

## 05. Аппроксимация функций. Задача интерполирования.

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 6, 2020

# 1 Введение в аппроксимацию

Исходная функция чаще всего записывается в следующем виде:

1. Аналитически
2. Графически
3. Таблично
4. Алгоритмически

*Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой с точки зрения решаемой задачи.*

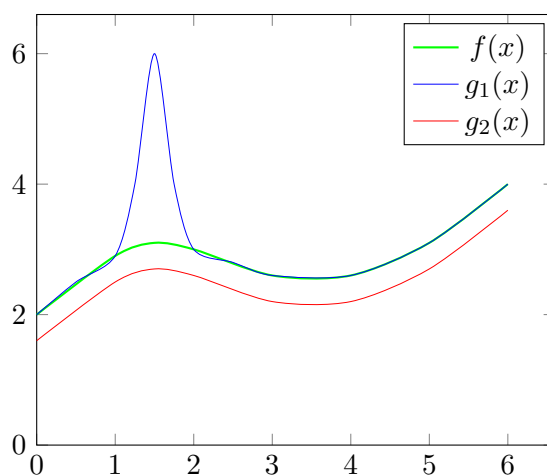
Для сравнения различных аппроксимирующих функций вводится критерий близости:

Пусть  $f(x)$  - исходная функция,  $g(x)$  - её аппроксимация.

1.  $\left( \delta = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \rightarrow \min \right)$  **минимаксный критерий.**
2.  $\left( \rho^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \rightarrow \min \right)$  **среднеквадратичный критерий.**

Если функция задана таблично, то есть дискретный аналог среднеквадратичного критерия:  $(\rho^2 = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - g(x_k))^2 \rightarrow \min)$

## 1.1 Сравнение критериев



Функция  $g_1(x)$  лучше аппроксимирует по критерию 2, а  $g_2(x)$  - по критерию 1.

*На практике лучше та аппроксимация, которая нужна для конкретной задачи.*

## 2 Основы интерполирования функций

Будем приближать исходную функцию, заданную таблично.

$x$ $x_0$ $x_1$ $\dots$ $x_m$	$f(x)$ $f(x_0)$ $f(x_1)$ $\dots$ $f(x_m)$	$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$ <div style="margin-top: 10px;"> <p>Аппроксимирующая функция (1) - обобщённый многочлен, где <math>\varphi_k(x)</math> - заданный набор линейно независимых функций, <math>a_k</math> подлежат определению.</p> </div>
---	---	--

(1)

Потребуем, чтобы во всех узлах таблицы *аппроксимирующая и исходная функции совпадали*.

$$Q_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

Если эти условия выполняются, то  $Q_m(x)$  - интерполяционный многочлен, а  $x_k$  - узлы интерполирования.

Система (2) - это линейная система из  $m + 1$  уравнения относительно  $m + 1$  неизвестных  $a_k$ .

Если определитель этой системы не равен 0, то задача всегда имеет единственное решение.

Самая популярная интерполяция - интер-ия полиномом -  $\varphi_k(x) = x^k$ . При такой интерполяции определитель системы 2 приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{vmatrix} \quad (3)$$

Определитель (3) - **определитель Вандермонда**, не равный 0.

*По  $n$  точкам однозначно строится интер-ый полином  $(n-1)$ й степени.*