

01. Конечные разности и их свойства.

Андрей Бареков По лекциям Устинова С.М.

November 15, 2019

1 Конечные разности

x	$f(x)$	$\Delta_h f(x_k) = f(x_{k+1} - f(x_k)) = f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)$
x_0	$f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	
\dots	\dots	
x_m	$f(x_m)$	

$$f_k \stackrel{\text{def}}{=} f(k)$$

$$x_k = x_0 + k \times h \quad \Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = f_{k+1} - f_k$$

1.1 Свойства конечных разностей

1. $\Delta \alpha = \alpha - \alpha = 0$
2. $\Delta(\alpha \times f_k) = \alpha \Delta f_k$
3. $\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k$
4. $\Delta(f_k g_k) = f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \pm f_{k+1} g_k = f_{k+1} \Delta g_k + g_k \Delta f_k = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$
5. $\Delta k^S = (k+1)^S - k^S = k^S + S k^{S-1} + \frac{S(S-1)}{2!} k^{S-2} + \dots - k^S$
 Конечная разность от полинома степени S это полином степени $S-1$.

1.2 Таблица конечных разностей

1. $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k(a-1)$
2. $\Delta \sin k = \sin(k+1) - \sin k = 2 \sin \frac{1}{2} \cos(k + \frac{1}{2})$
3. $\Delta \cos k = \cos(k+1) - \cos k = -2 \sin \frac{1}{2} \sin(k + \frac{1}{2})$

2 Разделённые разности

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Аналогично производным высших порядков вводятся разделённые разности:

$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$

...

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+s}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s-1})}{x_{k+s} - x_k}$$

Аналогично вводятся конечные разности высших порядков:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$

$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$

$$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k$$

...

Если узлы таблицы равноотстоящие, то можно использовать и конечные, и разделённые разности. Установим связь между ними для равноотстоящих узлов:

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$

$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2}$$

По индукции легко показать, что:

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{\Delta^s f_k}{s! \times h^s}$$

3 Суммирование функций

$$\Delta F(k) = \phi(k) \tag{1}$$