# Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа

Бугрій Богдан, Середович Віктор

Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики

10 грудня 2020 р.

# Зміст

1. Мішана задача у двозв'язній області
   - Постановка задачі
   - Єдиність розв'язку
2. Зведення до системи інтегральних рівнянь
   - Пов'язані поняття. Теорія потенціалів
   - Загальний вигляд розв'язку
   - Коректність системи ІР
3. Параметризація та виділення особливостей
   - Параметризація
   - Виділення особливостей
   - Подання розв'язку в параметричному вигляді
4. Чисельне розв'язування
   - Метод колокації
   - Похибка
5. Чисельні експеременти

# Вступ

# Постановка задачі

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$, причому $D_1 \subset D_2$. Розглядатимемо двозв'язну область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$, яка має вигляд

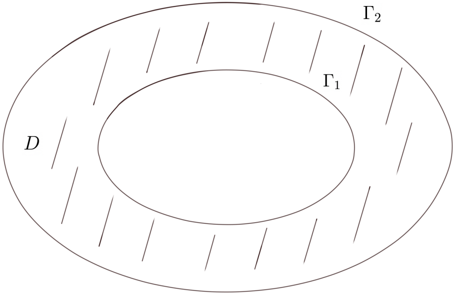


Рис.: Область $D$

***Завдання.*** Знайти функцію $u \in C^2(D) \bigcap C^1(\overline{D})$ що задовольняє рівняння (1.1) та граничні умови (1.2), (1.3)

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.1}$$
2. Граничні умови:
$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{1.3}$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називатимемо умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

# Єдиність розв'язку

## Theorem (про єдиність розв'язку)

*Нехай $\Gamma_1, \Gamma_2$ – гладкі границі, що належать класу $C^1$, обмежують двозв'язну область $D$. Тоді задача (1.1) – (1.3) має на $D$ не більше одного розв'язку.*

## Доведення.

Від супротивного. Припустимо, що $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ – два різні розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$ та застосуємо для її розв'язку першу формулу Гріна. Підставивши в отриманий вираз граничні умови та опираючись на неперервність функції $u^*$ в $\overline{D}$, легко бачити, що $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$. Отримано суперечність $\square$

# Пов'язані поняття. Теорія потенціалів

## Потенціал простого шару

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

## Похідна від потенціалу простого шару

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

# Загальний вигляд розв'язку

## Передумови

- Потенціал простого шару є гармонічною функцією
- Задача (1.1) – (1.3)зводиться до системи ІР

## Вигляд розв'язку

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D$$

# Система ІР

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) + \\ \qquad + \dfrac{1}{2}\varphi_2(x) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

# Коректність системи ІР

$$(A\varphi)(x) := \int\limits_{\Gamma_1} \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_1$$

$$(B\varphi)(x) := \int\limits_{\Gamma_2} \Phi(x,y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_1$$

$$(C\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_2$$

$$(D\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_2$$

## Система в операторному вигляді

$$\varphi - U\varphi = F \tag{2.1}$$

де $\varphi_: = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ $F := (f_1, 2f_2)^T$ $U := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$
Позначимо $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. $N(I - U) = \{0\}$, тобто оператор $(I - U)$ ін'єктивний, $(I - U)$ сюр'єктивний.

$$\forall F \in C(\Gamma) \quad \exists! \varphi \in C(\Gamma): \quad (I - U)\varphi = F$$

## Розв'язок операторного рівняння

$$\varphi = (I - U)^{-1} F$$

# Параметризація

Припустимо, що криві $\Gamma_1$ та $\Gamma_2$ задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \qquad (3.1)$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $2\pi$ періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$
Подамо систему ref в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = g_1(t) \\ \dfrac{\psi_2(t)}{|x_2'(t))|} + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases} \qquad (3.2)$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t)) \cdot |x_i'(t)|,\ g_i = f_i(x_i(t)),\ i = 1, 2;\ t \in [0, 2\pi]$

В системі (3.2) ядра мають вигляд:

$$K_{11}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}}, \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}};$$

$$K_{21}(t,\tau) = \frac{(y-x)\cdot\nu(x)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}};$$

$$K_{22}(t,\tau) = \frac{(y-x)\cdot\nu(x)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}}, \quad t \neq \tau$$

# Виділення особливостей

Подамо ядро $K_{11}$ його у вигляді:

$$K_{11}(t,\tau) = {K_{11}}^{(1)} \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + {K_{11}}^{(2)}(t,\tau)$$

$${K_{11}}^{(1)}(t,\tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad {K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\left|x_1(t)-x_1(\tau)\right|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Знайдему границю за правилом Лопіталя і в результаті отримаємо:

$${K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{\left|x_1(t)-x_1(\tau)\right|^2}, & t \neq \tau \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{e\left|x_1'(t)\right|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Знайдемо границю при $\tau \to t$

$$\lim_{\tau \to t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\[2ex] \dfrac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

# Подання розв'язку в параметричному вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau)K_1(x,\tau)d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau)K_2(x,\tau)d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра $K_1$ і $K_2$ мають вигляд:

$$K_1(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

# Метод колокації

## Розбиття та базисні функції

- $x_j = a + jh, j = 0, \ldots, n,\ h = (b-a)/n$
- $X_n-$ простір функцій, неперервних на $[a, b]$
- $l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h}, & x \in [x_{j-1}, x_j], j \geq 1 \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x \in [x_j, x_{j+1}], j \leq n-1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$

## Вигляд наближеного розв'язку

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k)} l_j(x), \quad k = 1, 2$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \left\{ \pi \dfrac{l_j(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

# Результуюча СЛАР

$$Ac = g$$

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

# Похибка

## Проекційний оператор

$$(P_n\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x_i)\, l_j(x).$$

Для $P_n\varphi$ маємо такі оцінки

$$\varphi \in C^2[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty$$
$$\varphi \in C[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq w(\varphi, h) \to 0$$

## Оцінка похибки

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M\frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty, \quad \text{для } \varphi \in C^2[a,b]$$

# Приклад 1.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9\cos t, 0.9\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ f_1(x) &= x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2(x) = 1 \text{ на } \Gamma_2 \end{aligned} \tag{5.1}$$

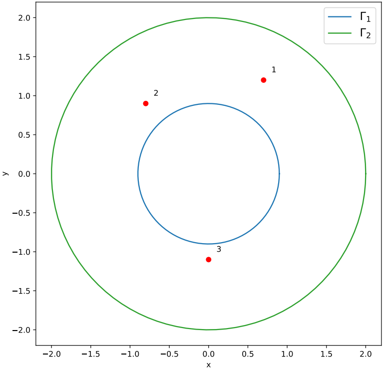


Рис.: Граничні умови $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ для 5.1

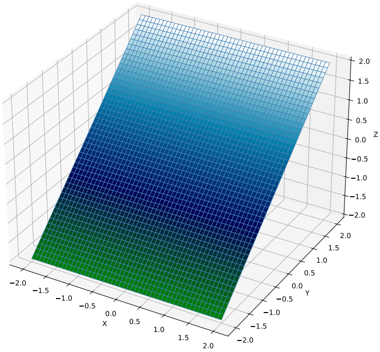


Рис.: Точний розв'язок

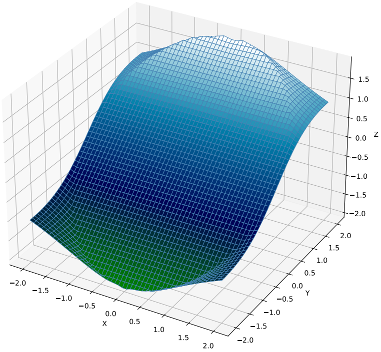


Рис.: Наближений розв'язок

| M | $x = (0.7, 1.2)$ | $x = (-0.8, 0.9)$ | $x = (0, -1.1)$ |
|---|---|---|---|
| 8 | 0.40279256 | 0.30825628 | 0.18528191 |
| 16 | 0.17905565 | 0.16061103 | 0.1116888 |
| 32 | 0.07499773 | 0.07602952 | 0.05734572 |
| 64 | 0.0337177 | 0.03639188 | 0.028495 |
| 128 | 0.01590401 | 0.01773373 | 0.01413837 |

Табл.: Абсолютна похибка розвязку для деяких $x \in D$ у випадку 5.1

# Література


- *Kress R.* Linear Integral Equations, 2nd. ed. / R. Kress. – New-York: Springer-Verlag, 1989. – 367 c.
- *Chapko R., Johansson B.T.* An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies, No. 1, 2009
- *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.