

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт

на тему:

*"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для
рівняння Лапласа"*

Виконали:

студенти 4-го курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – "Прикладна математика"

Бугрій Б.О.

Середович В.В.

Перевірив:

ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ	3
1 Постановка задачі	4
2 Коректність задачі	5
2.1 Єдиність розв’язку задачі	5
3 Зведення до інтегрального рівняння	6
3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару	6
3.2 Загальний вигляд розв’язку	7
4 Параметризація	8
5 Чисельне розв’язування	11
5.1 Метод колокації	11
5.2 Похибка	12
6 Чисельні експерименти	14
6.1 Приклад 1	14
6.2 Приклад 1	15

Вступ

літературний огляд
хто розглядав розв'язування цієї задачі
які процеси описує
мета - розв'язати якимось методом
огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}^2$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2 .

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$ матиме вигляд:

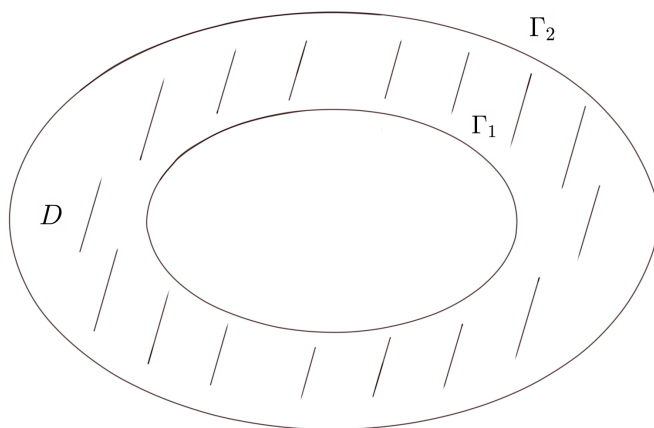


Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1.1)$$

2. Граничні умови:

$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (1.3)$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) є умовою Діріхле, а (1.3) є умовою Неймана.

2 Коректність задачі

...

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 2.1 Нехай D - область з межею $\partial D \in C^1$ і $\vec{\nu}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂D . Тоді для $u \in C^1(\overline{D})$ і $v \in C^2(\overline{D})$ має місце перша формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v + \text{grad} u \cdot \text{grad} v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

і для $u, v \in C^2(\overline{D})$ має місце друга формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

Доведення. Посилання на Креса.

Теорема 2.2 Нехай Γ_1, Γ_2 - гладкі границі, що належать класу C^1 , обмежують двозв'язну область D . Тоді задача (1.1) - (1.3) має на D не більше одного розв'язку.

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ - два різні розв'язки задачі (1.1) - (1.3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 2.1 при $u = v = u^*$:

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = \int_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ (чи ні?) в D , $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2 , то отримуємо рівність

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D , тобто $u^* = \text{const}$. Функція u^* неперервна в \overline{D} і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \overline{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

...

3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення гармонічної функції ...

Теорема 3.1 *Функція*

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \quad (3.1)$$

визначена на $x \neq y$, $x \in \mathbb{R}$ є фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого $y \in \mathbb{R}^2$ вона є гармонічною в $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Означення 3.2 *Нехай функція $\varphi \in C(\partial D)$, тоді*

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D \quad (3.2)$$

називають потенціалом простого шару з густиною φ .

Теорема 3.3 *Нехай ∂D належить класу C^2 і $\varphi \in C(\partial D)$. Тоді потенціал простого шару u з густиною φ неперервний на \mathbb{R}^m . На границі області справджується рівність*

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (3.3)$$

де інтеграл існує і розуміється як невластний.

Доведення. Кресс

Щось про стрибок ...?

Теорема 3.4 *Нехай ∂D належить класу C^2 . Тоді для потенціалу простого шару u з неперервною густиною φ маємо, що*

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \text{grad } u(x \pm hv(x))$$

is to be understood in the sense of uniform convergence on ∂D and where the integral exists as an improper integral.

3.2 Загальний вигляд розв'язку

Потенціал простого шару є гармонічною функцією, тому розв'язок задачі (1.1) – (1.3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (3.4)$$

з невідомими густинами $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$.

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y) = f_1(x), & x \in \Gamma_1 \\ 2 \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \varphi_2(x) + 2 \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = 2f_2(x), & x \in \Gamma_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Пояснити про стрибок ... (ще раз перевірити на стрибок)

4 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

де $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t |x'_i(t)| > 0$

Позначимо ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_i , заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left(\frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right) \quad (4.2)$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального розв'язку

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де $r = |x - y|$, отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \quad (4.3)$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію (4.1) та вище наведенні перетворення подамо систему (3.5) у параметризованому вигляді.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ \frac{\psi_2(t)}{|x'_2(t)|} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x'_i(t)|$, $g_i = f_i(x_i(t))$, $i = 1, 2$; $t \in [0, 2\pi]$

Ядра матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau \\ K_{12}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad ; \\ K_{21}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad ; \\ K_{22}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau \end{aligned}$$

В ядрах K_{12} , K_{21} внаслідок параметризації точки x та y знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку K_{11} , K_{22} обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при $t = \tau$.

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з K_{11}

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \end{aligned}$$

Отже, ядро K_{11} можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t, \tau) = K_{11}^{(1)} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau)$$

де ядра $K_{11}^{(1)}$ і $K_{11}^{(2)}$ матимуть вигляд:

$$K_{11}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб доозначити $K_{11}^{(2)}$, знайдемо границю за правилом Лопітала

$$\lim_{\tau \rightarrow t} K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} = \ln \frac{\frac{4}{e} \frac{(t - \tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2 (t - \tau)^2} = \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$$K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Доозначуємо ядро K_{22} . Знайдемо границю при $\tau \rightarrow t$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t = \tau \\ \frac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t \neq \tau \end{cases}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}^{(1)}(t, \tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau) \right\} d\tau + \\ \quad + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \frac{\psi_2(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \quad (4.5)$$

Використовуючи параметризацію (4.1) можемо записати розв'язок мішаної задачі (3.4) в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра K_1 і K_2 мають вигляд:

$$K_1(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

5 Чисельне розв'язування

5.1 Метод колокації

...

...

...

Шукані функції подамо у вигляді суми ... (сказати щось про n):

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \gamma_j^{(k)}(x), \quad k = 1, 2$$

Підставивши їх у систему оримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \left\{ -\pi \frac{\gamma_j^{(2)}(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

Цю систему необхідно протабулювати n разів по змінній t, щоб знайти відповідні значення векторів $c^{(1)}$ і $c^{(2)}$. Запишемо отриману систему у зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

де

$$G_{ji}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(2)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(3)} = \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(4)} = -\pi \frac{\gamma_j^{(2)}(t_i)}{|x_2'(t_i)|} + \int_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t_i, \tau) d\tau$$

Для обчислення ядра K_{11} будемо використовувати відповідну квадратурну формулу. Для цього задаємо рівномірне розбиття:

$$t_i := i\pi/M, \quad i = 0, \dots, 2M-1, M \in \mathbb{N}$$

Квадратурна формула буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f(t_j) \quad (5.1)$$

з ваговою функцією

$$R_j(t) := -\frac{1}{2M} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_j) + \frac{\cos(t-t_j)}{M} \right\} \quad (5.2)$$

5.2 Похибка

Теорема 5.1 *Нехай $A : X \rightarrow X$ - обмежений лінійний оператор у банаховому просторі X і $I - A : X \rightarrow X$ - ізоморфізм. Припустимо, що $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Тоді для достатньо великого $n \geq N$ оператори $(I - P_n A)^{-1} : X \rightarrow X$ існують і є рівномірно обмежені. Для точного і наближеного розв'язку $\varphi - \varphi_n = (I - P_n A)^{-1}(\varphi - P_n \varphi)$ і має місце двостороння оцінка*

$$\frac{1}{\|I - P_n A\|} \|\varphi - P_n \varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(I - P_n A)^{-1}\| \|\varphi - P_n \varphi\|$$

Проекційний оператор визначається як

$$(P_n \varphi)(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(x_j) l_j(x).$$

Для $P_n \varphi$ маємо такі оцінки

$$\begin{aligned} \varphi \in C^2[a, b], \quad & \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty \\ \varphi \in C[a, b], \quad & \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \leq w(\varphi, h) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Звідси

$$P_n \varphi \rightarrow \varphi \quad \varphi \in C[a, b]$$

Тепер для відповідного інтегрального оператора $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ маємо за лемою 4.2 $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Отже, результати теореми 4.1 можна використати в цьому конкретному випадку.

Таким чином для достатньо великого $n \geq N$ апроксимаційне р-ня цього варіанту методу колокації має єдиний

$$(I - P_n A) \varphi_n = P_n f \quad (5.3)$$

1 р-к для $f \in C[a, b]$ $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty$. Для $\varphi \in C^2[a, b]$ $\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty$

Інтеграли (3) слід обчислювати наближено з використанням квадратур, які не понижують отриманої вище оцінки. Зокрема можна скористатись способом, розглянутим у в-ку м-ду вир. ядер. Для кускової інтерполяції можна вибирати поліноми вищого степеня r . При цьому заг. ідея залишається незмінною і порядок збіжності буде $O(h^{r+1})$ для $\varphi \in C^{r+1}[a, b]$.

p1 = [0.7, 1.2] p2 = [-0.8, 0.9] p3 = [-1, -1]

6 Чисельні експерименти

6.1 Приклад 1

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9 \cos t, 0.9 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ f_1(x) &= x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2(x) = 1 \text{ на } \Gamma_2\end{aligned}$$

(6.1)

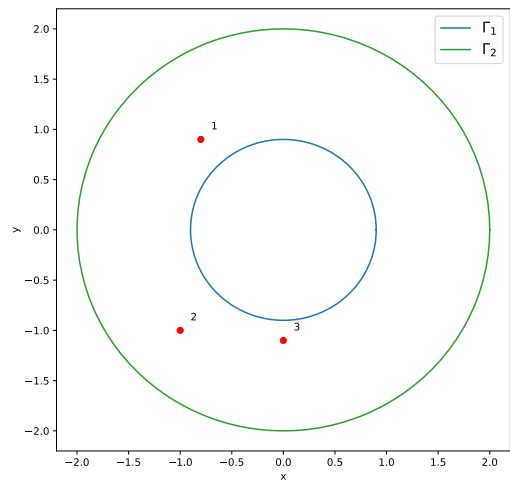


Рис. 2: Граничні умови Γ_1 , Γ_2 для ??

n	$x = (0.7, 1.2)$	$x = (-0.8, 0.9)$	$x = (-1, -1)$
4	3.32×10^{-1}	7.88×10^{-2}	3.11×10^{-1}
8	1.07×10^{-1}	2.64×10^{-2}	4.91×10^{-3}
16	5.30×10^{-2}	5.76×10^{-3}	8.18×10^{-5}
32	1.44×10^{-2}	2.48×10^{-3}	1.61×10^{-5}

6.2 Приклад 1

Бібліографія

- [1] Johansson B.T. Chapko R. *An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies*. J. Numer. Appl. Math. No. 97, 2009, – pp. 10-25. 2009.
- [2] O. Sobeyko R. Chapko. *On the numerical solution of a cauchy problem for an elastostatic equation*. Ser. Appl. Math. Inform - 2009. Is. 15. – pp. 135-148. 2009.
- [3] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. 2012.