

07. Выбор узлов интерполирования.  
Интерполяционный полином Ньютона для  
равно- и неравноотстоящих узлов.

Андрей Бареков      Ярослав Пылаев  
По лекциям Устинова С.М.

January 15, 2020

# 1 Выбор узлов интерполирования

Реально повлиять на величину погрешности можно только минимизируя величину  $|\omega(x)|$ , что делается выбором узлов интерполирования.

$$|\omega(x)| = |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)| \rightarrow \min$$

## 1.1 Случай 1

- Задана степень полинома  $m$
- Есть таблица большой длины ( $> (m + 1)$ )
- Задана точка  $x^*$ , в которой оценивается погрешность

Очевидно, что лучший выбор - узлы, ближайšie к  $x^*$ .

## 1.2 Случай 2

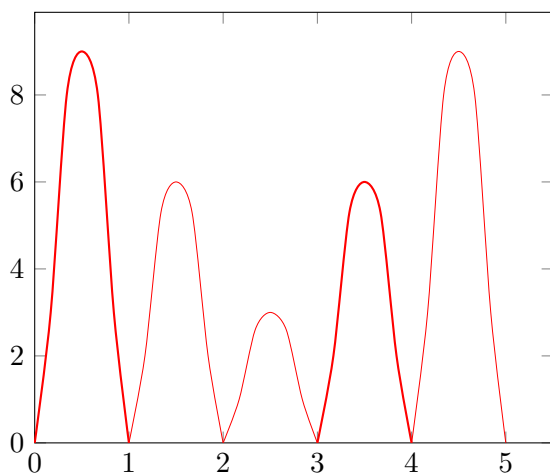
- Задан промежуток интерполирования  $[a, b]$
- Задана степень полинома  $m$
- Точка  $x^*$  заранее *неизвестна*

Требуется выбрать узлы так, чтобы в худшем случае погрешность была бы минимальной.

$$\max |\omega(x)| \rightarrow \min, x \in [a, b]$$

Интуитивно ясно, что узлы следует располагать симметрично относительно середины промежутка.

Рассмотрим случай равноотстоящих узлов:



Для уменьшения погрешности узлы интерполирования необходимо сместить ближе к краям промежутка, чтобы "колокольчики" стали примерно одинаковой высоты. Оптимальный выбор узлов отвечает нулям ортогональных полиномов Чебышёва.

### 1.3 Как на практике оценивается погрешность

Непосредственно оценивают погрешность по формуле выше редко, т.к. трудно оценивать производную. В инженерной практике часто используется следующий пример:

1. Строим  $Q_m(x)$
2. Добавляем  $x_{m+1}$ , ещё один узел
3. Строим  $Q_{m+1}(x)$
4. Оцениваем погрешность по разности значений этих полиномов в нужной точке

Использовать для этих целей полином Лагранжа неэффективно. На практике хотелось бы построить интерполяционный полином так, чтобы полином степени  $m+1$  получался добавлением к нему какого-то слагаемого степени  $m$ , как это происходило в построении степенного ряда Тейлора.

## 2 Полином Ньютона

Рассмотрим первую разделённую разность:

$$f(x; x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
$$f(x) = \underbrace{f(x_0)}_{Q_0} + \underbrace{(x - x_0)(f(x; x_0))}_{R_0} \quad (1)$$

Рассмотрим вторую разделённую разность:

$$f(x; x_0; x_1) = \frac{f(x; x_0) - f(x_0; x_1)}{x - x_1}$$

Выразим первую разделённую разность через вторую и подставим в формулу (1):

$$f(x) = \underbrace{\underbrace{f(x_0)}_{Q_0} + (x - x_0)f(x_0; x_1)}_{Q_1} + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1)f(x; x_0; x_1)}_{R_1}$$

Продолжая этот процесс, и выражая вторую разделённую разность через третью, третью через четвертую и т.д., получаем:

$$f(x) = Q_m(x) + \underbrace{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)f(x; x_0; x_1; \dots; x_m)}_{R_m}$$

$$Q_m(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{m-1})f(x_0; x_1; \dots; x_m) \quad (2)$$

### Полином Ньютона для неравноотстоящих узлов

Если узлы интерполирования равноотстоящие, то в формуле (2) можно заменить разделённые разности на конечные. С этой целью выполним замену переменных:

$$\begin{cases} x = x_0 + ht \\ x_k = x_0 + kh \end{cases}, \text{ в узлах } t - \text{ целое}$$

$$f(x_0; \dots; x_m) = \frac{\Delta^m f(x_0)}{m! h^m} \quad (3)$$

$$(x - x_k) = h(t - k)$$

$$\begin{aligned} \text{Знаем, что } x &= x_0 + ht \\ x - x_1 &= x - x_0 - h = th - h = h(t - 1) \\ \text{Тогда } x - x_k &= h(t - k) \\ \Rightarrow (x - x_0)(x - x_1) &= t(t - 1)h^2 \end{aligned}$$

Тогда формула (2) при подстановке (3) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} Q_m(x_0 + ht) &= f(x_0) + \frac{t}{1!} \Delta f(x_0) + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 f(x_0) + \\ &+ \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-m+1)}{m!} \Delta^m f(x_0) \end{aligned}$$

### Полином Ньютона для равноотстоящих узлов

Полиномы строятся последовательно в соответствии со следующей таблицей:

$x$	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
$x_0$	$f(x_0)$	$\underline{\Delta f(x)}$	$\underline{\underline{\Delta^2 f(x)}}$
$x_1$	$f(x_1)$	$\underline{\underline{\Delta f(x_1)}}$	
$x_2$	$\underline{\underline{f(x_2)}}$		

Каждая новая степень полинома требует построения очередной диагонали в таблице.