04. Разделённые разности и их связь с конечными.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 3, 2020

1 Разделённые разности

Для равноотстоящих узлов таблицы конечные разности являются хорошей характеристикой изменения функции, аналогичной производной для непрерывного случая. При произвольном же расположении узлов таблицы целесообразно ввести понятие *разделенной разности.*

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Аналогично производным высших порядков вводятся разделённые разности высших порядков:

$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k}$$
$$\dots$$
$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}; \dots; x_{k+s}) - f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s-1})}{x_{k+s} - x_k}$$

Аналогично вводятся конечные разности *(П.1)* высших порядков:

$$\Delta f_k = f_{k+1} - f_k$$
$$\Delta^2 f_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k = f_{k+2} - f_{k+1} - f_{k+1} + f_k = f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k$$
$$\Delta^3 f_k = \Delta^2 f_{k+1} - \Delta^2 f_k = f_{k+3} - 3f_{k+2} + 3f_{k+1} - f_k$$
$$\dots$$

Если узлы таблицы равноотстоящие, то можно использовать и конечные, и разделённые разности.

1.1 Связь между конечными и разделенными разностями для равноотстоящих узлов

$$f(x_k; x_{k+1}) = \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{\Delta f_k}{h}$$
$$f(x_k; x_{k+1}; x_{k+2}) = \frac{f(x_{k+1}; x_{k+2}) - f(x_k; x_{k+1})}{x_{k+2} - x_k} = \frac{\frac{\Delta f_{k+1}}{h} - \frac{\Delta f_k}{h}}{2h} = \frac{\Delta^2 f_k}{2h^2}$$

По индукции легко показать, что:

$$f(x_k; x_{k+1}; \dots; x_{k+s}) = \frac{\Delta^s f_k}{s! \times h^s}$$