09. Квадратурные формулы левых, правых, и средних прямоугольников, трапеций, Симпсона. Малые и составные формулы, их остаточные члены.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 7, 2020

1 Квадратурные формулы

Так называются формулы для вычисления определённых интегралов.

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

дан интеграл, точное значение которого получить крайне сложно,

$$f(x) = Q_m(x) + R_m(x)$$

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b Q_m(x)\ dx$$

некоторая квадратурная формула,

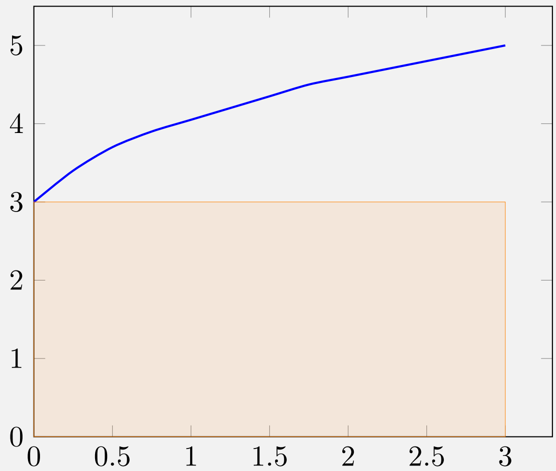
$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x)\ dx \quad \text{- ее погрешность.}$$

Полином 0-й степени:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

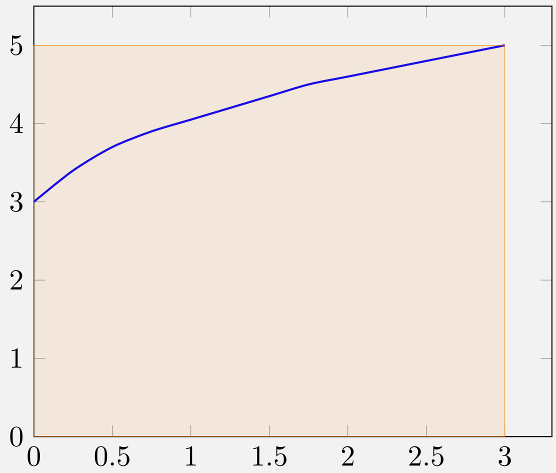
$$I \approx \int_a^b f(x_0)\ dx = (b-a)f(x_0)$$

$$x_0 = a \Rightarrow I \approx (b-a)f(a) \tag{1}$$



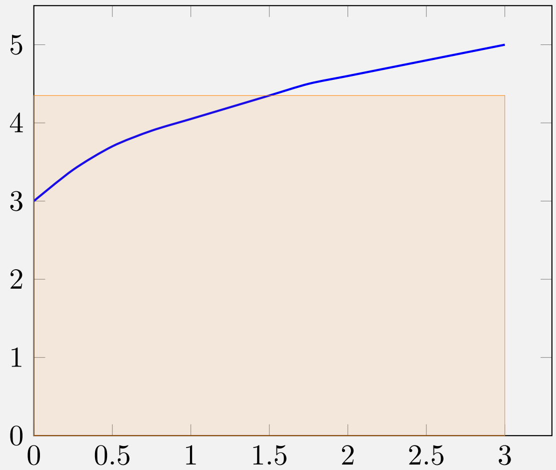
Квадратурная формула **левых прямоугольников**.

$$x_0 = b \Rightarrow I \approx (b-a)f(b) \tag{2}$$



Квадратурная формула **правых прямоугольников**.

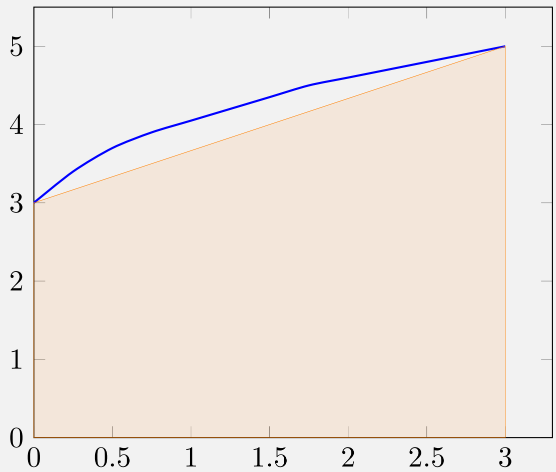
$$x_0 = \frac{a+b}{2} \Rightarrow I \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2}) \tag{3}$$



Квадратурная формула **средних прямоугольников**.

$$Q_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b) \text{ - полином 1-й степени.}$$

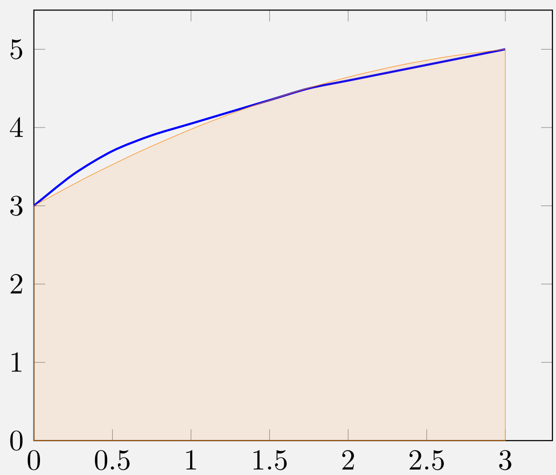
$$I \approx \int_a^b Q_1(x)\, dx = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \tag{4}$$



Квадратурная формула **трапеций**.

$$Q_2(x) \qquad x_0 = a, x_1 = \frac{a+b}{2}, x_2 = b$$

$$I \approx \int_a^b Q_2(x)\, dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right) \tag{5}$$



Метод параболы *или* квадратурная формула **Симпсона**.

Для повышения точности исходный промежуток разбивается на участки, на каждом из них применяется какая-то квадратурная формула, а результаты складываются. Эти квадратурные формулы получили название составные квадратурные формулы.

2 Составные квадратурные формулы

Разобьём исходный промежуток на N участков одинаковой длины: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{N-1}, x_N]$. На каждом участке вычисляем интеграл:

$$x_k = x_0 + k\frac{b-a}{N}$$

$$x_0 = a, x_N = b$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{N}$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{N} f(x_k)$$

$$I = \int_a^b f(x)\ dx$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{\underline{k=0}}^{N-1} f(x_k) \qquad (1^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{\underline{k=1}}^{N} f(x_k) \qquad (2^*)$$

$$I \approx \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k + \frac{b-a}{2N}) \qquad (3^*)$$

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{2N} (f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

$$I \approx \frac{b-a}{2N} \left(f(a) + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) + f(b) \right) \qquad (4^*)$$

В формуле Симпсона выберем N чётным, количество промежутков будет $N^* = N/2$, каждый промежуток будет вдвое большей длины, чем в предыдущих формулах.

$$I_k = \int_{x_k}^{x_{k+2}} f(x)\ dx \approx \frac{b-a}{3N} \left(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2}) \right)$$

$$[x_k, x_{k+2}] = \frac{2(b-a)}{N}$$

$$I = \sum_{k=0}^{N^*-2} I_k$$

Итерация суммы происходит по вдвое большим промежуткам,
поэтому от x_0 мы перейдем сразу к x_2

$$I \approx \frac{b-a}{3N}\Bigg(f(a) + 4(f_1 + f_3 + \cdots + f_{N-1}) + 2(f_2 + f_4 + \cdots + f_{N-2}) + f(b)\Bigg) \qquad (5^*)$$

3 Погрешности квадратурных формул

Теорема о 'средней' точке:

$$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = g(c)\int_a^b f(x)\ dx, c \in [a,b]$$

Чтобы теорема работала, функция, стоящая под знаком интеграла, должна быть *знакопостоянна.* Теорема о 'средней' точке-2:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1} N f(x_k) = f(\eta)$$

3.1 Погрешности несоставных формул

$$\varepsilon = \int_a^b R_m(x)\ dx$$

Погрешность равна интегралу от остаточного члена интерполяционного полинома.

$$R_0(x) = \frac{x-a}{1!}f'(\eta)$$

$$\varepsilon_{\text{л.пр.}} = \int_a^b \frac{x-a}{1!}f'(\eta)\ dx = \int_a^b (x-a)\ dx\ f'(\eta^*) = \frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta^*) \qquad \eta \to \eta(x)$$

$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}} = \int_a^b \frac{x-b}{1!}f'(\eta)\ dx = -\frac{(b-a)^2}{2}f'(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{трап.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2!}f''(\eta)\ dx = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{x - \frac{a+b}{2}}{1!} f^{'}(\eta)\ dx$$

Теорема о 'среднем' здесь не работает, используется другой способ. Рассмотрим разложение функции в степенной ряд Тейлора до ^{2} в точке $\frac{a+b}{2}$:

$$f(x) = f(\frac{a+b}{2}) + \frac{x - \frac{a+b}{2}}{1!} f^{'}(\frac{a+b}{2}) + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f^{''}(\eta)$$

Проинтегрируем слева и справа на $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) f(\frac{a+b}{2}) + \mathbf{0} + \underbrace{\int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f^{''}(\eta)\ dx}_{\varepsilon_{\text{ср.пр.}}}$$

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \int_a^b \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2!} f^{''}(\eta)\ dx = \frac{(b-a)^3}{24} f^{''}(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = \int_a^b \frac{(x-a)(x - \frac{a+b}{2})(x-b)}{3!} f^{'''}(\eta)\ dx$$

Теорема о 'среднем' не работает, погрешность выводится по другому.

$$\varepsilon_{\text{симп.}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{''''}(\eta^*)$$

$$\varepsilon_{\text{л.пр.}} = \frac{(b-a)^2}{2} f^{'}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}} = -\frac{(b-a)^2}{2} f^{'}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{трап.}} = -\frac{(b-a)^3}{12} f^{''}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}} = \frac{(b-a)^3}{24} f^{''}(\eta^*)$$
$$\varepsilon_{\text{симп.}} = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{''''}(\eta^*)$$

3.2 Погрешности составных формул

Погрешность составной формулы равна сумме погрешностей, допущенных на отдельных участках.

$\boxed{\varepsilon^{\text{сост.}}_{\text{л.пр.}} :}$

$$[x_k, x_{k+1}] \to \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} f'(\eta_k^*) = \frac{(b-a)^2}{2N^2} f^{'}(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon_{\text{л.пр.}}^{\text{сост.}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(b-a)^2}{2N^2} f^{'}(\eta_k^*) =$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2N} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^{'}(\eta_k^*) = \qquad (1^{**})$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2N} f^{'}(\eta^{**})$$

Аналогично:

$$\varepsilon_{\text{пр.пр.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^2}{2N} f^{'}(\eta^{**}) \qquad (2^{**})$$

$\boxed{\varepsilon_{\text{трап.}}^{\text{сост.}}:}$

$$[x_k, x_{k+1}] \to -\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{12} f''(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^3} f^{''}(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon_{\text{трап.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} \times \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f^{''}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^3}{12N^2} f^{''}(\eta^{**}) \qquad (4^{**})$$

Аналогично:

$$\varepsilon_{\text{ср.пр.}}^{\text{сост.}} = \frac{(b-a)^3}{24N^2} f^{''}(\eta^{**}) \qquad (3^{**})$$

$\boxed{\varepsilon_{\text{симп.}}^{\text{сост.}}:}$

$$[x_k, \underline{x_{k+2}}] \to -\frac{(x_{k+2}-x_k)^5}{2880} f^{(4)}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{90N^5} f^{(4)}(\eta_k^*)$$

$$\varepsilon_{\text{симп.}}^{\text{сост.}} = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} \times \frac{1}{N/2} \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} f^{(4)}(\eta_k^*) = -\frac{(b-a)^5}{180N^4} f^{(4)}(\eta^{**}) \qquad (5^{**})$$

Если продолжать увеличивать степень интерполяционного полинома, то погрешность составных формул имеет следующий вид:

$$\varepsilon = \alpha \frac{(b-a)^{S+1}}{N^S} f^{(S)}(\eta), \alpha = const$$

На практике погрешность оценивается одним из следующих способов:

1. По формулам выше (используется крайне редко).
2. Наиболее популярный - вычисляют интеграл по

какой-то квадратурной формуле для N и $2N$, результаты сравнивают. Если погрешность велика, N удваивается.

3. В тех случаях, когда увеличение N невозможно, сравнивают две разные квадратурные формулы с одним N.