

АиСД у2024. Второй семестр

Домашние задания М3134-М3135

⟨Версия от 10 марта 2025 г.⟩

Темы

1	Дерево отрезков	1
2	Дерево отрезков — 2	3
3	Сортировка событий	5
4	Двоичное дерево поиска. AVL-дерево	8
5	Декартово дерево	10

Неделя 1. Дерево отрезков

В заданиях с 1.1 по 1.6 дан массив a длины n . Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять две операции. Первая операция — присвоить элементу a_i значение x . Вторая операция описана в каждом задании. Обе операции должны работать за $\mathcal{O}(\log n)$.

- 1.1. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также вычислить количество элементов, равных минимуму.
- 1.2. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также найти позицию самого левого элемента отрезка, который равен минимуму.
- 1.3. Найти значение суммы $a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \dots + (-1)^{r-l} a_{r-1}$.
- 1.4. Найти значение суммы $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r-l)a_{r-1}$.
- 1.5. Найти подотрезок $[l_1, r_1)$, такой что $l \leq l_1 \leq r_1 \leq r$ и сумма на подотрезке $[l_1, r_1)$ максимальна среди всех таких отрезков. Достаточно найти значение самой суммы, хотя восстановить отрезок также не составит труда.
- 1.6. Найти минимальное i ($1 \leq i \leq n$), такое что $a_i \geq k$. Здесь k — параметр, который задается в запросе. То есть, в разных запросах значения k могут различаться.
- 1.7. Дан массив из 0 и 1. Нужно найти количество непрерывных отрезков из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.8. Дан массив из 0 и 1. Нужно Найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.9. Научитесь искать НВП массива длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков. Считайте, что элементы массива — натуральные числа, не превосходящие n .
- 1.10. Решите задачу 1.9, при условии, что элементы массива — произвольные целые числа.
- 1.11. Вычислите количество инверсий в массиве длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков.
- 1.12. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — проверить, является ли скобочная последовательность $a_l a_{l+1} \dots a_r$ правильной.
- 1.13. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — найти длину наибольшего префикса отрезка $[l, r)$, который является правильной скобочной последовательностью.

- 1.14. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r, x и y , требуется вычислить количество элементов на отрезке $[l, r)$, которые лежат в диапазоне от x до y (то есть количество таких i , что $l \leq i < r$ и $x \leq a_i \leq y$). В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.15. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r , требуется вычислить количество различных элементов, которые встречаются на отрезке $[l, r)$. В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.16. Нужно реализовать две операции:
- (a) Определить значение на позиции pos .
 - (b) Увеличить числа с l -й до r -й на величину d .
- 1.17. Марио собирается проходить уровень, состоящий из n последовательно расположенных труб, высота i -й трубы — a_i . Он может переместиться с трубы i на трубу j , если $|i - j| = 1$ и $a_j - a_i \leq 1$. Требуется выполнять операции двух типов за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (a) Определить, может ли Марио добраться от трубы с номером x до трубы с номером y .
 - (b) Увеличить высоты труб с l -й до r -й на величину d .

Неделя 2. Дерево отрезков — 2

В заданиях с 18 по 24 дан массив a длины n . Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять указанные операции за $\mathcal{O}(\log n)$. Обратите внимание, при выполнении заданий следует уделить особое внимание псевдокоду функций проталкивания отложенных операций `push()`.

- 2.18. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти сумму на отрезке
- 2.19. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти максимум на отрезке
- 2.20. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти подотрезок с максимальной суммой
- 2.21. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Прибавить значение x ко всем элементам отрезка
(c) Найти значение элемента
- 2.22. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Прибавить значение x ко всем элементам отрезка
(c) Найти сумму на отрезке
- 2.23. (a) Заменить на отрезке a_i на $\max(a_i, x)$
(b) Заменить на отрезке a_i на $\min(a_i, x)$
(c) Найти значение элемента
- 2.24. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти подотрезок максимальной длины, состоящий из одинаковых чисел

В заданиях с 2.25 по 2.28 дан массив a длины n , состоящий из булевых значений. Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять указанные операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

- 2.25. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти ближайшую к i -му элементу единицу
- 2.26. (a) Изменить все значения на отрезке на противоположные
(b) Найти количество единиц на отрезке
- 2.27. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти количество непрерывных отрезков из единиц
- 2.28. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка

- (b) Найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц
- 2.29. Дан массив длины n . Вычислите количество возрастающих подпоследовательностей массива длины k . Время $\mathcal{O}(kn \log n)$.
- 2.30. Петя едет из Питера в Москву на машине. По пути ему встретятся n заправок, для каждой известно ее положение и стоимость литра бензина. Также известно, сколько бензина тратит машина на километр пути и сколько бензина помещается в бак. Нужно доехать, потратив минимальную сумму.
- 2.31. Есть n домашних заданий, которые нужно сделать, для каждого дела известно, сколько времени нужно на него потратить t_i и до какого времени его нужно сделать d_i . Кроме того, для каждого дз известно, в какое время пришлют задание s_i (соответственно, раньше начать его делать не получится). Составить план работы так, чтобы успеть все сделать вовремя, если можно переключаться с задания на задание (то есть например сделать частично первое, переключиться на второе, потом доделать первое,...).

Неделя 3. Сортировка событий

- 3.32. Есть n касс. Каждая касса работает без перерыва определенный промежуток времени по фиксированному расписанию (одному и тому же каждый день). Требуется определить, на протяжении какого времени в течение суток работают все кассы одновременно.
- 3.33. Задачи участникам раздаются последовательно, а не все в самом начале тура, и каждая i -я задача становится доступной участникам в свой момент времени s_i . При поступлении очередной задачи каждый участник должен сразу определить, будет он ее решать или нет. В случае, если он выбирает для решения эту задачу, то у него есть t_i минут на то, чтобы сдать ее решение на проверку, причем в течение этого времени он не может переключиться на решение другой задачи. Если же участник отказывается от решения этой задачи, то в будущем он не может к ней вернуться. В тот момент, когда закончилось время, отведенное на задачу, которую решает участник, он может начать решать другую задачу, ставшую доступной в этот же момент, если такая задача есть, или ждать появления другой задачи. При этом за правильное решение i -й задачи участник получает c_i баллов. **В этой задаче все c_i одинаковые**
- 3.34. В этой задаче все c_i разные
- 3.35. В этом году погода стоит особо жаркая, поэтому в комповнике очень душно и важно следить за тем, чтобы в комповнике не находилось одновременно очень много школьников. Поэтому завуч записал время прихода и ухода из комповника каждого ЛКШонка.
Теперь завуч хочет узнать, сколько ЛКШат встретил в комповнике каждый ЛКШонок.
- 3.36. На прямой задано некоторое множество отрезков с целочисленными координатами концов $[L_i, R_i]$. Выберите среди данного множества подмножество отрезков, целиком покрывающее отрезок $[0, M]$
- 3.37. Ученые планируют набор продуктов для экспедиции на Марс. Планируется, что запас экспедиции будет состоять из n типов продуктов. У экспедиции будет k_i порций продуктов i -го типа. Продукт i -го типа должен быть использован на протяжении t_i дней после начала экспедиции, после чего портится. Если за t_i дней не все порции продукты i -го типа съедены, то все оставшиеся порции этого продукта уничтожаются.
В экспедицию планируют направить s участников. Каждый день участники экспедиции выбирают любые s имеющихся у них порций и съедают их. Разные участники экспедиции могут есть как одинаковые, так и различные типы продуктов.
Отдел планирования снабжения хочет понять, насколько избыточен набор продуктов, запланированный для экспедиции. Они хотят выяснить, какое максимальное различное количество типов продуктов участники экспедиции смогут полностью съесть в процессе экспедиции, не допустив уничтожения ни одной их порции продукта этого типа.

- 3.38. У Поликарпа есть шахматная доска размера $n \times m$, на которой расставлены k ладей. Поликарп еще не придумал правила игры, в которую он будет играть. Однако он уже выделил на доске q прямоугольных участков особой стратегической важности, которые должны быть надежно защищены. По мнению Поликарпа, прямоугольный участок доски надежно защищен, если все его свободные клетки бьются ладьями, стоящими на этом участке. Ладьи на остальной части доски на защиту участка не влияют. Расстановка ладей фиксирована и не может быть изменена. Напомним, что ладья бьет все клетки, расположенные с ней на одной вертикали или горизонтали, если между клеткой и ладьей нет других фигур. Помогите Поликарпу определить, все ли стратегически важные участки надежно защищены.
- 3.39. в течение дня для каждого покупателя, посетившего супермаркет, было зафиксировано время, когда он пришел в супермаркет, и когда он из него ушел. Менеджер по рекламе предположил, что такое расписание прихода-ухода покупателей сохранится и в последующие дни. Он хочет составить расписание трансляции рекламных роликов, чтобы каждый покупатель услышал не меньше двух рекламных объявлений. В тоже время он выдвинул условие, чтобы два рекламных объявления не транслировались одновременно и, поскольку продавцам все время приходится выслушивать эту рекламу, общее число рекламных объявлений за день было минимальным.
- 3.40. Всем известно, что в мировой истории произошло ровно n событий: i -ое событие продолжалось с a_i по b_i годы включительно ($a_i < b_i$). Событие j включает в себя событие i , если $a_j < a_i$ и $b_i < b_j$. Ваша же задача проще: найдите количество событий, которые включены в какое-либо другое событие.
- 3.41. Разберитесь в алгоритме поиска площади объединения прямоугольников для больших координат и расскажите как надо поменять алгоритм с лекции.
- 3.42. Найдите площадь объединения ромбов с координатами центра в точке (x_i, y_i) и уравнением $|x - x_i| + |y - y_i| \leq d_i$.
- 3.43. В руках шефа каким-то образом оказались сведения о надвигающейся ревизии — список из N грузов, которые будут контролироваться Министерством. Для каждого груза известны время его прибытия T_i , отсчитываемое с некоторого момента, хранимого в большом секрете, и время L_i , требуемое аппарату для обработки этого груза. Шеф дал Мише задание по этим данным определить, какое минимальное количество аппаратов необходимо заказать на заводе, чтобы все грузы Министерства начинали досматриваться сразу после прибытия. Необходимо учесть, что конструкция тех аппаратов, которые было решено установить, не позволяет обрабатывать два груза одновременно на одном аппарате. Напишите программу, которая поможет Мише справиться с его задачей.
- 3.44. Найдите длину пересечения n отрезков.
- 3.45. Вам дано n прямоугольников. Для каждого прямоугольника определите длину пересечения всех прямоугольников, не включая его.
- 3.46. Экзамен по берляндскому языку проходит в узкой и длинной аудитории. На экзамен пришло N студентов. Все они посажены в ряд. Таким образом, позиция

каждого человека задается координатой на оси Ox (эта ось ведет вдоль длинной аудитории). Два человека могут разговаривать, если расстояние между ними меньше или равно D . Какое наименьшее количество типов билетов должен подготовить преподаватель, чтобы никакие два студента с одинаковыми билетами не могли разговаривать? Выведите способ раздачи преподавателем билетов.

Неделя 4. Двоичное дерево поиска. AVL-дерево

- 4.47. Придумайте, как реализовать рекурсивную функцию, выводящую все элементы двоичного дерева поиска в порядке сортировки, за $\mathcal{O}(n)$.
- 4.48. Придумайте, как реализовать нерекурсивную функцию, выводящую все элементы двоичного дерева поиска в порядке сортировки, за $\mathcal{O}(n)$, используя $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти. Можно считать, что у каждой вершины хранится ссылка на родительскую вершину.
- 4.49. Докажите, что не существует алгоритма, который строит двоичное дерево поиска по заданному набору ключей быстрее, чем за $\Omega(n \log n)$ в худшем случае.
- 4.50. Научитесь поддерживать мультимножество.
- 4.51. Научитесь находить k -й в порядке возрастания ключ в двоичном дереве поиска за $\mathcal{O}(H)$. Разрешается хранить в каждой вершине $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.
- 4.52. Научитесь по данному ключу x находить количество элементов в дереве, не превосходящих x за $\mathcal{O}(H)$. Разрешается хранить в каждой вершине $\mathcal{O}(1)$ дополнительной памяти.
- 4.53. По заданной вершине в дереве найдите следующие k вершин в порядке сортировки за $\mathcal{O}(H + k)$.
- 4.54. Приведите пример дерева, в котором средняя глубина вершины (среднее расстояние от корня до вершины) $\mathcal{O}(\log n)$, а высота дерева (максимальное расстояние от корня до вершины) асимптотически больше, чем $\log n$.
- 4.55. Приведите пример AVL-дерева и операции добавления элемента, при которой операцию балансировки будет выполнена более, чем в одной вершине.
- 4.56. Приведите пример AVL-дерева и операции удаления элемента, при которой операция балансировки будет выполнена более, чем в одной вершине.
- 4.57. Приведите пример двух AVL-деревьев, хранящих одно множество ключей, но имеющих разную высоту.
- 4.58. Научитесь проверять, что заданное двоичное дерево является корректным двоичным деревом поиска.
- 4.59. Пусть в двоичном дереве поиска для каждой вершины высота ее детей отличается не более, чем на 5. Правда ли, что высота такого дерева $\mathcal{O}(\log n)$?
- 4.60. Пусть в двоичном дереве поиска для каждой вершины высота ее детей отличается не более, чем в два раза. Правда ли, что высота такого дерева $\mathcal{O}(\log n)$?
- 4.61. Научитесь при помощи AVL-дерева отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (a) Добавить число x в множество
 - (b) Удалить число x из множества

- (с) Вычислить сумму всех x из множества, таких что $l \leq x \leq r$
- 4.62. Рассмотрим два AVL-дерева. Пусть любой ключ в первом дереве меньше, чем любой ключ во втором дереве. Предложите способ слить эти два дерева в одно AVL-дерево за истинные $\mathcal{O}(\log n)$, где n — сумма размеров деревьев.
- 4.63. Модифицируйте AVL-дерево таким образом, чтобы в каждой вершине хранить, помимо ссылок на детей, $\mathcal{O}(1)$ бит дополнительной информации (обратите внимание, что стандартная реализация с хранением высот вершин использует больше памяти).

Неделя 5. Декартово дерево

- 5.64. Дан массив пар (x, y) , отсортированный по возрастанию значений x . Постройте по нему декартово дерево за $\mathcal{O}(n)$.
- 5.65. Можно ли построить декартово дерево за $\mathcal{O}(n)$, если массив пар не отсортирован по x ?
- 5.66. Дан массив пар (x, y) . Все x попарно различны, а y могут совпадать. Как проверить, что декартово дерево можно построить единственным образом?
- 5.67. Дан массив пар (x, y) . Все x попарно различны, а y могут совпадать. Необходимо вычислить количество способов построить декартово дерево.
- 5.68. Придумайте, как сделать СНМ на базе дерева поиска по неявному ключу с временем работы операций $\mathcal{O}(\log n)$.
- 5.69. Пусть у дерева поиска нет вершин с одним ребенком (то есть у всех вершин 0 или 2 детей). Правда ли, что высота такого дерева $\mathcal{O}(\log n)$?
- 5.70. Пусть у дерева поиска размер каждого поддеревья равен $2^k - 1$ для некоторого целого k (для разных вершин могут быть разные значения k). Правда ли, что высота такого дерева $\mathcal{O}(\log n)$?
- 5.71. Дан массив чисел длины n . При помощи декартова дерева научитесь выполнять следующие операции за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (а) Развернуть отрезок массива $[l, r]$ задом наперед
 - (б) Найти минимум на отрезке $[l, r]$
- 5.72. Дан массив чисел длины n . При помощи декартова дерева научитесь выполнять следующие операции за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (а) Для данных l и r поменять местами следующие пары элементов: l и $l + 1$, $l + 2$ и $l + 3$, и так далее до r
 - (б) Найти минимум на отрезке $[l, r]$
- 5.73. Будем строить декартово дерево, не храня приоритеты. В тех местах, где производится сравнение приоритетов, будем выбирать случайный вариант с вероятностью $\frac{1}{2}$. Покажите, что при такой реализации декартова дерева некоторая последовательность операций может привести к тому, что высота дерева станет $\Omega(n)$.
- 5.74. В дереве поиска, в отличие от дерева отрезков, исходные элементы множества хранятся не только в листьях, но и в промежуточных узлах. Иногда это неудобно, поэтому делают другую версию дерева поиска: исходные элементы множества хранятся только в листьях, а в промежуточных вершинах хранится максимальный ключ в поддереве. Покажите, как осуществлять операции поиска и добавления элемента в таком дереве.
- 5.75. Дерево поиска вывели на экран при помощи такой функции:

```
print_tree(t):  
    if (t == null):  
        return  
    print(t.key)  
    print_tree(t.l)  
    print_tree(t.r)
```

По массиву, который вывела данная процедура, восстановите дерево поиска за $\mathcal{O}(n)$.

5.76. Даны n окружностей. Они не пересекаются, но могут быть вложены друг в друга. Постройте дерево вложенности окружностей за $\mathcal{O}(n \log n)$.