

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

## Звіт

на тему:

*"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для  
рівняння Лапласа"*

Виконали:

студенти 4-го курсу групи ПМп-41  
напрямку підготовки (спеціальності)  
113 – "Прикладна математика"

Бугрій Б.О.

Середович В.В.

Перевірив:

ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

# Зміст

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Коректність задачі	5
2.1 Єдиність розв'язку задачі . . . . .	5
3 Зведення до інтегрального рівняння	6
3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару . . . . .	6
3.2 Загальний вигляд розв'язку . . . . .	7
4 Коректність інтегрального рівняння	8
5 Параметризація	9
6 Чисельне розв'язування	12
6.1 Метод колокації . . . . .	12
6.2 Похибка . . . . .	13
7 Якийсь приклад	14

# Вступ

літературний огляд  
хто розглядав розв'язування цієї задачі  
які процеси описує  
мета - розв'язати якимось методом  
огляд наступних розділів

# 1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю  $D \subset \mathbb{R}^2$  з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої  $\Gamma_1$  та зовнішньої  $\Gamma_2$ .

Нехай  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_1 \subset C^2$  та  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_2 \subset C^2$ . Тоді двозв'язна область  $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$  матиме вигляд:

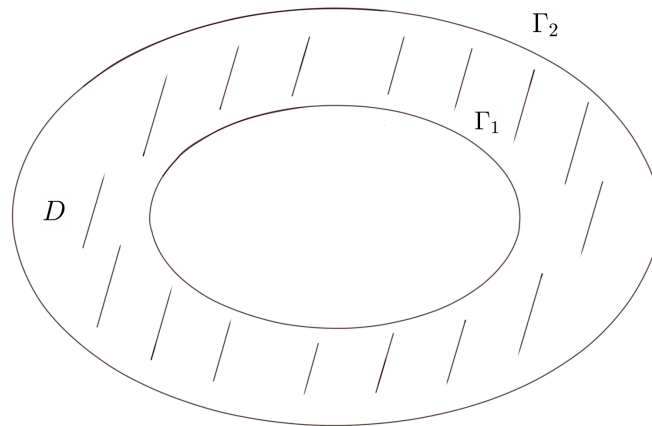


Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції  $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$  що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1)$$

2. Граничні умови:

$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (3)$$

де  $\nu = \nu(x)$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (2) є умовою Діріхле, а (3) є умовою Неймана.

## 2 Коректність задачі

...

### 2.1 Єдиність розв'язку задачі

**Теорема 1.** Нехай  $D$  - область з межею  $\partial D \in C^1$  і  $\vec{\nu}$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі  $\partial D$ . Тоді для  $u \in C^1(\overline{D})$  і  $v \in C^2(\overline{D})$  має місце перша формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v + \text{grad} u \cdot \text{grad} v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

і для  $u, v \in C^2(\overline{D})$  має місце друга формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

*Доведення.* Посилання на Креса.

**Теорема 2.** Нехай  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - гладкі границі, що належать класу  $C^1$ , обмежують двозв'язну (а може ні?) область  $D$ . Тоді задача (1) - (3) має на  $D$  (може замикання?) не більше одного розв'язку.

*Доведення.* Від супротивного. Нехай  $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$  - два різні розв'язки задачі (1) - (3). Запишемо цю задачу для функції  $u^* = u_1 - u_2$ :

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 1 при  $u = v = u^*$ :

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = \int_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут  $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Так як  $\Delta u^* = 0$  (чи ні?) в  $D$ ,  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$  на  $\Gamma_2$ , то отримуємо рівність

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що  $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$  на всій області  $D$ , тобто  $u^* = \text{const}$ . Функція  $u^*$  неперервна в  $\overline{D}$  і  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1 \subset \overline{D}$ , отже  $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ , що суперечить початковому припущенню. ■

### 3 Зведення до інтегрального рівняння

...

#### 3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення гармонічної функції ...

**Теорема 3.** Функція

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$$

визначена на  $x \neq y$ ,  $x \in \mathbb{R}$  називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого  $y \in \mathbb{R}^2$  вона є гармонічною в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ .

**Означення 1.** Нехай функція  $\varphi \in C(\partial D)$ , тоді

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D$$

називають потенціалом простого шару з густиною  $\varphi$ .

**Теорема 4.** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$  і  $\varphi \in C(\partial D)$ . Тоді потенціал простого шару  $u$  з густиною  $\varphi$  неперервний на  $\mathbb{R}^m$ . На границі області справджується рівність

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

де інтеграл існує і розуміється як невластний. *Доведення.* Кресс

Щось про стрибок ...?

**Теорема 5.** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$ . Тоді для потенціалу простого шару  $u$  з неперервною густиною  $\varphi$  маємо, що

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \text{grad } u(x \pm hv(x))$$

is to be understood in the sense of uniform convergence on  $\partial D$  and where the integral exists as an improper integral.

### 3.2 Загальний вигляд розв'язку

Потенціал простого шару є гармонічною функцією, тому розв'язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D$$

з невідомими густинами  $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$ ,  $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$ .

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y) = f_1(x), & x \in \Gamma_1 \\ 2 \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \varphi_2(x) + 2 \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = 2f_2(x), & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Пояснити про стрибок ... (ще раз перевірити на стрибок)

## 4 Коректність інтегрального рівняння



## 5 Параметризація

Припустимо, що криві  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

де  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $2\pi$  періодична  $\forall t |x'_i(t)| > 0$

Позначимо  $\nu$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої  $\Gamma_i$ , заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left( \frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right)$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального розв'язку

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де  $r = |x - y|$ , отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2}$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію та описані вище перетворення перейдемо до параметризованої системи.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ -\frac{\psi_2(t)}{|x'_2(t)|} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases}$$

де  $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t)) \cdot |x'_i(t)|$ ,  $g_i = f_i(x_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ ;  $t \in [0, 2\pi]$

Ядра матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Big|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau \\ K_{12}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Big|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad ; \\ K_{21}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Big|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad ; \\ K_{22}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Big|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau \end{aligned}$$

В ядрах  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  внаслідок параметризації точки  $x$  та  $y$  знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при  $t = \tau$ .

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з  $K_{11}$

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \end{aligned}$$

Отже, ядро  $K_{11}$  можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t, \tau) = K_{11}^{(1)} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau)$$

де ядра  $K_{11}^{(1)}$  і  $K_{11}^{(2)}$  матимуть вигляд:

$$K_{11}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб до визначити  $K_{11}^{(2)}$ , знайдемо границю за правилом Лопі-  
таля

$$\lim_{\tau \rightarrow t} K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} = \ln \frac{\frac{4}{e} \frac{(t - \tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2 (t - \tau)^2} = \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$$K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Виділимо сингулярну особливість ядра  $K_{22}$ . Знайдемо границю при  $\tau \rightarrow t$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}^{(1)}(t, \tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau) \right\} d\tau + \\ \quad + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ -\pi \frac{\psi_2(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

Використовуючи параметризацію геґ можемо записати наближений розв'язок мішаної задачі геґ в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра  $K_1$  і  $K_2$  мають вигляд:

$$K_1(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

## 6 Чисельне розв'язування

### 6.1 Метод колокації

...

...

...

Шукані функції подамо у вигляді суми ... (сказати щось про n):

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \gamma_j^{(k)}(x), \quad k = 1, 2$$

Підставивши їх у систему оримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \left\{ -\pi \frac{\gamma_j^{(2)}(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

Цю систему необхідно протабулювати n разів по змінній t, щоб знайти відповідні значення векторів  $c^{(1)}$  і  $c^{(2)}$ . Запишемо отриману систему у зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

де

$$G_{ji}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(2)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(3)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(4)} = -\pi \frac{\gamma_j^{(2)}(t_i)}{|x_2'(t_i)|} + \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t_i, \tau) d\tau$$

Обчислення ядра  $K_{11}$

For the full discretization of the integral equation of the first kind (3.5), which has a logarithmic singularity, we apply a quadrature method together with the quadrature rule [13,14] based on trigonometric interpolation. For this purpose, we choose an equidistant mesh by setting  $t_i := i\pi/M, i = 0, \dots, 2M-1, M \in \mathbb{N}$  and use the quadrature rules

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{2M} \sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j) \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln\left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) d\tau &\approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f(t_j) \end{aligned}$$

with known weight functions  $R_j$  (see [13]).

$$R_j(t) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_j) + \frac{1}{2n} \cos n(t - t_j)$$

## 6.2 Похибка

2). Проекційний (інтерполяційний) о-р визначається як

$$(P_n \varphi)(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(x_j) l_j(x).$$

Для  $P_n \varphi$  маємо такі оцінки

$$\begin{aligned} \varphi \in C^2[a, b], \quad \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty &\leq \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty \\ \varphi \in C[a, b], \quad \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty &\leq w(\varphi, h) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Звідси

$$P_n \varphi \rightarrow \varphi \quad \varphi \in C[a, b]$$

Тепер для відповідного інтегрального оператора  $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  маємо за лемою 4.2  $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Отже, результати теореми 4.1 можна використати в цьому конкретному випадку. Таким чином для дост. великого  $n \geq N$  апроксимаційне р-ня цього варіанту методу колокації  $(I - P_n A) \varphi_n = P_n f$  має єдиний р-к для  $f \in C[a, b]$  і  $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty$ . Для  $\varphi \in C^2[a, b]$   $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty$ . Інтеграли (3) слід обчислювати наближено з використанням квадратур, які не понижують отриманої вище оцінки. Зокрема можна скористатись способом, розглянутим у в-ку м-ду вир. ядер. Для кускової інтерполяції можна вибирати поліноми вищого степеня  $r$ . При цьому заг. ідея залишається незмінною і порядок збіжності буде  $O(h^{r+1})$  для  $\varphi \in C^{r+1}[a, b]$ .

## 7 Якийсь приклад

## Бібліографія

- [1] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. 2012.