27. Глобальная погрешность. Устойчивость метода. Ограничение на шаг. Явление жёсткости и методы решения жёстких систем

Андрей Бареков Ярослав Пылаев
По лекциям Устинова С.М.

January 11, 2020

Для обеспечения малой величины глобальной погрешности необходимо обеспечить не только малую локальную погрешность, но и устойчивость метода.

Устойчивость методов будем анализировать на примере тестовой системы - линейной системы дифференциальных уравнений с постоянной матрицей. Нелинейная система в малой окрестности какой-то точки может быть хорошо аппроксимирована линейной системой, и если метод плохой для линейной системы, то и в общем случае он плохой.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{1}$$

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{2}$$

$x^{'} = Ax$

$\Re(\lambda_k) < 0$

$x_{n+1} = Bx_n$

$|\lambda_k(B)| < 1$

Пусть λ_k матрицы A лежат в левой полуплоскости, тогда решение системы (2) будет асимптотически устойчивым.
Для качественного соответствия точного и приближённого решения необходимо, чтобы решение разностного уравнения численного метода также было асимптотически устойчиво.
Обратимся к явному методу ломаных Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n) = x_n + hAx_n = (E + hA)x_n \tag{3}$$

Чтобы x_n было асимптотически устойчивым, необходимо, чтобы $|\lambda_k(E + hA)| < 1$.
Если у матрицы A - собственные значения λ_k, то у матрицы $E + hA$ собственные значения $1 + h\lambda_k$.
Условие принимает вид $|1 + h\lambda_k| < 1$.
а). $\lambda_k \in \mathbb{R}$, $\lambda_k < 0$.

$$-1 < 1 + h\lambda_k < 1$$

Правое неравенство соблюдается всегда, левое:

$$-h\lambda_k < 2 \Leftrightarrow h < \frac{2}{|\lambda_k|_{max}} \tag{4}$$

Т.к. $|\lambda_k| \leq \|A\|$, то на практике часто используют достаточное условие устойчивости

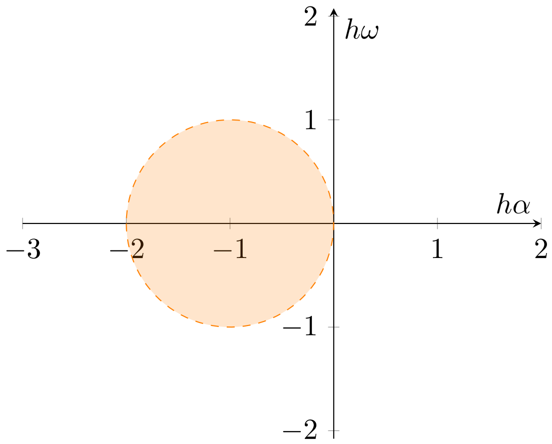
$$h \leq \frac{2}{\|a\|} \tag{4*}$$

б). $\lambda_k = \alpha + i\omega$, $\alpha < 0$.

$$|1 + h\lambda_k| < 1$$

$$|1 + h\alpha + ih\omega| < 1$$

$$(1 + h\alpha)^2 + h^2\omega^2 < 1 \tag{5}$$



Множество значений $h\lambda$, удовлетворяющее условию устойчивости, называется областью устойчивости данного метода.
Является ли ограничение на шаг (4) обременительным на практике?
Пример 1. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$e^{-3} < 0.05$

$e^{-5} < 0.01$

Будем строить график на промежутке $t \in [0; T]$, $T = 3$. Формула (4) даёт $h < 1$.

$h = 0.1 - 0.5$

П. $h = 0.1$

Вывод: условие (4) проблем не создаёт.
Пример 2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20000$

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2\cdot 10^4 t}$$

t определяется самой "медленной" экспонентой.
Будем строить график на промежутке $t \in [0; T]$, $T = 3$. Формула (4) даёт $h < 10^{-4}$.

Описанная ситуация будет проявляться тем острее, чем больше разброс между собственными значениями матрицы.
На практике $T \sim \frac{1}{|\lambda_k|_{min}}$, $h < \frac{1}{|\lambda_k|_{max}}$.
Тогда число шагов $= \frac{T}{h} \sim \frac{|\lambda_k|_{max}}{|\lambda_k|_{min}} \gg 1$ пропорционально числу обусловленности матрицы. Чем хуже матрица обусловлена, тем больше шагов.
Такие системы дифференциальных уравнений с плохо обусловленной матрицей получили название **жёсткие системы дифференциальных уравнений**.
Для их решений характерны два участка:

1. Участок малой продолжительности ($\tau_{\text{пс}}$) называется пограничным слоем. На нём решение меняется очень быстро и обладает большими производными.

2. На остальной части промежутка (T) решение меняется относительно медленно: $\tau_{\text{пс}} \ll T$

Рассмотрим метод Эйлера-Коши:

$$x^*_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x^*_{n+1})) \\ &= x_n + \frac{h}{2}(Ax_n + A(x_n + hAx_n)) \\ &= x_n(E + hA + \frac{h^2A^2}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\lambda_k(E + hA + \frac{h^2A^2}{2})\right| &< 1 \\ \left|1 + h\lambda_k + \frac{h^2\lambda_k^2}{2}\right| &< 1 \end{aligned}$$

Ограничимся случаем, когда λ_k вещественны.

$$-1 < 1 + h\lambda_k + \frac{h^2\lambda_k^2}{2} < 1$$

Левое неравенство выполняется всегда,[1] правое:

$$h\lambda_k + \frac{h^2\lambda_k^2}{2} < 0$$
$$1 + \frac{h\lambda_k}{2} > 0 \Leftrightarrow 2 > -h\lambda_k$$

Выходит то же самое, что и в (4), хоть и будут различия, при переходе в $\mathbb{C}$.
Аналогичные ограничения имеют все явные методы Рунге-Кутты и Адамса:

$$\begin{aligned} RK2 &\to h|\lambda_k| < 2 \\ RK4 &\to h|\lambda_k| < 2.785\ldots \\ Adams2 &\to h|\lambda_k| < 1 \\ Adams4 &\to h|\lambda_k| < 0.3 \end{aligned}$$

Для решения жёстких систем хотелось бы применять методы, область устойчивости которых включала бы в себя всю или почти всю левую

[1] $h\lambda_k$ всегда отрицательно, после преобразований можно получить выражение $-4 - 2h\lambda_k < (h\lambda_k)^2$, что при любых значениях h верно.

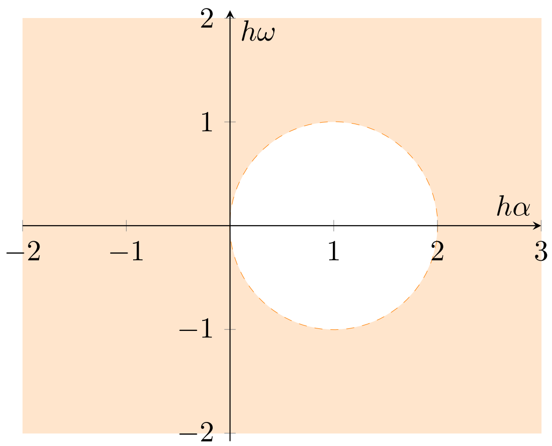
полуплоскость.
Рассмотрим неявный метод ломаных Эйлера:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}) = x_n + hAx_{n+1}$$

$$(E - hA)x_{n+1} = x_n$$
$$x_{n+1} = (E - hA)^{-1}x_n$$

Пусть $\lambda_k = \alpha + i\omega$.

$$|\lambda_k(E - hA)^{-1}| < 1$$
$$\frac{1}{|1 - h\lambda_k|} < 1$$
$$|1 - h\lambda_k| > 1$$
$$|1 - h\alpha - ih\omega| > 1$$
$$(1 - h\alpha)^2 + h^2\omega^2 > 1$$



Для $\lambda_k < 0$ ограничение по устойчивости отсутствует, и он может выбираться только из соображений точности. Больший объём вычислений на шаге по сравнению с явным методом для жёстких систем с лихвой окупается выигрышем в величине шага.
Рассмотрим неявный метод трапеций:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x_{n+1})) = x_n + \frac{h}{2}(Ax_n + Ax_{n+1})$$

$$\left(E - \frac{hA}{2}\right)x_{n+1} = \left(E + \frac{hA}{2}\right)x_n$$
$$x_{n+1} = \left(E - \frac{hA}{2}\right)^{-1}\left(E + \frac{hA}{2}\right)x_n$$

Пусть $\lambda_k = \alpha + i\omega$.

$$
\begin{aligned}
\left|\lambda_k\left(\left(E - \frac{hA}{2}\right)^{-1}\left(E + \frac{hA}{2}\right)\right)\right| &< 1 \\
\frac{\left|1 + \frac{h\lambda_k}{2}\right|}{\left|1 - \frac{h\lambda_k}{2}\right|} &< 1 \\
\left|1 + \frac{h\lambda_k}{2}\right| &< \left|1 - \frac{h\lambda_k}{2}\right| \\
\left|1 + \frac{h\alpha}{2} + \frac{ih\omega}{2}\right| &< \left|1 - \frac{h\alpha}{2} - \frac{ih\omega}{2}\right| \\
(1 + \frac{h\alpha}{2})^2 + \underline{\frac{h^2\omega^2}{4}} &< (1 - \frac{h\alpha}{2})^2 + \underline{\frac{h^2\omega^2}{4}} \\
\underline{1} + h\alpha + \underline{\frac{h^2\alpha^2}{4}} &< \underline{1} - h\alpha + \underline{\frac{h^2\alpha^2}{4}} \\
2h\alpha &< 0 \\
h\alpha &< 0
\end{aligned}
$$

Область устойчивости метода трапеций в точности равна левой полуплоскости. Методы, пригодные для решения жёстких систем, как правило, являются неявными.