Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculaţi modulul numărului complex $(1+i)^2$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+2x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=-x-2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $2^{x+1}\le 4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulţimile cu trei elemente ale mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, elementele submulţimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=a\vec{i}-\vec{j}$. Determinaţi numărul real a pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$.
5p	**6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ şi $BC=7$.

Soluţii

Subiectul1

1. $(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$|2i|=|0+2i|=\sqrt{0^2+2^2}=2$.

2. Abscisele punctelor de intersecţie a două grafice se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=g(x)$.

In cazul nostru avem:

$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2+2x=-x-2\Leftrightarrow x^2+3x+2=0$ care are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=-2$.

$f(-1)=-1\Rightarrow A(-1,-1)$

$f(-2)=0\Rightarrow B(-2,0)$

Punctele de intersecţie sunt A şi B.

3. $2^{x+1}\le 2^2\Leftrightarrow x+1\le 2\Leftrightarrow x\le 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]$.

4. Probabilitatea se calculeaza cu formula $P=\dfrac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile}$

Numărul submulţimilor cu trei elemente ale mulţimii A este $C_5^3=\dfrac{5!}{3!(5-3)!}=10$ .Acestea sunt cazurile posibile.

Cazurile favorabile sunt $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,3,5\}$ şi sunt in număr de patru.

Probabilitatea cerută este $P=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot a+(-2)\cdot(-1)=a+2$

$\Rightarrow a+2=3\Rightarrow a=1$

6. $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{16+25-49}{2\cdot 4\cdot 5}=-\dfrac{8}{40}=-\dfrac{1}{5}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** În cazul $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0>0$ şi $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ şi mulțimea $G=\left\{X(p)=I_2+pA \,\middle|\, p\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\right\}$.

5p **a)** Arătați că $X(p)\cdot X(q)\in G$, pentru orice $X(p), X(q)\in G$.

5p **b)** Admitem că $(G,\cdot)$ este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.

5p **c)** Rezolvați ecuația $(X(p))^3=I_2+7A$, unde $X(p)\in G$.

Subiectul 2

1.a) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$

$\det A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=4m+3+3-6-6-m=3m-6$

b) Sistemul are soluţie unică dacă şi numai dacă $\det A\neq 0$

$\det A\neq 0 \Leftrightarrow 3m-6\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 2 \Leftrightarrow m\in R\setminus\{2\}$

c) Pentru m=2 sistemul devine: $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$

Rezolvăm sistemul.

$\det A=0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$ deci matricea sistemului are rangul 2.

Nu mai calculăm determinantul caracteristic deoarece sistemele omogene sunt compatibile intotdeauna.

Notăm $z=\alpha$ şi păstrăm primele două ecuaţii din sistem.

$\Rightarrow \begin{cases} 2x+y=-3\alpha \\ x+2y=-3\alpha \end{cases}$

Se rezolvă acest sistem şi se obţin soluţile $x=y=-\alpha$

Sistemul iniţial are soluţia: $\begin{cases} x=-\alpha \\ y=-\alpha, \alpha\in R \\ z=\alpha \end{cases}$

Inlocuim in condiţia din ipoteză şi obţinem $(-\alpha)^2+(-\alpha)^2+\alpha^2=3 \Rightarrow 3\alpha^2=3 \Rightarrow \alpha=\pm 1$.

Pentru $\alpha=-1$ obţinem $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=1 \\ z_0=-1 \end{cases}$ care convine.

Pentru $\alpha=1$ obţinem $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-1 \\ z_0=1 \end{cases}$ care nu convine deoarece in exerciţiu era condiţia $x_0>0$.

2.a) Mai intai să observăm că $A^2=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=A$

Fie $X(p)$ şi $X(q)$ două matrice oarecare din G.

$X(p)\cdot X(q)=(I_2+pA)(I_2+qA)=I_2^2+qI_2A+pAI_2+pqA^2=I_2+qA+pA+pqA=I_2+(p+q+pq)A$

Să mai observăm că in ipoteza $p,q\neq-1$ rezultă $(p+1)(q+1)\neq 0\Rightarrow p+q+pq\neq-1$

In concluzie $X(p)\cdot X(q)\in G$.

b) Fie $X(p')$ inversul elementului $X(p)$ in grupul $(G,\cdot)$.

$X(p)\cdot X(p')=X(p')\cdot X(p)=X(0)$

$\Rightarrow X(p+p'+pp')=X(0)\Rightarrow p+p'+pp'=0\Rightarrow p'(1+p)=-p\Rightarrow p'=-\frac{p}{1+p}\neq-1$

Rezultă că pentru orice matrice $X(p)\in G$ există matricea $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)\in G$ astfel incat

$X(p)\cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right)=X\left(-\frac{p}{1+p}\right)\cdot X(p)=X(0)$

deci $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul elementului $X(p)$ in grupul $(G,\cdot)$

c) Folosim relaţia $X(p)\cdot X(q)=X((p+1)(q+1)-1)$

$X(p)^2=X(p)\cdot X(p)=X((p+1)(p+1)-1)=X\left((p+1)^2-1\right)$

$X(p)^3=X(p)^2\cdot X(p)=X\left((p+1)^2-1\right)\cdot X(p)=X\left((p+1)^2(p+1)-1\right)=X\left((p+1)^3-1\right)$

Mai departe avem:

$X\left((p+1)^3-1\right)=X(7)\Rightarrow(p+1)^3-1=7\Rightarrow(p+1)^3=8$

$p\in R\setminus\{-1\}\Rightarrow p+1=2\Rightarrow p=1$.Soluţia este $X(1)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.
5p	**a)** Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}$.
5p	**c)** Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x)=a$ are trei soluții reale distincte.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$.
5p	**a)** Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1,+\infty)$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_x^{2x}f(t)\,dt}{x}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=3x^2-12$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

Tabelul cu montonia funcţiei f este:

x		-2		2	
f'(x)	+ + + +	0	- - - - - - - - - - - - -	0	+ + + +
f(x)	$\nearrow$	f(-2)	$\searrow$	f(2)	$\nearrow$

Din tabel rezultă că funcţia f este crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

b)Se aplică in mod repetat regula lui l'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3-12x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(x^3-12x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2-12}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(3x^2-12\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{(6x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

c) Fie funcţia $g:R\to R$ prin formula $g(x)=f(x)-a$.

$g'(x)=f'(x)=3x^2-12$ iar ecuaţia $g'(x)=0$ are aceleaşi rădăcini $x=\pm 2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$g(-2)=f(-2)-a=-8+24-a=16-a$

$g(2)=f(2)-a=8-24-a=-16-a$

Şirul lui Rolle pentru funcţia g este $-\infty \quad 16-a \quad -16-a \quad +\infty$

Ecuaţia $g(x)=0$ are trei soluţii distincte d.n.d. in şirul lui Rolle sunt trei schimbări de semn.

$$\Rightarrow \begin{cases}16-a>0\\-16-a<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a<16\\a>-16\end{cases}\Rightarrow a\in(-16,16)$$

2.a).Fie F o primitivă oarecare a funcţiei f.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{2x+3}{x+2}>0$ pentru $x>-1$ rezultă că F este strict crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

b) $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\frac{\frac{2x+3}{x+2}}{x+1}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+3x+2\right)'}{x^2+3x+2}dx=$

$=\ln\left|x^2+3x+2\right|\Big|_0^1=\ln 6-\ln 2=\ln 3$

c) $\displaystyle\int_x^{2x}f(t)dt=\int_x^{2x}\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_x^{2x}\frac{2t+4-1}{t+2}dt=\int_x^{2x}\left[2-\frac{1}{t+2}\right]dt=\left(2t-\ln(t+2)\right)\Big|_x^{2x}=$

$=\left(4x-\ln(2x+2)\right)-\left(2x-\ln(x+2)\right)=2x-\ln\dfrac{2x+2}{x+2}$ pentru x>0.

Limita cerută este:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{\ln\frac{2x+2}{x+2}}{x}\right)=2-\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+2}{x+2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}x}=2-\frac{\ln 2}{+\infty}=2-0=2$$

Am ţinut aici cont de faptul că $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+2}{x+2}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{x+2}=\ln\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x+2)'}{(x+2)'}=\ln 2$