

05. Аппроксимация функций. Задача интерполирования.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 5, 2020

1 Введение в аппроксимацию

Исходная функция чаще всего записывается в следующем виде:

1. Аналитически
2. Графически
3. Таблично
4. Алгоритмически

Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой с точки зрения решаемой задачи.

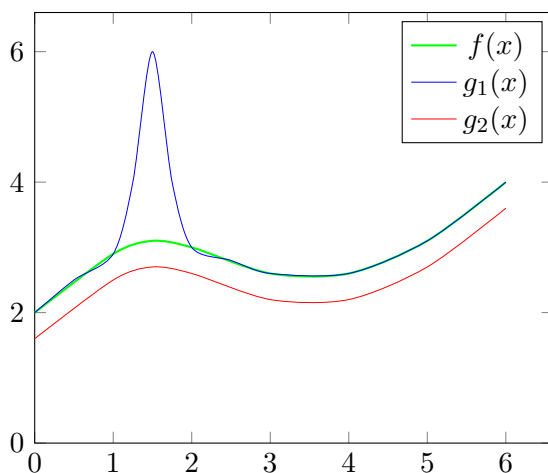
Для сравнения различных аппроксимирующих функций вводится критерий близости:

Пусть $f(x)$ - исходная функция, $g(x)$ - её аппроксимация.

1. $\left(\delta = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \rightarrow \min \right)$ **минимаксный критерий.**
2. $\left(\rho^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \rightarrow \min \right)$ **среднеквадратичный критерий.**

Если функция задана таблично, то есть дискретный аналог среднеквадратичного критерия: $(\rho^2 = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - g(x_k))^2 \rightarrow \min)$

1.1 Сравнение критериев



Функция $g_1(x)$ лучше аппроксимирует по критерию 2, а $g_2(x)$ - по критерию 1.

На практике лучше та аппроксимация, которая нужна для конкретной задачи.

2 Основы интерполирования функций

Будем приближать исходную функцию, заданную таблично.

x	$f(x)$	$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi_k(x)$ <div style="text-align: right;">(1)</div>
x_0	$f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	
\dots	\dots	
x_m	$f(x_m)$	

Аппроксимирующая функция (1) - обобщённый многочлен, где $\varphi_k(x)$ - заданный набор линейно независимых функций, a_k подлежат определению.

Потребуем, чтобы во всех узлах таблицы *аппроксимирующая и исходная функции совпадали*.

$$Q_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

Если эти условия выполняются, то $Q_m(x)$ - интерполяционный многочлен, а x_k - узлы интерполирования.

Система (2) - это линейная система из $m + 1$ уравнения относительно $m + 1$ неизвестных a_k .

Если определитель этой системы не равен 0, то задача всегда имеет единственное решение.

Самая популярная интерполяция - интер-ия полиномом - $\varphi_k(x) = x^k$. При такой интерполяции определитель системы 2 приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{vmatrix} \quad (3)$$

Определитель (3) - **определитель Вандермонда**, не равный 0.

По n точкам однозначно строится интер-ый полином $(n-1)$ й степени.