

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE 1

**MATEMATIKA TERAPAN 2
16TIN3043**

**Jurusan Teknik Komputer dan Informatika
(POLBAN)**

13 November 2020

KO075N - Siti Dwi Setiarini, S.Si., M.T. (SD)



**Jurusan Teknik Komputer
dan Informatika**



Belajar dengan dosen
matematika

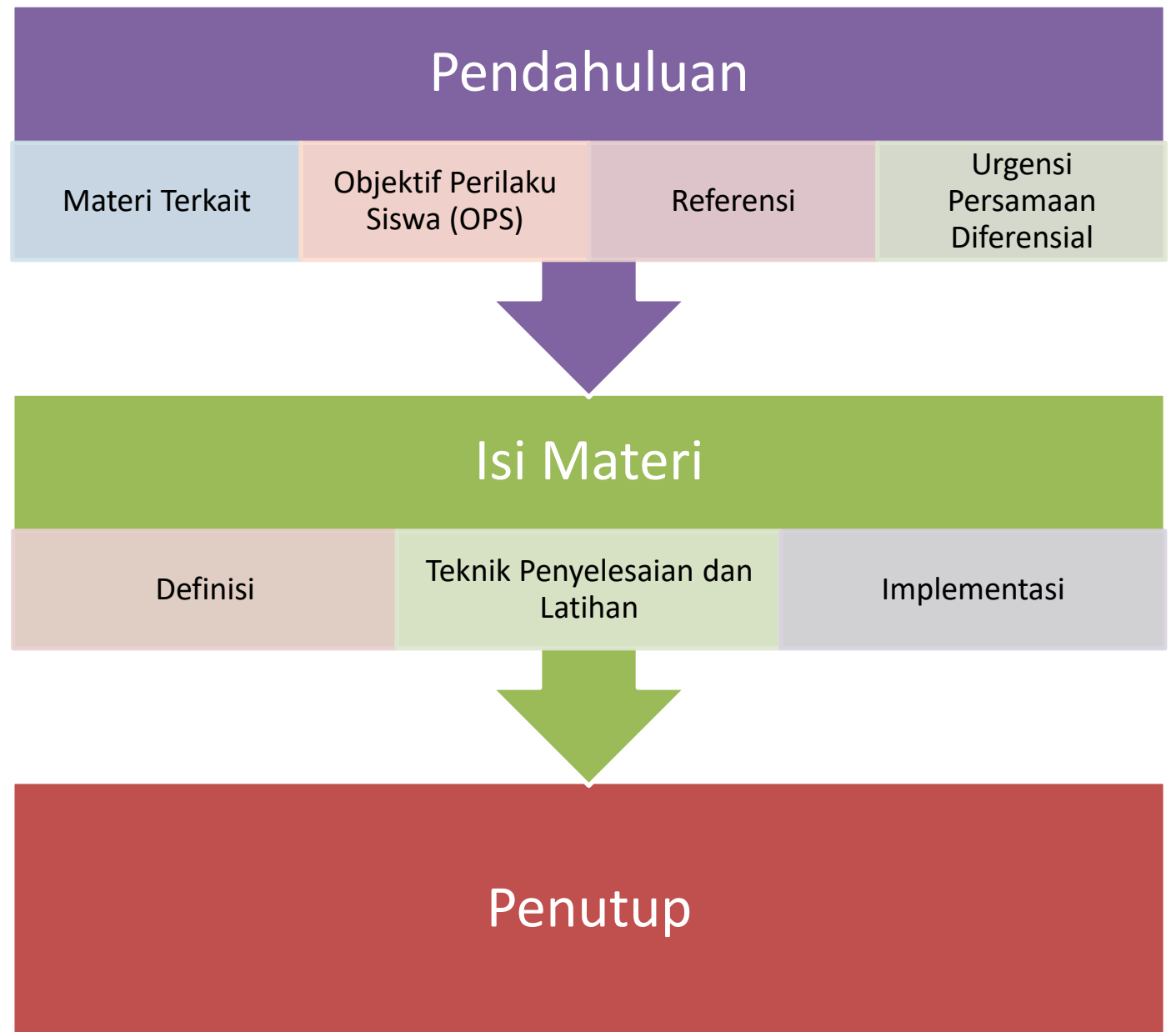
Setelah itu pulang ke
rumah

Sebelum acara di
buka

Mari bersama
ucapkan bismillah

Pendahuluan

Outline



Materi Terkait

Turunan

Integral ✓

Persamaan Linear

- Variabel Bebas dan Terikat (Tak Bebas)
- Solusi umum dan khusus

Persamaan Non-Linear

- Contoh-contoh persamaan non-linear

Fungsi

$$\begin{array}{l} f(x) \rightarrow R \\ y \mapsto x^2 \end{array}$$

$$f(x) = x^2$$

$$y = x^2$$

$$f'(x) = y' = ?$$

$$f(x) = y = ?$$

Turunan dan
Integral

$$y' = x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$y' = 2x = 2x$$

$$f'(x) = 2x + C$$

$$y = \int 2x \, dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2x^{(2-1)} + c$$

$$y = 2x + c$$

$$f(x) = 2x + c$$

turunan = 1

Persamaan Linear

- 1 variabel bebas

$$y = ax + 1$$

koefisien

- 2 variabel bebas

$$z = ax + 3y$$

Variabel bebas = x

Variabel terikat = y

Variabel bebas = x dan y

Variabel terikat = z

bebas
bernilai
berapapun.

terikat
thd sesuatu
var x
atau
tak bebas

$x \in \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{Z}$
(int)

terikat \rightarrow x berubah maka
y pasti berubah.

Solusi Umum dan Khusus

*misal $f(x)$
merupakan suatu solusi*

Solusi Umum

$$f(x) = y = ax + 1$$

$$f(2) = 3$$

Solusi Khusus

$$f(2) = 2a + 1$$

$$3 = 2a + 1$$

$$2 = 2a$$

$$a = 1$$

$$f(x) = y = x + 1$$

substitusi

soal diketahui

Solusi Umum dan Khusus

*misal $f(x, y)$
merupakan suatu solusi*

Solusi Umum

$$f(x, y) = z = ax + 3y$$

$$f(1, 2) = 8$$

dik. di soal

Solusi Khusus

$$f(1, 2) = a + 3 \cdot 2$$

$$8 = a + 6$$

$$2 = a$$

$$a = 2$$

$$f(x) = y = 2x + 3y$$

Solusi Umum dan Khusus

Solusi Umum

$$f(x) = 2x + c$$

misal $f(2) = 4$

ciri
solusi
umum

Solusi Khusus

$$f(2) = 2 \cdot 2 + c$$

$$4 = 4 + c$$

$$c = 0$$

$$f(x) = 2x$$

Turunan dan Integral

$$f'(x) = y' = ?$$

$$y' = x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$y' = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = y = ?$$

$$y = \int 2x \, dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + c$$

$$y = 2x + c$$

$$f(x) = 2x + c$$

Solusi Umum dan Khusus

Solusi Umum

$$f(x) = 2x + c$$

misal $f(2) = 5$

Solusi Khusus

$$f(2) = 2 \cdot 2 + c$$

$$5 = 4 + c$$

$$c = 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

Turunan dan Integral

$$\begin{matrix} f(x) \rightarrow R \\ y \rightarrow x^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} f(x) = x^2 \\ y = x^2 \end{matrix}$$

$$f'(x) = y' = ?$$

$$y' = x^2 \frac{dy}{dx}$$

$$y' = 2x$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f(x) = y = ?$$

$$y = \int 2x \, dx$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2x^2 + c$$

$$y = 2x + c$$

$$f(x) = 2x + c$$

Persamaan Non-Linear

- Persamaan Kuadrat
- Persamaan Derajat 3
- Persamaan Trigonometri
- Persamaan Logaritma Asli
- Persamaan Exponensial
- dll

bentuk
grafik
tidak
linear
garis lurus!


Objektif Perilaku Siswa

CP

Mampu mengaitkan persamaan diferensial dengan implementasinya dalam informatika berdasarkan kemampuan mengenali persamaan yang melibatkan fungsi satu peubah dan turunannya serta kemampuan menyelesaikan persamaan diferensial dengan menggunakan hasil analisis metode yang tepat



Referensi



Dale Varberg, Edwin
Purcell, Steve
Rigdon.2006.*Calculus.*
Prentice Hall

Urgensi

Aplikasi Turunan

(Gradien, Optimasi, dll)

Grafika Komputer

Physics Effect Game

persamaan A \rightarrow persamaan B
gratis.

perhitungan
A blisom
bersentuhan
dg B

jika
IF A bersentuhan dg B.
dass.

gravi
tasi
jatuh
bebas

Materi Persamaan Diferensial (PD) Orde - 1

PD Biasa

- Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat satu atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui.
- Jika persamaan diferensial memiliki satu peubah tak bebas maka disebut Persamaan Diferensial Biasa (PDB).

Contoh:

$$y' = \cos x,$$

$$y'' + 9y = e^{-2x},$$

$$y'y''' - 3y'^2 = 0$$

- Sedangkan jika peubah bebasnya lebih dari satu dinamakan Persamaan Diferensial Parsial.

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

terikat
bebas > 1 parsial.

Memuat 1 atau lebih turunan fungsi yang tidak diketahui



Definisi

Orde PD dilihat dari turunan ke - n terbesar

Bentuk umum PDBL orde-n adalah sebagai berikut

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_0(x) y = f(x)$$

dengan $a_n(x) \neq 0$ dan $a_n(x), a_{n-1}(x), \dots, a_0(x)$ adalah koefisien PD.

Orde PDBL

Orde - n
n = turunan tertinggi



- $\frac{dN}{dt} = kN, N = N(t)$

orde 1 dengan N peubah tak bebas dan t peubah bebas,

- $y' + 2 \cos 2x = 0$

orde 1 dengan y peubah tak bebas dan x peubah bebas,

$$\sin(x) = 10$$

$$x = \arcsin(10)$$

$$y' - \sin(xy) = 0 \quad ?$$

$$y' = \sin(xy)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin(xy)$$

$$\textcircled{xy} = \arctan\left(\sin \frac{dy}{dx}\right)$$

x, y var bebas
tidak punya variabel

Contoh PDB orde - 1

maka
x PDB
PDP

Teknik Penyelesaian Persamaan Diferensial *Biasa*

20

PDB terpisah

PDB dengan
koefisien fungsi
homogen

PDB Linier

Teknik (PHL):
Pisah, **H**omogen, **L**inier





PDB Terpisah

Definisi PDB Terpisah & Penyelesaian

PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk :


Def → $g(y) dy = f(x) dx$ disebut PDB terpisah.

Penyelesaian : integralkan kedua ruas

syarat
pisah $y \neq x$

Contoh : tentukan solusi umum PD

1. $(x \ln x) y' = y$

 $y = x^3 e^{-y}$, $y(2) = 0$

P

Pisah y dan x

CONTOH

1. Jawab:

$$(x \ln x) y' = y \quad \frac{dy}{dx}$$

$$x \ln x \frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x \ln x}$$

$$\ln|y| = \ln(|\ln x|) + c_1$$

$$\ln|y| = \ln(|\ln x|) + \ln c_2$$

titik krusial : ① restruktur fungsi

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{x}$$

② tek. pengintegralan

$$\ln|y| = \ln(c_2 |\ln x|)$$

$$y = c(\ln x)$$

dengan $c = \pm c_2$

Jadi solusi umum PD tersebut adalah

$$y = c(\ln x)$$

$$③ y' = \frac{dy}{dx}$$

CONTOH

2. Jawab:

$$y' = x^3 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^3 e^{-y}$$

$$\frac{dy}{e^{-y}} = x^3 dx$$

$$\int e^y dy = \int x^3 dx$$

$$e^y = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$\ln(e^y) \rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{4} x^4 + c\right)$$

$$y = \ln\left(\frac{1}{4} x^4 + c\right)$$

Diketahui $y(2) = 0$, sehingga

$$0 = \ln\left(\frac{1}{4} (2)^4 + c\right)$$

$$1 = 4 + c \rightarrow c = -3$$

Jadi solusi khusus PD tersebut adalah

$$y = \ln\left(\frac{1}{4} x^4 - 3\right)$$

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$

3. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$

4. $y' = 1 + x + y^2 + xy^2$

5. $y' = (1+2y)(1+x^2+2x^3)$

6. $y' = 2(1+x)(1+y^2), y(0) = 0$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2}, y(0) = 1$

8. $(1+e^x)\frac{dy}{dx} + e^x y = 0, y(0) = 1$

Latihan Soal



PDB dengan koefisien
fungsi homogen

Definisi Fungsi Homogen

- Fungsi $A(x,y)$ disebut fungsi homogen dengan derajat n , jika
 $A(kx,ky) = k^n A(x,y)$,
 k konstan sembarang

$$\begin{aligned} & k(m+n) \\ &= km + kn \end{aligned}$$

- Contoh :
Periksa apakah fungsi berikut homogen atau tidak !

1. $A(x,y) = x + y$
 $A(kx,ky) = kx + ky$
 $= k(x + y) = k A(x,y)$

Maka $A(x,y) = x + y$ adalah fungsi homogen dengan derajat 1

2. $A(x,y) = x^2 + xy$
 $A(kx,ky) = k^2x^2 + kxky$
 $= k^2(x^2 + xy) = k^2 A(x,y)$

$A(x,y) = x^2 + xy$ adalah fungsi homogen dengan derajat 2

$$A(kx,ky) = k A(x,y)$$



Penyelesaian PDB dengan Koefisien Fungsi Homogen

- PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk $y' = \frac{A(x, y)}{B(x, y)}$ dengan A, B fungsi homogen dengan derajat yang sama disebut PDB dengan koefisien fungsi homogen.

Penyelesaian : gunakan substitusi **$y = ux$** , $u = u(x)$

dengan

$$y' = u' x + u$$

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{du}{dx} + u$$

$$\mathbf{dy = x du + u dx}$$

$$u = \frac{y}{x}$$
$$x = \frac{y}{u}$$

Substitusi

$$y = ux \text{ atau } u = y/x$$

$$dy = x du + u dx$$

H

CONTOH

Selesaikan solusi persamaan diferensial berikut

1. $y' = \frac{x+y}{x} \rightarrow A(x,y) = x+y$ (derajat 1) sama
Jawab: $\rightarrow B(x,y) = x$ (derajat 1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$$

Misalkan $y = ux$ sehingga $dy = x du + u dx$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{x du + u dx}{dx} = 1 + u \Leftrightarrow x du + u dx = (1+u) dx \Leftrightarrow$$

$$x du = dx \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u = \ln|x| + c \Leftrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + c \Leftrightarrow y = x \ln|x| + cx$$

Jadi solusi umum dari PD di atas adalah $y = x \ln|x| + cx$

CONTOH (2)

2. $x^2 \frac{dy}{dx} (-y^2 - 2xy) = 0, y(1)=1$

Jawab:

H (persamaan)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Misalkan $y = ux$, sehingga $dy = x du + u dx$

$$\frac{dy}{dx} = u^2 + 2u \quad \frac{x du + u dx}{dx} = u^2 + 2u \Leftrightarrow x du + u dx = (u^2 + 2u) dx \Leftrightarrow$$

$$x du = (u^2 + u) dx \Leftrightarrow \frac{du}{u^2 + u} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{u^2 + u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{du}{u(u+1)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + \ln c$$

solusi umum

abraf abrik, pindah $\sim x$

$$\frac{y}{x} = \frac{A(x,y)}{B(x,y)}$$

$$\frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$\frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

$$\frac{y^2}{x^2} + \frac{2xy}{x^2}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

CONTOH (2) lanjutan

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{u}{u+1} \right| = \ln c |x| \Leftrightarrow \ln \left| \frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+1} \right| = \ln c |x|$$

$$\Leftrightarrow \ln \left| \frac{y}{y+x} \right| = \ln c |x| \Leftrightarrow \left| \frac{y}{y+x} \right| = c |x| \Leftrightarrow y = k(xy + x^2); (k = \pm c)$$

$$\Leftrightarrow y(1 - kx) = kx^2 \Leftrightarrow y = \frac{kx^2}{1 - kx}$$

Diketahui $y(1) = 1$, sehingga

$$1 = \frac{k}{1 - k} \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah

$$y = \frac{x^2}{2 - x}$$

① $dy = f$ (pecahan)

② substitusi $\frac{y}{x} = u$

③ $dy = xdu + udx$

④ operasikan $\frac{u}{x} = \frac{y}{x}$

⑤ $y = k(xy + x^2); (k = \pm c)$

⑥ solusi umum y_{subs}

⑦ solusi khusus

⑧ $y = \dots$

Tentukan solusi Persamaan diferensial dibawah ini

1. **$2y dx - x dy = 0$**

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$

5. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$

Latihan Soal

1 → 6 5 → 2
2 → 5 6 → 1.
3 → 4
4 → 3



PDB Linier

Definisi PDB Linear

PDB yang dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y' + P(x)y = r(x)$$

disebut PDB linier.

Penyelesaian : kalikan kedua ruas dengan faktor integrasi

$$e^{\int P(x)dx}$$

Kemudian, kalikan kepada kedua ruas, sehingga diperoleh:

$$y' e^{\int P(x)dx} + P(x)y e^{\int P(x)dx} = r(x) e^{\int P(x)dx}$$

$$\left(y e^{\int P(x)dx} \right)' = r(x) e^{\int P(x)dx}$$

Integralkan kedua ruas

$$y e^{\int P(x)dx} = \int r(x) e^{\int P(x)dx} dx$$

Kalikan semua dengan

L

$$e^{-\int P(x)dx}$$



$$y = \frac{\int r(x) e^{\int P(x)dx} dx}{e^{\int P(x)dx}}$$

Solusi Umum PDB

PDB dikatakan Linear jika:

- Mempunyai Peubah Tak Bebas
- Turunan yang bersifat linear

Faktor Integrasi:

Jika dikalikan ke suatu fungsi, mengakibatkan dirinya menjadi identitas (1)

CONTOH

$$(y)' + P(x)(y) = r(x)$$

Selesaikan persamaan diferensial dibawah ini

1. $xy' - 2y = x^3 e^x$

Jawab:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x \quad (\text{bagi kedua ruas dengan } x)$$

Sehingga diperoleh faktor integrasi:

$$e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

kalikan kedua ruas dengan x^{-2} , yaitu:

$$\frac{1}{x^2} y' - \frac{2}{x^3} y = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x^2} y \right)' = e^x \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = \int e^x dx \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} y = e^x + c$$
$$y = x^2 e^x + c x^2$$

Jadi solusi umumnya adalah $y = x^2 e^x + c x^2$

$$e^{\int P(x) dx}$$
$$e^{\int -\frac{2}{x} dx}$$

CONTOH (2)

Selesaikan persamaan diferensial dibawah ini

2. $y' + y = (x+1)^2$ $y(0) = 3$

Jawab:

Faktor integrasi dari PD di atas adalah:

$$e^{\int 1 dx} = e^x$$

kalikan kedua ruas dengan e^x , yaitu:

$$\cancel{e^x y'} + \cancel{e^x y} = \cancel{e^x} (x+1)^2 \Leftrightarrow (e^x y)' = e^x (x+1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\underline{e^x y} = \underline{\int e^x (x+1)^2 dx} \Leftrightarrow \underline{e^x y} = \underline{(x+1)^2 e^x} - \underline{\int 2(x+1) e^x dx} \Leftrightarrow$$

$$\underline{e^x y} = \underline{(x+1)^2 e^x} - \underline{2(x+1) e^x} + \underline{2e^x} + c$$

sehingga $y = (x+1)^2 - 2(x+1) + 2 + ce^{-x} \Leftrightarrow y = x^2 + 1 + ce^{-x}$

$x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 2 + ce^{-x}$
 $x^2 + 1 + ce^{-x}$

$y' + y = (x+1)^2$
 $P(x) = 1$
 $r(x) = (x+1)^2$
 $e^{\int 1 dx} = e^x$

CONTOH (2) Lanjutan

Diketahui $y(0) = 3$, sehingga

$$y = x^2 + 1 + Ce^{-x}$$

$$3 = 1 + c \Leftrightarrow c = 2$$

$$3 = 1 + C \rightarrow C = 2$$

Jadi solusi khusus PD di atas adalah

$$y = x^2 + 1 + 2e^{-x}$$

Selesaikan persamaan diferensial di bawah ini:

1. $y' + 2y = e^{-x}$

2. $(x + 1)y' + y = x^2 - 1$

3. $y' + y \tan x = \sec x$

4. $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$

5. $y' + 2y = x^2$

6. $xy' + (1+x)y = e^{-x}, y(1)=0$

7. $\sin x \ y' + 2y \cos x = \sin 2x, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$

Latihan Soal

1 → 3 4 → 6
2 → 2 5 → 5
3 → 1 6 → 4



Conclusion

Definisi

→ 1 / lebih turunan
tak diket.

Orde

→ turunan tertinggi/
terbesar!

Teknik Penyelesaian

→ P H L

P

→ pisah $y = X$

H

→ homogen substitusi $y = ux$
 $dy = xdu$

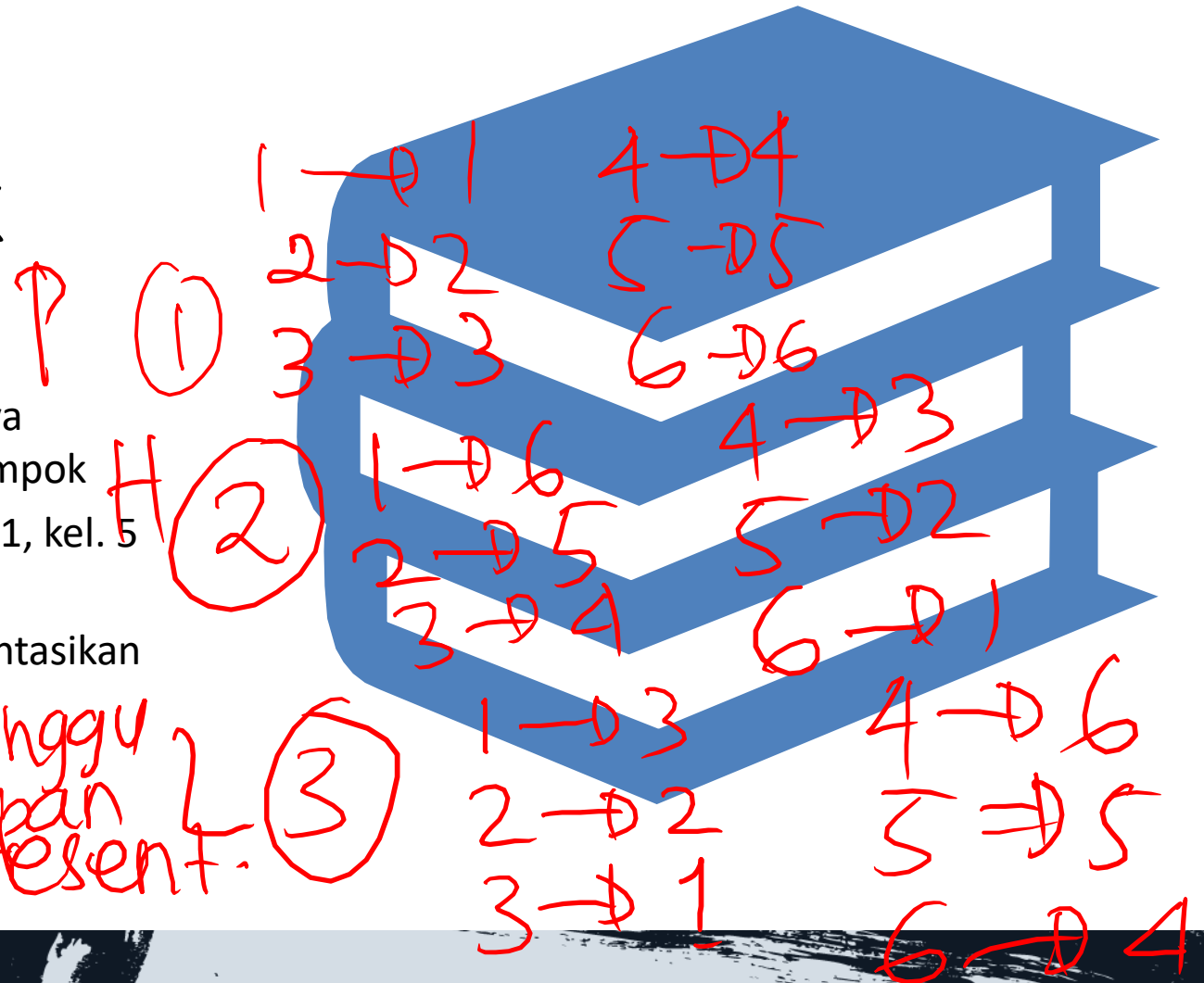
L

→ Linier Kali $e^{\int P(x) dx}$ + $u dx$

Latihan Soal Berkelompok

- Kelompok Ular Tangga
- Kerjakan latihan-latihan di slide ini hanya nomor yang sesuai dengan nomor kelompok
 - Misal kel. 1 kerjakan semua nomor 1, kel. 5 kerjakan semua nomor 5
- Buat dalam Ms. Word dan siap di presentasikan

↳ google docs → minggu depan present.





submit
e-learning
→ soal + submiss.
8 malam
→ jam 7 pagi.

Quiz Take Home Latihan UTS



Pertemuan Selanjutnya
Persiapan UTS

→ bedah soal.

Belajar daring menyenangkan untukku
Kubisa kuliah, tanpa berpakaian rapih
Ini adalah slide yang paling ditunggu

Terima Kasih 😊