

01. Конечные разности и их свойства. Таблица конечных разностей.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 4, 2020

1 Конечные разности

x	$f(x)$	$\Delta_h f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k) = f(x_0 + (k+1)h) - f(x_0 + kh)$ $f_k \stackrel{\text{def}}{=} f(k)$ $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = f_{k+1} - f_k$
x_0	$f(x_0)$	
x_1	$f(x_1)$	
\dots	\dots	
x_m	$f(x_m)$	

$$x_k = x_0 + k \times h$$

1.1 Свойства конечных разностей

1. $\Delta \alpha = \alpha - \alpha = 0$
2. $\Delta(\alpha \times f_k) = \alpha \Delta f_k$
3. $\Delta(f_k + g_k) = \Delta f_k + \Delta g_k$
4. $\Delta(f_k g_k) = f_{k+1} g_{k+1} - f_k g_k \pm f_{k+1} g_k =$
 $= f_{k+1} \Delta g_k + g_k \Delta f_k = f_k \Delta g_k + g_{k+1} \Delta f_k$
5. $\Delta k^S = (k+1)^S - k^S = k^S + S k^{S-1} + \frac{S(S-1)}{2!} k^{S-2} + \dots - k^S =$
 $= \frac{S!}{1!(S-1)!} k^{S-1} + \frac{S!}{2!(S-2)!} k^{S-2} + \dots + \frac{S!}{(S-1)!1!} k + 1$

Конечная разность от полинома степени S это полином степени $S - 1$.

1.2 Таблица конечных разностей

1. $\Delta a^k = a^{k+1} - a^k = a^k(a - 1)$
2. $\Delta \sin k = \sin(k+1) - \sin k = 2 \sin \frac{1}{2} \cos(k + \frac{1}{2})$
3. $\Delta \cos k = \cos(k+1) - \cos k = -2 \sin \frac{1}{2} \sin(k + \frac{1}{2})$