Лабораторная работа

Решение уравнения Бакли – Леверетта

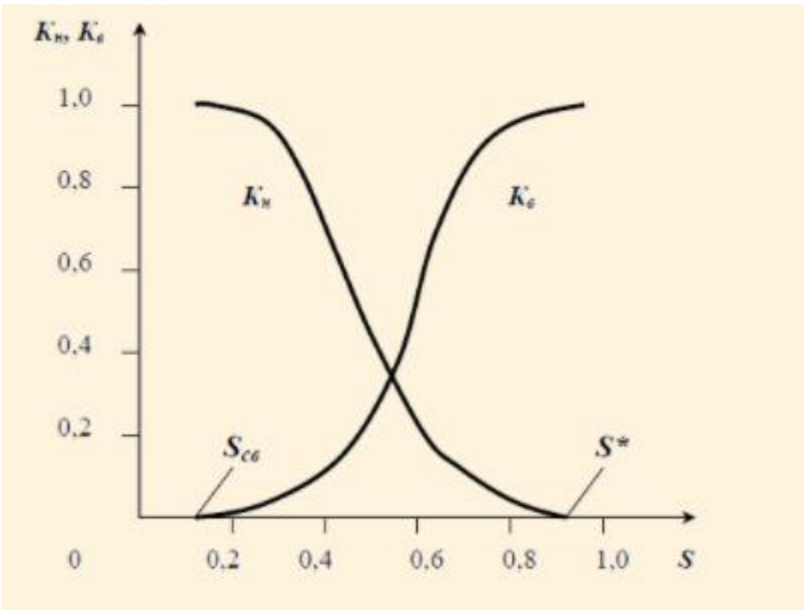
В процессе нагнетания воды в пласт ее насыщенность ***S*** будет меняться со временем ***t*** вдоль направления движения x. Связь между ***S, x*** и ***t*** управляется дифференциальным уравнением **Бакли – Леверетта**

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+W(t)\frac{\partial F(s)}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

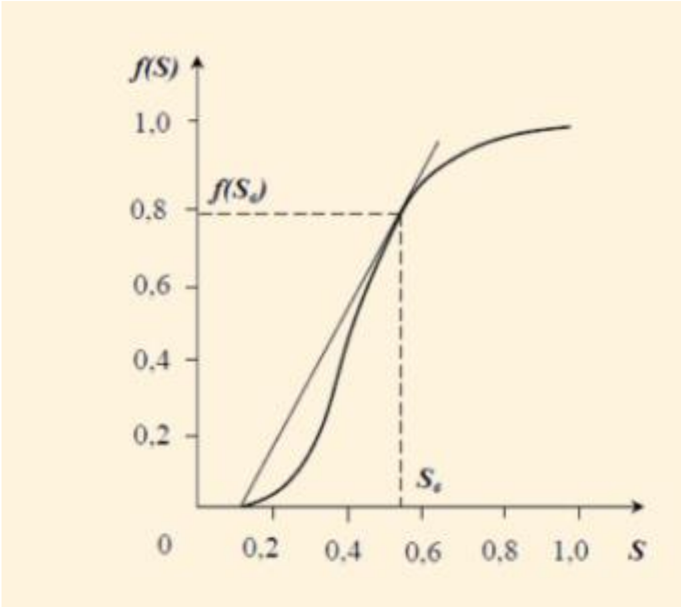
$$F(S)=\frac{K_1(S)}{K_1(S)+\frac{\mu_1}{\mu_2}K_2(S)}=\frac{K_1(S)}{K_1(S)+\mu_0 K_2(S)}$$

$$\mu_0=\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

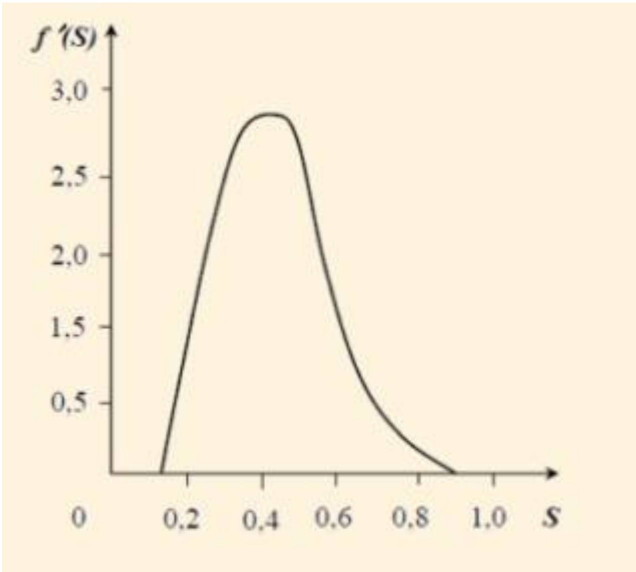
Здесь ***W(t)*** – суммарная скорость фильтрации воды и нефти, $\mu_в$, $\mu_н$ – коэффициенты динамической вязкости фаз, $k_в(S)$ **и** $k_н(S)$ – относительные фазовые проницаемости, $S = S_в$ – водонасыщенность, $S_в + S_н = 1$,
F(S) – функция распределения потоков фаз или функция Бакли – Леверетта.



Зависимость относительных фазовых проницаемостей для воды Кв(S) и нефти Кн(S) от водонасыщенности (общий вид)



Внешний вид зависимости F(S)



Внешний вид зависимости **F′(S)**

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{L}; \qquad \tau = \frac{vt}{mL}$$

В безразмерных переменных уравнение (1) при постоянной скорости закачки ($W(t)$ = const) сводится к уравнению (2)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

(2)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + F' \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

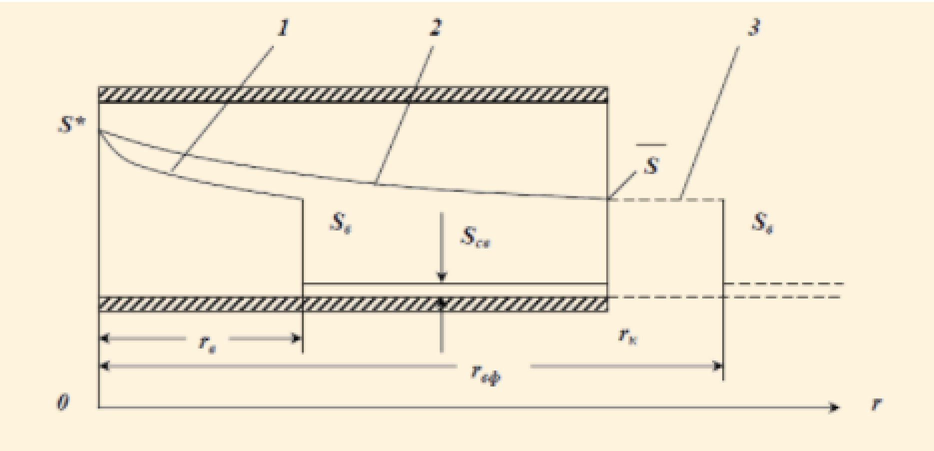
В уравнении (2) безразмерные переменные ξ=x, τ=t.

Из решения методом характеристик уравнения (2) получаем формулу для расчета координаты x заданного значения насыщенности как функцию времени:

$$x(S, t) = F'(S)t + x_o, \qquad (3)$$

где x_o – значения координат с начальной водонасыщенностью S_o при $t = 0$. В расчетах можно взять $x_o=0$.

Неоднозначный вид скачкообразное изменение насыщенности при движении фронта воды определяется двузначностью функции **F′(S)**



Распределение водонасыщенности вдоль длины пласта: 1, 2 — истинное, 3 — фиктивное (вышло из размера области)

Насыщенность S_c на скачке (фронтальная насыщенность) определяется из уравнения

$$F^{'}(S_C) = \frac{F(S_C) - F(S_*)}{S_C - S_*} \qquad (4)$$

Начальные и граничные условия:

$t = 0 \quad S = S_* \quad = 0$

$x = 0 \quad S = S^* = 1$

Относительные фазовые проницаемости ОФП(модельные)

$k_в = S^2 \quad k_н = (1 - S)^2$

Отношение вязкостей $\mu_0 = \mu_в / \mu_н$

$\mu_0 = 0{,}1; \quad 0{,}5; \quad 1$

Для модельных ***ОФП н***асыщенность ***Sc*** на скачке (фронтальная насыщенность) определяется из уравнения

$$S_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{1 + \mu_0}}$$

Задания

1. По исходным данным построить графики функций ***F(S)*** и ***F′(S)*** для различных значений $\mu_0 = 0{,}1; \quad 0{,}5; \quad 1.$
2. Из (4), с использованием модельных функций ОФП получить аналитическое выражение для фронтовой насыщенности ***Sc.***
3. По (3) рассчитать непрерывную ветвь профиля насыщенности при

Sc* < *S* < *S* и ***0* < *x* < *xc.*** $0 \le t \le 0{,}5.$ Построить график s(x).

4. Решить численно уравнение (2).

5. Выбрать оптимальное соотношение $\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$, которое обеспечивает минимальную погрешность численного решения. Для сравнения и апробации численной схемы использовать аналитическое решение по пунктам (1-3).
6. На одном графике построить аналитическое решение и численные решения, полученные по схемам 4а и 4б. Построить решения для моментов времени t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5.

Рассмотреть численные схемы:

4а. Явный « левый уголок»

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} + \frac{F_i^n - F_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

$$F_i^n = F\left(S_i^n\right)$$

$$\max_S \left(F_S^1\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$$

4б. «Шахматная схема»

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F_i^n - F_{i-1}^n\right) \qquad \mathrm{i+n} - \text{четно}$$

$$S_i^{n+1} = S_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1}^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}\right) \qquad \mathrm{i+n} - \text{нечетно}$$

$$F_i^{n+1} = F\left(S_i^{n+1}\right)$$

Расчеты выполнить при различных шагах дискретизации:

$$\Delta x = \frac{1}{20}; \quad \Delta x = \frac{1}{50}; \quad \Delta x = \frac{1}{100}$$

Δt выбирается из условия устойчивости. $0 \le \mathrm{t} \le 0{,}5$

4с. Неявная схема с разностью назад

$$\frac{S_i^{n+1} - S_i^n}{\Delta t} = -\frac{F_i^{n+1} - F_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

Схема абсолютно устойчивая.

Линеаризованная неявная разностная схема

$$\frac{S_i^{n+1(k+1)} - S_i^n}{\Delta t} = -\frac{F_i^{n(k)} + F'^{n(k)}_i\left(S_i^{n+1(k+1)} - S_i^{n(k)}\right) - F_{i-1}^{n+1}}{\Delta x}$$

Выполнить расчеты при различных Δt.

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{4}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{8}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{20}$$

$$F_{i-1}^{n+1} = F\left(S_{i-1}^{n+1}\right)$$

Производная функции Б.-Л. аппроксимируется в виде

$$F_i'^n = F'\left(S_i^n\right)$$

РАСЧЕТ ДАВЛЕНИЯ

Для расчета давления используется уравнение для суммарной скорости $\vec{W} = \vec{\upsilon}_в + \vec{\upsilon}_н$.

$$\operatorname{div}\vec{W} = 0$$

Для одномерной модельной задачи это уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dx}\left[\left(k_в(s) + \mu_0 k_н(s)\right)\frac{dp}{dx}\right] = 0 \qquad (5)$$

Уравнения (5) замыкаются граничными условиями

$$p(1,t) = 1 \quad 0 \le t \le T. \qquad (6а)$$

$$\frac{\partial p(0,t)}{\partial x} = -Q_0 = \text{const}, \qquad (6б)$$

начальное давление в модели пористой среды

$p(x,0) = 1,\ \ 0 \le x \le 1$.

. На входном сечении поддерживается постоянный расход Q_0=0,007 закачиваемой жидкости. Вытесняемая фаза в этом сечении остается неподвижной. Исходные данные в безразмерном виде.

Это уравнение аппроксимируется линейной трехточечной разностной схемой, которое просчитывается методом прогонки (правой).

Введем обозначение: $\varphi(s) = k_в(s) + \mu_0 k_н(s)$

Разностное уравнение для давления имеет вид

$$ap_{i+1}^{n+1} - cp_i^{n+1} + bp_{i-1}^{n+1} = 0 \qquad (7)$$

$$a = \varphi^n_{i+\frac{1}{2}}; \qquad b = \varphi^n_{i-\frac{1}{2}}; \qquad c = a + b$$

$$\varphi^n_{i+\frac{1}{2}} = 2\frac{\varphi(s_i^n)\varphi(s_{i+1}^n)}{\varphi(s_i^n) + \varphi(s_{i+1}^n)}, \qquad \varphi^n_{i-\frac{1}{2}} = 2\frac{\varphi(s_i^n)\varphi(s_{i-1}^n)}{\varphi(s_i^n) + \varphi(s_{i-1}^n)}$$

Граничные условия (6) аппроксимируются в виде:

$$p_N^k = 1$$

$$p_0^k = p_1^k + h \cdot Q_0$$

Начальные значения прогоночных коэффицентов (для правой прогонки)

$$\alpha_1 = 1 \qquad\qquad \beta_1 = h \cdot Q_0$$

Рассчитать распределение давления по длине модели для различных моментов времени t = 0.1, 0.3, 0.5.

Система линейных уравнений с трехдиагональной матрицей

$$a_i u_{i-1} - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i \tag{1}$$

$$a_i \neq 0\,,\; b_i \neq 0\,;$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1$$

$$u_0 = \kappa_1 u_1 + \mu_1\,;\; u_N = \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \tag{2}$$

К системе (1) с условиями (2) часто сводится разностная аппроксимация задач математической физики. В матричной форме имеем

$$\mathbf{Au} = \mathbf{F} \tag{3}$$

$$\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, u_N)$$

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -\kappa & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_i & -c_i & b_i & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \ldots \\ -f_{N-1} \\ -f_N \\ \mu_2 \end{vmatrix}$$

В случае граничных условий первого рода имеем матрицу размером $(N-1)\times(N-1)$; в случае граничных условий второго и третьего рода – матрицу размером $(N+1)\times(N+1)$.

Системы уравнений типа (1) или (3) удобно решать методом прогонки.

Правая прогонка

Предположим, что имеет место соотношение

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1} \tag{4}$$

где α_{i+1}, β_{i+1} – прогоночные коэффициенты, которые пока не определенны.

$$u_{i-1} = \alpha_i u_i + \beta_i \tag{5}$$

Подставляя (5) в уравнение (1), получаем

$$a_i(\alpha_i u_i + \beta_i) - c_i u_i + b_i u_{i+1} = -f_i$$

или

$$u_i(a_i\alpha_i - c_i) + b_i u_{i+1} = -(f_i + a_i\beta_i).$$

Следовательно

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \qquad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i} \tag{6}$$

Используем условие в нулевой точке и уравнение (5) для $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \kappa_1 u_1 + \mu_1 \\ u_0 &= \alpha_1 u_1 + \beta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \kappa_1,\ \beta_1 = \mu_1 \tag{7}$$

Зная α_1, β_1 последовательно определяем все коэффициенты α_i, β_i вплоть до точки N.

Используем условия в N – ой точке и уравнение (5) для $i = 1$

$$\left.\begin{aligned} u_N &= \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \\ u_{N-1} &= \alpha_N u_N + \beta_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2\beta_N}{1 - \kappa_2\alpha_N} \tag{8}$$

На этом заканчивается прямая прогонка. Обратная прогонка использует уравнение (5) для $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$.

Левая прогонка

Предположим, что имеет место соотношение

$$u_{i+1} = \xi_{i+1} u_i + \eta_{i+1} \tag{10}$$

Тогда

$$a_i u_{i-1} + \left(b_i \xi_{i+1} - c_i\right) u_i + b_i \eta_{i+1} = -f_i$$

Следовательно

$$\xi_i = \frac{a_i}{c_i - b_i \xi_{i+1}}, \quad \eta_i = \frac{\eta_{i+1} b_i + f_i}{c_i - b_i \xi_{i+1}} \tag{11}$$

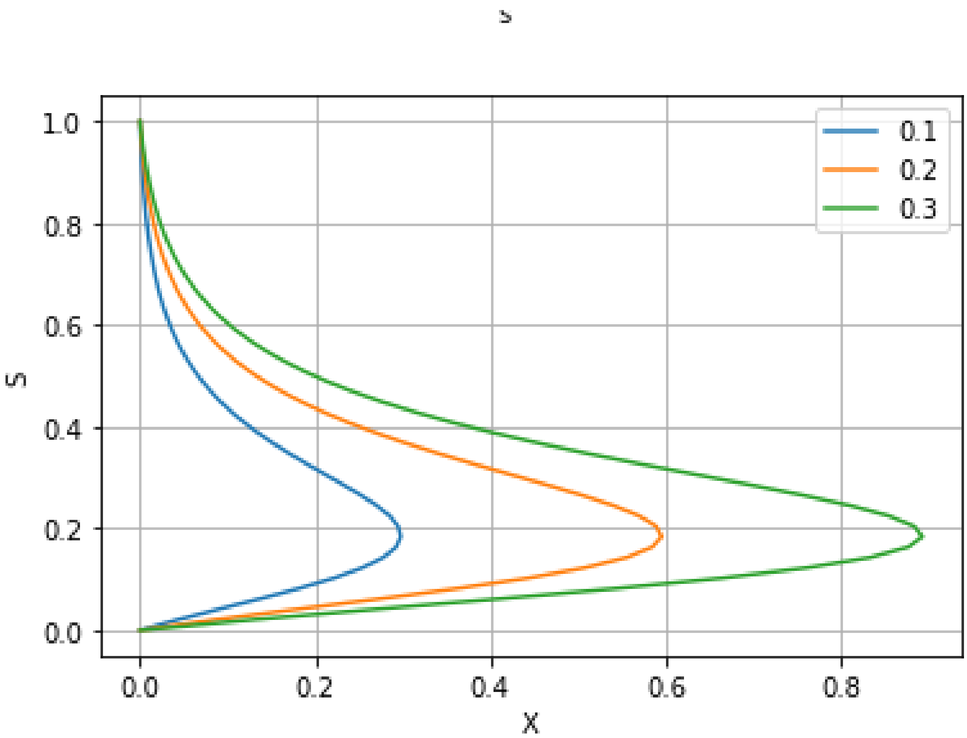
$$i = N-1, N-2, \ldots, 2, 1$$

$$\left.\begin{aligned} u_N &= \kappa_2 u_{N-1} + \mu_2 \\ u_N &= \xi_N u_{N-1} + \eta_N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \xi_N = \kappa_2, \quad \eta_N = \mu_2 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \kappa_1 u_1 + \mu_1 \\ u_1 &= \xi_1 u_0 + \eta_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_0 = \frac{\mu_1 + \kappa_1 \mu_1}{1 - \kappa_1 \xi_1} \tag{13}$$

Прямая прогонка включает условия (12), расчет прогоночных коэффициентов (11); обратная прогонка – условие (13) и расчет искомой функции (10).

В частном случае задач теплопроводности первый алгоритм (правая прогонка) удобен, если источник тепла действует на границе $x = 0$ (слева); вторая – если источник действует на поверхности $x = L$ (справа).



0.1
0.2
0.3
S
X
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8