

Skripta: Napredna Kvantna Mehanika

Adrian Udovičić

March 30, 2022

Uvod

Svrha ove skripte je upoznati studente različitih smjerova s kolegijem napredne kvantne mehanike.

Contents

1	Ket i Bra notacija	1
1.1	Vektori baze i matična reprezentacija	1
1.1.1	Operatori	1
1.1.2	Komutatori	2
1.1.3	Vanjski produkt	2
1.1.4	Hermitski operatori	2
1.2	Mjerenja, opservable i relacija neodređenosti	2
1.3	Promjena baze	2
1.4	Položaj, moment i translacija	2
1.5	Valna funkcija u prostoru položaja i momenta	2
2	Kvantna dinamika	2
3	Teorija angularnog momenta	2
4	Simetrije Kvantne mehanike	2
5	Aproksimacijske metode	2
6	Teorija raspršenja	2

1 Ket i Bra notacija

1.1 Vektori baze i matična reprezentacija

Kvantno stanje opisujemo sa $|\psi\rangle$ koji razapinju Hilbertov prostor s definiranim skalarnim produktom i svojstvima:

- $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\gamma\rangle$,
- $c \cdot |\alpha\rangle = |c \cdot \alpha\rangle$,
- Postoji operator \hat{A} t.d. $|\beta\rangle$.

Dimenzija prostora određenja je problemom, npr. za 1 elektron imamo dimenzije momenta, angularnog momenta i spina $\rightarrow 3 + 3 + 2 = 8D$. Baza $\{|\alpha\rangle\}$, gdje ket $|\alpha\rangle$ sadrži sve informacije o sistemu, ali do informacije dolazimo skalarni produkt: $\langle\beta||\alpha\rangle$, gdje je $\langle\beta|$ iz dualnog prostora ket prostora. Korespondencija:

$$C_1 |\alpha\rangle + C_2 |\beta\rangle \Leftrightarrow C_1^* \langle\alpha| C_2^* \langle\beta| \quad (1.1)$$

Svojstva skalarnog produkta:

- $\langle\beta||\alpha\rangle = \langle\alpha||\beta\rangle^*$,
- Pozitivna definitnost $\Rightarrow \langle\alpha||\alpha\rangle > 0$,
- Ortogonalnost $\Rightarrow \langle\alpha||\beta\rangle = 0 = \langle\beta||\alpha\rangle$,
- Normalizacija $\Rightarrow |\hat{\alpha}\rangle = \frac{|\alpha\rangle}{\sqrt{\langle\alpha||\alpha\rangle}} \Rightarrow \langle\alpha\alpha\rangle = 1$.

Svaki vektor možemo razviti po vektorima baze:

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |\alpha\rangle; c_n = \langle\alpha_n|\alpha\rangle \quad (1.2)$$

1.1.1 Operatori

Operatori predstavljaju observable, tj. pomoću operatora pridružujemo fizikalne veličine opažanom sustavu. Npr. Operator položaja \hat{x} koristi se za određivanje položaja sustav, operator momenta \hat{p} za određivanje momenta, itd. Dijelovanje operatora na neko stanje može promijeniti to stanje:

$$\hat{A} |\alpha\rangle = |\beta\rangle \quad (1.3)$$

tj.

$$\hat{A} |\alpha\rangle = a |\alpha\rangle, \quad (1.4)$$

gdje je $|\alpha\rangle$ svojstveni vektor (svj. v.) operatora \hat{A} , a a svojstvena vrijednost (svj. vrij.).

Svojstva operatora:

- Zbrajanje
 - Komutativnost: $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$,
 - Asocijativnost: $\hat{A} + (\hat{B} + \hat{C}) = (\hat{A} + \hat{B}) \hat{C}$,
 - Linearnost: $\hat{A} (a |\alpha\rangle + b |\beta\rangle) = a \hat{A} |\alpha\rangle + b \hat{A} |\beta\rangle$,
 - Hermetičnost: $\hat{A} |\alpha\rangle = \langle\alpha| \hat{A}^*$
- Množenje
 - (Anti-)Komutativnost: $\hat{A} \hat{B} \neq \hat{B} \hat{A}$,
 - Asocijativnost: $\hat{A} (\hat{B} \hat{C}) = (\hat{A} \hat{B}) \hat{C}$,
tj. $\hat{A} (\hat{B} |\alpha\rangle) = \hat{A} \hat{B} |\alpha\rangle$,
 - Hermetičnost: $(\hat{A} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$,
tj. $\hat{A} \hat{B} |\alpha\rangle = \langle\alpha| \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

1.1.2 Komutatori

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1.5)$$

U klasičnoj mehanici to su bili generatori koordinata i impulsa. Glavna značajka prelaska iz klasične u kvantnu mehaniku je $[p, q] \neq 0 = i\hbar$.

1.1.3 Vanjski produkt

$$|\beta\rangle\langle\alpha| \quad (1.6)$$

je operator sa sljedećim svojstvima:

- $(|\beta\rangle\langle\alpha|)|\gamma\rangle = |\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle = c_{\alpha\gamma}|\beta\rangle$,
- $\hat{X} = |\beta\rangle\langle\alpha| \rightarrow \hat{X}^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta|$,
- $(\langle\beta|)\hat{X}|\alpha\rangle = \langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\hat{X}^\dagger|\beta\rangle)^\dagger$,
- $\langle\beta|\hat{X}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{X}|\beta\rangle^\dagger$.

1.1.4 Hermitski operatori

$\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ je jednačica hermitičnosti. Ako jednakost vrijedi operator \hat{A} je hermetičan.

Teorem 1.1 *Svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su realne, a vektori su međusobno ortogonalni.*

Dokaz 1.1

$$\begin{aligned} \hat{A}|n\rangle &= a_n|n\rangle \\ \langle n|\hat{A}^\dagger &= \langle n|a_n^* \\ \langle n|\hat{A}|m\rangle &= \langle n|m\rangle a_n^* \end{aligned} \quad (1.7)$$

1.2 Mjerenja, opservable i relacija neodređenosti

1.3 Promjena baze

1.4 Položaj, moment i translacija

1.5 Valna funkcija u prostoru položaja i momenta

2 Kvantna dinamika

3 Teorija angularnog momenta

4 Simetrije Kvantne mehanike

5 Aproksimacijske metode

6 Teorija raspršenja