

22. Методы бисекции, секущих, обратной  
параболической интерполяции для решения  
нелинейных уравнений. Подпрограмма ZEROIN

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 10, 2020

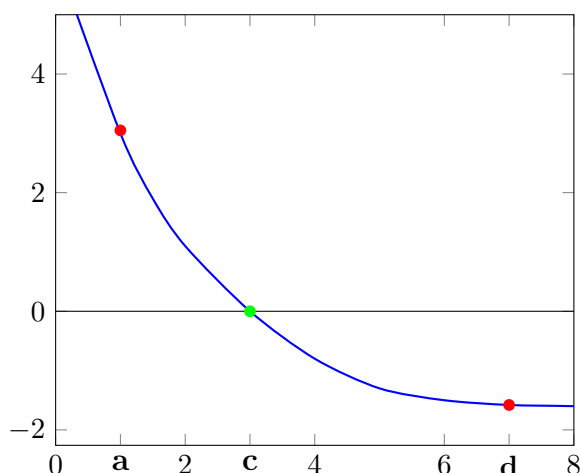
# 1 Решение нелинейных уравнений

Остановимся на уравнении

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Решению уравнения (1) предшествует подготовительный этап выявления промежутка  $[a, b]$ , на котором только один 0 и  $f(a)f(b) < 0$ . Так будет найден единственный вещественный корень уравнения.

## 1.1 Метод бисекции (или метод *дихотомии*, или метод *половинного деления*)



Вычисляем значение функции в точке

$$c = \frac{a + b}{2}$$

и вычисляем  $f(c)$ . Если  $\text{sign}(f(a)) = \text{sign}(f(c))$ , то "отбрасываем" эту половину, иначе "отбрасываем" вторую половину. Далее рекурсия...

За одно вычисление  $f(x)$  на шаге промежуток гарантированно сокращается *в два раза* независимо от вида функции. Если поведение функции хорошо прогнозируется и она имеет простой вид, то ответ можно получить и быстрее.

## 1.2 Метод секущих

По двум точкам строим интерполяционный полином Лагранжа первой степени и очередное - 0 этого полинома

$$Q_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b),$$
$$c = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(a).$$

Метод секущих с разделенной разностью выглядит следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Новый промежуток будет  $[c, b]$  или  $[a, c]$  в зависимости от знака  $f(x)$  в точке  $c$ . Замедление сходимости метода часто происходит, когда очередное приближение получается слишком близко к одному из концов промежутка.

### 1.3 Метод обратной параболической интерполяции

Если функция вычислена более, чем в двух точках, то эту информацию тоже можно использовать.

По трем точкам  $x_k, x_{k-1}, x_{k-2}$  строится интерполяционный полином второй степени для *обратной* функции, при этом выполняются условия  $x_i = g(f_i)$ ,  $i = k, k-1, k-2$ . В качестве следующего приближения берется  $x_{k+1} = g(0)$ . Одна из предыдущих точек удаляется.

Важно, чтобы три значения  $f_i$  были бы различными, чтобы избежать деления на 0 (см. формулы "Метода секущих").

## 2 Подпрограмма ZEROIN

*Всегда работает хорошо.*

$$\underbrace{ZEROIN}_{function}(A, B, \underbrace{F}_{f(x)}, EPS).$$

Внутри программы два алгоритма:

- метод обратной параболической интерполяции (основной),
- метод бисекции (используется на несколько шагов, если основной метод замедляется).