24. Задача Коши решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Явный и неявный методы ломаных Эйлера, метод трапеций

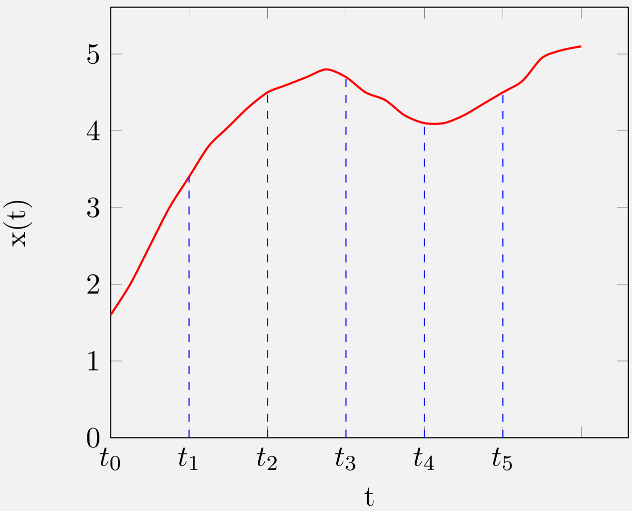
Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 10, 2020

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

Первоначально рассмотрим одно уравнение, хотя все полученные методы сохраняют свой внешний вид и для случая, когда x - вектор.

Задача Коши или задача с начальными условиями:



Исходное дифференциальное уравнение сводится к некоторому разностному, которое потом решается пошаговым методом.

$$t_n = t_0 + n \times h$$[a]

$$x_n \stackrel{\text{def}}{=} x(n), \quad f_n \stackrel{\text{def}}{=} f(t_n, x_n)$$

[a] шаг интегрирования или шаг дискретности

Проинтегрируем уравнение (1) на промежутке $[t_n, t_{n+1}]$:

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau))\, d\tau \tag{2}$$

Различные методы отличаются друг от друга способом вычисления интеграла в формуле (2). Применяем формулу левых прямоугольников:

$$\int_a^b G(x)\, dx \approx (b - a)G(a)$$
$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

Явный метод ломаных Эйлера

Применяем формулу правых прямоугольников:

$$\int_a^b G(x)\,dx \approx (b-a)G(b)$$

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1})$$

Неявный метод ломаных Эйлера

Применяем формулу трапеций:

$$\int_a^b G(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}(G(a)+G(b))$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1}))$$

Неявный метод трапеций

В неявных методах на каждом шаге приходится решать нелинейное уравнение относительно x_{n+1}.