Домашнее задание по теме „Функция нескольких переменных". Часть 2

Исследовать функцию на условный экстремум:

1. $U = 3 - 8x + 6y$, если $x^2 + y^2 = 36$.

$L = f(x;y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$

$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 36$

$L(\lambda_1, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda_1(x^2 + y^2 - 36)$

$$\begin{cases} L'_x = -8 + \lambda_1 \cdot 2x = 0; \\ L'_y = 6 + \lambda_1 \cdot 2y = 0; \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 36 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{8}{2\lambda_1}; \\ y = -\dfrac{6}{2\lambda_1}; \\ \left(\dfrac{8}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(-\dfrac{6}{2\lambda_1}\right)^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{64}{4\lambda_1^2} + \frac{36}{4\lambda_1^2} - 36 = 0;$$

$$\frac{64+36}{4\lambda_1^2} = 36;$$

$$\frac{25}{\lambda^2} = 36;$$

$$\lambda^2 = \frac{25}{36};$$

$$\lambda = \frac{5}{6}; \qquad \lambda = -\frac{5}{6};$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{8 \cdot 6}{2 \cdot 5} = 4{,}8; \\ y = -\dfrac{6 \cdot 6}{2 \cdot 5} = -3{,}6; \\ \lambda = \dfrac{5}{6}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -4{,}8; \\ y = 3{,}6; \\ \lambda = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$M_1\left(\frac{5}{6}; 4{,}8; -3{,}6\right)$ $\qquad$ $M_2\left(-\frac{5}{6}; -4{,}8; 3{,}6\right)$

$L''_{xx} = 2\lambda_1 \qquad L''_{yy} = 2\lambda_1 \qquad L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$

$L''_{xy} = 0 \qquad L''_{x\lambda_1} = 2x \qquad L''_{y\lambda_1} = 2y$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda_1 & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda_1 \end{vmatrix} + 2y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 2\lambda_1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -2x(2x \cdot 2\lambda_1) + 2y(-2y \cdot 2\lambda_1) = -8x^2\lambda_1 -$$

$$-8y^2\lambda_1 = -8\lambda_1(x^2 + y^2)$$

Для $M_1\left(\frac{5}{6}; 4,8; -3,6\right)$:

$-8 \cdot \frac{5}{6} \cdot 36 = -8 \cdot 5 \cdot 6 = -240 < 0$, точка

$(4,8; -3,6)$ – точка минимума

Для $M_2\left(-\frac{5}{6}; -4,8; 3,6\right)$:

$-8 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot 36 = 8 \cdot 5 \cdot 6 = 240 > 0$, точка

$(-4,8; 3,6)$ – точка максимума.

2. $U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$,

если $x^2 + 16y^2 = 64$

$L = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$

$\varphi(x, y) = x^2 + 16y^2 - 64$

$L(\lambda_1, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 +$
$+ \lambda_1 (x^2 + 16y^2 - 64)$

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + 2\lambda_1 x = 0; & 1 \\ L'_y = 12x + 64y + 32\lambda_1 \cdot y = 0; & 2 \\ L'_{\lambda_1} = x^2 + 16y^2 - 64 = 0. & 3 \end{cases}$$

Из 1 выразим:

$4x + 12y + 2\lambda_1 x = 0;$

$2x + 6y + \lambda_1 x = 0;$

$\lambda_1 = -\dfrac{2x + 6y}{x};$

$\lambda_1 = -2 - \dfrac{6y}{x}.$

Подставим λ_1 в 2:

$12x + 64y + 32\lambda_1 \cdot y = 0;$

$3x + 16y + 8\lambda_1 y = 0;$

$3x + 16y + 8y\left(-2 - \dfrac{6y}{x}\right) = 0;$

$3x + 16y + (-16y) - \dfrac{48y^2}{x} = 0;$

$$3x - \frac{48y^2}{x} = 0;$$

$$3x^2 - 48y^2 = 0;$$

$$x^2 = 16y^2;$$

$$x = \pm 4y.$$

Подставим x в ③:

$$x^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$(\pm 4y)^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$16y^2 + 16y^2 - 64 = 0$$

$$32y^2 = 64$$

$$y^2 = \frac{64}{32}$$

$$y^2 = 2$$

$$y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \pm 4\sqrt{2}$$

Вычислим λ_1 для каждого случая x и y: подставляем x и y в ①

при $(-4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$:

$$4x + 12y + 2\lambda_1 x = 0;$$

$$\lambda_1 = -2 - \frac{6y}{x};$$

$$\lambda_1 = -2 - \frac{6(-\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}} = -2 - \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}.$$

$$M_1\left(-\frac{7}{2}; -4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right).$$

при $(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$:

$$\lambda_1 = -2 - \frac{6y}{x} = -2 - \frac{6(\sqrt{2})}{-4\sqrt{2}} = -2 + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

$$M2\left(-\frac{1}{2}; -4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$$

при $(4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$:

$$\lambda_1 = -2 - \frac{6y}{x} = -2 - \frac{6(-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = -2 + \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$M3\left(-\frac{1}{2}; 4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right).$$

при $(4\sqrt{2}; \sqrt{2})$:

$$\lambda_1 = -2 - \frac{6y}{x} = -2 - \frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -2 - \frac{3}{2} =$$

$$= -\frac{7}{2}$$

$$M4\left(-\frac{7}{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right).$$

$L''_{xx} = 4 + 2\lambda_1$ $L''_{yy} = 64 + 32\lambda_1$ $L''_{\lambda_1\lambda_1} = 0$

$L''_{xy} = 12$ $L''_{x\lambda_1} = 2x$ $L''_{y\lambda_1} = 32y$

$$\begin{pmatrix} L''_{\lambda_1\lambda_1} & L''_{\lambda_1 x} & L''_{\lambda_1 y} \\ L''_{x\lambda_1} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L_{y\lambda_1} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda_1 & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda_1 & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix} = 0 - 2x \cdot \begin{vmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 32y \cdot \begin{vmatrix} 2x & 4+2\lambda_1 \\ 32y & 12 \end{vmatrix} = -2x\left(2x(64+32\lambda_1) - \right.$$

$$\left. - 12 \cdot 32y\right) + 32y\left(2x \cdot 12 - 32y(4+2\lambda_1)\right) =$$

$$= -2x(128x + 64\lambda_1 x - 384y) + 32y(24x -$$

$$- 128y - 64\lambda_1 y) = -256x^2 - 128\lambda_1 x^2 -$$

$$-\cancel{768xy} + \cancel{768xy} - 4096y^2 - 2048\lambda_1 y^2 =$$

$$= -256x^2 - 128\lambda_1 x^2 - 4096y^2 - 2048\lambda_1 y^2$$

Для $M_1\left(-\frac{7}{2}; -4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$ и $M_4\left(-\frac{7}{2}; 4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$:

$$-256(\mp 4\sqrt{2})^2 + \overset{64}{\cancel{128}} \cdot \frac{7}{\cancel{2}_1} \cdot (\mp 4\sqrt{2})^2 - 4096(\mp\sqrt{2})^2 +$$

$$+ \overset{1024}{\cancel{2048}} \cdot \frac{7}{\cancel{2}_1}(\mp\sqrt{2})^2 = 12288 > 0$$ – точки $(-4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ и $(4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ – точки максимума.

Для $M_2\left(-\frac{1}{2}; -4\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ и $M_3\left(-\frac{1}{2}; 4\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$:

$$-256(\mp 4\sqrt{2})^2 + \overset{64}{\cancel{128}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}(\mp 4\sqrt{2})^2 - 4096(\pm\sqrt{2})^2 +$$

$$+ \overset{1024}{\cancel{2048}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}_1}(\pm\sqrt{2})^2 = -12288 < 0$$ – точки

$(-4\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и $(4\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ – точки минимума.

3. Найти производную функции $U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$ в точку $M(8; -12; 9)$.

1) найдём частные производные в точке $M(8; -12; 9)$.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \Big|_{(8;-12;9)} = 16$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2y \Big|_{(8;-12;9)} = 2 \cdot (-12) = -24$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2z \Big|_{(8;-12;9)} = 2 \cdot 9 = 18$$

2) найдём координаты направляющего вектора единичной длины

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} =$$

$$= \sqrt{81 + 64 + 144} = \sqrt{289} = 17$$

$$\vec{c_0} = \left(-\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$$

$$\cos\alpha = -\frac{9}{17}; \quad \cos\beta = \frac{8}{17}; \quad \cos\gamma = -\frac{12}{17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial c} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cdot \cos\gamma$$

$$\frac{\partial U}{\partial c}\Big|_M = 16 \cdot \left(-\frac{9}{17}\right) + (-24) \cdot \frac{8}{17} + 18 \cdot \left(-\frac{12}{17}\right) =$$

$$= \frac{-16\cdot 9 - 27\cdot 8 - 18\cdot 12}{17} = -\frac{144+192+216}{17} =$$

$$= -\frac{552}{17} \approx -32,47$$. Склон поверхности.

4. Найти производную функции $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d} = (4, -13, -16)$ в точку $L(-16; 4; -13)$.

1) найдём частные производные в точке $L(-16; 4; -13)$:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2x \Big|_{(-16;4;-13)} = e^{256+16+169} \cdot (-32) =$$

$$= -e^{441} \cdot 32.$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2y \Big|_{(-16;4;-13)} = e^{441} \cdot 8.$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = e^{x^2+y^2+z^2} \cdot 2z \Big|_{(-16;4;-13)} = -e^{441} \cdot 26.$$

2) найдём координаты направляющего вектора единичной длины:

$$|\vec{d}| = \sqrt{4^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{441} = 21$$

$$\vec{d_0} = \left(\frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{21}; \quad \cos\beta = -\frac{13}{21}; \quad \cos\gamma = -\frac{16}{21}$$

$$\frac{\partial U}{\partial d}\Big|_L = -e^{441} \cdot 32 \cdot \frac{4}{21} - e^{441} \cdot 8 \cdot \frac{13}{21} + e^{441} \cdot 26 \cdot \frac{16}{21} =$$

$$= e^{441} \cdot \frac{-32\cdot 4 - 8\cdot 13 + 26\cdot 16}{21} = e^{441} \cdot \frac{-128-104+416}{21} =$$

$$= e^{441} \cdot \frac{184}{21} \approx e^{441} \cdot 8,76 \approx 2,92 \cdot 10^{192}$$

Поверхность идёт в гору