03. Введение в аппроксимацию функций. Основы интерполирования.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

December 1, 2019

1 Введение в аппроксимацию

Исходная функция чаще всего записывается в следующем виде:

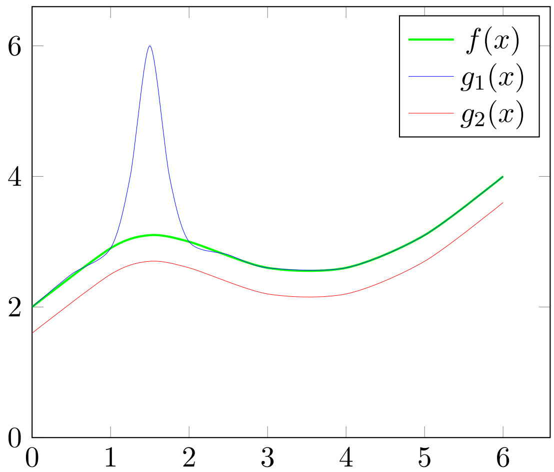
1. Аналитически
2. Графически
3. Таблично
4. Алгоритмически

Аппроксимирующая функция должна быть достаточно простой с точки зрения решаемой задачи.

Для сравнения различных аппроксимирующих функций вводится критерий близости:
Пусть $f(x)$ - исходная функция, $g(x)$ - её аппроксимация.

1. $\delta = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \to \min$ - минимаксный критерий.
2. $\rho^2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 \to \min$ - среднеквадратичный критерий.
   Если функция задана таблично, то есть дискретный аналог среднеквадратичного критерия:
   $\rho^2 = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - g(x_k))^2 \to \min$

1.1 Сравнение критериев



Функция $g_1(x)$ лучше аппроксимирует по критерию 2, а $g_2(x)$ - по критерию 1.

На практике лучше та аппроксимация, которая нужна для конкретной задачи.

2 Основы интерполирования функций

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k \phi_k(x) \tag{1}$$

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\dots$	$\dots$
x_m	$f(x_m)$

Аппроксимирующая функция 1 - обобщённый многочлен.
Потребуем, чтобы во всех узлах таблицы аппроксимирующая и исходная функции совпадали.

$$Q_m(x_i) = f(x_i),\, i = 0, 1, \dots, m \tag{2}$$

Если эти условия выполняются, то $Q_m(x)$ - интерполяционный полином.

Система 2 - это линейная система из $m+1$ уравнения относительно $m+1$ неизвестных a_k. Если определитель этой системы не равен 0, то задача имеет единственное решение.

Самая популярная интерполяция - интерполяция полиномом - $\phi_k(x) = x^k$. При такой интерполяции определитель системы 2 приобретает следующий вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \cdots & x_m^m \end{vmatrix} \tag{3}$$

Определитель 3 - определитель Вандермонда, не равный 0.
По n точкам однозначно строится интерполяционный полином $n-1$й степени.

2.1 Интерполяционный полином Лагранжа

Построить интерполяционный полином можно и в явном виде, не решая систему 2.

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_m)$$
$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{x - x_k} = (x - x_0)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_m)$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0} m \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k) \tag{4}$$

Уравнение 4 - интерполяционный полином (в форме) Лагранжа.
По построению очевидно, что $Q_m(x)$ - полином степени m.

$$Q_m(x_i) = \frac{\omega_i(x_i)}{\omega_i(x_i)} f(x_i) = f(x_i),\ i = 0, 1, \dots, m$$

$\omega_k(x_i) = 0$, если $k \neq i$

2.1.1 Алгоритм построения полинома Лагранжа

1. Числитель с пропущенной точкой

2. Знаменатель - числитель, где вместо x подставляем пропущенную точку

3. Значение функции в пропущенной точке

Пример для полинома Q_2:

$$Q_0(x) = f(x_0)$$

$$Q_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$Q_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$