

23. Методы последовательных приближений и Ньютона для решения нелинейных уравнений и систем

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 16, 2020

1 Одно нелинейное уравнение

1.1 Метод последовательных приближений

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Эквивалентными преобразованиями приведем уравнение (1) к виду

$$x = \varphi(x). \quad (2)$$

Корень нелинейного уравнения

$$x^* = x_n + \varepsilon_n, \quad x^* = \varphi(x^*).$$

Вместо уравнения (2) решаем разностное уравнение

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (3)$$

Оценим сходимость:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= x^* - x_{n+1} = \varphi(x^*) - \varphi(x_n) = \varphi(x_n + \varepsilon_n) - \varphi(x_n) = \\ &= \underbrace{\varphi(x_n) + \varepsilon_n \varphi'(\eta)}_{\text{разложили в ряд}} - \varphi(x_n) = \varepsilon_n \varphi'(\eta). \end{aligned}$$

Убывание погрешности гарантирует условие

$$\left| \varphi'(\eta) \right| < 1. \quad (*)$$

Искусство пользователя заключается в том, чтобы перейти от уравнения (1) к (2) так, чтобы выполнялось условие (*).

1.2 Метод Ньютона (*касательных*)

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Подставим в уравнение (1) его корень $x^* = x_n + \varepsilon_n$ и разложим в ряд по степени ε_n :

$$0 = f(x^*) = f(x_n + \varepsilon_n) = f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n) + \frac{\varepsilon_n^2}{2!} f''(\eta). \quad (2)$$

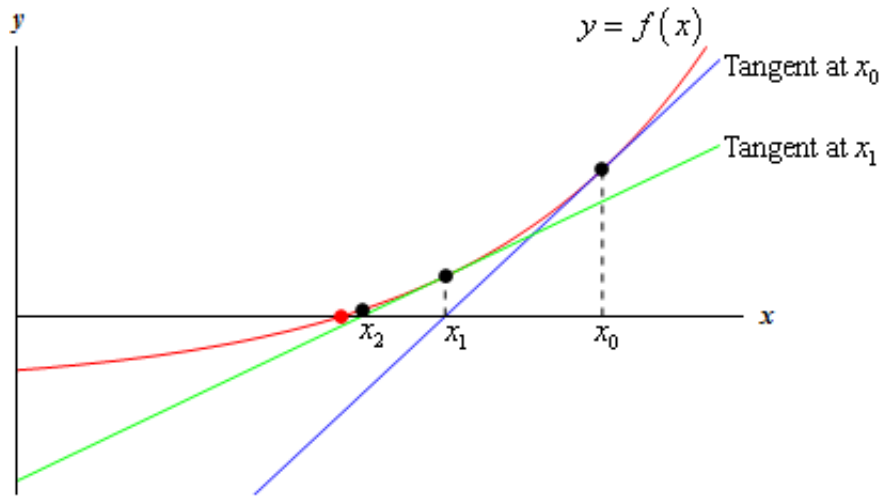
Как разложили в ряд - многочлен Тейлора:
 $f(x_n + \varepsilon_n) = [\text{раскладываем в точке } x_n] =$
 $= f(x_n) + f'(x_n)(x_n + \varepsilon_n - x_n) + f''(\eta)(x_n + \varepsilon_n - x_n)^2/(2!),$
последнее слагаемое - это погрешность.

пренебрежем последним слагаемым и для ε_n получим

$$\varepsilon_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Тогда

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \quad (3)$$



$P(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$ – уравнение касательной,

$P(x) = 0, \Rightarrow$ следующее приближение: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$

1.2.1 Сходимость метода

$$x^* = x^*, x_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = x_n + \varepsilon_n,$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \overbrace{\frac{f(x_n) + \varepsilon_n f'(x_n)}{f'(x_n)}}^{\text{см. (2)}} = -\frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)} \varepsilon_n^2.$$

Тогда если

$$\left| \frac{f''(\eta)}{2f'(x_n)} \right| < C,$$

где C - константа, то

$$\left| \varepsilon_{n+1} \right| < \varepsilon_n^2, \quad (4)$$

квадратичная скорость сходимости.

Метод Ньютона *очень быстро* сходится, но, конечно, *если* сходится. Как правило он требует очень хорошего начального приближения. Поэтому на практике его часто используют в паре, например, с методом бисекции, который как раз обеспечивает хорошее начальное приближение, а затем уже метод Ньютона - квадратичную скорость сходимости.

Также на практике применяют *модификации* метода Ньютона:

- производная не пересчитывается

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}.$$

- метод с регулировкой шага

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Для расширения области сходимости первоначально $\alpha < 1$, а при приближении к 0 $\alpha = 1$ и возвращается обычный вид метода.

2 Система нелинейных уравнений

$$f(x) = 0, \quad x \in R^N, \quad f \in R^n, \quad x = \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ x^{(2)} \\ \vdots \\ x^{(N)} \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f^{(1)} \\ f^{(2)} \\ \vdots \\ f^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

2.1 Метод последовательных приближений для решения систем уравнений

Метод сохраняет свой вид и для систем уравнений

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

$$x = \varphi(x), \quad (2)$$

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \quad (3)$$

Система (1) эквивалентными преобразованиями приводится к виду (2). Далее решаем систему разностных уравнений (3) пошаговым методом.

Для одного уравнения условие сходимости имеет вид

$$|\varphi'(n)| < 1. \quad (*)$$

Для системы уравнений аналогичное условие сходимости выглядит следующим образом:

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\| < 1, . \quad (**)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \text{матрица Якоби,}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial x^{(n)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \cdots & \frac{\partial \varphi^{(n)}}{\partial x^{(n)}} \end{pmatrix}$$

Искусство пользователя заключается в том, чтобы привести систему (1) к виду (2) так, чтобы выполнялось условие (**).

2.2 Метод Ньютона для решения систем уравнений

Применение метода Ньютона для систем уравнений проиллюстрируем на примере системы из двух уравнений.

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

$$x^* = x_n + \varepsilon_n.$$

Введем обозначения:

$$x^* = \begin{pmatrix} x_*^{(1)} \\ x_*^{(2)} \end{pmatrix}, \quad x_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n = \begin{pmatrix} \varepsilon_n^{(1)} \\ \varepsilon_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1) и подставим в него точное решение

$$\begin{aligned} 0 &= f^{(1)}\left(x_*^{(1)}, x_*^{(2)}\right) = f^{(1)}\left(x_n^{(1)} + \varepsilon_n^{(1)}, x_n^{(2)} + \varepsilon_n^{(2)}\right) = \\ &= \left[\text{раскладываем в ряд по } \varepsilon_n^{(1)} \text{ и } \varepsilon_n^{(2)} \text{ пренебрегая малыми второго порядка}\right] = \\ &= f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) \varepsilon_n^{(1)} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) \varepsilon_n^{(2)} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Получили

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) \varepsilon_n^{(1)} + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right) \varepsilon_n^{(2)} = -f^{(1)}\left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}\right). \quad (2)$$

Аналогично и для второго уравнения

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}} \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \right) \varepsilon_n^{(1)} + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(2)}} \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \right) \varepsilon_n^{(2)} = -f^{(2)} \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)} \right). \quad (3)$$

Эту систему уравнений можно записать в матричном виде:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n) \varepsilon_n = -f(x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n \end{cases}} \quad (4)$$

метод Ньютона для систем уравнений, где $\frac{\partial f}{\partial x}$ - матрица Якоби.

На каждом шаге приходится решать систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора ε_n (вспоминаем о подпрограммах *DECOMP* и *SOLVE*).

Формула (4) обладает всеми *достоинствами* и *недостатками* метода Ньютона для одного уравнения:

- квадратичная скорость сходимости,
- требование хорошего начального приближения.

2.2.1 Модификация метода Ньютона для решения систем уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \varepsilon_n = -f(x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \varepsilon_n \end{cases} \quad (4^*)$$

Матрица Якоби вычисляется *однократно* в точке x_0 , *однократно* выполняется ее *LU*-разложение, и на последующих шагах используется только программа *SOLVE*. Матрица вычисляется вновь, только если нарушается (замедляется) сходимость.