Домашнее задание по теме
„Производные функций нескольких переменных"

1. Найти область определения функции.

$z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$

Подкоренное выражение должно быть неотрицательным:

$1 - x^3 \geq 0$

$-x^3 \geq -1$

$x^3 \leq 1$

$x \leq 1$ $\quad x \in (-\infty; 1]$

Подлогарифмическая функция должна быть положительна:

$y^2 - 1 > 0$

$y^2 > 1$

$y > 1$

$y < -1$ $\quad y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Область определения функции z:

$x \in (-\infty; 1]$, $y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z=\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$\boxed{z'_x}=\left(\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3\right)'_x=3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)'_x=\boxed{3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\frac{1}{x\ln y}}$$

$$\boxed{z'_y}=\left(\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3\right)'_y=3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)'_y=\boxed{-3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\frac{\ln x}{y\cdot\ln^2 y}}$$

$$\left(\frac{\ln x}{\ln y}\right)'_y=\left(\ln x\cdot\ln^{-1}y\right)'_y=-\ln x\cdot\ln^{-2}y\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{y}=-\frac{\ln x}{y\cdot\ln^2 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке $(1;1)$.

$$z=\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=z'_x dx+z'_y dy$$

$$z'_x=\left(\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}\right)'_x=\frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\cdot$$

$$\cdot\left(2y-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}=\frac{2y-\sin\frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}.$$

$$z'_y=\left(\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}\right)'_y=\frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\cdot$$

$$\cdot\left(2x+\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)=$$

$$=\frac{2x+\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}=\frac{x+\frac{x}{2y^2}\sin\frac{x}{y}}{\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}.$$

$$dz=\frac{2y-\sin\frac{x}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}dx+\frac{x+\frac{x}{2y^2}\sin\frac{x}{y}}{\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}dy$$

$$dz(1;1)=\frac{2-\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}dx+$$

$$+\frac{1+\frac{\sin 1}{2}}{\sqrt{2+\cos 1}}dy$$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

1) Проверка необходимого условия существования экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases}$$

$2(9 - 2y) + y - 6 = 0$

$18 - 4y + y - 6 = 0$

$-3y + 12 = 0$

$-y + 4 = 0$

$-y = -4$

$y = 4$

$x = 9 - 2y$

$x = 9 - 2 \cdot 4 = 9 - 8 = 1$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$M(1; 4)$ – нашли критическую точку

2) Проверка достаточных условий

существования экстремума

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 6$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 9$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$ – экстремум есть

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$ – точка $M(1; 4)$ является точкой минимума