

# Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа

Бугрій Богдан, Середович Віктор

Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики

17 грудня 2020 р.

# Зміст

- 1 Мішана задача у двов'язній області
  - Постановка задачі
  - Єдиність розв'язку
- 2 Зведення до системи інтегральних рівнянь
  - Пов'язані поняття. Теорія потенціалів
  - Загальний вигляд розв'язку
- 3 Параметризація та виділення особливостей
  - Параметризація
  - Виділення особливостей
  - Подання розв'язку в параметричному вигляді
- 4 Чисельне розв'язування
  - Метод колокації
  - Похибка
- 5 Чисельні експерименти

## Завдання

Знайти наближений розв'язок мішаної задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області методом ІР у випадку гладких границь, заданих параметрично. Використати потенціал простого шару. Чисельне розв'язування ІР здійснити методом колокації з використанням кусково-лінійних базисних функцій.

## Область визначення

Нехай  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_1 \in C^2$  та  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_2 \in C^2$ , причому  $D_1 \subset D_2$ . Розглядатимемо двозв'язну область  $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$ , яка має вигляд

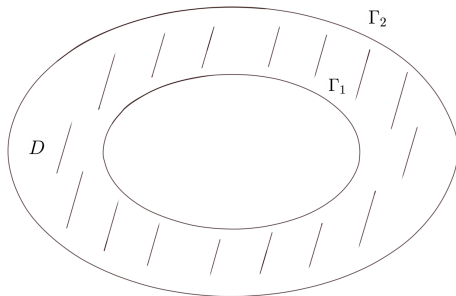


Рис.: Область  $D$

## Постановка задачі

Знайти функцію  $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$  що задовольняє рівняння (1.1) та граничні умови (1.2), (1.3)

❶ Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1.1)$$

❷ Граничні умови:

$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (1.3)$$

де  $\nu = \nu(x)$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називатимемо умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

# Єдиність розв'язку

## Теорема

Нехай  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – гладкі границі, що належать класу  $C^1$ , обмежують двозв'язну область  $D$ . Тоді задача (1.1) – (1.3) має на  $D$  не більше одного розв'язку.

## Доведення

- 1  $\exists u_1, u_2 \in C^2(\bar{D}) : u_1 \neq u_2$
- 2  $u^* = u_1 - u_2$
- 3 Застосувати першу формулу Гріна
- 4 Підставити граничні умови

## Пов'язані поняття. Теорія потенціалів

### Потенціал простого шару

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

### Похідна від потенціалу простого шару

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D$$

# Загальний вигляд розв'язку

## Передумови

- Потенціал простого шару є гармонічною функцією
- Задача (1.1) – (1.3) зводиться до системи IP

## Вигляд розв'язку

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D$$



# Система ІР

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) + \\ \quad + \frac{1}{2} \varphi_2(x) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{array} \right.$$

# Параметризація

Припустимо, що криві  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \quad (3.1)$$

де  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $2\pi$  періодична  $\forall t |x'(t)| > 0$

Подано систему в параметричному вигляді

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \frac{\psi_2(t)}{|x'_2(t)|} + \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

де  $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x'_i(t)|$ ,  $g_i = f_i(x_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ ;  $t \in [0, 2\pi]$

В системі (3.2) ядра мають вигляд:

$$K_{11}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} , \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} ;$$

$$K_{21}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} ;$$

$$K_{22}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} , \quad t \neq \tau$$

## Виділення особливостей

Подано ядро  $K_{11}$  його у вигляді:

$$K_{11}(t, \tau) = K_{11}^{(1)} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau)$$

$$K_{11}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Знайдемо границю за правилом Лопіталя і в результаті отримаємо:

$$K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Знайдемо границю при  $\tau \rightarrow t$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

## Подання розв'язку в параметричному вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра  $K_1$  і  $K_2$  мають вигляд:

$$K_1(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

# Метод колокації

## Розбиття та базисні функції

- $x_j = a + jh, j = 0, \dots, n, h = (b - a)/n$
- $X_n$  – простір функцій, неперервних на  $[a, b]$
- $l_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h}, & x \in [x_{j-1}, x_j], j \geq 1 \\ \frac{x_{j+1} - x}{h}, & x \in [x_j, x_{j+1}], j \leq n - 1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases}$

## Вигляд наближеного розв'язку

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} l_j(x), \quad k = 1, 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \int_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \\ \quad + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \left\{ \pi \frac{l_j(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} l_j(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{array} \right.$$



## Результуюча СЛАР

$$Ac = g$$

$$\begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

# Похибка

## Проекційний оператор

$$(P_n \varphi)(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(x_j) l_j(x).$$

Для  $P_n \varphi$  маємо такі оцінки

$$\varphi \in C^2[a, b], \quad \|P_n \varphi - \varphi\|_{\infty} \leq \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_{\infty}$$

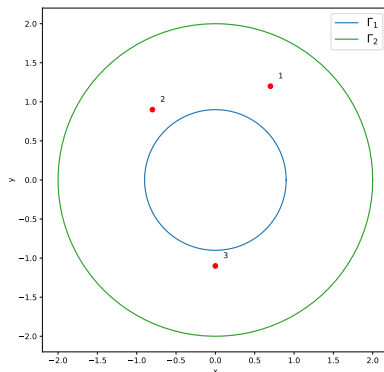
$$\varphi \in C[a, b], \quad \|P_n \varphi - \varphi\|_{\infty} \leq w(\varphi, h) \rightarrow 0$$

## Оцінка похибки

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty} \leq M \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_{\infty}, \quad \text{для } \varphi \in C^2[a, b]$$

## Приклад 1.

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9 \cos t, 0.9 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ f_1(x) &= x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2(x) = 1 \text{ на } \Gamma_2\end{aligned}\tag{5.1}$$

Рис.: Граничні умови  $\Gamma_1, \Gamma_2$  для 5.1

<b>M</b>	$x = (0.7, 1.2)$	$x = (-0.8, 0.9)$	$x = (0, -1.1)$
8	0.40279256	0.30825628	0.18528191
16	0.17905565	0.16061103	0.1116888
32	0.07499773	0.07602952	0.05734572
64	0.0337177	0.03639188	0.028495
128	0.01590401	0.01773373	0.01413837

Табл.: Абсолютна похибка розв'язку для деяких  $x \in D$  у випадку 5.1

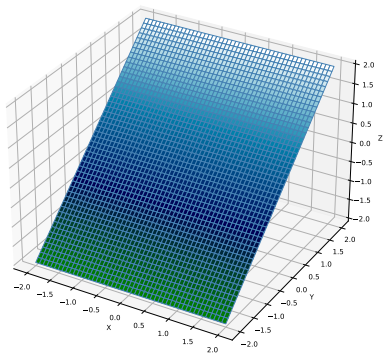


Рис.: Точний розв'язок

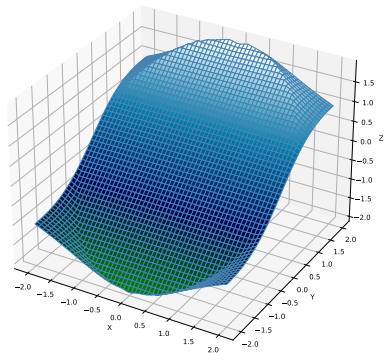





Рис.: Наближений розв'язок

-  *Kress R.* Linear Integral Equations, 2nd. ed. / R. Kress. – New-York: Springer-Verlag, 1989. – 367 c.
-  *R. Chapko* An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies / R. Chapko, B.T. Johansson – J. Numer. Appl. Math. No. 97, 2009, – pp. 10-25
-  *R. Chapko* On the numerical solution of a cauchy problem for an elastostatic equation / R. Chapko, O. Sobeyko – Ser. Appl. Math. Inform - 2009. Is. 15. – pp. 135-148