

## 17. 7 теорем о матричных функциях

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 9, 2020

## 1 Теоремы

**Определение 1.** Матрицы  $A$  и  $B$  называются подобными, если найдется такая неособенная матрица  $S$  ( $\det(S) \neq 0$ ), что  $B = SAS^{-1}$ .

**Теорема 1.** Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \\ &= \det(SAS^{-1} - \lambda SS^{-1}) = \det(S(A - \lambda E)S^{-1}) = \det(S)\det(A - \lambda E)\det(S^{-1}) = \\ &= \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Характеристические полиномы для обеих матриц совпали, следовательно, совпали и собственные значения.  $\square$

**Теорема 2.** Если матрицы  $A$  и  $B$  подобны, то матричные функции от них тоже подобны, то есть если  $B = SAS^{-1}$ , то  $f(B) = Sf(A)S^{-1}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} f(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \equiv \\ B^k &= SA \underbrace{S^{-1}S}_E AS^{-1} \dots SAS^{-1} = SA^k S^{-1} \\ \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k SA^k S^{-1} &= S \left( \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k \right) S^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Если собственные значения матрицы  $A$  различны, то она подобна диагональной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения матрицы  $A$ .

*Доказательство.*

$A \rightarrow \lambda_k$  (собственные значения),  $u_k$  (собственные векторы),

$$Au_k = \lambda_k u_k,$$

$U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  – матрица, столбцами которой являются все собственные векторы;

$$AU = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) = U\Lambda,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n); AU = U\Lambda,$$

$$U^{-1}AU = \Lambda, \underline{A = U\Lambda U^{-1}}. \quad \square$$

**Теорема 4.** Две матричные функции от одной и той же матрицы  $A$  коммутируют

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A).$$

*Доказательство.*

По теореме 3:  $A = U\Lambda U^{-1}$ ,

По теореме 2:  $f(A) = Uf(\Lambda)U^{-1}$  и  $g(A) = Ug(\Lambda)U^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \underline{f(A)g(A)} &= Uf(\Lambda)\underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=E}g(\Lambda)U^{-1} = U \underbrace{f(\Lambda)g(\Lambda)}_{\text{диаг. матрицы}} U^{-1} = \\ &= Ug(\Lambda)UU^{-1}f(\Lambda)U^{-1} = \underline{g(A)f(A)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Теорема 5.** Если у матрицы  $A$  собственные значения  $\lambda_k$ , то у матричной функции  $f(A)$  собственные значения -  $f(\lambda_k)$ .

*Доказательство.*

$A \rightarrow \lambda_k$ , по теореме 3:  $A = U\Lambda U^{-1}$ ,

$f(A) \rightarrow f(\lambda_k)$  по теореме 2:  $f(A) = Uf(\Lambda)U^{-1}$ .

$$\begin{aligned} f(A) &= Uf(\Lambda)U^{-1} = \left[ f(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Lambda^k \right] = \\ &= U \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_n^k \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1}, \end{aligned}$$

Что и означает, что  $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$  являются собственными значениями матрицы  $f(A)$ , т.к. преобразование подобия не меняет собственных значений.  $\square$

**Следствие 1.** Матричный ряд  $f(A)$  сходится  $\Leftrightarrow$  когда сходятся скалярные степенные ряды, стоящие на диагонали  $f(\Lambda)$ , а они сходятся  $\Leftrightarrow$  когда все собственные значения удовлетворяют условию:

$$|\lambda_k| < R,$$

которое является *необходимым* и *достаточным* условием сходимости матричного ряда.

**Следствие 2.**

$\|A\| < R$  - достаточное условие,

$|\lambda_k| < R$  - необходимое условие

$$\Rightarrow |\lambda_k| \leq \|A\|.$$

Предположим, что  $|\lambda_k| > \|A\|$ , тогда существует такой  $R$ , что

$\|A\| < R$ , а  $|\lambda_k| > R$ , получается, что достаточное условие выполняется, а необходимое - нет, это противоречие.

**Теорема 6.** (Формула Кели-Гамильтона). Всякая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Пусть

$$Q(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

характеристический полином, а

$$Q(\lambda) = 0$$

характеристическое уравнение, тогда

$$Q(A) = 0 = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n E.$$

*Доказательство.* По теореме 3:  $A = U \Lambda U^{-1}$

$$Q(A) = U Q(\Lambda) U^{-1} = U \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1} = 0. \quad \square$$

**Теорема 7.** (Формула Лагранжа-Сильвестра.) Любая функция матрицы  $A$ , имеющей различные собственные значения, может быть представлена в виде:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $f(x)$ , построим для нее интерполяционный полином Лагранжа степен  $(n-1)$ , взяв вместо узлов интерполирования собственные значения матрицы  $A : \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Тогда

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x).$$

Подставим в эту формулу  $A$  вместо  $x$

$$f(A) = Q_{n-1}(A) + R_{n-1}(A).$$

$$R_{n-1}(A) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\eta),$$

$\omega(A) = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \dots (A - \lambda_n E)$  - характеристический полином матрицы  $A$ .

По теореме 6:  $\omega(A) = 0 \Rightarrow R_{n-1}(A) = 0$ ,

$$\begin{aligned} f(A) &= Q_{n-1}(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) S_k(A, \lambda_k), \quad S_k(A, \lambda_k) - \text{матричный множитель.} \quad \square \end{aligned}$$

## 2 Некоторые свойства матричной экспоненты

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{Ряд} \\ \text{Тейлора} \end{array}$$

1.

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= [\text{по формуле (1)}] = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At} = [\text{по теореме 4}] = e^{At} A. \quad \square \end{aligned}$$

2.

$$\boxed{\left( e^{At} \right)^{-1} = e^{-At}}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^{At} e^{-At} &= \left( E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) \left( E - At + \frac{A^2 t^2}{2!} - \dots \right) = \\ &= E - \cancel{At} + \frac{A^2 \cancel{t^2}}{2!} - \dots + \cancel{At} - \cancel{A^2 t^2} + \frac{A^3 \cancel{t^3}}{2!} - \dots + \\ &+ \frac{A^2 \cancel{t^2}}{2!} - \frac{A^3 \cancel{t^3}}{2!} + \frac{A^4 \cancel{t^4}}{4} - \dots = E. \quad \square \end{aligned}$$

3.

$$\boxed{e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left( E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right) \left( E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= E + A + B + \underbrace{\frac{A^2}{2!} + AB + \frac{B^2}{2!}} + \dots \\ e^{A+B} &= \left( E + A + B + \frac{(A+B)^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= \left( E + A + B + \frac{A^2}{2!} + \underbrace{\frac{AB+BA}{2!}} + \frac{B^2}{2!} + \dots \right) \quad \square \end{aligned}$$

Для того, чтобы  $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$ , матрицы  $A$  и  $B$  должны коммутировать.

4.

$$\boxed{e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}}$$

*Доказательство.* Воспользуемся предыдущими результатами.

$$\begin{aligned} e^{At} e^{Aq} &= E + At + Aq + \frac{A^2 t^2}{2!} + AtAq + \frac{A^2 q^2}{2!} + \dots = \\ &= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots \\ e^{A(t+q)} &= E + At + Aq + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots = \\ &= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Здесь никаких проблем с коммутативностью матриц нет, поэтому доказательство очевидно.  $\square$