

Д/з к уроку 2. Вебинар "Элементарная алгебра"

1. Найдите уравнение параболы, проходящей через 3 точки (x, y) :

$$(1, 2), (3, 10), (5, 1)$$

Парабола задается уравнением:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b и c — коэффициенты параболы, которые нужно найти. Подставим в уравнение заданные координаты точек:

$$\begin{cases} y_1 = a \cdot x_1^2 + b x_1 + c; & \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ y_2 = a \cdot x_2^2 + b x_2 + c; & \begin{pmatrix} 3 & 10 \end{pmatrix} \\ y_3 = a x_3^2 + b x_3 + c; & \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c; \\ 10 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c; \\ 1 = a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c; \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{cases} a + b + c = 2; \\ 9a + 3b + c = 10; \\ 25a + 5b + c = 1. \end{cases}$$

Умножим I на -9 и прибавим к II:

$$\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 10 \\ -9a - 9b - 9c &= -18 \end{aligned}$$

$$-6b - 8c = -8$$

$$6b + 8c = 8; \quad 6b = 8 - 8c;$$

$$b = \frac{8}{6}(1 - c); \quad b = \frac{4}{3}(1 - c)$$

Из II:

$$\begin{aligned} a &= 2 - b - c; \quad a = 2 - \frac{4}{3}(1 - c) - c = \\ &= \frac{6}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}c - \frac{3}{3}c = \frac{6 - 4 + 4c - 3c}{3} = \\ &= \frac{2 + c}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}c \end{aligned}$$

Подставим в III:

$$25\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}c\right) + 5\left(\frac{4}{3}(1 - c)\right) + c = 1;$$

$$\frac{50 + 25c}{3} + \frac{20 - 20c}{3} + \frac{3c}{3} = \frac{3}{3};$$

$$50 + 25c + 20 - 20c + 3c = 3;$$

$$8c = -67;$$

$$c = -\frac{67}{8}.$$

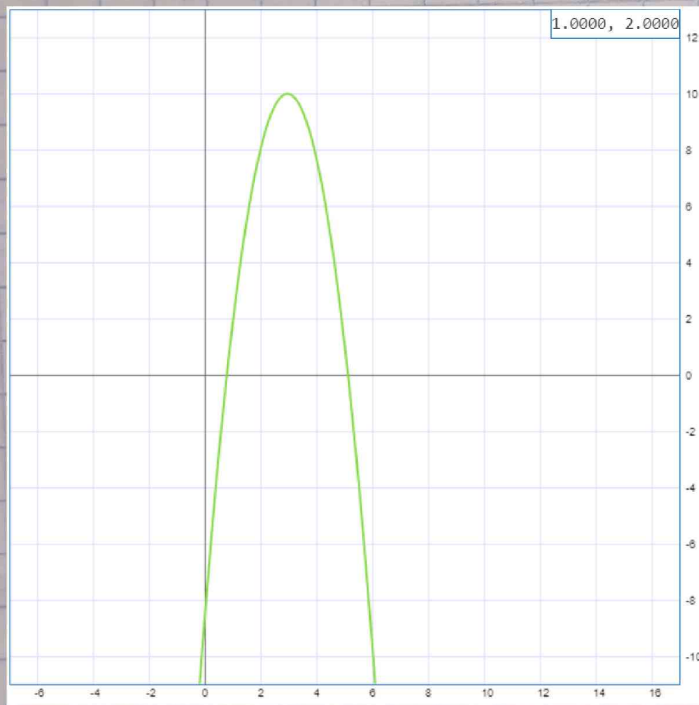
$$\begin{aligned} a &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{67}{8}\right) = \frac{8 \cdot 2 + (-67)}{24} = \\ &= \frac{16 - 67}{24} = -\frac{51}{24} = -\frac{17}{8}. \end{aligned}$$

$$b = \frac{4}{3}(1 - c) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{67}{8}\right) = \frac{32 + 268}{24} = \frac{300}{24} = 12,5.$$

Таким образом, уравнение
параболы будет:

$$y = -\frac{17}{8}x^2 + 12,5x - \frac{67}{8}.$$

График:



2. Задание

Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что огурцов ровно 100 кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

Вопросит, сколько не-воды в
свежих огурцах: $100 - 99 = 1 (\%)$

$$100\% - 100 \text{ кг}$$

$$1\% - x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1}{100} = 1 (\text{кг})$$

Сколько не-воды будет в
усохших огурцах: $100 - 98 = 2 (\%)$

$$2\% - 1 \text{ кг}$$

$$100\% - x$$

$$x = \frac{100 \cdot 1}{2} = 50 (\text{кг})$$

3. Определение логарифма. Решить уравнение:

1. $2^x = 256$

прологарифмируем обе части:

$$\log_2 2^x = \log_2 256; \quad \log_2 2^x = \log_2 2^8;$$

степень выносим как множитель:

$$x \log_2 2 = 8 \log_2 2$$

$$x = 8$$

$$a^c = b$$

2. $2^x = 300$

из определения логарифма:

$$\log_2 300 = x$$

$$x = \log_2 4 + \log_2 75$$

$$x = 2 + \log_2 75$$

$$x \approx 8,229$$

$$\log_a b = c$$

$$3. * \quad \log_8 2^{8x-4} = 4$$

вынесем степень :

$$(8x-4) \log_8 2 = 4 ;$$

$$(8x-4) \cdot \frac{1}{3} = 4 ;$$

$$8x-4 = 12 ;$$

$$8x = 12 + 4 ;$$

$$8x = 16 ;$$

$$x = \frac{16}{8} ;$$

$$x = 2 .$$

$$4. * \quad 3^{\log_9(5x-5)} = 5$$

по свойству логарифма :

$$(5x-5)^{\log_9 3} = 5 ; \quad \log_9 3 = \frac{1}{2} .$$

$$(5x-5)^{1/2} = 5$$

возведём обе части в степень 2 :

$$5x-5 = 25$$

$$5x = 30$$

$$x = 6 .$$

$$5. * \quad x^{\log_3 x + 1} = 9$$

прологарифмируем обе части по осн. 3:

$$\log_3 x^{\log_3 x + 1} = \log_3 9$$

$$(\log_3 x + 1) \log_3 x = 2$$

$$\log_3^2 x + \log_3 x = 2$$

заменим:

$$\log_3 x = t$$

получим:

$$t^2 + t = 2; \quad t^2 + t - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4(-2) = 1 + 8 = 9$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{9} = \pm 3$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$t_2 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

вернем:

$$\log_3 x = t_1 = -2$$

$$x_1 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\log_3 x = t_2 = 1$$

$$x_2 = 3^1 = 3$$

4. Свойства логарифмов. Вычислить:

$$6. \log_4 16 = 2$$

$$7. \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$8. \log_{25} 5 = \frac{1}{2}$$

$$9. \log_3 \sqrt{27} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$10. \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \\ = \log_2 4 = 2$$

$$11. \log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 (12 \cdot 3) = \\ = \log_6 36 = 2$$

$$12. e^{\ln 5} = 5^{\ln e} = 5^1 = 5$$

$$13. \frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{15} 225 = 2$$

$$14. \log_4 32 + \log_{0,1} 10 =$$

$$= \frac{\log_2 32}{\log_2 4} + \log_{0,1} 10 = \frac{5}{2} - 1 = 2,5 - 1 = 1,5$$

$$15.* 9^{\log_3 \sqrt{5}} = \sqrt{5}^{\log_3 9} = (\sqrt{5})^2 = 5$$