01. Конечные разности и их свойства.

Андрей Бареков   По лекциям Устинова С.М.

November 12, 2019

1 Конечные разности

x	$f(x)$
x_0	$f(x_0)$
x_1	$f(x_1)$
$\dots$	$\dots$
x_m	$f(x_m)$

$x_k = x_0 + k \times h$

$$\Delta_h f(x_k) = f(x_{k+1} - f(x_k)) = f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)$$

$$f_k \stackrel{\text{def}}{=} f(k)$$

$$\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = f_{k+1} - f_k$$

1.1 Свойства конечных разностей

1. $\Delta\alpha = \alpha - \alpha = 0$
2. $\Delta(\alpha \times f_k) = \alpha \Delta f_k$
3. $\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k$
4. $\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k \pm f_{k+1}g_k = f_{k+1}\Delta g_k + g_k \Delta f_k = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k$
5. $\Delta k^S = (k+1)^S - k^S = k^S + Sk^{S-1} + \frac{S(S-1)}{2!}k^{S-2} + \dots - k^S$
   Конечная разность от полинома степени S это полином степени $S-1$.

1.2 Таблица конечных разностей

1. $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k(a-1)$
2. $\Delta \sin k = \sin(k+1) - \sin k = 2\sin\frac{1}{2}\cos(k+\frac{1}{2})$
3. $\Delta \cos k = \cos(k+1) - \cos k = -2\sin\frac{1}{2}\sin(k+\frac{1}{2})$

2 Разделённые разности

$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$
Аналогично производным высших порядков вводятся разделённые разности:

$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$
$\dots$
$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+s}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s-1})}{x_{k+s} - x_k}$
Аналогично вводятся конечные разности высших порядков:

$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$

$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$
$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k$
...
Если узлы таблицы равноотстоящие, то можно использовать и конечные,

и разделённые разности. Установим связь между ними для равноотстоящих узлов:
$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$

$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2}$
По индукции легко показать, что:

$f(x_k; x_{k+1}; \ldots; x_{k+s}) = \frac{\Delta^s f_k}{s! \times h^s}$