

11. Адаптивные квадратурные формулы.  
Подпрограмма **QUANC8**

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 7, 2020

Программа адаптируется к виду функции и использует переменный шаг интегрирования. Маленький там, где функция меняется быстро и обладает большими производными, и относительно большой там, где меняется медленно. Программа **QUANC8** минимизирует объём вычислений при заданных ограничений на погрешность.

## 1 Особенности работы QUANC8

Рассмотрим промежуток длиной  $h_i$  внутри промежутка  $[a; b]$ :

- $I_i$  - точное значение интеграла на этом промежутке
- $P_i$  - значение интеграла, вычисленное по несоставной квадратурной формуле Ньютона-Котеса с 9 узлами
- $Q_i$  - промежуток разделили пополам, на каждой половине применили ту же формулу, результаты сложили (по сути, это составная квадратурная формула с вдвое большим количеством узлов).

Для составных формул Ньютона-Котеса формула погрешности имеет следующий общий вид:

$$\alpha \frac{(b-a)^{S+1}}{N^S} f^{(S)}(\eta) \quad (*)$$

Для формулы Ньютона-Котеса с 9 узлами  $S = 10$ . Исходя из формулы погрешности:

$$(I_i - P_i) \approx 2^S (I_i - Q_i)$$

$$I_i = \frac{2^S Q_i - P_i}{2^S - 1}$$

Тогда:

$$I_i - Q_i = \frac{2^S Q_i - P_i}{2^S - 1} - Q_i = \frac{Q_i - P_i}{2^S - 1} = \underbrace{\frac{Q_i - P_i}{1023}}_{\text{Для QUANC8}}$$

Интеграл на промежутке  $h_i$  считается вычисленным, если величина  $\left| \frac{Q_i - P_i}{1023} \right|$  меньше заданной величины. Требование к погрешности в программе реализуется следующим образом:

$$\left| \frac{Q_i - P_i}{1023} \right| \leq \frac{h_i}{b-a} \max\{\varepsilon_A, \varepsilon_R \times \tilde{I}\}$$

$\varepsilon_A$  - абсолютная погрешность,

$\varepsilon_R$  - относительная погрешность,

$\tilde{I}$  - грубая оценка интеграла.

Пользователь выбирает один из трёх вариантов:

1.  $\varepsilon_R = 0, \varepsilon_A \neq 0 \Rightarrow$  множитель  $\frac{h_i}{b-c}$  отражает вклад в общую погрешность для промежутка.
2.  $\varepsilon_A = 0, \varepsilon_R \neq 0$ .
3.  $\varepsilon_A \neq 0, \varepsilon_R \neq 0$ . Контролируется смешанная погрешность.

## 2 Работа алгоритма

1. Вычисляем  $P_i$  и  $Q_i$  для всего промежутка  $[a; b]$
2. Если контроль погрешности не прошел, значение функции на правой половине промежутка запоминаем, и повторяем процедуру для левой половины промежутка.

Деление пополам продолжается до тех пор, пока крайний слева промежуток не будет принят. Затем обращаются к ближайшему правому соседу.

В программе предусмотрено два ограничения от заикливания:

1. Промежуток разрешается делить пополам не более 30 раз. Если после 30-тикратного деления контроль погрешности не прошёл, результат принимается, количество промежутков с непрошедшим контролем записывается в целую часть переменной **FLAG**.
2. Задаётся максимальное значение вычислений функции  $f(x)$ . Если эта величина достигнута, то информация о точке  $x^*$ , в которой программа прервала свою работу, записывается в дробную часть переменной **FLAG**.

Программа имеет параметры:

$$(\underbrace{FUN}_{f(x)}, \underbrace{A, B}_{[a; b]}, \underbrace{EA, ER}_{\varepsilon_A, \varepsilon_R}, \underbrace{RESULT}_{\text{знач. интегр.}}, \underbrace{ERR}_{\text{оценка погр.}}, \underbrace{NOFUN}_{\text{кол-во выч. } f(x)}, FLAG)$$