) = \varphi(k) \quad (1)$$

$$\Delta F(k) = \varphi(k)$$

$$\begin{cases} F_1 - F_0 = \varphi_0 \\ F_2 - F_1 = \varphi_1 \\ \dots \\ F_{n+1} - F_n = \varphi_n \end{cases} \Leftrightarrow F_{n+1} - F_0 = \sum_{k=0}^n \varphi_k \quad (2)$$

По $\varphi(k)$
ищем $F(k)$

Уравнение (2) является дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница.

1.1 Пример

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N a^k &= \left[\Delta F(k) = a^k; \Delta a^k = a^k(a-1), a^k = \frac{\Delta a^k}{a-1}; F(k) = \frac{a^k}{a-1} \right] = \\ &= \frac{a^{N+1} - 1}{a-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^{N+1} - 1}{a-1} = \frac{1 - a^{N+1}}{1-a} \end{aligned}$$

1.2 Формула Абеля суммирования по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b u dv &= uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \\ \int_a^b \left| \frac{d}{dx} (U(x)v(x)) \right| &= u(x)v(x) + U(x) \frac{dv(x)}{dx} \\ \int_a^b u(x)v(x) dx &= U(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b U(x) \frac{dv}{dx} dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n \left| \Delta(U(k)v(k)) \right| &= v(k+1)\Delta U(k) + U(k)\Delta v(k) = \\ &= [u(k+1)v(k+1)]^{(*)} + U(k)\Delta v(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \\ \Delta(f_k g_k) &= f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k \\ \Delta(f_k) &= f_{k+1} - f_k \\ \Delta U(k) &= \sum_{i=0}^{k+1} u(i) - \\ &- \sum_{i=0}^k u(i) = u(k+1) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=m}^n u(k+1)v(k+1) = U(k)v(k) \Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^n U(k)\Delta v(k) \quad (4)$$

Формула (4) - формула Абеля суммирования по частям.

1.2.1 Классический пример

$$\sum_{k=0}^N ka^k$$

Будем использовать формулу Абеля суммирования по частям:

$$\sum_{k=m}^n u(k+1)v(k+1) = U(k)v(k) \Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^n U(k)\Delta v(k)$$

Но, чтобы произвести замену, нам нужно сдвинуть индекс $k+1$ на единицу, то есть

$$v(k) = k-1, u(k) = a^{k-1}$$

Тогда получим $U(k)$

$$U_k = \sum_{i=0}^k a^{i-1} = \frac{1}{a} \times \left[\frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \right]^{(*)}$$

(*)Формула геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n * q - 1}{q - 1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N ka^k &= \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} (k-1) \Big|_0^{N+1} - \left[\sum_{k=0}^N N \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} \right]^{(**)} = \\ &= \frac{1}{a} \frac{a^{N+2} - 1}{a - 1} N + \frac{1}{a} - \frac{1}{a - 1} \sum_{k=0}^N a^k + \frac{N+1}{a(a-1)} = \\ &= \frac{Na^{N+2} - Na^{N+1} - a^{N+1} + a}{(a-1)^2} = \frac{Na^{N+1}}{a-1} - \frac{a^{N+1} - a}{(a-1)^2} \end{aligned}$$

(**)Расписали сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^N N \frac{1}{a} \frac{a^{k+1} - 1}{a - 1} &= \\ &= \sum_{k=0}^N a^k + \sum_{k=0}^N \frac{1}{a(a-1)} \end{aligned}$$