Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа

Бугрій Богдан, Середович Віктор

Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики

10 грудня 2020 р.

Зміст

Завдання

Знайти наближений розв'язок мішаної задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області методом ІР у випадку гладких границь, заданих параметрично. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити методом колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.

Область визначення

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$, причому $D_1 \subset D_2$. Розглядатимемо двозв'язну область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$, яка має вигляд

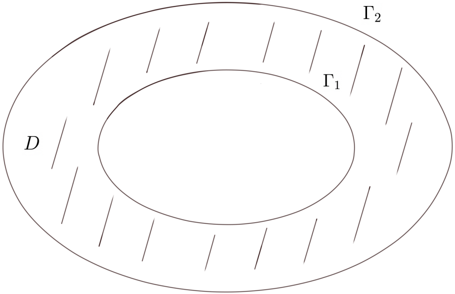

Рис.: Область D

Постановка задачі

Знайти функцію $u \in C^2(D) \bigcap C^1(\overline{D})$ що задовольняє рівняння (1.1) та граничні умови (1.2), (1.3)

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.1}$$
2. Граничні умови:
$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{1.3}$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називатимемо умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

Єдиність розв'язку

Теорема

Нехай Γ_1, Γ_2 – гладкі границі, що належать класу C^1, обмежують двозв'язну область D. Тоді задача (1.1) – (1.3) має на D не більше одного розв'язку.

Доведення

1. $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$
2. $u^* = u_1 - u_2$
3. Застосувати першу формулу Гріна
4. Підставити граничні умови

Пов'язані поняття. Теорія потенціалів

Потенціал простого шару

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

Похідна від потенціалу простого шару

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

Загальний вигляд розв'язку

Передумови

- Потенціал простого шару є гармонічною функцією
- Задача (1.1) – (1.3)зводиться до системи ІР

Вигляд розв'язку

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D$$

Система IP

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\varphi_2(x) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \qquad (3.1)$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$
Подамо систему в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \dfrac{\psi_2(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \qquad (3.2)$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x_i'(t)|,\ g_i = f_i(x_i(t)),\ i = 1, 2;\ t \in [0, 2\pi]$

В системі (3.2) ядра мають вигляд:

$$K_{11}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}}, \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}};$$

$$K_{21}(t,\tau) = \frac{(y-x)\cdot\nu(x)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}};$$

$$K_{22}(t,\tau) = \frac{(y-x)\cdot\nu(x)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}}, \quad t \neq \tau$$

Виділення особливостей

Подамо ядро K_{11} його у вигляді:

$$K_{11}(t,\tau) = K_{11}{}^{(1)} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + K_{11}{}^{(2)}(t,\tau)$$

$$K_{11}{}^{(1)}(t,\tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Знайдему границю за правилом Лопіталя і в результаті отримаємо:

$$K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Знайдемо границю при $\tau \to t$

$$\lim_{\tau \to t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \\ \dfrac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Подання розв'язку в параметричному вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x,\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x,\tau)d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра K_1 і K_2 мають вигляд:

$$K_1(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

Метод колокації

Розбиття та базисні функції

- $x_j = a + jh, j = 0, \ldots, n, \; h = (b-a)/n$
- X_n- простір функцій, неперервних на $[a, b]$
- $l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h}, & x \in [x_{j-1}, x_j], j \geq 1 \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x \in [x_j, x_{j+1}], j \leq n-1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$

Вигляд наближеного розв'язку

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k)} l_j(x), \quad k = 1, 2$$

$$
\begin{cases}
\sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\
\sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \\
\qquad + \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \left\{ \pi \frac{l_j(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t)
\end{cases}
$$

Результуюча СЛАР

$$Ac = g$$

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

Похибка

Проекційний оператор

$$(P_n\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x_i)\, l_j(x).$$

Для $P_n\varphi$ маємо такі оцінки

$$\varphi \in C^2[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \le \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty$$
$$\varphi \in C[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \le w(\varphi, h) \to 0$$

Оцінка похибки

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \le M \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty, \quad \text{для } \varphi \in C^2[a,b]$$

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9\cos t, 0.9\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$f_1(x) = x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2(x) = 1 \text{ на } \Gamma_2$$

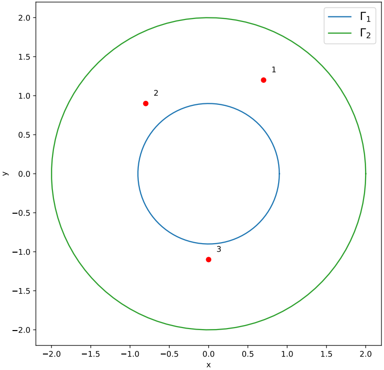

Рис.: Граничні умови Γ_1, Γ_2 для 5.1

M	$x = (0.7, 1.2)$	$x = (-0.8, 0.9)$	$x = (0, -1.1)$
8	0.40279256	0.30825628	0.18528191
16	0.17905565	0.16061103	0.1116888
32	0.07499773	0.07602952	0.05734572
64	0.0337177	0.03639188	0.028495
128	0.01590401	0.01773373	0.01413837

Табл.: Абсолютна похибка розвязку для деяких $x \in D$ у випадку 5.1

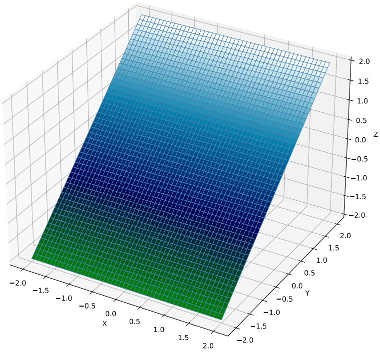

Рис.: Точний розв'язок

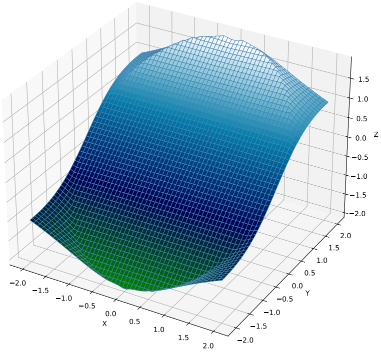

Рис.: Наближений розв'язок

Література

- *Kress R.* Linear Integral Equations, 2nd. ed. / R. Kress. – New-York: Springer-Verlag, 1989. – 367 c.
- *R. Chapko* An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies / R. Chapko, B.T. Johansson – J. Numer. Appl. Math. No. 97, 2009, – pp. 10-25
- *R. Chapko* On the numerical solution of a cauchy problem for an elastostatic equation / R. Chapko, O. Sobeyko – Ser. Appl. Math. Inform - 2009. Is. 15. – pp. 135-148