Vorkurs für Informatikstudierende

Julien Klaus

Wintersemester 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Einleitung

> Eine **Menge** ist eine beliebige Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. - *Georg Cantor (1845 – 1918)*

Mengen begegnen uns in der Mathematik ständig. Selbst in der Schule haben wir uns schon mit Mengen befasst ohne dies zu wissen. Ein Beispiel für eine Menge sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. So ist 4 beispielsweise ein **Element** der Menge $\mathbb{N}$. Wir schreiben dafür kurz $4 \in \mathbb{N}$. Allerdings ist die Menge der natürlichen Zahlen nicht allumfassend. Die gebrochenrationalen Zahlen gehören nicht dazu. Wir können also schreiben $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$.

1.2 Eigenschaften von Mengen

Zwei Mengen sind **gleich**, wenn sie die gleichen Elemente haben. Nehmen wir als Beispiel die zwei Mengen $M = \{1, 2, 3\}$ und $N = \{2, 3, 1, 2\}$. Hier sind die Elemente innerhalb der Mengen gleich. Es gilt also $M = N$. Dies bringt uns auch gleich zwei Eigenschaften von Mengen. Sie sind **nicht sortiert** und **doppelte Elemente** zählen nur einfach. Weiter werden Mengen häufig mit großen Buchstaben bezeichnet.

Die Mengen in unseren Beispielen wurden bisher nur durch Angabe ihrer Elemente beschreiben. Mengen können auch durch die Angabe von Eigenschaften angegeben werden. Die natürlichen Zahlen könnten alternativ auch als $\mathbb{N} := \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ definiert werden. Wollen wir die null als Element der natürlichen Zahlen haben, schreiben wir $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Um einen weiteren wichtigen Begriff in der Mengenlehre einzuführen, müssen wir uns nun überlegen wieviele Elemente die Menge $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ und } x < 1 \text{ und } x > 1\}$ hat. Diese Menge bestitzt keine Elemente und wir bezeichnen solch eine Menge als **leere Menge**. Diese wird als $\emptyset$ gekennzeichnet.

Definition 1 (Teilmenge)**.** *Eine Menge A wird als **Teilmenge** einer Menge B bezeichnet, falls für alle Elemente $a \in A$ gilt: $a \in B$. Man schreibt in diesem Fall $A \subseteq B$. Falls B Elemente enthält, die A nicht enthält schreibt man $A \subset B$.*

Die Menge aller Teilmengen einer Menge wird als Potenzmenge bezeichnet. Ein Beispiel für Teilmengen sind die natürlichen und die reellen Zahlen. Es gilt also $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Durch die Definition der Teilmenge können wir nun folgenden Satz beweisen.

Satz 1 (Gleichheit von Mengen)**.** *Es seien A und B Mengen. Dann sind die folgenden zwei Aussagen äquivalent*

1. $A = B$,
2. $A \subseteq B$ *und* $B \subseteq A$.

Beweis. Beweis durch die Teilmengendefinition. □

Definition 2 (Kardinalität)**.** *Die Größe n einer Menge A wird als* ***Kardinalität*** *bezeichnet und durch die Schreibweise $\mid A \mid = n$ angeben.*

1.3 Operationen auf Mengen

Definition 3 (Komplement)**.** *Das* ***Komplement*** *einer Menge $A \subseteq M$ wird als $\bar{A} = \{x \in M \mid x \notin A\}$ definiert.*

Wenn wir also das Komplement einer Menge angeben möchten, brauchen wir eine Übermenge, die unsere Menge enthält. Beispielsweise ist das Komplement der Menge $\{0\} \in \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{N}_0$ gleich der Menge $\mathbb{N}$.

Definition 4 (Durchschnitt und Vereinigung)**.** *Als der* ***Durchschnitt*** *$A \cap B$ zweier Mengen A und B werden alle Elemente bezeichnet, die sowohl in A als auch in B vorkommen.*

Die ***Vereinigung*** *zweier Mengen A und B schreiben wir als $A \cup B$. Diese enthält alle Elemente, die entweder in A oder in B oder in beiden vorhanden sind.*

Beispiel 1 (Durchschnitt und Vereinigung)**.** *Sei die Menge $A = \{1, 2, 3\}$ und die Menge $B = \{2, 3, 4\}$. Die Vereinigung dieser Mengen $A \cup B$ ist gleich $\{1, 2, 3, 4\}$ und der Durchschnitt $A \cap B$ ist gleich $\{2, 3\}$.*

Definition 5 (Differenz)**.** *In der* ***Differenz*** *$A \setminus B$ zweier Mengen A und B sind die Elemente aus A, die nicht in B vorkommen.*

Satz 2 (Komplement von B in A)**.**

$$A \setminus B \text{ ist äquivalent zu } A \cap \bar{B}.$$

Beweis. In der Differenz von $A \setminus B$ sind alle Element von A ohne die von B. Die Menge, die alle Element enthält, die nicht in B sind ist das Komplement $\bar{B}$. Der Durchschnitt von $A \cap \bar{B}$ enthält nun also alle Elemente von A ohne die aus B. □

Definition 6 (Symmetrische Differenz)**.** *Die* ***Symmetrische Differenz*** *zweier Mengen A und B ist definiert als:*

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Satz 3 (Eigenschaften von Mengenoperationen). *Für die zweistelligen Operationen auf Mengen gelten folgende Eigenschaften. Seien hierzu A, B, C Mengen.*

- $A \cap B = B \cap A$ *(Kommutativität)*
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(Assoziativität)*
- $A \subseteq B$ *und* $B \subseteq C$ *folgt* $A \subseteq C$
- $A \subseteq B$ *folgt* $A \cup B = B$
- $A \subseteq B$ *folgt* $A \cap B = A$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Beweis. Der Beweis kann über Mengendiagramme durchgeführt werden. Dies wird in der Übung gezeigt. □

Wie wir bereits gelernt haben sind Mengen nicht sortiert. Falls wir eine Sortierung brauchen, können wir dies mit dem Konstrukt aus der nächsten Definition lösen.

Definition 7 (n-Tupel). *Seien $x_1, \ldots, x_n \in M, n \in \mathbb{N}$ n Elemente einer Grundmenge M. Ein **n-Tupel** ist eine Zusammenfassung dieser Elementen, dargestellt als*

$$(x_1, \ldots, x_n),$$

wobei die Reihenfolge dieser Elemente von Bedeutung ist. An der i-ten Stelle steht dabei das Element x_i.

Bemerkung 1 (Geordnete Paar). *Eine Sonderform des n-Tupel ist das **geordnete Paar**. Dies ist ein Tupel, welches nur zwei Elemente enthält*

Definition 8 (Kartesisches Produkt). *Seien A, B beliebige Mengen. Die Menge aller geordneten Paare zwischen A und B wird als **kartesisches Produkt** $A \times B$ bezeichnet. Diese sist definiert als:*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}.$$

Falls $A = B$ verabschieden wir die Schreibweise A^2.

Beispiel 2. *Bei der Anwendung des Kreuzproduktes erhalten wieder eine Menge.*

$$(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x, y) | x \in A \text{ und } x \in C \text{ oder } x \in B \text{ und } y \in C\} = (A \cup B) \times C$$

Natürlich können wir diese Definition auch beliebig auf n-Tupel erweitern. Für die nächste Schreibweise die wir definieren möchte, benötigen wir in dem einfachen Fall erst einmal nur geordnete Paare.

Definition 9 (Abbildung). *Seien $\mathcal{D}, \mathcal{W}$ Mengen. Eine **Abbildung** (Funktion) $f : \mathcal{D} \to \mathcal{W}$ ist dann die Menge aller geordneten Paare*

$$\{(x, f(x)) \mid x \in \mathcal{D}, f(x) \in \mathcal{W}\}.$$

Man bezeichnet $\mathcal{D}$ als den Definitionsbereich und $\mathcal{W}$ als den Wertebereich.

1.3.1 Kurzschreibweisen für Mengen

Einige Mengen werden in der Mathematik häufig benötigt. Wir haben bereits einige gesehen, wie $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{N}$. In diesem kurzen Kapitel wollen wir uns noch Intervall- und Indexmengen definieren.

Definition 10 (Intervallmengen)**.** *Sei $x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$. Dann definieren wir die folgenden Mengen*

$$\begin{aligned}
(x, y) &= \{z \mid z > x \text{ und } z < y\}, \\
(x, y] &= \{z \mid z > x \text{ und } z \leq y\}, \\
[x, y) &= \{z \mid z \geq x \text{ und } z < y\}, \\
[x, y] &= \{z \mid z \geq x \text{ und } z \leq y\}.
\end{aligned}$$

Definition 11 (Indexmenge)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir die folgende Menge*

$$[n] = \{i \mid i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

2 Logik

2.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Für Informatiker ist die Logik ist eines der wichtigsten Gebiete der Mathematik. Die Logik bassiert dabei auf Aussagen denen ein Wahrheitswert zugeordnet wird.

Definition 12 (Aussage). *Eine **Aussage** ist eine Zeichenfolge, der genau einer der beiden Wahrheitswerte **wahr** (1, w) oder **falsch** (0, f) zugeordnet werden kann.*

Wenn p eine Aussage ist, dann bezeichnen wir mit $\alpha(p) \in \{w, f\}$ den Wahrheitswert von p.

Aussagen können die verschiedensten Formen annehmen. Beispiele für Aussagen sind unter anderen:

- $4 \in \mathbb{N}$,
- 3 ist eine Primzahl,
- Hello ist das englische Wort für Hallo,
- Montag ist ein Tag des Wochenendes,
- $\frac{1}{2} = 0.87$.

Wir können für diese Beispiele natürlich die Wahrheitswerte angeben. Wie für Mengen existieren auch für Aussagen Operationen.

2.2 Operationen auf Aussagen

Die einfachste Operation auf Aussagen ist die der Negation. Diese werden wir auch als einzige einstellige Operation einführen. Operationen werden durch die Anwendung einer Wahrheitswerttabelle dargestellt. Diese gibt für Belegungen einer Aussage, die Wahrheitswerte die durch die Operation entstehen an.

Definition 13 (Negation). *Sei p eine Aussage. Die **Negation** $\neg p$ von p wird durch die folgende Wahrheitswerttabelle definiert.*

$\alpha(p)$	$\alpha(\neg p)$
w	f
f	w

Oftmals gibt es für die Negation von Aussagen andere Schreibweisen. Ein Beispiel hierfür könnte die Aussage $4 \in \mathbb{N}$ sein. Deren Negation kann man als $\neg(4 \in \mathbb{N})$ oder kurz als $4 \notin \mathbb{N}$ schreiben.

Folgerung 1 (Zweifache Verneinung)**.** *Es sei p eine Aussage. Dann gilt*

$$\alpha(\neg(\neg(p))) = \alpha(p)$$

Beweis. Beweis in der Übung. □

Definition 14 (Konjugation, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz)**.** *Seien p und q Aussagen. Die wichtigsten Operationen der Logik (neben der Negation) sind die*

- ***Konjugation*** $p \wedge q$ *(und),*
- ***Disjunktion*** $p \vee q$ *(oder),*
- ***Implikation*** $p \rightarrow q$ *(wenn, dann) und*
- ***Äquivalenz*** $p \leftrightarrow q$ *(genau dann, wenn).*

Diese sind in der folgenden Wahrheitswerttabelle definiert.

$\alpha(p)$	$\alpha(q)$	$\alpha(p \wedge q)$	$\alpha(p \vee q)$	$\alpha(p \rightarrow q)$	$\alpha(p \leftrightarrow q)$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

Wie man in der Defintion sieht, ist es für die logische Oder-Operation nicht ausschließlich. Umgangssprachlich ist dies oft als 'und/oder' formuliert. Das ausschließende Oder ist eine andere Verknüpfung die als $p \oplus q$ zwischen den Aussagen p und q dargestellt wird. Diese ist wie folgt definiert:

$$p \oplus q \leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

Wichtig ist hier, dass wir die beiden Aussagen mit einer Äquivalenzoperation verknüfen (die linke Aussage ist genau dann wahr, wenn die rechte Aussage wahr ist). Diese Aussage ist also immer wahr. Man bezeichnet Aussagen, die immer wahr sind als **Tautologie**. Wichtige Tautologien sind im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 4 (Tautologien)**.** *Seien p, q, r Aussagen. Dann sind dei folgenden Aussagen Tau-*

tologien.

$$p \leftrightarrow \neg(\neg p) \tag{2.1}$$
$$(p \wedge p) \leftrightarrow p \tag{2.2}$$
$$(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) \tag{2.3}$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)) \tag{2.4}$$
$$(p \vee p) \leftrightarrow p \tag{2.5}$$
$$(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) \tag{2.6}$$
$$((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)) \tag{2.7}$$
$$((p \wedge q) \vee r) \leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r)) \tag{2.8}$$
$$((p \vee q) \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)) \tag{2.9}$$
$$((p \vee q) \wedge q) \leftrightarrow q \tag{2.10}$$
$$((p \wedge q) \vee q) \leftrightarrow q \tag{2.11}$$
$$(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q)) \tag{2.12}$$
$$(\neg(p \vee q)) \leftrightarrow ((\neg p) \wedge (\neg q)) \tag{2.13}$$
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q) \tag{2.14}$$
$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p) \tag{2.15}$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \tag{2.16}$$
$$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p)) \leftrightarrow ((p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \wedge (r \leftrightarrow p)) \tag{2.17}$$

Beweis. Alle diese Aussagen können über eine Wahrheitswerttabelle bewiesen werden. Ein alternativer Weg, diese Aussagen zu beweisen ist über geschicktes Umformen.

Wir zeigen dies für Aussage (15), $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$. Hierzu nehmen wir an, dass die Tautologien 1, 6 und 14 bereits bewiesen sind.

$$\begin{array}{lrr} & (p \rightarrow q) & \\ \leftrightarrow & \neg p \vee q & (2.14) \\ \leftrightarrow & \neg p \vee \neg(\neg q) & (2.1) \\ \leftrightarrow & \neg(\neg q) \vee \neg p & (2.6) \\ \leftrightarrow & \neg q \rightarrow \neg p & (2.14) \end{array}$$

In der Übungen werden die weiteren und angenommenen Tautologien bewiesen. □

Bemerkung 2 (Schreibweise)**.** *Das Symbol $\rightarrow$ kann nur zwischen Aussagen stehen. Beispielsweise ist es korrent für $x \in \mathbb{N}$ zu schreiben $(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$. Allerdings wäre es falsch zu schreiben $(x-1)^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1$. Die richtige Schreibweise ist hier $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, was eine wahre Aussage ist.*

2.3 Prädikatenlogik

Der Begriff Prädikatenlogik soll hier nicht abschreckend wirken. Wir benötigen ihn um umfassendere Aussagen zu beschreiben. In Aussagen müssen alle Variablen durch eine

Belegung gebunden sein. Beispielsweise ist $x^2 = 4$ keine Aussage, da man ihr keinen eindeutigen Wahrheitswert zuweisen kann. Erst durch die Information, dass es mindestens ein x gibt, so dass gilt $x^2 = 4$ oder durch das setzten von x auf einen festen Wert wird es zu einer Aussage.

Definition 15 (All- und Existenzquantor)**.** *Es sei I eine nicht leere Menge und für alle $i \in I$ sei p_i eine Aussage. Dann kann man diese Aussagen mithilfe des Allquantor $\forall$ oder des Existenzquantor $\exists$ verknüpfen. Dabei steht $\forall i \in I : p_i$ dafür, dass für alle $i \in I$ die Aussage p_i gilt. Die Aussage $\exists i \in I : p_i$, dass es mindestens ein $i \in I$ gibt, für das p_i gilt.*

Die Wahrheitswerte der verknüfungen ist intuitiv definiert als:

$$\alpha(\forall i \in I : p_i) = w \leftrightarrow \alpha(p_i) = w \text{ für alle } i \in I$$

und

$$\alpha(\exists i \in I : p_i) = w \leftrightarrow \alpha(p_i) = w \text{ für mindestens ein } i \in I.$$

Satz 5 (Negation von Quantoren)**.** *Die folgenden Aussagen sind Tautologien über der nicht leeren Menge I und den Aussagen $p_i, i \in I$.*

$$\neg(\forall i \in I : p_i) \leftrightarrow \exists i \in I : \neg p_i \tag{2.18}$$

$$\neg(\exists i \in I : p_i) \leftrightarrow \forall i \in I : \neg p_i \tag{2.19}$$

. Von Formel 2.18]

$$\begin{aligned}
& \neg(\forall i \in I : p_i) \\
\leftrightarrow \quad & \neg \bigwedge_{i \in I} p_i \\
\leftrightarrow \quad & \neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \\
\leftrightarrow \quad & \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \neg p_n \\
\leftrightarrow \quad & \bigvee_{i \in I} \neg p_i \\
\leftrightarrow \quad & \exists i \in I \neg p_i
\end{aligned}$$

Formel 2.19 verläuft synonym. □

Bemerkung 3 (Verknüfung von Quantoren)**.** *Quantoren können beliebig verknüft werden. Ein Beispiel hierfür ist die Definition der Kommutivität der Multiplikation.*

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a$$

2.4 Aussagen über Mengen

Nachdem wir Mengenlehre- und Logikkenntnisse erworben haben können wir jetzt komplexere Aussagen über Mengen beweisen. Wir wollen dies hier an einem Beispiel zeigen.

Beispiel 3. *Seien $A, B, C \neq \emptyset$ nichtleere Mengen. Wir wollen zeigen, dass gilt:*

$$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Beweis. Wir müssen für alle (x, y) aus der Menge $D = (A \cap B) \times C$ zeigen, dass dies auch in $(A \times C) \cap (B \times C)$ liegen:

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in D : (x,y) \in (A \cap B) \times C &\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : x \in (A \cap B) \wedge y \in C \\
&\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C \\
&\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C \\
&\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C) \\
&\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times C) \\
&\leftrightarrow \forall (x,y) \in D : (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C).
\end{aligned}$$

□