Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт

на тему:

"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа"

Виконали:
студенти IV курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – "Прикладна математика"
Бугрій Б.О.
Середович В.В.

Перевірили:
проф. Хапко Р.С.
ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ

... існує багато нетривіальних задач, які для ефективного вирішення потребують застосування чисельних методів. ... Зокрема, задачі механіки матеріалів та динаміки рідин часто зводяться до крайових задач для рівняння Лапласа в багатозв'язних областях. Серед них добревідомою є мішана задача Діріхле-Неймана якою можна описати такі процеси, як теплообмін, вплив магнітного поля та багато інших. На жаль, ...

Для вирішення таких проблем природньо застосовувавти методи інтегральних рівнянь, оскільки вони дозволяють

і не потребують додаткових зусиль

досягаючи високого порядку збіжності на достатньо гладких областях з $\mathbb{R}^{\nvDash}$, незалежно від їх форми.

Метою даної роботи є розв'язвння мішаної задачі для рівняння Лапласа в двозв'язній області. Для цього був використаний метод колокації на основі лінійно базисних функції.

розв'язують за допомогою теорії потенціалів

За допомогою цього підходу задача була зведена до возв'язання системи інтегральних рівнянь другого роду.

В наступних розділах ми розглянемо такі аспекти розв'язання ... якоїсь задачі .... як

літературний огляд

хто розглядав розв'язування цієї задачі

які процеси описує

мета - розв'язати якимось методом

огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}^2$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2.

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$, причому $D_1 \subset D_2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$ матиме вигляд:

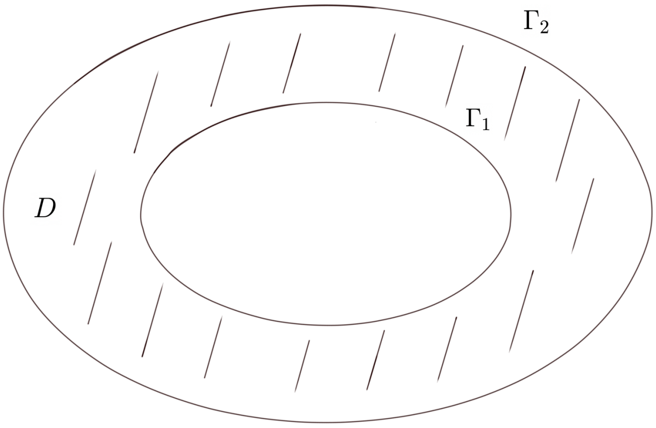

Рис. 1.1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.1}$$

2. Граничні умови:
$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{1.3}$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називають умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

2 Коректність задачі

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 2.1 *Нехай* D *- область з межею* $\partial D \in C^1$ *і* $\overrightarrow{\nu}-$ *одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі* ∂D*. Тоді для* $u \in C^1(\overline{D})$ *і* $v \in C^2(\overline{D})$ *має місце перша формула Гріна*

$$\int\limits_D (u\Delta v + gradu \cdot gradv)dx = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds \tag{2.1}$$

Доведення. Див. [**kress2012linear**].

Теорема 2.2 *Нехай* Γ_1, Γ_2 *– гладкі границі, що належать класу* C^1*, обмежують двозв'язну область* D*. Тоді задача (1.1) – (1.3) має на* D *не більше одного розв'язку.*

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ – два різні розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 2.1 при $u = v = u^*$:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = \int\limits_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int\limits_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ в D, $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2, то отримуємо рівність

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D, тобто $u^* = \mathrm{const}$. Функція u^* неперервна в $\overline{D}$ і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \overline{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення 3.1 *Нехай* $D \subset \mathbb{R}^2$ *– замкнена обмежена область. Функція* $u \in C^2(D)$*, що набуває дійсних значень, називається гармонічною, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа* $\Delta u = 0$ *в* D*.*

Означення 3.2 *Функція*

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} \tag{3.1}$$

визначена на $x \neq y,\ x \in \mathbb{R}^2$ *називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого* $y \in \mathbb{R}^2$ *вона є гармонічною в* $\mathbb{R}^2 \backslash \{y\}$*.*

Означення 3.3 *Нехай функція* $\varphi \in C(\partial D)$*, тоді*

$$u(x) := \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \partial D \tag{3.2}$$

називають потенціалом простого шару з густиною φ*.*

Теорема 3.4 *Нехай* ∂D *належить класу* C^2 *і* $\varphi \in C(\partial D)$*. Тоді потенціал простого шару* u *з густиною* φ *неперервний на* $\mathbb{R}^2$*. На границі області справджується рівність*

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \partial D \tag{3.3}$$

де інтеграл існує і розуміється як невласний.

Доведення. Див. [**kress2012linear**].

Теорема 3.5 *Нехай* ∂D *належить класу* C^2*. Тоді для потенціалу простого шару* u *з неперервною густиною* φ *маємо, що*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D \tag{3.4}$$

де

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial v}(x) := \lim_{h \to +0} v(x) \cdot \operatorname{grad} u(x \pm hv(x)) \tag{3.5}$$

слід розуміти в сенсі рівномірної збіжності на ∂D *і інтеграл існує як невласний.*

Доведення. Див. [**kress2012linear**].

3.2 Загальний вигляд розв'язку

Задача (1.1) – (1.3) зводиться до системи інтегральних рівнянь з двома невідомими функціями. Потенціал простого шару є гармонічною функцією, а отже їх сума також гармонічна. Тому розв'язок задачі (1.1) – (1.3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D \tag{3.6}$$

з невідомими густинами $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$.

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) + \\ \qquad\qquad + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.7}$$

Потенціал простого шару не має стрибка, але він може виникнути при диференціюванні. В другій частині другого рівняння точка інтегрування та точка спостереження лежать на одній кривій, що і породжує стрибок. Варто звернути увагу на те, що стрибок розглядається на зовнішній границі (границі Неймана), отже він буде додатнім.

4 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$.

Нехай ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_i, заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left(\frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|}\right) \tag{4.2}$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального розв'язку

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \ln(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де $r = |x - y|$, отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi}\frac{(y - x)\cdot \nu(x)}{r^2} \tag{4.3}$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію (4.1) та вище наведенні перетворення подамо систему (3.7) у параметризованому вигляді.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau)K_{11}(t,\tau)d\tau + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau)K_{12}(t,\tau)d\tau = g_1(t) \\ \dfrac{\psi_2(t)}{2|x'_2(t))|} + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau)K_{21}(t,\tau)d\tau + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau)K_{22}(t,\tau)d\tau = g_2(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x'_i(t)|,\ g_i = f_i(x_i(t)),\ i = 1, 2;\ t \in [0, 2\pi]$.

Ядра матимуть вигляд:

$$K_{11}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x - y|}\bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \qquad , \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x - y|}\bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}}$$

$$K_{21}(t,\tau) = \frac{(y - x)\cdot \nu(x)}{r^2}\bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}}$$

$$K_{22}(t,\tau) = \frac{(y - x)\cdot \nu(x)}{r^2}\bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau$$

В ядрах K_{12}, K_{21} внаслідок параметризації точки x та y знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку K_{11}, K_{22} обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при $t = \tau$.

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з K_{11}:

$$K_{11}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}$$

Отже, ядро K_{11} можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t,\tau) = {K_{11}}^{(1)}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + {K_{11}}^{(2)}(t,\tau)$$

де ядра ${K_{11}}^{(1)}$ і ${K_{11}}^{(2)}$ матимуть вигляд:

$${K_{11}}^{(1)}(t,\tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad {K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб доозначити ${K_{11}}^{(2)}$, знайдемо границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{\tau\to t}{K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \lim_{\tau\to t}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} = \ln\frac{\frac{4}{e}\frac{(t-\tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2\,(t-\tau)^2} = \ln\frac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$${K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \\ \frac{1}{2}\ln\frac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases} \tag{4.5}$$

Доозначуємо ядро K_{22}. Знайдемо границю при $\tau \to t$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\partial\Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial\nu(t)} = \frac{x_2''(\tau)\cdot\nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t = \tau \\[2ex] \dfrac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t \neq \tau \end{cases} \tag{4.6}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}{}^{(1)}(t,\tau) \ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right) + K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) \right\} d\tau + \\ \qquad\qquad + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \dfrac{\psi_2(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \tag{4.7}$$

Використовуючи параметризацію (4.1) можемо записати розв'язок мішаної задачі (3.6) в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x,\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x,\tau) d\tau, \quad x \in D \tag{4.8}$$

де відповідні ядра K_1 і K_2 мають вигляд:

$$K_1(x,\tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x,\tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|} \tag{4.9}$$

5 Чисельне розв'язування

5.1 Метод колокації

Метод колокації належить до проекційних методів розв'язування лінійних інтегральних рівнянь. Ми будемо використовувати колокацію на основі поділу області D на деякі підобласті, на яких шукана функція апроксимується алгебраїчними поліномами невисокого степеня, в нашому випадку кусково лінійними.

Нехай

$$t_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, n \tag{5.1}$$

це рівновіддалений поділ відрізка $[a, b]$ з кроком $h = (b - a)/n$. X_n – простір функцій, неперервних на $[a, b]$, звуження яких на підінтервал $[t_{j-1}, t_j]$ – лінійна функція.

Очевидно, що $\dim X_n = n + 1$ і базис Лагранжа в цьому просторі має вигляд

$$\ell_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{j-1}}{h}, & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j \geq 1 \\ \dfrac{t_{j+1} - t}{h}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j \leq n - 1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{5.2}$$

з очевидним уточненням для ℓ_0 та ℓ_n. Шукані функції з системи (4.7) подамо у вигляді суми

$$\tilde{\psi}_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k)} \ell_j(t), \quad k = 1, 2 \tag{5.3}$$

Підставивши їх у систему (4.7) отримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \left\{ \pi \dfrac{\ell_j(t)}{|x_2'(t)|} + \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases} \tag{5.4}$$

Цю систему необхідно протабулювати на основі рівновіддаленого поділу (5.1) по змінній t щоб знайти відповідні значення векторів $c^{(1)}$ і $c^{(2)}$. Подамо отримані результати в зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G^{(1)}_{11} & \dots & G^{(1)}_{1n} & G^{(2)}_{11} & \dots & G^{(2)}_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G^{(1)}_{n1} & & G^{(1)}_{nn} & G^{(2)}_{n1} & & G^{(2)}_{nn} \\ G^{(3)}_{11} & \dots & G^{(3)}_{1n} & G^{(4)}_{11} & \dots & G^{(4)}_{1n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G^{(3)}_{n1} & & G^{(3)}_{nn} & G^{(4)}_{n1} & & G^{(4)}_{nn} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_{11} \\ \vdots \\ 2\pi g_{1n} \\ 2\pi g_{21} \\ \vdots \\ 2\pi g_{2n} \end{pmatrix}$$

де

$$G^{(1)}_{ji} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t_i, \tau) d\tau \qquad G^{(2)}_{ji} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G^{(3)}_{ji} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t_i, \tau) d\tau \qquad G^{(4)}_{ji} = \pi \frac{\ell_j(t_i)}{|x_2'(t_i))|} + \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t_i, \tau) d\tau$$

Опираючись на властивості базису (5.2), інтеграли в системі (5.4) можна подати у спрощеному вигляді:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K\left(t_i, \tau\right) d\tau = \frac{1}{h} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\tau - t_{j-1}\right) K\left(t_i, \tau\right) d\tau + \\ + \frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left(t_{j+1} - \tau\right) K\left(t_i, \tau\right) d\tau \end{gathered} \tag{5.5}$$

де K – одне із ядер.

Тоді отримаємо такий вигляд наближеного розв’язку:

$$\begin{gathered} u_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D \end{gathered} \tag{5.6}$$

5.2 Дискретизація

Метод колокації є частково дискретним методом, що означає що інтеграли в системі рівнянь можемо обчислити точно. На жаль, це не завжди вдається, тому в даній роботі ми дискретизуємо метод використавши квадратури.

Для обчислення ядра K_{11} будемо використовувати відповідну квадратурну формулу. Для цього задаємо рівномірне розбиття:

$$t_i := i\pi/M, \quad i = 0, \ldots, 2M-1, M \in N$$

Квадратурна формула буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t)f\left(t_j\right) \tag{5.7}$$

з ваговою функцією

$$R_j(t) := -\frac{1}{2M}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos m\left(t-t_j\right) + \frac{\cos\left(t-t_j\right)}{M}\right\} \tag{5.8}$$

Решта ядер не містять у собі особливості, тим більше легко бачити що вони є щонайменше двічі неперервно диференційовні на заданих кривих, отже доцільно буде для обчислення інтегралів застосувати квадратури трапецій:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx h\left(\frac{f(0)+f(2\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(t_i\right)\right). \tag{5.9}$$

5.3 Похибка

Теорема 5.1 *Нехай $A : X \to X$ - обмежений лінійний оператор у банаховому просторі X та $(I-A) : X \to X$ – ізоморфізм. Припустимо, що $\|P_nA - A\| \to 0, n \to \infty$. Тоді для достатньо великого $n \geq \mathbb{N}$ оператори $(I-P_nA)^{-1} : X \to X$ існують і є рівномірно обмежені. Для точного і наближеного розв'язку $\varphi - \varphi_n = (I-P_nA)^{-1}(\varphi - P_n\varphi)$ має місце двостороння оцінка*

$$\frac{1}{\|I-P_nA\|}\|\varphi - P_n\varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq \left\|(I-P_nA)^{-1}\right\|\|\varphi - P_n\varphi\| \tag{5.10}$$

Проекційний оператор визначається як

$$\left(P_n\varphi\right)(x) = \sum_{j=0}^{n}\varphi\left(x_i\right)l_j(x). \tag{5.11}$$

Для оператора $P_n\varphi$ маємо такі оцінки похибки

$$\varphi \in C^2[a,b], \quad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2\|\varphi''\|_\infty$$
$$\varphi \in C[a,b], \quad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq w(\varphi,h) \to 0$$

Звідси

$$P_n\varphi \to \varphi, \quad \varphi \in C[a,b]$$

Для відповідного інтегрального оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$ маємо $\|P_nA - A\| \to 0, n \to \infty$. Отже, можемо використовувати результати теореми (5.1) для нашого випадку.

Таким чином для достатньо великого $n \geq N$ апроксимаційне рівняння колокації $(I - P_nA)\,\varphi_n = P_nf$ має єдиний розв'язок:

$$\varphi \in C[a,b], \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M\,\|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \tag{5.12}$$

$$\varphi \in C^2[a,b], \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M\frac{1}{8}h^2\,\|\varphi''\|_\infty \tag{5.13}$$

де M є деякою константою яка залежить від ядер системи.

6 Чисельні експерименти

6.1 Приклад 1

Нехай криві Γ_1 та Γ_2 мають таке параметричне задання:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9\cos t, 0.9\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{gathered} u = x, \quad (x, y) \in D \\ f_1 = x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2 = 1 \text{ на } \Gamma_2 \end{gathered} \tag{6.2}$$

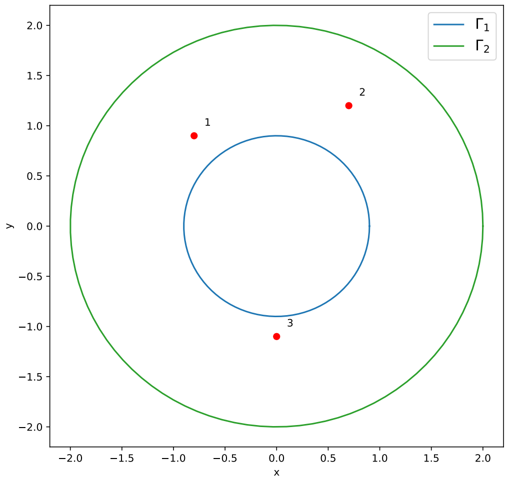

Рис. 6.1: Граничні умови Γ_1, Γ_2 для (6.1)

В Табл. 1 наведено значення абсолютної похибки розв'язку мішаної задачі (1.1) - (1.3) в деяких точках $x \in D$ в залежності від кількості точок колокації n.

n	x = (-0.8,0.9)	x = (0.7,1.2)	x = (-1, -1)
4	1.54×10^{-1}	1.57×10^{-1}	3.25×10^{-1}
8	3.57×10^{-2}	9.81×10^{-2}	7.77×10^{-2}
16	4.98×10^{-3}	2.67×10^{-2}	9.52×10^{-3}
32	1.67×10^{-4}	1.11×10^{-2}	2.11×10^{-3}

Табл. 1: Абсолютна похибка розв‘язку

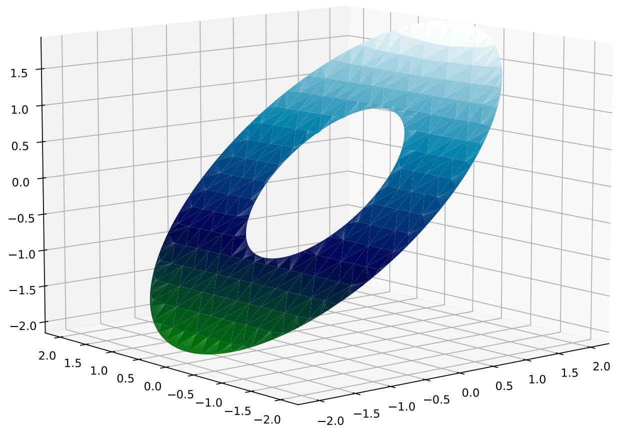

Рис. 6.2: Наближений розв'язок

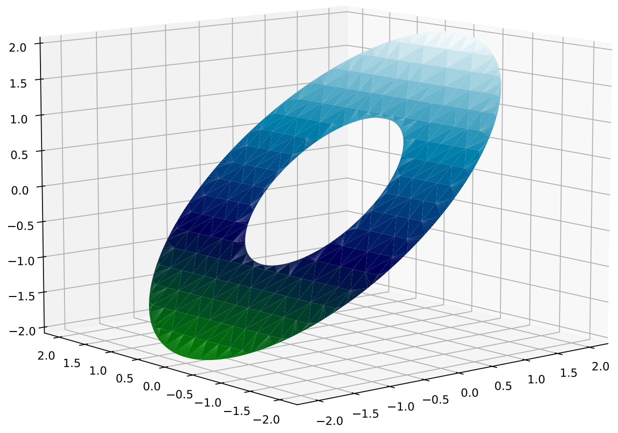

Рис. 6.3: Точний розв'язок

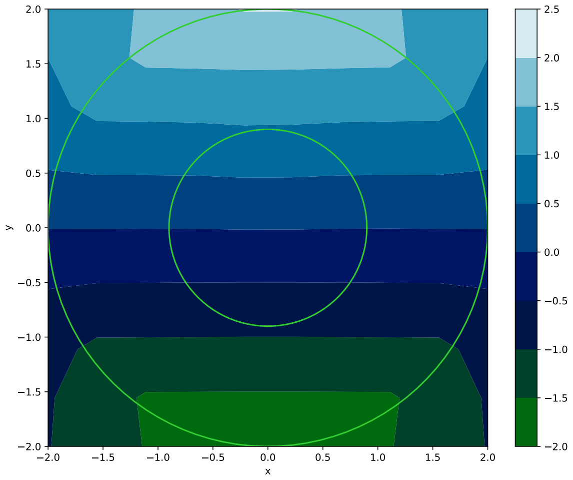

Рис. 6.4: Лінії рівня наближеного розв'язку

6.2 Приклад 2

Розглянемо інший приклад для параметричного задання (6.1).

$$\begin{gathered} u = x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D \\ f_1 = x^2 - y^2 \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2 = 2x - 2y \text{ на } \Gamma_2 \end{gathered} \tag{6.3}$$

n	x = (0.7,1.2)	x = (-0.8,0.9)	x = (-1, -1)
4	3.32×10^{-1}	7.88×10^{-2}	3.11×10^{-1}
8	1.07×10^{-1}	2.64×10^{-2}	4.91×10^{-3}
16	5.30×10^{-2}	5.76×10^{-3}	8.18×10^{-5}
32	1.44×10^{-2}	2.48×10^{-3}	1.61×10^{-5}

Табл. 2: Абсолютна похибка розв‘язку

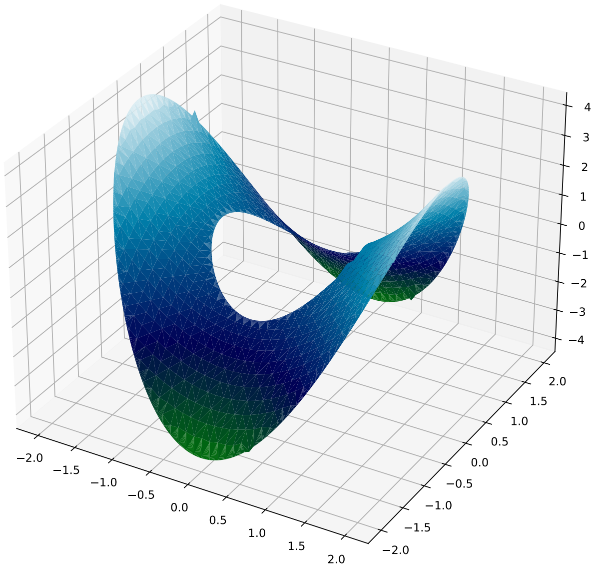

Рис. 6.5: Наближений розв’язок

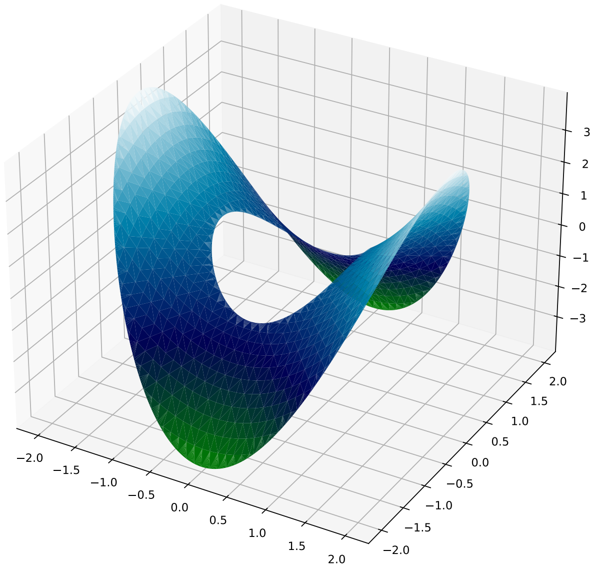

Рис. 6.6: Точний розв’язок

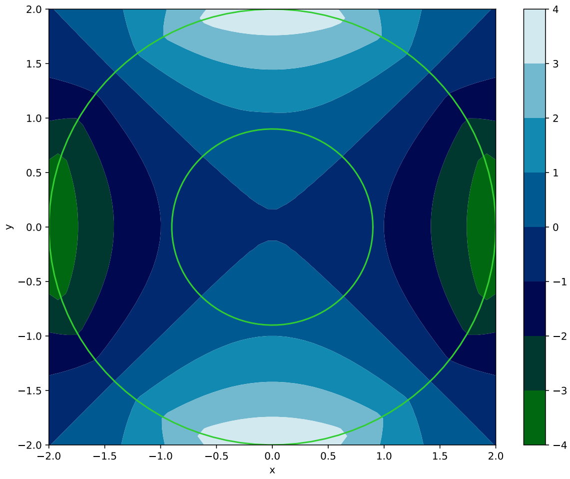

Рис. 6.7: Лінії рівня наближеного розв’язку

7 Висновок

Отже ми розглянули мішану задачу Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Чисельне розв'язування виконано методом колокацій з використання кусково лінійних базисних функцій. Чисельні експерименти підтверджують ефективність методу для розв'язання мішаної задачі для рівняння Лапласа.