МЕТОД АНАЛІЗУ ІЄРАРХІЙ В ЗАДАЧАХ ІНЖЕНЕРІЇ ЗНАНЬ

Метод аналізу ієрархій є систематичною процедурою для ієрархічного представлення елементів, які визначають суть будь-якої проблеми. Метод полягає в декомпозиції на все більш прості складові частини і подальшій обробці послідовності суджень людини, яка приймає рішення (ЛПР), по парним порівнянням. Такий підхід до вирішення проблеми вибору походить із природної здатності людей мислити логічно і творчо, визначати події та встановлювати відносини між ними. Для проведення обґрунтованих чисельних порівнянь не слід порівнювати більш ніж 7±2 елементів.

Розглянемо задачу вибору оптимального мобільного телефону серед існуючих претендентів (альтернатив) за певними критеріями.

Крок 1 Визначаємо критерії та альтернативні варіанти для даної задачі.

Критерії вибору альтернатив:

- ціна мобільного телефону (К1);
- форма (дизайн) телефону (К2);
- якість камери (К3);
- якість екрану (К4);
- об’єм пам’яті (К5);
- додаткові функції (К6);
- безпека (К7).

Альтернативні варіанти:

- iPhone 15 Pro Max (А1);
- Google Pixel 8 Pro (А2);
- Huawei Mate 60 Pro+ (А3);

Крок 2 *Представлення задачі у вигляді ієрархії.* На першому рівні ієрархії знаходиться головна мета – «Вибір мобільного телефону». На другому рівні – фактори або критерії, які уточнюють головну мету. На третьому – альтернативні варіанти, які повинні бути оцінені по відношенню до критеріїв другого рівня. Закон ієрархічної безперервності потребує, щоб елементи нижнього рівня ієрархії попарно порівнювалися з елементами наступного рівня і т.д. до вершини ієрархії. На рисунку 1 представлена ієрархічна структура задачі.

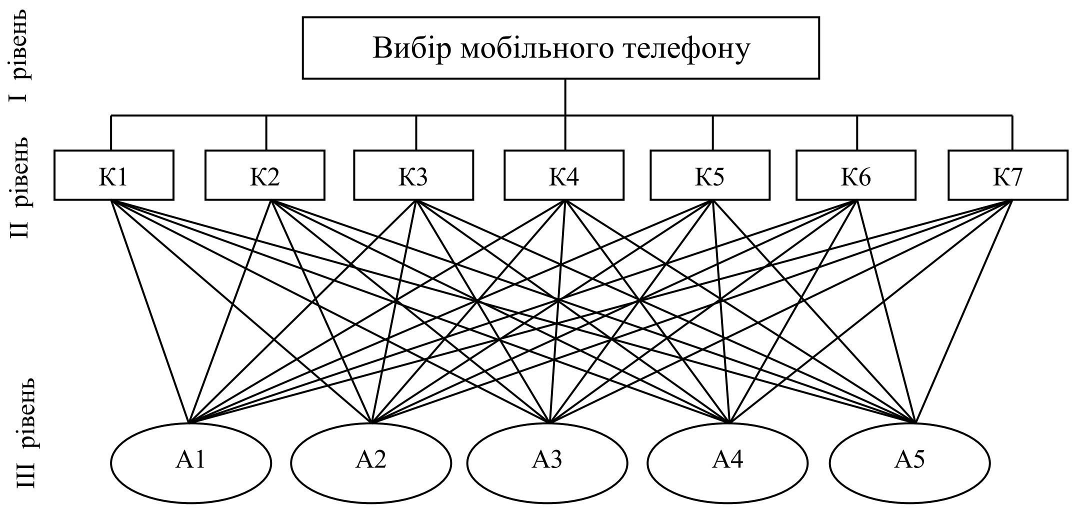

Рис. 1 Ієрархічне представлення задачі з вибору виду ТЗ

Крок 3 *Попарне порівняння елементів ієрархії на кожному рівні.* Після представлення проблеми у вигляді ієрархії, складається матриця попарних порівнянь (МПП) для порівняння відносної важливості критеріїв на другому рівні (рис. 1) по відношенню до загальної мети на першому рівні. Подібні матриці будуються для порівнянь альтернатив на 3 рівні по відношенню до критеріїв на другому.

Попарне порівняння – це процес, згідно з яким ЛПР порівнює всі пари елементів (об'єктів) з деякого переліку за визначеним критерієм, вказуючи кожен раз, більш бажаний об'єкт.

Шкала вимірювань суджень в процесі попарних порівнянь представлена в таблиці 1. Її також називають шкалою відносної важливості.

Таблиця 1. Шкала відносної важливості

Інтенсивність відносної важливості	**Визначення**	**Пояснення**
1	Рівна (однакова) важливість	Однаковий внесок двох видів діяльності
3	Помірна перевага одного над іншим	Досвід і судження дають помірну перевагу одному виду діяльності над іншим
5	Суттєва або сильна перевага	Досвід і судження дають сильну перевагу одному виду діяльності над іншим
7	Значна перевага	Одному виду діяльності дається настільки сильна перевага, що воно стає практично значним по відношенню до іншого
9	Дуже сильна перевага	Очевидність переваги одного виду діяльності над іншим підтверджується найбільш сильно
2, 4, 6, 8	Проміжні рішення між двома сусідніми судженнями	Застосовуються в компромісному варіанті
1/2, 1/3, … , 1/9	Обернені величини чисел, які наведені вище	Якщо при порівнянні першого виду діяльності з другим отримали, наприклад, число 3, то при зворотньому порівнянні (другого з першим) отримаємо обернену величину (тобто 1/3).

Наприклад, «На скільки альтернативний варіант *Samsung Galaxy* краще ніж *HTC Desire 2* за *Якістю камери*» або «Наскільки по відношенню до головної мети *Форма (дизайн) телефону* важливіше за *Якість екрану*».

Проведемо попарне порівняння елементів 2-го рівня ієрархії по відношення до головної мети. МПП доповнюють ще двома додатковими стовпчиками (таблиця 4).

Крок 4 *Синтез локальних пріоритетів.* З МПП розраховується вектор *локальних* пріоритетів, який визначає відносний вплив множини елементів МПП на елемент вищого рівня ієрархії. Для цього необхідно визначити множину власних векторів $\left(B_i, i=1,...,n\right)$ для МПП, а потім нормалізувати результат до одиниці, отримавши при цьому вектор локальних пріоритетів $\left(P_i, i=1,...,n\right)$.

Розрахунок власних векторів здійснюється за наступною формулою:

$$B_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} a_{ij}}\,, \tag{1}$$

де a_{ij} – елемент МПП;

n – кількість елементів МПП.

За формулою 2 розраховуємо вектор локальних пріоритетів.

$$P_i = \frac{B_i}{\sum_{k=1}^{n} B_k}. \tag{2}$$

Слід зазначити, що розрахунок власних векторів проводиться по кожному рядку МПП. В таблиці 2 наведено приклад розрахунку власних векторів та вектора локальних пріоритетів.

Таблиця 2. Розрахунок векторів матриці попарних порівнянь

	A_1	A_2	A_3	A_4	Власний вектор	Вектор пріоритетів
A_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	$B_1 = \sqrt[4]{a_{1,1} \cdot a_{1,2} \cdot a_{1,3} \cdot a_{1,4}}$	$P_1 = B_1/B$
A_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$B_2 = \sqrt[4]{a_{2,1} \cdot a_{2,2} \cdot a_{2,3} \cdot a_{2,4}}$	$P_2 = B_2/B$
A_3	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$B_3 = \sqrt[4]{a_{3,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{3,3} \cdot a_{3,4}}$	$P_3 = B_3/B$
A_4	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$B_4 = \sqrt[4]{a_{4,1} \cdot a_{4,2} \cdot a_{4,3} \cdot a_{4,4}}$	$P_4 = B_4/B$
					$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4$	

Проведемо розрахунок власного вектора (перший додатковий стовпчик) та вектора локальних пріоритетів (другий додатковий стовпчик) для поставленої задачі (таблиця 4).

Крок 5 *Узгодженість локальних пріоритетів.* Важливим у теорії МАІ є також індекс узгодженості (C_I), який надає інформацію про ступінь порушення чисельної (кардинальної, $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$) і транзитивної (порядкової) узгодженості. Розглянемо приклад кардинальної узгодженості. Нехай претендент A_1 переважає над претендентом A_2, тобто $\left(a_{1,2} = 3\right)$, в свою чергу претендент A_2 помірно переважає над претендентом A_3, відповідно $\left(a_{2,3} = 2\right)$.

Згідно з кардинальною узгодженістю претендент A_1 повинен переважати над претендентом A_3, тобто $\left(a_{1,3} = a_{1,2} \cdot a_{2,3} = 6\right)$. Порушення цієї рівності в рамках обраної шкали вважається порушенням кардинальної узгодженості. Розглянемо приклад транзитивної узгодженості. претендент A_1 переважає над претендентом A_2, тобто $\left(A_1 > A_2\right)$, в свою чергу претендент A_2 також переважає над претендентом A_3, відповідно $\left(A_2 > A_3\right)$. Згідно з транзитивною узгодженістю претендент A_1 повинен переважати над претендентом A_3, тобто $\left(A_1 > A_3\right)$. Порушення даної умови вважається порушенням транзитивної узгодженості. Для виконання умов узгодженості в МПП використовуються зворотні величини $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Для розрахунку C_I спочатку необхідно визначити максимальне власне значення $\lambda_{\max}$ МПП за формулою:

$$\lambda_{\max} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \cdot P_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{i,2} \cdot P_2 + \ldots + \sum_{i=1}^{n} a_{i,n} \cdot P_n \quad \text{або} \quad \lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \cdot P_j \right) \qquad (3)$$

де $P_j,\ j = 1,\ldots,n$ − вектор пріоритетів;

a_{ij} − елемент матриці попарних порівнянь;

n − кількість елементів МПП.

Іншими словами, $\lambda_{\max}$ визначається як сума добутків сумарних значень елементів МПП по певному претенденту (стовпчик МПП) на відповідне йому значення компоненти вектора пріоритетів (наприклад, для претендента A_1 максимальне власне значення буде дорівнювати $\lambda_{\max}\left(A_1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,1} \cdot P_1$)

Індекс узгодженості визначається за наступною формулою:

$$C_I = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \qquad (4)$$

Для обернено-симетричної матриці завжди $\lambda_{\max} \geq n$.

Відношення узгодженості C_R дозволяє оцінити ступінь відхилення суджень ЛПР від випадкових суджень R_I. Значення індексів випадкової узгодженості R_I, які отримані при випадковому виборі кількісних суджень із шкали відносної важливості, представлено в таблиці 3 для МПП різного порядку.

Таблиця 3. Індекс випадкової узгодженості для МПП різного порядку

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Значення R_I	0	0	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

За формулою 5 розраховуємо відношення узгодженості.

$$C_R = \frac{C_I}{R_I} \cdot 100\% \quad , \tag{5}$$

де C_I – індекс узгодженості суджень МПП;

R_I – індекс випадкової узгодженості.

Значення показника C_R не повинно перевищувати 10%. Якщо цей показник більше, то необхідно ще раз дослідити задачу і перевірити судження. Досягнення мінімального значення C_R не є необхідним.

Для обраної задачі розрахуємо значення показників $\lambda_{\max}$, C_I та R_I (таблиця 4)

Таблиця 4. МПП із значеннями додаткових показників

	К1	**К2**	**К3**	**К4**	**К5**	**К6**	**К7**	**В**	**Р**
К1	**1**	3	2	5	2	2	1	1,98	0,24
К2	0,33	**1**	0,33	1	0,5	1	0,33	0,57	0,07
К3	0,5	3	**1**	2	3	2	1	1,51	0,19
К4	0,2	1	0,5	**1**	0,5	0,33	0,25	0,46	0,06
К5	0,5	2	0,33	2	**1**	1	0,33	0,81	0,10
К6	0,5	1	0,5	3	1	**1**	0,33	0,82	0,10
К7	1	3	1	4	3	3	**1**	1,95	0,24
$\sum$	4,03	14	5,67	18	11	10,33	4,25	8,1	1

$\lambda_{\max} = 4,03 \cdot 0,24 + 14 \cdot 0,07 + 5,67 \cdot 0,19 + 18 \cdot 0,06 + 11 \cdot 0,1 + 10,33 \cdot 0,1 + 4,25 \cdot 0,24 = 7,21;$

$$C_I = \frac{7,21 - 7}{7 - 1} = 0,035; \; C_R = \frac{0,035}{1,32} \cdot 100\% = 2,6\%.$$

З таблиці 4 видно, що відношення узгодженості складає приблизно 3,2%, що є допустимим для даної задачі.

Крок 6 *Розрахунок МПП альтернатив* $\left(A_i, i=1,\ldots,m\right)$ *по відношенню до кожного критерію* $\left(K_i, i=1,\ldots,n\right)$. Кроки 3-5 повторюються для визначення МПП, вектора пріоритетів, C_I та R_I для порівняння всіх альтернатив (між собою) по відношенню до кожного з критеріїв (таблиці 5-11).

Таблиця 5. МПП по відношенню до критерію K_1 (ціна) із значеннями додаткових показників

	A1	**A2**	**A3**	**B**	**P**
A1	**1**	3	3	2,08	0,59
A2	0,33	**1**	0,5	0,55	0,16
A3	0,33	2	**1**	0,87	0,25
$\sum$	1,66	6	4,5	3,5	1

$$\lambda_{\max} = 1,66 \cdot 0,59 + 6 \cdot 0,16 + 4,5 \cdot 0,25 = 3,05;$$

$$C_I = \frac{3,05-3}{3-1} = 0,025;\ C_R = \frac{0,025}{0,58} \cdot 100\% = 4,3\%.$$

Таблиця 6. МПП по відношенню до критерію K_2 (форма телефону) із значеннями додаткових показників

	A1	**A2**	**A3**	**B**	**P**
A1	**1**	2	0,5	1	0,31
A2	0,5	**1**	0,5	0,63	0,2
A3	0,2	2	**1**	1,59	0,49
$\sum$	3,5	5	2	3,22	1

$$\lambda_{\max} = 3,5 \cdot 0,31 + 5 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,49 = 3,07;$$

$$C_I = \frac{3,07-3}{3-1} = 0,035;\ C_R = \frac{0,035}{0,58} \cdot 100\% = 6\%.$$

Крок 7 *Синтез глобальних пріоритетів та отримання результатів.* Вектор глобальних пріоритетів синтезуються, починаючи з другого рівня ієрархії і до низу за наступною формулою:

$$PG_i = \sum_{j=1}^{n} P_i^j \cdot P^j \, , \tag{6}$$

де P_i^j – локальний пріоритет *i*-го альтернативного варіанту по відношенню до *j*-го критерію;

P^j – локальний пріоритет *j*-го критерію по відношенню до головної мети;

В нашому випадку для альтернативного варіанту A_1 (Samsung Galaxy) глобальний пріоритет буде розраховано наступним чином: локальний пріоритет $A_1\left(P_1^1 = 0,59\right)$ по відношенню до критерію K_1 множимо на локальний пріоритет критерію $K_1\left(P^1 = 0,24\right)$ по відношенню до головної мети. Далі додаємо добуток пріоритетів для наступних критеріїв.

$$PG_1 = 0,59 \cdot 0,24 + 0,31 \cdot 0,07 + ... + 0,33 \cdot 0,24 = 0,38\,;$$

$$PG_2 = 0,16 \cdot 0,24 + 0,2 \cdot 0,07 + ... + 0,33 \cdot 0,24 = 0,3\,;$$

$$PG_3 = 0,25 \cdot 0,24 + 0,49 \cdot 0,07 + ... + 0,33 \cdot 0,24 = 0,32\,.$$

З отриманих результатів видно, що альтернативний варіант A_1 (Samsung Galaxy) є найкращим серед інших за визначеними критеріями із загальною оцінкою 0,38, а найгірший – альтернативний варіант A_2 (Nokia N8) з оцінкою 0,3.