

18. Решение систем линейных
дифференциальных и разностных уравнений с
постоянной матрицей.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 10, 2020

1 Системы линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), x(0) = x_0 \quad (1)$$

A - заданная постоянная квадратная матрица,
 $f(t)$ - заданная вектор-функция,
 $x(t)$ - вектор-решение.

Начинаем решать с однородной системы:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2)$$

$$\underbrace{x(t)}_{\text{вектор}} = \underbrace{e^{At}}_{\text{матрица}} \times \underbrace{C}_{\text{вектор}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ \Rightarrow x(t) &= e^{\alpha t} \times C \end{aligned}$$

Подставляем уравнение (3) в уравнение (2):

$$Ae^{At} \times C = Ae^{At} \times C$$

Решение неоднородной системы (1) в соответствии с методом Лагранжа будем искать в виде:

$$x(t) = e^{At} \times C(t) \quad (4)$$

Подставляем уравнение (4) в уравнение (1):

$$\underline{Ae^{At} \times C(t)} + e^{At} \frac{dC(t)}{dt} = \underline{Ae^{At} \times C(t)} + f(t)$$

Умножим на обратную матрицу слева:

$$\begin{aligned} \frac{dC(t)}{dt} &= e^{-At} f(t) \\ C(t) &= C(0) + \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем уравнение (5) в уравнение (4):

$$x(t) = e^{At} C(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} f(\tau) d\tau = e^{At} C(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

Полагаем, что $t = 0$:

$$\begin{aligned} x(0) &= E \times C(0) + \underbrace{\int_0^0}_{0} \Rightarrow C(0) = x_0 \\ x(t) &= e^{At} \times x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (6)$$

Формула (6) - точное решение системы (1).

2 Системы линейных разностных уравнений

$$x_{n+1} = Bx_n + \varphi(n), \quad x_n|_{n=0} = x_0 \quad (1)$$

B - заданная постоянная квадратная матрица,
 $\varphi(n)$ - заданная вектор-функция,
 x_n - вектор-решение.

$$x_1 = Bx_0 + \varphi_0$$

$$x_2 = Bx_1 + \varphi_1 = B^2x_0 + B\varphi_0 + \varphi_1$$

$$x_3 = Bx_2 + \varphi_2 \dots$$

по индукции:

$$x_n = B^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k \varphi_{n-1-k} \quad (2)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда $\varphi(n) = \alpha - const$:

$$x_n = B^n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} B^k \right) \times \alpha$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} B^k \begin{matrix} \nearrow (E - B^n)(E - B)^{-1} \\ \searrow (E - B)^{-1}(E - B^n) \end{matrix} \quad (*)$$

(*) на
осн. теор.
4 о МФ
возм. оба
варианта.

$$x_n = B^n x_0 + \left(\sum_{k=0}^{n-1} B^k \right) \times \alpha = B^n x_0 + (E - B^n)(E - B)^{-1} \alpha \quad (2^*)$$

$$^1 \sum_{k=0}^{n-1} B^k = \frac{1-B^n}{1-B}$$