

АиСД у2024. Второй семестр

Домашние задания М3134-М3135

⟨Версия от 9 февраля 2025 г.⟩

Темы

1	Дерево отрезков	1
2	Дерево отрезков — 2	3

Неделя 1. Дерево отрезков

В заданиях с 1.1 по 1.6 дан массив a длины n . Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять две операции. Первая операция — присвоить элементу a_i значение x . Вторая операция описана в каждом задании. Обе операции должны работать за $\mathcal{O}(\log n)$.

- 1.1. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также вычислить количество элементов, равных минимуму.
- 1.2. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также найти позицию самого левого элемента отрезка, который равен минимуму.
- 1.3. Найти значение суммы $a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \dots + (-1)^{r-l} a_{r-1}$.
- 1.4. Найти значение суммы $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r-l)a_{r-1}$.
- 1.5. Найти подотрезок $[l_1, r_1)$, такой что $l \leq l_1 \leq r_1 \leq r$ и сумма на подотрезке $[l_1, r_1)$ максимальна среди всех таких отрезков. Достаточно найти значение самой суммы, хотя восстановить отрезок также не составит труда.
- 1.6. Найти минимальное i ($1 \leq i \leq n$), такое что $a_i \geq k$. Здесь k — параметр, который задается в запросе. То есть, в разных запросах значения k могут различаться.
- 1.7. Дан массив из 0 и 1. Нужно найти количество непрерывных отрезков из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.8. Дан массив из 0 и 1. Нужно Найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.9. Научитесь искать НВП массива длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков. Считайте, что элементы массива — натуральные числа, не превосходящие n .
- 1.10. Решите задачу 1.9, при условии, что элементы массива — произвольные целые числа.
- 1.11. Вычислите количество инверсий в массиве длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков.
- 1.12. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — проверить, является ли скобочная последовательность $a_l a_{l+1} \dots a_r$ правильной.
- 1.13. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — найти длину наибольшего префикса отрезка $[l, r)$, который является правильной скобочной последовательностью.

- 1.14. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r, x и y , требуется вычислить количество элементов на отрезке $[l, r)$, которые лежат в диапазоне от x до y (то есть количество таких i , что $l \leq i < r$ и $x \leq a_i \leq y$). В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.15. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r , требуется вычислить количество различных элементов, которые встречаются на отрезке $[l, r)$. В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.16. Нужно реализовать две операции:
- (a) Определить значение на позиции pos .
 - (b) Увеличить числа с l -й до r -й на величину d .
- 1.17. Марио собирается проходить уровень, состоящий из n последовательно расположенных труб, высота i -й трубы — a_i . Он может переместиться с трубы i на трубу j , если $|i - j| = 1$ и $a_j - a_i \leq 1$. Требуется выполнять операции двух типов за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (a) Определить, может ли Марио добраться от трубы с номером x до трубы с номером y .
 - (b) Увеличить высоты труб с l -й до r -й на величину d .

Неделя 2. Дерево отрезков — 2

В заданиях с 18 по 24 дан массив a длины n . Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять указанные операции за $\mathcal{O}(\log n)$. Обратите внимание, при выполнении заданий следует уделить особое внимание псевдокоду функций проталкивания отложенных операций `push()`.

- 2.18. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти сумму на отрезке
- 2.19. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти максимум на отрезке
- 2.20. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Умножить все элементы отрезка на -1 (то есть заменить a_i на $-a_i$)
(c) Найти подотрезок с максимальной суммой
- 2.21. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Прибавить значение x ко всем элементам отрезка
(c) Найти значение элемента
- 2.22. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Прибавить значение x ко всем элементам отрезка
(c) Найти сумму на отрезке
- 2.23. (a) Заменить на отрезке a_i на $\max(a_i, x)$
(b) Заменить на отрезке a_i на $\min(a_i, x)$
(c) Найти значение элемента
- 2.24. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти подотрезок максимальной длины, состоящий из одинаковых чисел

В заданиях с 2.25 по 2.28 дан массив a длины n , состоящий из булевых значений. Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять указанные операции за $\mathcal{O}(\log n)$.

- 2.25. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти ближайшую к i -му элементу единицу
- 2.26. (a) Изменить все значения на отрезке на противоположные
(b) Найти количество единиц на отрезке
- 2.27. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка
(b) Найти количество непрерывных отрезков из единиц
- 2.28. (a) Присвоить значение x всем элементам отрезка

(b) Найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц

- 2.29. Дан массив длины n . Вычислите количество возрастающих подпоследовательностей массива длины k . Время $\mathcal{O}(kn \log n)$.
- 2.30. Петя едет из Питера в Москву на машине. По пути ему встретятся n заправок, для каждой известно ее положение и стоимость литра бензина. Также известно, сколько бензина тратит машина на километр пути и сколько бензина помещается в бак. Нужно доехать, потратив минимальную сумму.
- 2.31. Есть n домашних заданий, которые нужно сделать, для каждого дела известно, сколько времени нужно на него потратить t_i и до какого времени его нужно сделать d_i . Кроме того, для каждого дз известно, в какое время пришлют задание s_i (соответственно, раньше начать его делать не получится). Составить план работы так, чтобы успеть все сделать вовремя, если можно переключаться с задания на задание (то есть например сделать частично первое, переключиться на второе, потом доделать первое,...).