

## 25. Методы Адамса. Локальная и глобальная погрешности, степень метода

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 14, 2020

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

$$x_{n+1} = x_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (2)$$

Основные формулы

## 1 Методы Адамса

По предыдущим точкам строится интерполяционный полином для  $f(\tau, x(\tau))$ , подставляется под знак интеграла в формуле (2) и интегрируется. Так, например, по двум точкам строится полином:

$$f(\tau, x(\tau)) \approx Q_1(\tau) = \frac{\tau - t_n}{t_{n-1} - t_n} f_{n-1} + \frac{\tau - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} f_n, \\ x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} (3f_n - f_{n-1}). \quad (3)$$

Аналогично по четырём точкам  $(t_n, \dots, t_{n-3})$  строится полином третьей степени, и после интегрирования получаем:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}). \quad (4)$$

### Достоинства и недостатки

- + на каждом шаге функция  $f$  вычисляется только один раз. Остальные значения берутся с предыдущих шагов.
- методы Адамса не самостартующие. Так, например, метод (4) - разностное уравнение четвертого порядка, а начальное условие только одно. Для старта необходимо рассчитать три дополнительных начальных условия какими-то другими методами, а затем перейти к методу Адамса.

## 2 Локальная и глобальная погрешность

**Локальная погрешность** - погрешность, допущенная на одном шаге при условии, что все предыдущие точки были получены точно.

**Глобальная погрешность** - разность между точным и приближенным

решением на  $n$ -м шаге.

Истинной погрешностью является именно глобальная, но в общем случае ее оценка затруднена, поэтому оценивают локальную. В качестве примера рассмотрим явный метод ломаных Эйлера.

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n). \quad (5)$$

**I.**

$$f(t, x) = f(t)$$

Формула (5) превращается в квадратурную формулу левых прямоугольников.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0), \\ x_2 &= x_1 + hf(t_1), \\ x_3 &= x_2 + hf(t_2). \end{aligned}$$

Общая (глобальная) погрешность равна сумме погрешностей (локальных), допущенных на предыдущих шагах.

**II.** Общий случай

$$f(t, x) = f(t, x)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + hf(t_0, x_0), \\ \underbrace{x_2}_{\text{погр.}} &= \underbrace{x_1}_{\text{погр.}} + hf(t_1, \underbrace{x_1}_{\text{погр.}}), \\ x_3 &= x_2 + hf(t_2, x_2). \end{aligned}$$

В общем случае глобальная погрешность является очень сложной функцией, зависящей от всех погрешностей, допущенных на предыдущих шагах.

## 2.1 Устойчивые и неустойчивые методы

Методы делятся на *устойчивые* и *неустойчивые*. Если локальная погрешность, допущенная на одном шаге, резко возрастает на последующих шагах (чаще всего экспоненциально), то говорят о *неустойчивых* методах.

То, как будет накапливаться погрешность, зависит от:

1. вида функции  $f(t, x)$ ,
2. величины  $h$ ,
3. выбранного метода.

Для обеспечения *малой глобальной погрешности* необходимо выполнить два условия:

1. Обеспечить малую локальную погрешность на каждом шаге,
2. Обеспечить устойчивость метода.

Для характеристики локальной погрешности вводится понятие *степень(порядок) точности метода*.

### 3 Степень/порядок точности метода<sup>1</sup>

Все ранее рассмотренные методы могут быть записаны в следующем виде:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + hF(t_n, h, x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-S})} \quad (6)$$

См. примеры методов, чтобы понять общность формулы.

Разложим правую часть формулы (6) в ряд по степеням  $h$  в точке  $t_n$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h^k \cdot \frac{d^k x(t_n)}{dt^k}} \quad (7) \quad \frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

Разложение в ряд выбранного метода, коэффициенты  $\alpha_k$  зависят от метода.

С другой стороны,  $x_{n+1}$  можно разложить в ряд по степеням  $h$  в точке  $t_n$ :

$$\boxed{x_{n+1} = x(t_n + h) = x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{d^k x(t_n)}{dt^k}} \quad (8) \quad \begin{aligned} x_{n+1} &= x(t_{n+1}), \\ t_{n+1} &= t_n + h \end{aligned}$$

Точное разложение в ряд.

Локальная погрешность будет тем меньше, чем больше первых слагаемых в разложениях (7) и (8) совпадают. Если коэффициенты разложений совпадают до  $h^S$  включительно, то говорят, что метод имеет степень или порядок точности  $S$ , тогда главный член погрешности  $\sim h^{S+1}$ .

Установим степень точности для всех ранее полученных методов:

$$\boxed{x_{n+1} = x_n(t_n + h) = x_n + hx' + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \frac{h^3}{3!}x'''(t_n) + \dots}$$

сравним *точное разложение* с *разложением методов*.

<sup>1</sup>При переводе на русский данных терминов может произойти проблема с пониманием. Так, в английском языке методы по точности разделяют на first-order, second-order, etc., а по степени разностного уравнения - one-step, two-step, etc. При переводе оба понятия можно назвать степенью метода, что может вызвать затруднение.

### 3.1 Явный метод Эйлера

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + \underline{hx'(t_n)},$$

метод **первой** степени.

### 3.2 Неявный метод Эйлера

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + hx'(t_n + h) \\ &= x_n + h(\underline{x'(t_n)} + \frac{h}{1!}x''(t_n) + \dots), \end{aligned}$$

метод **первой** степени.

### 3.3 Неявный метод трапеции

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n) = x_n + \frac{h}{2}(x'(t_n + h) + x'(t_n)) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}(x'(t_n) + \frac{h}{1!}x''(t_n) + \frac{h^2}{2!}x'''(t_n) + \dots + x'(t_n)) = \\ &= x_n + \underline{hx'} + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \dots, \end{aligned}$$

метод **второй** степени.

### 3.4 Метод Адамса (формула (3))

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1}) = x_n + \frac{h}{2}(3x'(t_n) - x'(t_n - h)) = \\ &= x_n + \frac{h}{2}(3x'(t_n) + \frac{h}{1!}x''(t_n) - \frac{h^2}{2!}x'''(t_n) + \dots - x'(t_n)) = \\ &= x_n + \underline{hx'} + \frac{h^2}{2}x''(t_n) + \dots, \end{aligned}$$

метод **второй** степени.

Можно показать, что метод Адамса, формула (4), имеет четвертую степень точности.