PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE 2

MATEMATIKA TERAPAN 2
16TIN3043

Jurusan Teknik Komputer dan Informatika
(POLBAN)
4 Desember 2020
KO075N - Siti Dwi Setiarini, S.Si., M.T. (SD)

Jurusan Teknik Komputer
dan Informatika


Belajar dengan dosen matematika
Setelah itu pulang ke rumah
Sebelum acara di buka
Mari bersama ucapkan bismillah

Materi Sebelumnya

PD Orde 1

- Definisi
- Orde
- Teknik Penyelesaian
- P
- H
- L

Pendahuluan

Outline

Pendahuluan

- Materi Terkait
- Objektif Perilaku Siswa (OPS)
- Referensi
- Urgensi Persamaan Diferensial

Isi Materi

- Definisi
- Teknik Penyelesaian dan Latihan
- Implementasi

Penutup

Materi Terkait

Turunan

Integral

Persamaan Linear

- Variabel Bebas dan Terikat (Tak Bebas)
- Solusi umum dan khusus

Persamaan Non-Linear

- Contoh-contoh persamaan non-linear

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

mencari $x \longrightarrow$ akar

Turunan dan Integral

$$f(x) \to R$$
$$y \to x^2$$

$$f(x) = x^2$$
$$y = x^2$$

$$f'(x) = y' = ?$$

$$y' = x^2 \frac{dy}{dx}$$
$$y' = 2x$$
$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = y = ?$$

$$y = \int 2x \; dx$$
$$y = \frac{1}{2} . 2x^2 + c$$
$$y = 2x + c$$
$$f(x) = 2x + c$$

Persamaan Linear

- 1 variabel bebas

$$y = ax + 1$$

Variabel bebas = x

Variabel terikat = y

- 2 variabel bebas

$$z = ax + 3y$$

Variabel bebas = x dan y

Variabel terikat = z

Solusi Umum dan Khusus

$$misal\ f(x)$$
$$merupakan\ suatu\ solusi$$

Solusi Umum

$$f(x) = y = ax + 1$$
$$\boxed{f(2) = 3}$$

Solusi Khusus

$$f(2) = 2a + 1$$
$$3 = 2a + 1$$
$$2 = 2a$$
$$a = 1$$
$$f(x) = y = x + 1$$

Solusi Umum dan Khusus

$$misal\ f(x,y)$$
$$merupakan\ suatu\ solusi$$

Solusi Umum

$$\mathrm{f(x,y)} = \mathrm{z} = ax + 3y$$
$$\mathrm{f(1,2)} = 8$$

Solusi Khusus

$$\mathrm{f(1,2)} = a + 3.2$$
$$8 = a + 6$$
$$2 = a$$
$$a = 2$$
$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{y} = 2x + 3y$$

Solusi Umum dan Khusus

Solusi Umum

$$f(x) = 2x + c$$

misal $\boxed{f(2) = 4}$

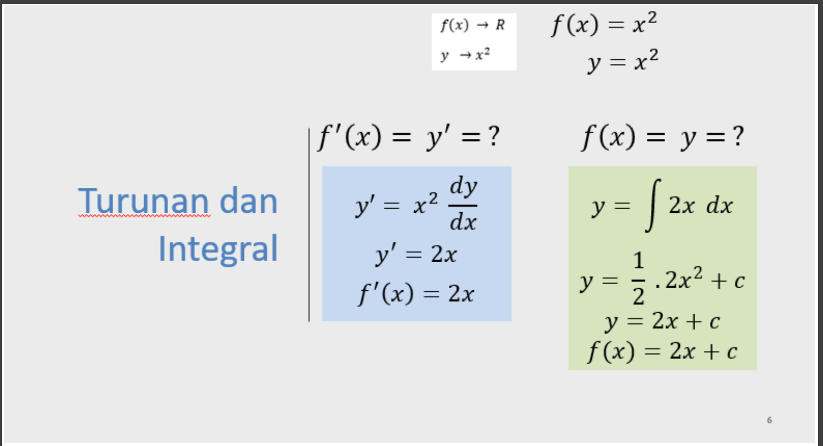
Solusi Khusus

$$f(2) = 2.2 + c$$

$$4 = 4 + c$$

$$c = 0$$

$$f(x) = 2x$$


$f(x) \to R$

$y \to x^2$

$f(x) = x^2$

$y = x^2$

Turunan dan Integral

$f'(x) = y' = ?$

$y' = x^2 \frac{dy}{dx}$

$y' = 2x$

$f'(x) = 2x$

$f(x) = y = ?$

$y = \int 2x \ dx$

$y = \frac{1}{2} . 2x^2 + c$

$y = 2x + c$

$f(x) = 2x + c$

6

Solusi Umum dan Khusus

Solusi Umum

$$f(x) = 2x + c$$

misal $f(2) = 5$

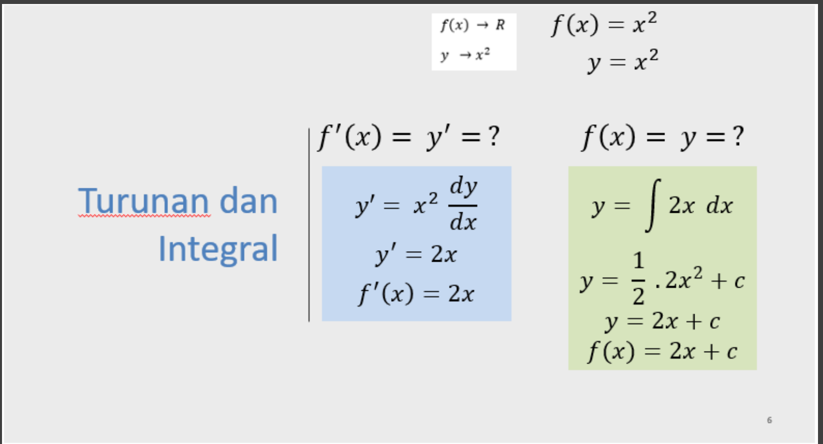
Solusi Khusus

$$f(2) = 2.2 + c$$

$$5 = 4 + c$$

$$c = 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$



Persamaan Non-Linear

- Persamaan Kuadrat
- Persamaan Derajat 3
- Persamaan Trigonometri
- Persamaan Logaritma Asli
- Persamaan Exponensial
- dll

$\to f(x)$

$y'' + 2y' + 1 \boxed{= 0}$

$x^2 + 2x + 1 = 0$

- Faktorisasi $\to (x+1)(x+1) = 0$
- rumus abc $\to \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Objektif Perilaku Siswa

Mampu mengaitkan persamaan diferensial dengan implementasinya dalam informatika berdasarkan kemampuan mengenali persamaan yang melibatkan fungsi satu peubah dan turunannya serta kemampuan menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan hasil analisis metode yang tepat

Referensi

Dale Varberg, Edwin Purcell, Steve Rigdon.2006.*Calculus*. Prentice Hall

Urgensi

- Aplikasi Turunan (Gradien, Optimasi, dll)
- Grafika Komputer
- Physics Effect Game
- Model Populasi

transformasi Laplace

↳ numerik

Materi
Persamaan Diferensial (PD)
Orde - 2

Definisi

Definisi

Persamaan Diferensial yang memiliki fungsi turunan yang tidak diketahui di dalamnya dengan maksimum turunan ke dua.

Memuat 1 atau lebih turunan kedua fungsi yang tidak diketahui

Persamaan Diferensial Orde 2

tidak homogen

$x^2 + 2x + 1 = \ldots$

double aksen

turunan ke 2 :

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = r(x)$$

polinom

$ax + b$

Persamaan Diferensial Orde 2 Homogen

$$y'' + p(x)y' + g(x)y = 0$$

Persamaan Diferensial Orde 2 Homogen dengan Koefisien Konstan

$$y'' + ay' + by = 0$$

angka angka tanpa var bebas.

Bentuk Umum

Orde – 2

Turunan ke 2

Teknik Penyelesaian

Teknik Penyelesaian Persamaan Diferensial
Orde-2

PD Homogen
$= 0$

Solusi Homogen

PD non-Homogen
$= r(x)$

Solusi Total

Koefisien Tak Tentu

Variasi Parameter

① PD = 0
cari solusi Hom

② cari solusi parsial

③ solusi total
= ① + ②

Teknik:

Homogen?

PD Homogen
-Solusi Homogen-

Solusi PD Homogen

Diketahui $y'' + a\,y' + b\,y = 0$

Misalkan $y = e^{rx}$

Persamaannya berubah menjadi $r^2 + a\,r + b = 0$, sebuah persamaan kuadrat.

Jadi kemungkinan akarnya ada 3 yaitu:

1. Akar real berbeda → $x = 1 \cup x = 2$
2. Akar real kembar → $x = 1 \cup x = 1$ → $x = 1$
3. Akar kompleks kojugate → akar bil. komplex

$\sqrt{-25} = 5i$

$\sqrt{-25}$

$\sqrt{25(-1)}$

$5 . \sqrt{-1}$

Akar Persamaan Kuadrat (ReKKom):
Real, Kembar, Kompleks

Solusi PD Homogen

$x^2+2x+1=0$

$x_1 = \dots \cup x_2 = \dots$

1. Akar Real Berbeda (r_1, r_2; dimana $r_1 \neq r_2$)

Memiliki solusi basis $y_1 = e^{r_1 x}$ dan $y_2 = e^{r_2 x}$ dan mempunyai solusi umum

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

solusi umum

Re

Akar REAL

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

Solusi PD Homogen

2. Akar Real kembar (r_1 ,r_2; dimana $r = r_1 = r_2$)

Memiliki solusi basis $y_1 = e^{r_1 x}$ dan $y_2 = x\, e^{r_2 x}$ dan mempunyai solusi umum

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$$

K

Akar Kembar

$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$

Solusi PD Homogen

rumus abc

$\sqrt{-}$

$w =$ konstanta

3. Akar Kompleks Kojugate ($r_1 = u+wi$, $r_2 = u-wi$)

Memiliki solusi basis $y_1 = e^{ux} \cos wx$; dan $y_2 = e^{ux} \sin wx$ dan mempunyai solusi umum

$$y = e^{ux} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$$

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2}$$

$$y = e^{ux} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$$

Kom

Akar Kompleks

$y = e^{ux} (C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$

1. $y'' + 5y' + 6y = 0 \rightarrow r^2 + 5r + 6 = 0$

Persamaan karakteristiknya: $(r + 2)(r + 3) = 0$

$r_1 = -2$ atau $r_2 = -3$ — akar real beda: $e^{r_1 x}$ $e^{r_2 x}$

maka solusinya : $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0 \rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0$

Persamaan karakteristiknya: $(r + 3)(r + 3) = 0$

$r_1 = r_2 = -3$ — aker kembar.

maka solusinya : $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$

3. $y'' + 4y = 0 \rightarrow r^2 + 4 = 0$

$(r+2)^2 = r^2 + 2r + 4 = 0 \neq r^2 + 4$

$(r+2)^2 - 2r$

Persamaan karakteristiknya: $r^2 + 4 = 0$

$$r_{12} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4.1.4}}{2.1} = \boxed{\pm 2i} = \frac{\pm\sqrt{-16}}{2} = \frac{\pm 4i}{2} = \pm 2i$$

akar kompleks.

rumus abc: $ar^2 + br + c = 0$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 4$

maka solusinya : $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

CONTOH

PDB Non-Homogen

1 = 0
Sh
2 Sp
3 Sh + Sp

Solusi = Solusi Homogen + Non Homogen

Teknik Non Homogen (KaVe):
Koefisien Tak Tentu
Variasi Paramter

Bentuk umum: $y'' + p(x)\, y' + g(x)\ y = r(x)$, dengan $r(x) \neq 0$
Solusi total : $y = y_h + y_p$
Dimana
y_h = solusi PD homogen
y_p = solusi P D non homogen

y_h (sebelumnya)
$y_p \rightarrow$???

PDB Non-Homogen
-Koefisien Tak Tentu-

Solusi
Koefisien Tak Tentu

Pilihlah y_p yang serupa dengan r(x)

r(x)	y_p
$r(x) = e^{mx}$	$y_p = A\, e^{ux}$
$r(x) = X^n$	$y_p = A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots + A_1 X + A_0$
$r(x) = \sin wx$	$y_p = A \cos wx + B \sin wx$
$r(x) = \cos wx$	$y_p = A \cos wx + B \sin wx$
$r(x) = e^{ux} \sin wx$	$y_p = e^{ux}(A \cos wx + B \sin wx)$
$r(x) = e^{ux} \cos wx$	$y_p = e^{ux}(A \cos wx + B \sin wx)$

Mirip r(x)

CONTOH

1. $y'' - 3y' + 2y = \boxed{e^{-x}}$ 0 $\rightarrow$ e^{mx}

$y = A e^{ux}$

$y = A e^{-x}$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0$$

S_h

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogennya adalah $y_h = \boxed{C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}}$ 1

Untuk y_p dipilih $\boxed{y_p = A e^{-x}}$

$$y_p' = -A e^{-x} \Leftrightarrow y_p'' = A e^{-x}$$

$S_p = y_p = A e^{-x} = 1/6\, e^{-x}$ 2

$6A = 1$

$A = 1/6$

Kemudian masukan ke PD di atas:

$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

$$A e^{-x} + 3 A e^{-x} + 2 A e^{-x} = e^{-x} \Leftrightarrow 6 A \cancel{e^{-x}} = \cancel{e^{-x}} \Leftrightarrow A = 1/6$$

Jadi solusi umum PD di atas adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + \boxed{1/6\, e^{-x}}$$

2. $y'' - 3y' + 2y = \boxed{\cos x}$ → $\cos wx = \cos 1x$ → $w = 1$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogennya adalah $\boxed{y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x}$

Untuk y_p dipilih $y_p = A \cos 1x + B \sin 1x$

$y_p' = -A \sin x + B \cos x \Leftrightarrow y_p'' = -A \cos x - B \sin x$

Kemudian masukan ke PD di atas:

$(-A \cos x - B \sin x) - 3(-A \sin x + B \cos x) + 2(A \cos x + B \sin x) = \cos x$

$(-A - 3B + 2A) \cos x + (-B + 3A + 2B) \sin x = \cos x \Leftrightarrow$

$(-3B + A) \cos x + (3A+B) \sin x = \cos x \Leftrightarrow -3B + A = 1$ dan $3A+B = 0$

→ $9A + 3B = 0$ → $1 \cos x + \boxed{0} \sin x$

→ $-3B + A = 1$

Didapat

$A = 1/10$ dan $B = -3/10$

Jadi solusi umum PD di atas adalah

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + (1/10) \cos x - (3/10) \sin x$

CONTOH

$A = 1/10 \quad B = -3/10$

$y_p = \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$

$9A + \cancel{3B} = 0$

$A - \cancel{3B} = 1$ +

$10A = 1$

$A = 1/10$

CONTOH

3. $y'' - 3y' + 2y = e^{-x} + \cos x$

Jawab:

Dari contoh 1 dan 2 didapat, solusi umumnya adalah

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} + (1/6)\, e^{-x} + (1/10) \cos x - (3/10) \sin x$$

4. $y'' - 3y' + 2y = e^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=-1$ → solusi khusus.

$y_p = Ae^x$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow (r-2)(r-1) = 0$$

Sehingga didapat $r_1 = 2$ dan $r_2 = 1$

Jadi solusi homogennya adalah $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$

Untuk y_p dipilih $y_p = A x e^x$

$$y_p' = A e^x + A x e^x \Leftrightarrow y_p'' = 2A e^x + A x e^x$$

Ae^x

Kemudian masukan ke PD di atas:

$$2Ae^x + Axe^x - 3(Ae^x + Axe^x) + 2Axe^x = e^x \Leftrightarrow -A e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = -1}$$

$y_p = -xe^x$

Jadi solusi umum PD di atas adalah $\boxed{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - xe^x}$

CONTOH

Kita punya $y(0)=1$ dan $y'(0)=-1$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - x e^x \quad \Rightarrow \quad 1 = C_1 + C_2$

$y' = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^x - e^x - xe^x \quad \Rightarrow \quad 0 = 2C_1 + C_2$

Didapat

$C_1 = -1$, dan $C_2 = 2$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah

$$y = -e^{2x} + 2e^x - x e^x$$

Latihan Soal

1. $y'' - 3y' - 4y = 3x^2 + 2$
2. $y'' - 9y = x + 2$
3. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x}$
4. $y'' + 4y = 2 \sin x$
5. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$
6. $y'' + 4y = 2 \cos 2x$
7. $y'' + 2y' = 3x^2 + 2$
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$
9. $y'' + 3y' - 4y = 3x^2 + 2$
10. $y'' + 9y = \sin 3x + e^{2x}$
11. $y'' + y' = e^x + 3x$
12. $y'' - 4y = 4 \sin x$; $y = 4$, $y' = 0$ bila $x = 0$
13. $y'' - 5y' + 6y = 2e^x$; $y = 1$, $y' = 0$ bila $x = 0$

PDB Non-Homogen
-Variabel Parameter-

Solusi Metode Variasi Parameter

- Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan-persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu.
- Persamaan Diferensial orde dua non homogen

$y'' + a\,y' + b\,y = r(x)$ → homogen dg koefisien konstan.

memiliki solusi total : $y = y_h + y_p$

misal $y_p = uy_1 + vy_2$ dimana $u = u(x)$; $v = v(x)$

maka $y'p = u'y_1 + uy_1' + vy_2' + v'y_2$

pilih u dan v sehingga : $u'y_1 + v'y_2 = 0$ ....(*)

Solusi Metode Variasi Parameter

$$y'_p = uy_1' + vy_2'$$

$$y''_p = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2''$$

Substitusikan y_p , y_p' , y_p'' ke dalam persamaan awal sehingga di dapatkan :

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' + a(uy_1' + vy_2') + u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' + a(uy_1' + vy_2') + b(uy_1 + vy_2) = r(x)$$

$$u(y_1'' + ay_1' + by_1) + v\,(y_2'' + ay_2' + by_2) + u'y_1' + v'y_2' = r\,(x)$$

$$\boxed{u'y_1' + v'y_2' = r\,(x)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(**)$$

Solusi Metode Variasi Parameter

- Eleminasi (*) dan (**) di peroleh :

$u'y_1 + v'y_2 = 0$

$u'y_1' + v'y_2' = r(x)$ dengan aturan cramer diperoleh

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \rightarrow u = -\int \frac{y_2 r(x)}{W} dx \; ; W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & r(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \rightarrow v = \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx \; ; W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$y_p = u y_1 + v y_2$

$u = -y_2 r/W$ $v = y_1 r/W$

$y_p = uy_1 + vy_2$

1. $y'' + y = \tan x$

Jawab:

Persamaan karakteristiknya:

$r^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \pm i$ → akar kompleks

Jadi solusi homogennya adalah $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Untuk y_p dipilih $y_p = u\, y_1 + v\, y_2$ dengan

$y_1 = \cos x \qquad y_2 = \sin x$

$y'_1 = -\sin x \qquad y'_2 = \cos x$

$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2 = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}$

Sehingga diperoleh

$$u = -\int \frac{\sin x \tan x}{1} dx = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x} dx = -\int (\sec x - \cos x)\, dx$$

$\frac{\sin x}{\cos x}$ $\qquad \frac{1}{\cos x} \qquad -\frac{\cos^2 x}{\cos x}$

CONTOH

$$= -\int \sec x\, dx + \int \cos x\, dx = -\ln|\sec x + \tan x| + \sin x$$

Sedangkan,

$$v = \int \frac{\cos x \tan x}{1} dx = \int \sin x\, dx = -\cos x$$

Jadi solusi non homogen didapat

$$y_p = -(\ln|\sec x + \tan x|)\cos x + \sin x \cos x - \sin x \cos x$$
$$= -(\ln|\sec x + \tan x|)\cos x$$

Jadi solusi umum dari persamaan diferensial di atas

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - (\ln|\sec x + \tan x|)\cos x$$

Latihan Soal

1. 1. y” + y = cosec x cot x
2. y” + y = cot x
3. y” – 3 y’ + 2y = $\frac{e^x}{e^x+1}$
4. y” + 4 y’ + 4 y = $\frac{e^{-2x}}{x^2}$
5. y” + 4 y = 3 cosec $2x$
6. y” + 4 y = 3 cosec x
7. 4 y” + y = 2 sec ($x/2$)
8. y” – 2y’ + y = $\frac{e^x}{1+x^2}$

Implementasi

Cari Implementasi PD Orde 2 pada:

1. Rangkaian Listrik
2. Rangkaian RLC
3. Transformasi Laplace
4. Model Populasi
5. Model Logistik
6. Garis Singgung

per kelompok

Cari implemen

- ceritakan kasus
- penurunan PD
- implementasi

Kesimpulan

Definisi

Bentuk umum y” → $= 0$ homogen; → $= r(x) \neq 0$ nonhom

Teknik Penyelesaian (Homogen?) → + solusi ReKKon homogen; → − KaVe

Solusi Homogen → ReKKom

Solusi non Homogen → KaVe

KaVe (Koefisien, ~~Variabel~~) → Variasi Parameter

Koefisien Tak Tentu (Yp mirip r(x))

~~Variabel~~ Variasi Parameter (cari u v W, Yp = uy1+vy2)

$W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$ $\quad u = -\int \frac{y_2 r(x)}{W} dx$ $\quad v = \int \frac{y_1 r(x)}{W} dx$

PENUTUP

Selesai kuliah kulangsung rebahan
Sebelum rebahan kuminum jus buah
Walaupun belum lebaran
Mohon maaf atas segala salah