Домашнее задание к уроку 3

„Введение в аналитическую геометрию. Графики на плоскости"

1. Даны два вектора в трёхмерном пространстве: $(10, 10, 10)$ и $(0, 0, -10)$

1) Найдите их сумму

$(10+0, 10+0, 10-10) = (10, 10, 0)$

2. Почему прямые кажутся перпендикулярными?

Т.к. для осей x и y не был указан масштаб, то у каждой оси он разный, что искажает взаимное расположение прямых.

4.1 Пусть задана плоскость:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Напишите уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.

Нормальный вектор исходной плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$. Принимаем этот вектор в качестве нормального вектора искомой плоскости.

Записываем уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

подставляем $M(0, 0, 0)$:

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C(z - 0) = 0$$

$Ax + By + Cz = 0$ – искомое уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через начало координат.

4.2 Пусть задана плоскость

$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и прямая

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Как узнать, принадлежит прямая плоскости или нет?

Прямая принадлежит плоскости, если:

1) её две точки принадлежат этой плоскости;

2) имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, расположенной на этой плоскости

$$\begin{cases} A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 + D_1 = 0, \\ A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2 + D_1 = 0. \end{cases}$$

$$A_1 (x_1 - x_2) + B_1 (y_1 - y_2) + C_1 (z_1 - z_2) = 0$$

Если точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) удовлетворяют уравнению (позволяют решить уравнение), то прямая принадлежит плоскости.

2. Докажите, что при ортогональном преобразовании сохраняется расстояние между точками.

Линейное преобразование

$$X = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$$
$$Y = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

является ортогональным, если:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

Как следствие: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$

Пусть точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ посредством ортогонального преобразования переводятся в точки $N_1(X_1, Y_1)$ и $N_2(X_2, Y_2)$. Для доказательства необходимо выяснить, что длины отрезков M_1M_2 и N_1N_2 совпадают.

$$|N_1N_2|^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 =$$
$$= (a_{11} \cdot x_2 + a_{12} \cdot y_2 + a_{13} - a_{11}x_1 - a_{12} \cdot y_1 - a_{13})^2 +$$
$$+ (a_{21}x_2 + a_{22}y_2 + a_{23} - a_{21}x_1 - a_{22}y_1 - a_{23})^2 =$$

$$= (a_{11}(x_2 - x_1) + a_{12}(y_2 - y_1))^2 +$$

$$+ (a_{21}(x_2 - x_1) + a_{22}(y_2 - y_1))^2 =$$

$$= (\underbrace{a_{11}^2 + a_{21}^2}_{=1})(x_2 - x_1)^2 + (\underbrace{a_{12}^2 + a_{22}^2}_{=1}) \cdot$$

$$\cdot (y_2 - y_1)^2 + 2(\underbrace{a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}}_{=0}) \cdot (x_2 - x_1) \cdot$$

$$\cdot (y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = |M_1M_2|^2$$

Таким образом, получается, что длина отрезка после ортогонального преобразования сохраняется, т. е. сохраняется расстояние между точками, ч. т. д.