Тема „Введение в математический анализ"

1. Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

Считаю, что последовательность - частный случай множества. Множество - более общее понятие, в котором для набора элементов достаточно любого объединяющего свойства, а последовательность - более узкое понятие, в котором для набора элементов объединяющее свойство определяет природу (значение) следующего элемента, а сами элементы представлены только натуральными числами.

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

1) $\forall y \in [0;1]: sgn(y) = 1$

Для любого y, принадлежащего множеству [0;1], существует функция сигнум, равная 1.

Отрицание: $\exists y \in [0;1]: sgn(y) \neq 1$

Существует хотя бы один y, принадлежащий множеству [0;1], для которого функция сигнум не равна 1

Высказывание ложно, т.к. $sgn(0) = 0$.

2) $\forall n \in N > 2 : \exists x, y, z \in N : x^n = y^n + z^n$

Для любого n, принадлежащего множеству натуральных чисел и большего 2, существует хотя бы один набор x, y, z, принадлежащих множеству натуральных чисел, для которого справедливо выражение: x^n равен $y^n + z^n$.

Отрицание:

$$\exists n \in N \leq 2 : \forall x, y, z \in N : x^n \neq y^n + z^n$$

Существует хотя бы одно n, принадлежащее множеству натуральных чисел и меньшее или равное 2, для которого при любых x, y, z, принадлежащих множеству натуральных чисел, справедливо выражение: x^n не равен $y^n + z^n$.

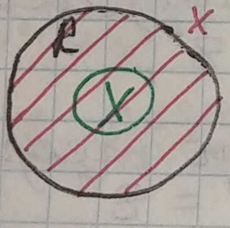
Высказывание ложно, т.к. по теореме Ферма уравнение вида $x^n + y^n = z^n$ (в данном случае $x^n = y^n + z^n$) не имеет натуральных решений при $n > 2$.

3) $\forall x \in R \; \exists X \in R : X > x$

Для любого x, принадлежащего множеству вещественных чисел, существует множество X, принадлежащее множеству вещественных чисел, для которых справедливо, что x меньше любого элемента множества X.

Отрицание: $\exists x \in R \; \forall X \in R : X \leq x$

Существует хотя бы один x, принадлежащий множеству вещественных чисел, при любом множестве X, принадлежащем множеству вещественных чисел, для которых справедливо, что x больше или равен любому элементу множества X.



Высказывание ложно, так как не все x будут меньше любого элемента множества X; получается, что x ∈ X тоже, поэтому x может быть равен элементам множества X.

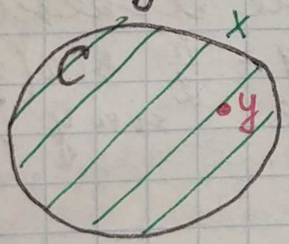
Для любых значений множества X, принадлежащего множеству вещественных чисел, найдётся хотя бы один x, принадлежащий множеству вещественных чисел, такой, что любой элемент множества X будет меньше или равен x.

4) $\forall x \in C \nexists y \in C : x > y \,||\, x < y$

Для любого x, принадлежащего множеству комплексных чисел, не существует y, принадлежащего множеству комплексных чисел, для которых справедливо, что x больше y или x меньше y.

Отрицание: $\exists x \in C \; \exists y \in C : x \leq y, \; x \geq y$

Существует хотя бы один x, принадлежащий множеству комплексных чисел, для которого существует такой y, принадлежащий множеству комплексных чисел, для которых справедливо, что x меньше либо равен y и x больше либо равен y.



x определён на всём множестве комплексных чисел, если не существует таких y, которые неравны x (только меньше или больше), то высказывание говорит о том, что $x = y$ для всех значений x и y. Таким образом, если $x = y$, то высказывание истинно

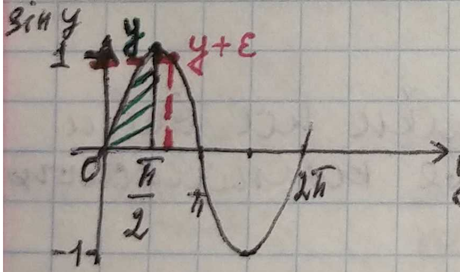
5) $\forall y \in [0;\frac{\pi}{2}]\ \exists \varepsilon > 0 : \sin y < \sin(y+\varepsilon)$

Для любого y, принадлежащего множеству $[0;\frac{\pi}{2}]$, существует хотя бы один ε больше 0, для которого справедливо, что функция синуса y меньше функции синуса $y+\varepsilon$.

Отрицание:

$\exists y \in [0;\frac{\pi}{2}]\ \forall \varepsilon \le 0 : \sin y \ge \sin(y+\varepsilon)$

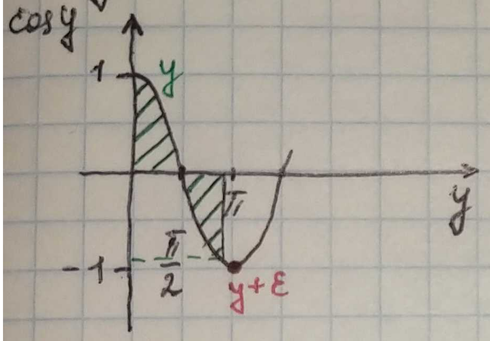
Существует хотя бы один y, принадлежащий множеству $[0;\frac{\pi}{2}]$, при любых ε меньше либо равных 0, для которого справедливо, что функция синуса y больше либо равна функции синуса $y+\varepsilon$.



Высказывание ложно, т.к. при $y=\frac{\pi}{2}$ $\sin(y+\varepsilon)$ будет меньше $\sin y$.

б) $\forall y \in [0;\pi)\ \exists \varepsilon > 0 : \cos y > \cos(y+\varepsilon)$

Для любого y, принадлежащего множеству $[0;\pi)$, существует ε больше 0, для которого справедливо, что функция косинуса y больше функции косинуса $y+\varepsilon$.



Высказывание истинно, так как: π не входит в область значений y, следовательно, может найтись такой ε, при котором $y+\varepsilon=\pi$, при этом $\cos(y+\varepsilon)$ будет меньше $\cos y$ (-1).

Отрицание:

$\exists y \in [0;\pi)\ \forall \varepsilon \leq 0 : \cos y \leq \cos(y+\varepsilon)$

Существует хотя бы один y, принадлежащий множеству $[0;\pi)$, при любых значениях ε меньше либо равных 0, для которых справедливо, что функция косинуса меньше либо равна функции косинуса $y+\varepsilon$.

7) $\exists x: x \notin \{N, Z, Q, R, C\}$

Существует хотя бы один x, не принадлежащий множеству, состоящему из множеств натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел.

Отрицание: $\forall x: x \in \{N, Z, Q, R, C\}$

Для любого x справедливо, что он принадлежит множеству, состоящему из множеств натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел.

Высказывание истинно, т.к. это может быть не числовое множество.

Тема „Множество"

1. Даны три множества a, в и с. Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

$a = \{10; 30; 50; 80\}$,

$в = \{20; 30; 40\}$,

$c = \{30; 50; 90\}$

1) Пересечение

$a \cap в = \{10; 30; 50; 80\} \cap \{20; 30; 40\} =$
$= \{30\}$

$в \cap c = \{20; 30; 40\} \cap \{30; 50; 90\} =$
$= \{30\}$

$a \cap c = \{10; 30; 50; 80\} \cap \{30; 50; 90\} =$
$= \{30; 50\}$

2) Объединение

$a \cup в = \{10; 30; 50; 80\} \cup \{20; 30; 40\} =$
$= \{10; 20; 30; 40; 50; 80\}$

$в \cup c = \{20; 30; 40\} \cup \{30; 50; 90\} =$
$= \{20; 30; 40; 50; 90\}$

$a \cup c = \{10; 30; 50; 80\} \cup \{30; 50; 90\} =$
$= \{10; 30; 50; 80; 90\}$

3) Разность

$a \setminus b = \{10; 30; 50; 80\} \setminus \{20; 30; 40\} =$
$= \{10; 50; 80\}$

$b \setminus a = \{20; 30; 40\} \setminus \{10; 30; 50; 80\} =$
$= \{20; 40\}$

$b \setminus c = \{20; 30; 40\} \setminus \{30; 50; 90\} =$
$= \{20; 40\}$

$c \setminus b = \{30; 50; 90\} \setminus \{20; 30; 40\} =$
$= \{50; 90\}$

$a \setminus c = \{10; 30; 50; 80\} \setminus \{30; 50; 90\} =$
$= \{10; 80\}$

$c \setminus a = \{30; 50; 90\} \setminus \{10; 30; 50; 80\} =$
$= \{90\}$

4) Симметричная разность

$a \triangle b = \{10; 30; 50; 80\} \triangle \{20; 30; 40\} =$
$= \{10; 40; 50; 80\}$

$b \triangle c = \{20; 30; 40\} \triangle \{30; 50; 90\} =$
$= \{20; 40; 50; 90\}$

$c \triangle a = \{30; 50; 90\} \triangle \{10; 30; 50; 80\} =$
$= \{10; 80; 90\}$

5) Декартово произведение

$\underline{a \times b} = \{10; 30; 50; 80\} \times \{20; 30; 40\} =$
$= \{(10; 20); (30; 20); (50; 20); (80; 20); (10; 30);$
$(30; 30); (50; 30); (80; 30); (10; 40); (30; 40);$
$(50; 40); (80; 40)\}$

$\underline{b \times a} = \{20; 30; 40\} \times \{10; 30; 50; 80\} =$
$= \{(20; 10); (20; 30); (20; 50); (20; 80);$
$(30; 10); (30; 30); (30; 50); (30; 80);$
$(40; 10); (40; 30); (40; 50); (40; 80)\}$

$\underline{b \times c} = \{20; 30; 40\} \times \{30; 50; 90\} =$
$= \{(20; 30); (20; 50); (20; 90); (30; 30);$
$(30; 50); (30; 90); (40; 30); (40; 50);$
$(40; 90)\}$

$\underline{c \times b} = \{30; 50; 90\} \times \{20; 30; 40\} =$
$= \{(30; 20); (30; 30); (30; 40); (50; 20);$
$(50; 30); (50; 40)\}$

$\underline{c \times a} = \{30; 50; 90\} \times \{10; 30; 50; 80\} =$
$= \{(30; 10); (30; 30); (30; 50); (30; 80);$
$(50; 10); (50; 30); (50; 50); (50; 80);$
$(90; 10); (90; 30); (90; 50); (90; 80)\}$

$\underline{a \times c} = \{10; 30; 50; 80\} \times \{30; 50; 90\} =$

$= \{(10; 30); (10; 50); (10; 90); (30; 30);$

$(30; 50); (30; 90); (50; 30); (50; 50);$

$(50; 90); (80; 30); (80; 50); (80; 90)\}$

Тема 3 „Последовательность"

1. Даны 4 последовательности.

Необходимо:

a. исследовать их на монотонность;

в. исследовать на ограниченность;

с. найти пятый по счёту член.

1)

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

а) чтобы исследовать на монотонность рассмотрим разность n-го члена последовательности a_n и её $(n+1)$-го члена $a_{n+1} = 2^{n+1} - (n+1)$.

$$a_n - a_{n+1} = 2^n - n - (2^{n+1} - (n+1)) =$$

$$= 2^n \cancel{- n} - 2^{n+1} \cancel{+ n} + 1 = 2^n - 2^{n+1} + 1$$

При $n \geq 1$ $2^n - 2^{n+1} + 1 < 0$ =>

$a_n - a_{n+1} < 0$, следовательно $a_n < a_{n+1}$, последовательность возрастает.

в) n принимает значения от 1 до $+\infty$, при этом последовательность:

при $n = 1$:

$$a_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

Т.к. последовательность возрастает, то снизу она ограничена 1, сверху - не ограничена.

c) $n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = 4, n_5 = 5$

при $n_5 = 5$:

$a_5 = 2^5 - 5 = 32 - 5 = 27$.

Пятый член последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$ равен 27.

2) $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$

a) чтобы исследовать на монотонность, рассмотрим разность n-го члена последовательности b_n и её $(n+1)$-го члена $b_{n+1} = \frac{1}{1-(n+1)} = -\frac{1}{n}$:

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{1-n} - \left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1-n} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{n+(1-n)}{n(1-n)} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{n-n^2} = \frac{1}{n-n^2}$$

При $n \geq 2$ $n - n^2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{n-n^2} < 0$, следовательно $b_n - b_{n+1} < 0 \Rightarrow$ $b_n < b_{n+1}$, последовательность возрастает.

в) n принимает значения от 2 до $+\infty$, при этом последовательность:

при $n_1 = 2$:

$b_1 = \frac{1}{1-2} = \frac{1}{-1} = -1$.

Т.к. последовательность возрастает, то снизу она ограничена -1, сверху — не ограничена.

с) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$, $n_4 = 5$, $n_5 = 6$

при $n_5 = 6$:

$$b_6 = \frac{1}{1-6} = \frac{1}{-5} = -0{,}2$$

Пятый член последовательности $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$ равен $-0{,}2$.

3) $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$

а) чтобы исследовать на монотонность, рассмотрим разность n-го числа последовательности c_n и её $(n+1)$-го члена $c_{n+1} = -1^{n+1} + \sqrt{2(n+1)}$:

$$c_n - c_{n+1} = -1^n + \sqrt{2n} - \left(-1^{n+1} + \sqrt{2(n+1)}\right)$$

1 в любой степени будет 1, поэтому можем упростить:

$$c_n - c_{n+1} = \cancel{-1} + \sqrt{2n} + \cancel{1} - \sqrt{2(n+1)} =$$

$$= \sqrt{2n} - \sqrt{2(n+1)} = \sqrt{2}\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{2}}$$

При $n \geq 1$ $\sqrt{n} - \sqrt{n+1} < 0 \Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{2}} < 0 \Rightarrow C_n - C_{n+1} < 0 \Rightarrow$$

$C_n < C_{n+1} \Rightarrow$ последовательность возрастает.

в) n принимает значения от 1 до $+\infty$, при этом последовательность:

при $n_1 = 1$:

$$c_1 = -1^1 + \sqrt{2 \cdot 1} = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4.$$

Т.к. последовательность возрастает, то она ограничена снизу $-1 + \sqrt{2}$, сверху - не ограничена.

c)

при $n_5 = 5$:

$$c_5 = -1^5 + \sqrt{2 \cdot 5} = -1 + \sqrt{10} \approx 2{,}16$$

Пятый член последовательности $\{C_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$ равен $-1 + \sqrt{10}$.

4)

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

а) чтобы исследовать на монотонность, рассмотрим разность n-го члена последовательности d_n и $(n+1)$-го члена $d_{n+1} = (-1)^{2(n+1)} + \frac{1}{(n+1)^2}$:

для $(-1)^{2n}$ и $(-1)^{2(n+1)}$ степени будут чётными $\Rightarrow 1$

$$d_n - d_{n+1} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2} - (-1)^{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2(n+1)^2 \cdot 1} + (n+1)^2 \cancel{- n^2(n+1)^2 \cdot 1} - n^2}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

При $n \geq 1$ $\quad 2n+1 > 0$ и $n^2(n+1)^2 > 0 \Rightarrow$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0 \Rightarrow d_n - d_{n+1} > 0 \Rightarrow d_n > d_{n+1},$$

следовательно последовательность убывает.

в) n принимает значения от 1 до $+\infty$, при этом последовательность;

при $n_1 = 1$:

$$d_1 = (-1)^{2\cdot 1} + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$$

Т.к. последовательность убывает, то она ограничена сверху 2, снизу не ограничена.

с) n принимает значения от 1 до $+\infty$, при этом последовательност;

при $n_1 = 5$:

$$d_5 = (-1)^2 + \frac{1}{5^2} = 1 + \frac{1}{25} = 1{,}04$$

Пятый член последовательности $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$ равен 1,04.

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности:

$$a_1 = 128 \;,\; a_{n+1} - a_n = 6$$

$$\Delta : 12-1$$

$$a_{12} = 128 + (6 \cdot 11) = 128 + 66 = 194$$