02. Суммирование функций. Формула Абеля суммирования по частям

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 3, 2020

1 Суммирование функций

$$\Delta F(k) = \varphi(k) \tag{1}$$

$\Delta F(k)=\varphi(k)$

$$\begin{cases} F_1 - F_0 = \varphi_0 \\ F_2 - F_1 = \varphi_1 \\ \dots \\ F_{n+1} - F_n = \varphi_n \end{cases} \Leftrightarrow F_{n+1} - F_0 = \sum_{k=0}^{n} \varphi_k \tag{2}$$

По $\varphi(k)$ ищем $F(k)$

Уравнение (2) является дискретным аналогом формулы Ньютона-Лейбница.

1.1 Пример

$$\sum_{k=0}^{N} a^k = \left[\Delta F(k) = a^k; \Delta a^k = a^k(a-1), a^k = \frac{\Delta a^k}{a-1}; F(k) = \frac{a^k}{a-1}\right] =$$
$$= \frac{a^{N+1}-1}{a-1} - \frac{1}{a-1} = \frac{a^{N+1}-1}{a-1} = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

1.2 Формула Абеля суммирования по частям

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\begin{gathered} \int_a^b \left| \frac{d}{dx}(U(x)v(x)) = u(x)v(x) + U(x)\frac{dv(x)}{dx} \right. \\ \int_a^b u(x)v(x)\,dx = U(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b U(x)\frac{dv}{dx}\,dx \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=m}^{n} \left| \Delta(U(k)v(k)) = v(k+1)\Delta U(k) + U(k)\Delta v(k) = \right. \\ = [u(k+1)v(k+1)]^{(*)} + U(k)\Delta v(k) \\ \sum_{k=m}^{n} u(k+1)v(k+1) = U(k)v(k)\Big|_m^{n+1} - \sum_{k=m}^{n} U(k)\Delta v(k) \end{gathered} \tag{4}$$

$(*)$
$\Delta(f_k g_k)=f_k\Delta g_k+g_{k+1}\Delta f_k$
$\Delta(f_k)=f_{k+1}-f_k$
$\Delta U(k)=\sum_{i=0}^{k+1} u(i)-$
$-\sum_{i=0}^{k} u(i)=u(k+1)$

Формула (4) - формула Абеля суммирования по частям.

1.2.1 Классический пример

$$\sum_{k=0}^{N} ka^k$$

Будем использовать формулу Абеля суммирования по частям:

$$\sum_{k=m}^{n} u(k+1)v(k+1) = U(k)v(k)\Big|_{m}^{n+1} - \sum_{k=m}^{n} U(k)\Delta v(k)$$

Но, чтобы произвести замену, нам нужно свдинуть индекс $k+1$ на единицу, то есть

$$v(k) = k-1, u(k) = a^{k-1}$$

Тогда получим $U(k)$

$$U_k = \sum_{i=0}^{k} a^{i-1} = \frac{1}{a} \times \left[\frac{a^{k+1}-1}{a-1}\right]^{(*)}$$

$$\sum_{k=0}^{N} ka^k = \frac{1}{a}\frac{a^{k+1}-1}{a-1}(k-1)\Big|_{0}^{N+1} - \left[\sum_{k=0} N\frac{1}{a}\frac{a^{k+1}-1}{a-1}\right]^{(**)} =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{a^{N+2}-1}{a-1}N + \frac{1}{a} - \frac{1}{a-1}\sum_{k=0}^{N} a^k + \frac{N+1}{a(a-1)} =$$

$$= \frac{Na^{N+2} - Na^{N+1} - a^{N+1} + a}{(a-1)^2} = \frac{Na^{N+1}}{a-1} - \frac{a^{N+1}-a}{(a-1)^2}$$

(*)Формула геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n * q - 1}{q-1}$$

(**)Расписали сумму:

$$\sum_{k=0} N\frac{1}{a}\frac{a^{k+1}-1}{a-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} a^k + \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{a(a-1)}$$