Тема „Предел функции“

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и бесконечности.

$$y = ctg(x)$$

$\lim\limits_{x\to 0} ctg(x) = \infty$ – бесконечный предел, предел не существует (функция является бесконечно большой в этой точке)

По Гейне: число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для любой бесконечно большой последовательности значений аргумента x_n соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ сходится к A. Для того, чтобы доказать, что такой предел не существует, достаточно указать две бесконечно большие последовательности x_n и x_n^* такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^*)$.

Пусть $x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, а $x_n^* = n\pi$, тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = \infty \quad ; \quad \lim_{n\to\infty}(n\pi) = \infty ;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ctg\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n^*) = \lim_{n\to\infty} ctg(n\pi) = \infty.$$

Значит, $\lim\limits_{x\to\infty} ctg(x)$ не существует.

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определённой в ней.

$$y = \operatorname{sgn}(x)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

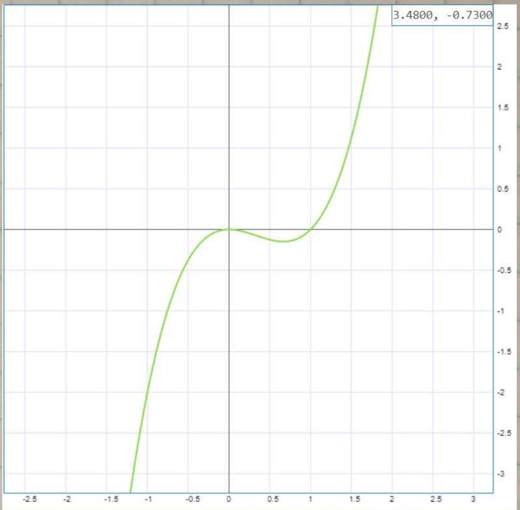
$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1.$$

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1.$$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow$ предела в нуле не существует, но функция определена в этой точке.

3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

а) область задания и область значений



Функция определена при x от $-\infty$ до $+\infty$:

$f(-\infty) = -\infty$

$f(+\infty) = +\infty$

$dom(f) = R$

$ran(f) = R$

в) нули функции и их кратность

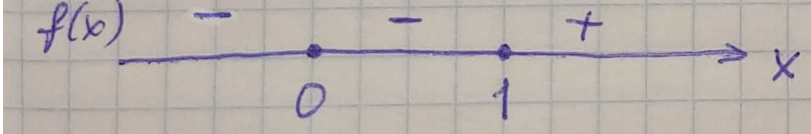
$x^3 - x^2 = 0$

$x^2(x-1) = 0$

$x^2 = 0$; $x = 0$ – кратность 2

$x - 1 = 0$; $x = 1$ – кратность 1

с) отрезки знакопостоянства



при x от $-\infty$ до 0 – функция отрицат.

при x от 0 до 1 – функция отрицательна

при x от 1 до $+\infty$ – функция положительна

d) интервалы монотонности

найдём экстремумы функции:

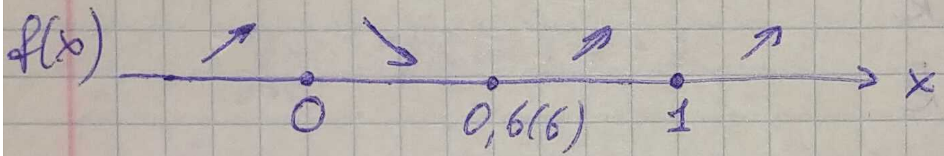
$(x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

$x = 0.$

$3x - 2 = 0$, $3x = 2$, $x = \frac{2}{3} = 0,6(6)$



Функция возрастает на интервалах от $-\infty$ до 0, от 0,6(6) до $+\infty$.

Функция убывает на интервале от 0 до 0,6(6).

e) чётность функции

если $f(-x) = f(x)$ – чётная,
если $f(-x) = -f(x)$ – нечётная,
иначе – общего вида

$f(x) = x^3 - x^2$ $\quad -f(x) = -x^3 + x^2$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = -1 - 1 = -2$

Функция – общего вида.

f) ограниченность

область значений функции от $-\infty$ до $+\infty$ – функция не ограничена

g) периодичность

функция периодична, если

$$f(x) = f(x + nT)$$

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$f(x+T) = (x+T)^3 - (x+T)^2 =$$

$$= x^3 + 3x^2T + 3xT^2 + T^3 - x^2 - 2xT -$$

$$- T^2 = x^3 + 2x^2T + 5xT^2 + T^3 - T^2$$

$f(x+T) \neq f(x) \Rightarrow$ функция апериодична

4. Найти предел:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(3x-2)}{4\cancel{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{3x-2}{4} =$$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{(\sqrt{1+x})^3-1} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{\sqrt{1+x}-1}}{\cancel{(\sqrt{1+x}-1)}(1+x+\sqrt{1+x}+1)} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2+\underset{\to 0}{x}+\underset{\to 0}{\sqrt{1+x}}} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = (1^\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x+1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot\frac{3}{x}\cdot(4x+1)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(4x+1)}{x}} = e^{12}.$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3(4x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{12x+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(12+\overset{0}{\overset{\uparrow}{\frac{1}{x}}})}{\cancel{x}} =$

$= 12.$

$\lim\limits_{\lim\to\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = e^{12}.$

Тема „Теоремы о пределах"

1. Найти предел:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2\cdot 2x} =$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{1}{2} = 0,5.$

b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\sim\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)\sim\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1.$$

d)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3+6}{4x-3}\right)^{6x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{4x-3}\right)^{\frac{4x-3}{6}\cdot\frac{6}{4x-3}\cdot 6x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{36x}{4x-3}}=e^{9}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{36x}{4x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{36}{4-\underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0}}=\frac{36}{4}=9.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x}=e^{9}$$