Differentiation

Retningsafledede

Antag at funktionen $f : A \to \mathbb{R}$ er defineret på en delmængde A af $\mathbb{R}^n$ og at a er et indre punkt i A. Tænk på $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ som en vektor. Den retningsafledede af f i punktet a og retningen $\mathbf{r}$ er givet ved

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{r}) - f(\mathbf{a})}{h}$$

Partiel afledte

For at finde $\frac{\partial f}{\partial x}$ differentierer vi udtrykket med hensyn til x, mens vi lader som om y er en konstant.

For at finde $\frac{\partial f}{\partial y}$ differentierer vi med hensyn til y, mens vi holder x konstant.

Gradient

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Niveaukurve

Tangentlinjen for niveaukurven $f(x,y) = c$ i punktet (a,b) skal være givet ved ligningen

$$\nabla f(a,b) \cdot ((x,y) - (a,b)) = 0$$

Hessematricen

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{bmatrix}$$

Kædereglen Antag at $f(u,v)$ er en C^1-funktion i to variable og at $g(x)$ og $h(x)$ er differentiable funktioner af én variabel. Ved at sætte $u = g(x)$ og $g = h(x)$, danner vi en sammensat funktion

$$k(x) = f(g(x), h(x))$$

Forestil dig, at du allerede har regnet lidt med funktionerne f, g og h, hver for sig. Sandsynligvis har du så fundet udtryk for de partielt afledede af f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, samt $\frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$. Hvis du derefter ønsker at studere den sammensatte funktion k og differentiere denne, kan kædereglen være til god hjælp. Den giver nemlig formlen

$$\frac{dk}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{dg}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{dh}{dx}$$

Så hvis $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \frac{dg}{dx}$ og $\frac{dh}{dx}$ allerede er kendte udtryk, kan man sætte disse ind i formlen ovenfor. Da finder man et udtryk for den afledede af k. I denne formel vil de partielt afledede af f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ og $\frac{\partial f}{\partial v}$, selvfølgelig være funktioner af u og v. For at få en funktion af x, må vi substituere $u = g(x)$ og $v = h(x)$.

Eksempel (kædereglen)

Let f be a C^1-function in $\mathbb{R}^2$. Its gradient is:

$$\nabla f(4,0) = (1,4),$$

Let: $h(x,y) = f\left(2x^2 - 2y, -x + y^2\right)$.

What is $\frac{\partial h}{\partial y}(1,-1)$?

Solution: $(u,v) = (2 \cdot 1^2 - 2(-1), -1 + (-1)^2) = (2+2, -1+1) = (4,0)$ $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2u^2 - 2v) = -2$ $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-u + v^2) = 2v = -2 \quad$ (since $v = -1$)

Using the chain rule, this gives us:

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -2 - 8 = -10$$

Tangentplan

$$h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Højere ordens differentiabel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Taylor polynomier Anta at f er n ganger deriverbar i punktet a. Da er polynomet

$$\begin{aligned} h(x) =& f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \cdots \\ &+ \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ =& \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

det eneste n-te gradspolynomet som har samme funksjonsverdi og de samme n første deriverte som f i punktet a.

Taylor-polynomiet til f av grad n om punktet a. $T_n f$ er altså:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Topologi [[Pasted image 20231109112230.png]] Mængden $C = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 < x \leq 3 \text{ og } y \geq \frac{x}{2} - 1\right\}$ ## Randpunkt *Randen* af en mængde A er de punkter i $\mathbb{R}^n$ som skiller A fra det, der ligger udenfor. *Randen* af A er en mængde som vi skriver op som δA

Et punkt a kaldes et *randpunkt* for A, såfremt det ligger på randen af A.

Bemærk, at a ikke nødvendigvis tilhører A.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er a et *randpunkt* for A, hvis der for ethvert $\delta > 0$ findes et $\mathbf{x} \in A$ og et $\mathbf{y} \notin A$ med

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \quad \text{og} \quad \|\mathbf{y} - \mathbf{a}\| < \delta.$$

Randen af en mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er mængden af alle *randpunkter*. Det vil sige

$$\partial A = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a} \text{ er et randpunkt for } A\}$$

Det indre

Det indre af A er de punkter i A, som ikke ligger på randen.

Et punkt kaldes et *indre punkt* for A såfremt det ligger i *det indre* af A.

Det indre af A er $A \backslash \partial A$. Et punkt a er et indre punkt for A såfremt $\mathbf{a} \in A$ og $\mathbf{a} \notin \partial A$.

Afslutningen

Afslutningen af A er foreningen af randen for A og det indre af A.

Vi indfører notationen $\bar{A}$ for afslutningen af A, og vi can skrive:

$$\bar{A} = A \cup \delta A$$

Isoleret punkt Et punkt a i en mængde A siges at være et isoleret punkt for mængden A, såfremt der ikke findes andre punkter i A vilkårligt nær a. Sagt på en anden måde er $\mathbf{a} \in A$ et isoleret punkt, hvis a ikke ligger i afslutningen af $A \backslash \{\mathbf{a}\}$.

Åbnede mængder

En *åben mængde* er en mængde, som ikke indeholder nogen af sine randpunkter.

Sagt på en anden måde er A åben hvis og kun hvis det indre af A er hele mængden.

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er åben, hvis A er lig det indre af A.

Lukkede mængder

En *lukket mængde* er en mængde som indeholder alle sine randpunkter.

Det vil sige, at A er lukket hvis og kun hvis $A = \bar{A}$.

En mængde $A \subseteq \mathbb{R}^n$ er lukket, hvis $A = \bar{A}$. ## Begrænset mængde Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vi siger, at A er begranset, hvis der findes et positivt reelt tal, R, således at der for alle $\mathbf{a} \in A$ gælder

$$\|\mathbf{a}\| < R$$

Isoleret punkt Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er a et isoleret punkt for A hvis $\mathbf{a} \in A$ og der findes et $\delta > 0$ således at der for alle $\mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ gælder

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| > \delta$$

Fortætningspunkt

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Da er a et fortætningspunkt for A, såfremt $\mathbf{a} \in \bar{A}$ og a ikke er et isoleret punkt for A.

Vi har følgende karakteristik af fortætningspunkter.

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$ og a $\in \mathbb{R}^n$. Da er a et fortætningspunkt for A, hvis og kun hvis der for ethvert $\delta > 0$ findes et $\mathbf{x} \in A$, således at

$$0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$$

Største-mindsteværdier

Lad $A \subset \mathbb{R}^n$ være en lukket, begrænset mængde, og antag at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Da har f både en største- og en mindsteværdi. ## Maximum-minimum Lad $f : A \to \mathbb{R}$ være en funktion af n variable. Antag at f har et lokalt maksimum eller minimum i a. Da er en af følgende 3 betingelser opfyldt.

i) a et randpunkt for A eller
ii) gradienten ∇f eksisterer ikke i a eller
iii) $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.

Stationær punkt

Et *stationær punkt* er et punkt hvor $\nabla f(a) = 0$.

Regn ud ved at sætte

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

ABC-kriteriet Lad $f(x, y)$ være en C^2-funktion og antag at (a, b) er et stationært punkt for f. Lad

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \text{ og } \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

og lad D være givet ved $D = AC - B^2$. Da gælder: i) Hvis $D < 0$, så er (a, b) et sadelpunkt. ii) Hvis $D > 0 \circ g > 0$, så er (a, b) et lokalt minimum. iii) Hvis $D > 0 \circ g < 0$, så er (a, b) et lokalt maksimum.

Hvis $D = 0$, giver testen ingen konklusion.

Tallet D, som forekommer i sætningen ovenfor, er et eksempel på en determinant, det er determinanten for Hessematricen i (a, b). Dette kan skrives som følger:

$$D = \det(Hf(a,b)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$$