10. Общий подход к построению квадратурных формул. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса, Чебышёва, Гаусса

Андрей Бареков   Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 8, 2020

1 Общий подход

Все ранее полученные (не составные) квадратурные формулы имели следующий вид:

$$\int_a^b f(x)\ dx \approx \sum_{k=1}^{S} A_k f(x_k) \tag{1}$$

$$\underbrace{A_k(\text{веса}) \to\ S,\ \ x_k(\text{узлы}) \to S}_{2S}$$

Выдвигается идея, выбрать A_k и x_k так, чтобы формула (1) была точна для полиномов заданной степени.
Если $f(x)$ хорошо описывается полиномом этой степени, то и ответ будет хороший. В противном случае, применяем составные формулы.

Потребуем, чтобы формула (1) была точна для полинома N степени.

$$\begin{aligned} 1.&\ \ f(x) = \alpha - const, \\ 2.&\ \ f(x) = x, \\ 3.&\ \ f(x) = x^2, \\ \dots& \\ N+1.&\ \ f(x) = x^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{S} A_k = b - a \\ &\sum_{k=1}^{S} A_k x_k = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ &\sum_{k=1}^{S} A_k x_k^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} \\ &\dots\dots\dots \\ &\sum_{k=1}^{S} A_k x_k^N = \frac{b^{N+1} - a^{N+1}}{N+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Различные семейства квадратурных формул отличаются друг от друга выбором $\underbrace{x_k}_{\text{узлов}}$ и $\underbrace{A_k}_{\text{весов}}$, на которые накладываются дополнительные условия.

2 Семейство квадратурных формул Ньютона-Котеса

Узлы x_k - равноотстоящие.

$$h = \frac{b-a}{S-1}, \qquad x_k = a + (k-1)h, \qquad x_1 = a, \qquad x_S = b.$$

Для равноотстоящих узлов при использовании составных квадратурных формул ранее вычисленные $f(x_k)$ не надо вычислять вновь, что уменьшает объём вычислений примерно в два раза.
Система (2) имеет при этом единственное решение.

Формулы Ньютона-Котеса гарантированно точны для полиномов степени $S-1$.

Если решать систему (2) для $S = 1, 2, 3 \ldots$, то получим квадратурные формулы, которые получали из интерполяционных полиномов.

3 Семейство квадратурных формул Чебышёва

Формулы Чебышёва наиболее часто используются, когда $f(x_k)$ измерены с заметной погрешностью. С этой целью A_k выбираются одинаково.

Из уравнения 1 системы (2) видим, что $A = \frac{b-a}{S}$, тогда:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{S} \sum_{k=1}^{S} f(x_k)$$

Решение системы (2) должно существовать, быть вещественным, и все x_k должны принадлежать промежутку (a, b).
Дальнейшее повышение точности реализуется за счет составных квадратурных формул.

Формулы Чебышёва гарантированно точны для полиномов степени S, при этом они существуют только для $S = 1 - 7, 9$.

4 Семейство квадратурных формул Гаусса

Формулы наивысшей алгебраической степени точности.

В формулах Гаусса нет никаких дополнительных ограничений, и все $2S$ параметров направлены на решение системы (2).

Система (2) имеет единственное решение для любого значения S для формул Гаусса.

Формулы Гаусса гарантированно точны для полиномов степени $2S - 1$

Значения A_k и x_k для всех квадратурных формул заносят в справочники для стандартного промежутка (чаще всего это $[-1; 1]$ или $[0; 1]$), а для произвольного промежутка $[a; b]$ выполняют замену переменных:

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t,\ t \in [-1; 1]$$

$$dx = \frac{b-a}{2}dt$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{+1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t)\ dt$$

$$\approx \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{S} A_k f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_k)$$

A_k и t_k взяты из справочника для стандартного промежутка