

17. 7 теорем о матричных функциях

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 11, 2020

1 Теоремы

Определение 1. Матрицы A и B называются подобными, если найдется такая неособенная матрица S ($\det(S) \neq 0$), что $B = SAS^{-1}$.

Теорема 1. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \\ &= \det(SAS^{-1} - \lambda SS^{-1}) = \det(S(A - \lambda E)S^{-1}) = \det(S)\det(A - \lambda E)\det(S^{-1}) = \\ &= \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Характеристические полиномы для обеих матриц совпали, следовательно, совпали и собственные значения. \square

Теорема 2. Если матрицы A и B подобны, то матричные функции от них тоже подобны, то есть если $B = SAS^{-1}$, то $f(B) = Sf(A)S^{-1}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k B^k \equiv \\ B^k &= SA \underbrace{S^{-1}S}_E AS^{-1} \dots SAS^{-1} = SA^k S^{-1} \\ \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k SA^k S^{-1} &= S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k \right) S^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 3. Если собственные значения матрицы A различны, то она подобна диагональной матрице, на диагонали которой стоят собственные значения матрицы A .

Доказательство.

$A \rightarrow \lambda_k$ (собственные значения), u_k (собственные векторы),

$$Au_k = \lambda_k u_k,$$

$U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ – матрица, столбцами которой являются все собственные векторы;

$$AU = (\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \dots, \lambda_n u_n) = U\Lambda,$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n); AU = U\Lambda,$$

$$U^{-1}AU = \Lambda, \underline{A = U\Lambda U^{-1}}. \quad \square$$

Теорема 4. Две матричные функции от одной и той же матрицы A коммутируют

$$f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A).$$

Доказательство.

По теореме 3: $A = U\Lambda U^{-1}$,

По теореме 2: $f(A) = Uf(\Lambda)U^{-1}$ и $g(A) = Ug(\Lambda)U^{-1}$,

$$\begin{aligned} \underline{f(A)g(A)} &= Uf(\Lambda)\underbrace{U^{-1} \cdot U}_{=E}g(\Lambda)U^{-1} = U \underbrace{f(\Lambda)g(\Lambda)}_{\text{диаг. матрицы}} U^{-1} = \\ &= Ug(\Lambda)UU^{-1}f(\Lambda)U^{-1} = \underline{g(A)f(A)}. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 5. Если у матрицы A собственные значения λ_k , то у матричной функции $f(A)$ собственные значения - $f(\lambda_k)$.

Доказательство.

$A \rightarrow \lambda_k$, по теореме 3: $A = U\Lambda U^{-1}$,

$f(A) \rightarrow f(\lambda_k)$ по теореме 2: $f(A) = Uf(\Lambda)U^{-1}$.

$$\begin{aligned} f(A) &= Uf(\Lambda)U^{-1} = \left[f(\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Lambda^k \right] = \\ &= U \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda_n^k \end{pmatrix} U^{-1} = U \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1}, \end{aligned}$$

Что и означает, что $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \dots, f(\lambda_n)$ являются собственными значениями матрицы $f(A)$, т.к. преобразование подобия не меняет собственных значений. \square

Следствие 1. Матричный ряд $f(A)$ сходится \Leftrightarrow когда сходятся скалярные степенные ряды, стоящие на диагонали $f(\Lambda)$, а они сходятся \Leftrightarrow когда все собственные значения удовлетворяют условию:

$$|\lambda_k| < R,$$

которое является *необходимым* и *достаточным* условием сходимости матричного ряда.

Следствие 2.

$\|A\| < R$ - достаточное условие,

$|\lambda_k| < R$ - необходимое условие

$$\Rightarrow |\lambda_k| \leq \|A\|.$$

Предположим, что $|\lambda_k| > \|A\|$, тогда существует такой R , что

$\|A\| < R$, а $|\lambda_k| > R$, получается, что достаточное условие выполняется, а необходимое - нет, это противоречие.

Теорема 6. (Формула Кели-Гамильтона). Всякая матрица удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Пусть

$$Q(\lambda) = \alpha_0 \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n$$

характеристический полином, а

$$Q(\lambda) = 0$$

характеристическое уравнение, тогда

$$Q(A) = 0 = \alpha_0 A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \dots + \alpha_n E.$$

Доказательство. По теореме 3: $A = U \Lambda U^{-1}$

$$Q(A) = U Q(\Lambda) U^{-1} = U \begin{pmatrix} Q(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & Q(\lambda_n) \end{pmatrix} U^{-1} = 0. \quad \square$$

Теорема 7. (Формула Лагранжа-Сильвестра.) Любая функция матрицы A , имеющей различные собственные значения, может быть представлена в виде:

$$f(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x)$, построим для нее интерполяционный полином Лагранжа степен $(n-1)$, взяв вместо узлов интерполирования собственные значения матрицы $A: \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Тогда

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_{n-1}(x).$$

Подставим в эту формулу A вместо x

$$f(A) = Q_{n-1}(A) + R_{n-1}(A).$$

$$R_{n-1}(A) = \frac{\omega(x)}{n!} f^{(n)}(\eta),$$

$\omega(A) = (A - \lambda_1 E)(A - \lambda_2 E) \dots (A - \lambda_n E)$ - характеристический полином матрицы A .

По теореме 6: $\omega(A) = 0 \Rightarrow R_{n-1}(A) = 0$,

$$\begin{aligned} f(A) &= Q_{n-1}(A) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_n E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_n)} = \\ &= \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) S_k(A, \lambda_k), \quad S_k(A, \lambda_k) - \text{матричный множитель.} \quad \square \end{aligned}$$

2 Некоторые свойства матричной экспоненты

$$e^{At} = E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{A^k t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \quad (1) \quad \begin{array}{l} \text{Ряд} \\ \text{Тейлора} \end{array}$$

1.

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= [\text{по формуле (1)}] = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} = A e^{At} = [\text{по теореме 4}] = e^{At} A. \quad \square \end{aligned}$$

2.

$$\boxed{\left(e^{At} \right)^{-1} = e^{-At}}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^{At} e^{-At} &= \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots \right) \left(E - At + \frac{A^2 t^2}{2!} - \dots \right) = \\ &= E - \cancel{At} + \frac{A^2 \cancel{t^2}}{2!} - \dots + \cancel{At} - \cancel{A^2 t^2} + \frac{A^3 \cancel{t^3}}{2!} - \dots + \\ &+ \frac{A^2 \cancel{t^2}}{2!} - \frac{A^3 \cancel{t^3}}{2!} + \frac{A^4 \cancel{t^4}}{4} - \dots = E. \quad \square \end{aligned}$$

3.

$$\boxed{e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right) \left(E + B + \frac{B^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= E + A + B + \underbrace{\frac{A^2}{2!} + AB + \frac{B^2}{2!}} + \dots \\ e^{A+B} &= \left(E + A + B + \frac{(A+B)^2}{2!} + \dots \right) = \\ &= \left(E + A + B + \frac{A^2}{2!} + \underbrace{\frac{AB+BA}{2!}} + \frac{B^2}{2!} + \dots \right) \quad \square \end{aligned}$$

Для того, чтобы $e^A \cdot e^B = e^{A+B}$, матрицы A и B должны коммутировать.

4.

$$\boxed{e^{\alpha A} \cdot e^{\beta A} = e^{(\alpha+\beta)A}}$$

Доказательство. Воспользуемся предыдущими результатами.

$$\begin{aligned} e^{At} e^{Aq} &= E + At + Aq + \frac{A^2 t^2}{2!} + AtAq + \frac{A^2 q^2}{2!} + \dots = \\ &= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots \\ e^{A(t+q)} &= E + At + Aq + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots = \\ &= E + A(t+q) + \frac{A^2(t+q)^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Здесь никаких проблем с коммутативностью матриц нет, поэтому доказательство очевидно. \square