19. Устойчивость решений дифференциальных и разностных уравнений.

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 9, 2020

1 Общий случай

Общий нелинейный случай:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),\ x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

Будем изучать характер поведения решения при возмущениях в начальных условиях. При не очень сильных ограничениях на функцию f, на конечном промежутке $t \in [t_0, T]$ имеется непрерывная зависимость решения от начальных условий. Поэтому наибольший интерес вызывает поведение решения при $t \to \infty$.

Решение $x(t)$ системы (1) называется устойчивым по Ляпунову, если:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y(t))$$
$$(\|x(t_0) - y(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - y(t)\| < \varepsilon)$$

в т.ч. при $t \to \infty$.

Определение 1.

Здесь $y(t)$ - другое решение (1), которое отличается начальными условиями.

Решение $x(t)$ системы (1) называется асимптотически устойчивым по Ляпунову, если оно устойчиво, и дополнительно выполняется условие:

$$\lim(x(t) - y(t)) = 0$$

Определение 2.

Аналогичные определения можно ввести для систем разностных уравнений $x_{n+1} = F(n, x_n)$ с заменой непрерывной переменной t на целую переменную n.

Для некоторых систем уравнений вывод об устойчивости решения можно сделать, не получая решения в явном виде. Так, например, для линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей выводы об устойчивости можно сделать на основе собственных значений этой матрицы.

2 Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t),\ x(0) = x_0 \tag{1}$$

Решение (1):

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \tag{2}$$

Пусть $y(t)$ - другое решение (1), отличающееся начальными условиями:

$$y(t) = e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} f(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

Вычтем (2) из (3):

$$x(t) - y(t) = e^{At}(x_0 - y_0)$$
$$\varepsilon\delta - \textbf{language}: \ \|x(t) - y(t)\| \leq \|e^{At}\| \times \|x_0 - y_0\|$$

Для выполнения условия устойчивости элементы матрицы e^{At} при $t \to \infty$ должны быть ограничены, а для асимптотической устойчивости - стремиться к 0.
Пусть первоначально собственные значения матрицы A различны. Воспользуемся формулой Лагранжа-Сильвестра [1]:

$$f(A) = \sum_{k=1}^{N} T_k f(\lambda_k)$$
$$T_k = \frac{(A - \lambda_1 E) \dots (A - \lambda_{k-1} E)(A - \lambda_{k+1} E) \dots (A - \lambda_N E)}{(\lambda_k - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_{k-1})(\lambda_k - \lambda_{k+1}) \dots (\lambda_k - \lambda_N)}$$

Запишем матричную экспоненту по формуле Лагранжа-Сильвестра:

$$e^{At} = \sum_{k=1}^{N} T_k e^{\lambda_k t}$$

2.1 Достаточное условие для асимптотической устойчивости

$$\lambda_k = \alpha + i\omega$$
$$e^{\lambda_k t} = e^{\alpha t} \times e^{i\omega t} = e^{\alpha t}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$\Re(\lambda_k)^2 < 0, \, \forall \lambda_k$$

Если среди собственных значений есть кратные, появляются составляющие в решении[3]:

$$e^{\lambda_k^* t} P_{S-1}(t)$$

, где S - кратность корня, а P_{S-1} - полином степени $S - 1$.

[1]теорема №7 о матричных функциях
[2]действительная часть
[3]λ_k^* здесь и далее - кратные собств. знач.

2.2 Достаточное условие для устойчивости

$$(\Re(\lambda_k) \leq 0, \, \forall \lambda_k) \wedge (\Re(\lambda_k^*) < 0, \, \forall \lambda_k^*)^4$$

2.3 Необходимое условие для неустойчивости

$$(\Re(\lambda_k) > 0, \, \exists \lambda_k) \vee (\Re(\lambda_k^*) = 0, \, \exists \lambda_k^*)^5$$

3 Устойчивость решений линейных разностных уравнений с постоянной матрицей

$$x_{n+1} = Bx_n + \varphi(n) \tag{1}$$

Решение (1):

$$x_n = B^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k \varphi_{n-1-k} \tag{2}$$

Пусть $y(t)$ - другое решение (1), отличающееся начальными условиями:

$$y_n = B^n y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} B^k \varphi_{n-1-k} \tag{3}$$

Вычтем (2) из (3):

$$x_n - y_n = B^n(x_0 - y_0)$$
$$\varepsilon\delta - \textbf{language}: \; \|x_n - y_n\| \leq \|B^n\| \times \|x_0 - y_0\|$$

Для выполнения условия устойчивости элементы матрицы B^n при $t \to \infty$ должны быть ограничены, а для асимптотической устойчивости - стремиться к 0.
Пусть первоначально собственные значения матрицы B различны. Воспользуемся формулой Лагранжа-Сильвестра:

$$B^n = \sum_{k=1}^{N} T_k \lambda_k^n$$

Аналогично дифференциальным уравнениям, имеем:

[4] Все $\Re(\lambda_k)$ меньше либо равны 0, и среди собственных значений с $\Re(\lambda_k) = 0$ не должно быть кратных.

[5] Наличие хотя бы одного собственного значения с $\Re(\lambda_k) > 0$, или кратного собственного значения с $\Re(\lambda_k) = 0$

3.1 Достаточное условие для асимптотической устойчивости

$$|\lambda_k| < 1, \, \forall \lambda_k$$

Если среди собственных значений есть кратные, появляются составляющие в решении:

$$(\lambda_k^*)^n P_{s-1}(n)$$

, где S - кратность корня, а P_{S-1} - полином степени $S-1$.

3.2 Достаточное условие для устойчивости

$$(|\lambda_k| \le 1, \, \forall \lambda_k) \wedge (|\lambda_k^*| < 1, \, \forall \lambda_k^*)$$ [6]

3.3 Необходимое условие для неустойчивости

$$(|\lambda_k| > 1, \, \exists \lambda_k) \vee (|\lambda_k^*| = 1, \, \exists \lambda_k^*)$$ [7]

А как связаны между собой понятия устойчивости решения и его ограниченности?

[6] Все $|\lambda_k|$ меньше либо равны 1, и среди собственных значений с $|\lambda_k| = 1$ не должно быть кратных.

[7] Наличие хотя бы одного собственного значения с $|\lambda_k| > 1$, или кратного собственного значения с $|\lambda_k| = 1$