Тема 7 „Ряды"

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^n(n+1)}{(n!(n+1))^2}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{(n!)^2}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n \cancel{(n+1)}^{1} \cdot \cancel{(n!)^2}^{1}}{\cancel{(n!)^2} \cdot \cancel{(n+1)^2}_{(n+1)} \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot$$

$$\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 0 \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$

$= 0 \cdot e = 0 < 1$ – по д'Аламберу ряд сходится

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} =$$

$$= \frac{n^{\frac{1}{n}\to 0}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$ – по Коши ряд сходится.

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = -1 + \frac{1}{2,69} - \frac{1}{4} + \dots$$

$|a_n| > |a_{n+1}|$ – $n + \ln n$ при увеличении n будет расти, а функция – убывать; функция монотонно убывает

2) $$\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$ – предел не сущ-ет (ряд расходится)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right| =$$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0$ – по Лейбницу

ряд сходится условно.

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \left(\frac{3^n}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} - 1\right)\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{\cancel{3^n} \cdot \cancel{2^n} \cdot 2}{\cancel{2^n} \cdot \cancel{3^n} \cdot 3} - n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}n - n\right) =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{3}n\right) = -\infty < 1$ – по Раабе

ряд расходится.

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$f(x) = \ln(16x^2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots$$

при $a = 1$:

$$\ln(16x^2)\Big|_{a=1} = \ln(16a^2) + \left(\ln(16a^2)\right)' \cdot$$

$$\cdot (x-a)\Big|_{a=1} = \ln(16a^2) +$$

$$+ \frac{1}{\cancel{16}\cancel{a^2}_{a}} \cdot \cancel{16} \cdot 2\cancel{a}(x-a)\Big|_{a=1} =$$

$$= \ln(16a^2) + 2(x-a)\Big|_{a=1} =$$

$$= \ln 16 + 2(x-1) = \ln 16 + 2x - 2.$$

Тема 8 „Понятие об интеграле"

1. Найти неопределённый интеграл:

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\,dx = 2\int x^2 dx - 2\int x\,dx - \int dx + \int \sin x\,dx - \int \cos x\,dx + \int \ln x\,dx + \int e^x dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} - x - \cos x + x\ln x - x + e^x + C = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2x - \cos x + x\ln x + e^x + C.$$

2. Найти неопределённый интеграл:

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\,dx = 2\int x\,dx + 6z^2\int x\,dx - 5y\int x^2 dx - 3\ln z\int dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + 6z^2\cdot\frac{x^2}{2} - 5y\frac{x^3}{3} - 3\ln z\, x + C = x^2 + 3z^2x^2 - \frac{5}{3}yx^3 - 3x\ln z + C.$$