

АиСД у2024. Первый семестр

Домашние задания М3134-М3135

⟨Версия от 4 февраля 2025 г.⟩

Темы

1 Дерево отрезков

1

Неделя 1. Дерево отрезков

В заданиях с 1.1 по 1.6 дан массив a длины n . Требуется придумать, как при помощи дерева отрезков выполнять две операции. Первая операция — присвоить элементу a_i значение x . Вторая операция описана в каждом задании. Обе операции должны работать за $\mathcal{O}(\log n)$.

- 1.1. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также вычислить количество элементов, равных минимуму.
- 1.2. Найти минимум на отрезке $[l, r)$, а также найти позицию самого левого элемента отрезка, который равен минимуму.
- 1.3. Найти значение суммы $a_l - a_{l+1} + a_{l+2} - \dots + (-1)^{r-l} a_{r-1}$.
- 1.4. Найти значение суммы $a_l + 2a_{l+1} + 3a_{l+2} + \dots + (r-l)a_{r-1}$.
- 1.5. Найти подотрезок $[l_1, r_1)$, такой что $l \leq l_1 \leq r_1 \leq r$ и сумма на подотрезке $[l_1, r_1)$ максимальна среди всех таких отрезков. Достаточно найти значение самой суммы, хотя восстановить отрезок также не составит труда.
- 1.6. Найти минимальное i ($1 \leq i \leq n$), такое что $a_i \geq k$. Здесь k — параметр, который задается в запросе. То есть, в разных запросах значения k могут различаться.
- 1.7. Дан массив из 0 и 1. Нужно найти количество непрерывных отрезков из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.8. Дан массив из 0 и 1. Нужно Найти самый длинный непрерывный отрезок из единиц и уметь менять элемент на противоположный с помощью ДО
- 1.9. Научитесь искать НВП массива длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков. Считайте, что элементы массива — натуральные числа, не превосходящие n .
- 1.10. Решите задачу 1.9, при условии, что элементы массива — произвольные целые числа.
- 1.11. Вычислите количество инверсий в массиве длины n за $\mathcal{O}(n \log n)$, используя дерево отрезков.
- 1.12. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — проверить, является ли скобочная последовательность $a_l a_{l+1} \dots a_r$ правильной.
- 1.13. Дана строка из n открывающих и закрывающих круглых скобок. Придумайте, как при помощи дерева отрезков отвечать на следующие запросы за $\mathcal{O}(\log n)$. Первый запрос — изменить i -ю скобку. Второй запрос — найти длину наибольшего префикса отрезка $[l, r)$, который является правильной скобочной последовательностью.

- 1.14. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r, x и y , требуется вычислить количество элементов на отрезке $[l, r)$, которые лежат в диапазоне от x до y (то есть количество таких i , что $l \leq i < r$ и $x \leq a_i \leq y$). В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.15. Дан массив длины n , элементы которого являются натуральными числами, не превосходящими n . Научитесь отвечать на запрос: даны l, r , требуется вычислить количество различных элементов, которые встречаются на отрезке $[l, r)$. В данной задаче считайте, что все запросы известны заранее, то есть можно решать задачу в Offline. Время работы: $\mathcal{O}((n + q) \log n)$.
- 1.16. Нужно реализовать две операции:
- (a) Определить значение на позиции pos .
 - (b) Увеличить числа с l -й до r -й на величину d .
- 1.17. Марио собирается проходить уровень, состоящий из n последовательно расположенных труб, высота i -й трубы — a_i . Он может переместиться с трубы i на трубу j , если $|i - j| = 1$ и $a_j - a_i \leq 1$. Требуется выполнять операции двух типов за $\mathcal{O}(\log n)$:
- (a) Определить, может ли Марио добраться от трубы с номером x до трубы с номером y .
 - (b) Увеличить высоты труб с l -й до r -й на величину d .