

# 03. Введение в аппроксимацию функций. Основы интерполирования.

Андрей Бареков      По лекциям Устинова С.М.

November 16, 2019

# 1 Введение в аппроксимацию

Исходная функция чаще всего записывается в следующем виде:

1. Аналитически
2. Графически
3. Таблично
4. Алгоритмически

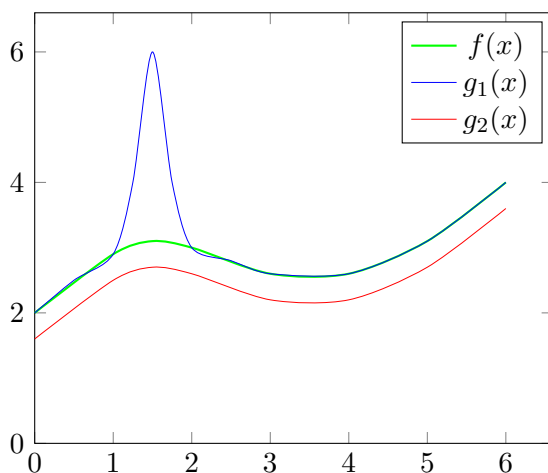
Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой с точки зрения решаемой задачи.

Для сравнения различных аппроксимирующих функций вводится критерий близости:

Пусть  $f(x)$  - исходная функция,  $g(x)$  - её аппроксимация.

1.  $\delta = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \rightarrow \min$  - минимаксный критерий.
2.  $\rho^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \rightarrow \min$  - среднеквадратичный критерий.  
Если функция задана таблично, то есть дискретный аналог среднеквадратичного критерия:  
 $\rho^2 = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - g(x_k))^2 \rightarrow \min$

## 1.1 Сравнение критериев



Функция  $g_1(x)$  лучше аппроксимирует по критерию 2, а  $g_2(x)$  - по критерию 1. На практике лучше та аппроксимация, которая нужна для конкретной задачи.

## 2 Основы интерполирования функций

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k \phi_k(x) \quad (1)$$

$x$	$f(x)$	Аппроксимирующая функция 1 - обобщённый
$x_0$	$f(x_0)$	многочлен.
$x_1$	$f(x_1)$	Потребуем, чтобы во всех узлах таблицы
$\dots$	$\dots$	аппроксимирующая и исходная функции совпадали.
$x_m$	$f(x_m)$	

$$Q_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, m \quad (2)$$

Если эти условия выполняются, то  $Q_m(x)$  - интерполяционный полином.

Система 2 - это линейная система из  $m+1$  уравнения относительно  $m+1$  неизвестных  $a_k$ . Если определитель этой системы не равен 0, то задача имеет единственное решение.

Самая популярная интерполяция - интерполяция полиномом -  $\phi_k(x) = x^k$ . При такой интерполяции определитель системы 2 приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^m \end{vmatrix} \quad (3)$$

Определитель 3 - определитель Вандермонда, не равный 0.

По  $n$  точкам однозначно строится интерполяционный полином  $n - 1$ й степени.

Построить интерполяционный полином можно и в явном виде, не решая систему 2.

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)$$

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} = (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m)$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^m m \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k) \quad (4)$$

Уравнение 4 - интерполяционный полином (в форме) Лагранжа.

По построению очевидно, что  $Q_m(x)$  - полином степени  $m$ .

$$Q_m(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)}{\omega_i(x_i)} f(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, m$$

$$\omega_k(x_i) = 0, \text{ если } k \neq i$$