

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

## Звіт

на тему:

*"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для  
рівняння Лапласа"*

Виконали:

студенти IV курсу групи ПМп-41  
напрямку підготовки (спеціальності)  
113 – "Прикладна математика"

Бугрій Б.О.

Середович В.В.

Перевірили:

проф. Хапко Р.С.

ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>1 Постановка задачі</b>	<b>4</b>
<b>2 Коректність задачі</b>	<b>5</b>
2.1 Єдиність розв’язку задачі . . . . .	5
<b>3 Зведення до інтегрального рівняння</b>	<b>6</b>
3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару . . . . .	6
3.2 Загальний вигляд розв’язку . . . . .	7
<b>4 Параметризація</b>	<b>8</b>
<b>5 Чисельне розв’язування</b>	<b>11</b>
5.1 Метод колокації . . . . .	11
5.2 Дискретизація . . . . .	12
5.3 Похибка . . . . .	13
<b>6 Чисельні експерименти</b>	<b>15</b>
6.1 Приклад 1 . . . . .	15
6.2 Приклад 2 . . . . .	16
<b>7 Висновок</b>	<b>18</b>

# Вступ

Сьогодні існує багато нетривіальних задач які для ефективного вирішення потребують застосування методів математичних досліджень. Зокрема, задачі механіки матеріалів та динаміки рідин часто зводяться до крайових задач для рівняння Лапласа в багатозв'язних областях. Серед них добревідомою є мішана задача Діріхле-Неймана, якою можна описати такі процеси як теплообмін, вплив магнітного поля та багато інших. На жаль, більшість з них не можна розв'язати аналітично, тому для вирішення таких проблем доцільно застосовувати чисельні методи.

Серед них одними з найефективніших є методи інтегральних рівнянь, оскільки вони дозволяють зменшити розмірність задачі та дискретизувати її, не докладаючи додаткових зусиль. За допомогою таких методів вдається досягти високого порядку збіжності на достатньо гладких областях з  $\mathbb{R}^2$ , незалежно від їх форми.

Метою даної роботи є застосування одного з таких методів, а саме методу колокації, щоб розв'язати мішану задачу Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Це проекційний метод який використовує апроксимацію функції на деяких обмежених підобластях.

В наступних розділах ми розглянемо такі етапи розв'язання задачі як доведення єдиності та пошук загального вигляду розв'язку, зведення до системи інтегральних рівнянь, параметризація та виділення особливостей і безпосереднє чисельне розв'язування. На конкретних прикладах ми продемонструємо ефективність такого підходу для пошуку наближеного розв'язку.

# 1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю  $D \subset \mathbb{R}^2$  з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої  $\Gamma_1$  та зовнішньої  $\Gamma_2$ .

Нехай  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_1 \subset C^2$  та  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_2 \subset C^2$ , причому  $D_1 \subset D_2$ . Тоді двозв'язна область  $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$  матиме вигляд:

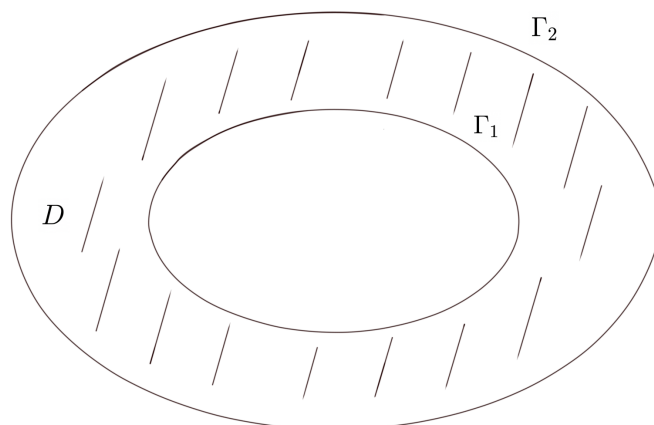


Рис. 1.1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції  $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$  що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1.1)$$

2. Граничні умови:

$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \quad (1.3)$$

де  $\nu = \nu(x)$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називають умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

## 2 Коректність задачі

### 2.1 Єдиність розв'язку задачі

**Теорема 2.1** Нехай  $D$  - область з межею  $\partial D \in C^1$  і  $\vec{\nu}$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі  $\partial D$ . Тоді для  $u \in C^1(\overline{D})$  і  $v \in C^2(\overline{D})$  має місце перша формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v + \text{grad} u \cdot \text{grad} v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \quad (2.1)$$

*Доведення.* Див. [1].

**Теорема 2.2** Нехай  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - гладкі границі, що належать класу  $C^1$ , обмежують двозв'язну область  $D$ . Тоді задача (1.1) – (1.3) має на  $D$  не більше одного розв'язку.

*Доведення.* Від супротивного. Нехай  $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$  – два різні розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Запишемо цю задачу для функції  $u^* = u_1 - u_2$ :

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 2.1 при  $u = v = u^*$ :

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = \int_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут  $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Так як  $\Delta u^* = 0$  в  $D$ ,  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$  на  $\Gamma_2$ , то отримуємо рівність

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що  $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$  на всій області  $D$ , тобто  $u^* = \text{const}$ . Функція  $u^*$  неперервна в  $\overline{D}$  і  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1 \subset \overline{D}$ , отже  $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ , що суперечить початковому припущенню. ■

### 3 Зведення до інтегрального рівняння

#### 3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

**Означення 3.1** Нехай  $D \subset \mathbb{R}^2$  – замкнена обмежена область. Функція  $u \in C^2(D)$ , що набуває дійсних значень, називається гармонічною, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$  в  $D$ .

**Означення 3.2** Функція

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \quad (3.1)$$

визначена на  $x \neq y$ ,  $x \in \mathbb{R}^2$  називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого  $y \in \mathbb{R}^2$  вона є гармонічною в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ .

**Означення 3.3** Нехай функція  $\varphi \in C(\partial D)$ , тоді

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.2)$$

називають потенціалом простого шару з густиною  $\varphi$ .

**Теорема 3.4** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$  і  $\varphi \in C(\partial D)$ . Тоді потенціал простого шару  $u$  з густиною  $\varphi$  неперервний на  $\mathbb{R}^2$ . На границі області справджується рівність

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (3.3)$$

де інтеграл існує і розуміється як невластний.

*Доведення.* Див. [1].

**Теорема 3.5** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$ . Тоді для потенціалу простого шару  $u$  з неперервною густиною  $\varphi$  маємо, що

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (3.4)$$

де

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \text{grad } u(x \pm hv(x)) \quad (3.5)$$

слід розуміти в сенсі рівномірної збіжності на  $\partial D$  і інтеграл існує як невластний.

*Доведення.* Див. [1].

### 3.2 Загальний вигляд розв'язку

Задача (1.1) – (1.3) зводиться до системи інтегральних рівнянь з двома невідомими функціями. Потенціал простого шару є гармонічною функцією, а отже їх сума також гармонічна. Тому розв'язок задачі (1.1) – (1.3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \quad (3.6)$$

з невідомими густинами  $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$ ,  $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$ .

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \frac{1}{2} \varphi_2(x) + \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) + \\ \quad + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Потенціал простого шару не має стрибка, але він може виникнути при диференціюванні. В другій частині другого рівняння точка інтегрування та точка спостереження лежать на одній кривій, що і породжує стрибок. Варто звернути увагу на те, що стрибок розглядається на зовнішній границі (границі Неймана), отже він буде додатнім.

## 4 Параметризація

Припустимо, що криві  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

де  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $2\pi$  періодична  $\forall t |x'_i(t)| > 0$ .

Нехай  $\nu$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої  $\Gamma_i$ , заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left( \frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right) \quad (4.2)$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального розв'язку

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де  $r = |x - y|$ , отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \quad (4.3)$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію (4.1) та вище наведенні перетворення подамо систему (3.7) у параметризованому вигляді.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ \frac{\psi_2(t)}{2|x'_2(t)|} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = g_2(t) \end{cases} \quad (4.4)$$

де  $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x'_i(t)|$ ,  $g_i = f_i(x_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ ;  $t \in [0, 2\pi]$ .

Ядра матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Big|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}}, \quad t \neq \tau \\ K_{12}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \Big|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} \\ K_{21}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Big|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} \\ K_{22}(t, \tau) &= \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Big|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}}, \quad t \neq \tau \end{aligned}$$



В ядрах  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  внаслідок параметризації точки  $x$  та  $y$  знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при  $t = \tau$ .

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з  $K_{11}$ :

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} \end{aligned}$$

Отже, ядро  $K_{11}$  можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t, \tau) = K_{11}^{(1)} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau)$$

де ядра  $K_{11}^{(1)}$  і  $K_{11}^{(2)}$  матимуть вигляд:

$$K_{11}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб доозначити  $K_{11}^{(2)}$ , знайдемо границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{\tau \rightarrow t} K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2} = \ln \frac{\frac{4}{e} \frac{(t - \tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2 (t - \tau)^2} = \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$$K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_1(t) - x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \frac{1}{2} \ln \frac{1}{e |x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases} \quad (4.5)$$

Доозначуємо ядро  $K_{22}$ . Знайдемо границю при  $\tau \rightarrow t$

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\partial \Phi(x_2(t), x_2(\tau))}{\partial \nu(t)} = \frac{x_2''(\tau) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t, \tau) = \begin{cases} \frac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t = \tau \\ \frac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t \neq \tau \end{cases} \quad (4.6)$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}^{(1)}(t, \tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau) \right\} d\tau + \\ \quad + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \frac{\psi_2(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \quad (4.7)$$

Використовуючи параметризацію (4.1) можемо записати розв'язок мішаної задачі (3.6) в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D \quad (4.8)$$

де відповідні ядра  $K_1$  і  $K_2$  мають вигляд:

$$K_1(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x, \tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|} \quad (4.9)$$

## 5 Чисельне розв'язування

### 5.1 Метод колокації

Метод колокації належить до проекційних методів розв'язування лінійних інтегральних рівнянь. Ми будемо використовувати колокацію на основі поділу області  $D$  на деякі підобласті, на яких шукана функція апроксимується алгебраїчними поліномами невисокого степеня, в нашому випадку кусково лінійними.

Нехай

$$t_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, n \quad (5.1)$$

це рівновіддалений поділ відрізка  $[a, b]$  з кроком  $h = (b - a)/n$ .  $X_n$  – простір функцій, неперервних на  $[a, b]$ , звуження яких на підінтервал  $[t_{j-1}, t_j]$  – лінійна функція.

Очевидно, що  $\dim X_n = n + 1$  і базис Лагранжа в цьому просторі має вигляд

$$\ell_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{h}, & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j \geq 1 \\ \frac{t_{j+1} - t}{h}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j \leq n - 1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad (5.2)$$

з очевидним уточненням для  $\ell_0$  та  $\ell_n$ . Шукані функції з системи (4.7) подамо у вигляді суми

$$\tilde{\psi}_k(t) = \sum_{j=1}^n c_j^{(k)} \ell_j(t), \quad k = 1, 2 \quad (5.3)$$

Підставивши їх у систему (4.7) отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \\ + \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \left\{ \pi \frac{\ell_j(t)}{|x_2'(t)|} + \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

Цю систему необхідно протабулювати на основі рівновіддаленого поділу (5.1) по змінній  $t$  щоб знайти відповідні значення векторів  $c^{(1)}$  і  $c^{(2)}$ . Подамо отримані результати в зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_{11} \\ \vdots \\ 2\pi g_{1n} \\ 2\pi g_{21} \\ \vdots \\ 2\pi g_{2n} \end{pmatrix}$$

де

$$G_{ji}^{(1)} = \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t_i, \tau) d\tau \quad G_{ji}^{(2)} = \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(3)} = \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t_i, \tau) d\tau \quad G_{ji}^{(4)} = \pi \frac{\ell_j(t_i)}{|x_2'(t_i)|} + \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t_i, \tau) d\tau$$

Опираючись на властивості базису (5.2), інтеграли в системі (5.4) можна подати у спрощеному вигляді:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K(t_i, \tau) d\tau &= \frac{1}{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\tau - t_{j-1}) K(t_i, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{h} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{j+1} - \tau) K(t_i, \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.5)$$

де  $K$  – одне із ядер.

Тоді отримаємо такий вигляд наближеного розв'язку:

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n c_j^{(1)} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_1(x, \tau) d\tau + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n c_j^{(2)} \int_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_2(x, \tau) d\tau, \quad x \in D \end{aligned} \quad (5.6)$$

## 5.2 Дискретизація

Метод колокації є частково дискретним методом, що означає що інтеграли в системі рівнянь можемо обчислити точно. На жаль, це не завжди вдається, тому в даній роботі ми дискретизуємо метод використавши квадратури.

Для обчислення ядра  $K_{11}$  будемо використовувати відповідну квадратурну формулу. Для цього задаємо рівномірне розбиття:

$$t_i := i\pi/M, \quad i = 0, \dots, 2M-1, M \in \mathbb{N}$$

Квадратурна формула буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f(t_j) \quad (5.7)$$

з ваговою функцією

$$R_j(t) := -\frac{1}{2M} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_j) + \frac{\cos(t-t_j)}{M} \right\} \quad (5.8)$$

Решта ядер не містять у собі особливості, тим більше легко бачити що вони є щонайменше двічі неперервно диференційовні на заданих кривих, отже доцільно буде для обчислення інтегралів застосувати квадратури трапецій:

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx h \left( \frac{f(0) + f(2\pi)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i) \right). \quad (5.9)$$

### 5.3 Похибка

**Теорема 5.1** *Нехай  $A : X \rightarrow X$  - обмежений лінійний оператор у банаховому просторі  $X$  та  $(I - A) : X \rightarrow X$  - ізоморфізм. Припустимо, що  $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Тоді для достатньо великого  $n \geq \mathbb{N}$  оператори  $(I - P_n A)^{-1} : X \rightarrow X$  існують і є рівномірно обмежені. Для точного і наближеного розв'язку  $\varphi - \varphi_n = (I - P_n A)^{-1} (\varphi - P_n \varphi)$  має місце двостороння оцінка*

$$\frac{1}{\|I - P_n A\|} \|\varphi - P_n \varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq \|(I - P_n A)^{-1}\| \|\varphi - P_n \varphi\| \quad (5.10)$$

Проекційний оператор визначається як

$$(P_n \varphi)(x) = \sum_{j=0}^n \varphi(x_j) l_j(x). \quad (5.11)$$

Для оператора  $P_n \varphi$  маємо такі оцінки похибки

$$\begin{aligned} \varphi \in C^2[a, b], \quad & \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty \\ \varphi \in C[a, b], \quad & \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \leq w(\varphi, h) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Звідси

$$P_n \varphi \rightarrow \varphi, \quad \varphi \in C[a, b]$$

Для відповідного інтегрального оператора  $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  маємо  $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Отже, можемо використовувати результати теореми (5.1) для нашого випадку.

Таким чином для достатньо великого  $n \geq N$  апроксимаційне рівняння колокації  $(I - P_n A) \varphi_n = P_n f$  має єдиний розв'язок:

$$\varphi \in C[a, b], \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \quad (5.12)$$

$$\varphi \in C^2[a, b], \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \frac{1}{8} h^2 \|\varphi''\|_\infty \quad (5.13)$$

де  $M$  є деякою константою яка залежить від ядер системи.

## 6 Чисельні експерименти

### 6.1 Приклад 1

Нехай криві  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  мають таке параметричне задання:

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{x_1(t) = (0.9 \cos t, 0.9 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{x_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\}\end{aligned}\quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}u &= x, \quad (x, y) \in D \\ f_1 &= x \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2 = 1 \text{ на } \Gamma_2\end{aligned}\quad (6.2)$$

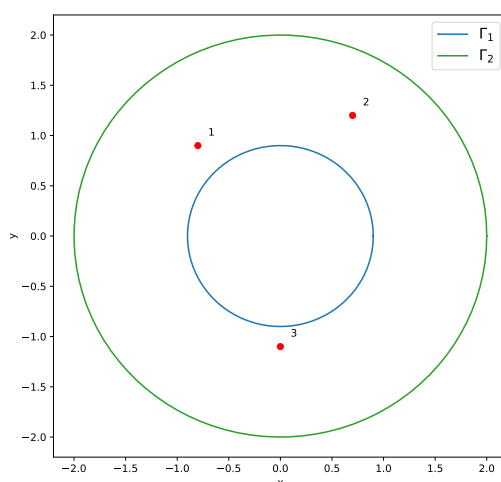


Рис. 6.1: Граничні умови  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  для (6.1)

В Табл. 1 наведено значення абсолютної похибки розв'язку мішаної задачі (1.1) - (1.3) в деяких точках  $x \in D$  в залежності від кількості точок колокації  $n$ .

n	$x = (-0.8, 0.9)$	$x = (0.7, 1.2)$	$x = (-1, -1)$
4	$1.54 \times 10^{-1}$	$1.57 \times 10^{-1}$	$3.25 \times 10^{-1}$
8	$3.57 \times 10^{-2}$	$9.81 \times 10^{-2}$	$7.77 \times 10^{-2}$
16	$4.98 \times 10^{-3}$	$2.67 \times 10^{-2}$	$9.52 \times 10^{-3}$
32	$1.67 \times 10^{-4}$	$1.11 \times 10^{-2}$	$2.11 \times 10^{-3}$

Табл. 1: Абсолютна похибка розв'язку

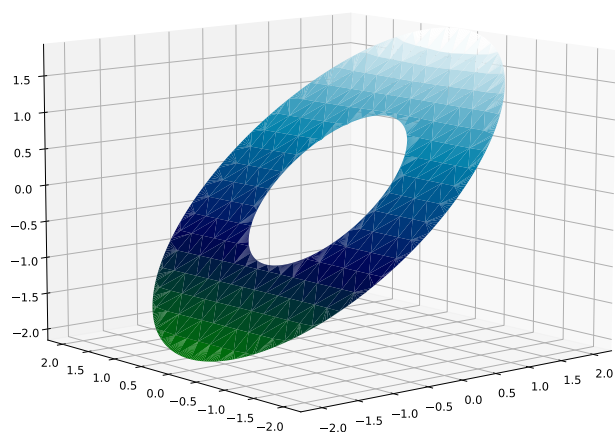


Рис. 6.2: Наближений розв'язок

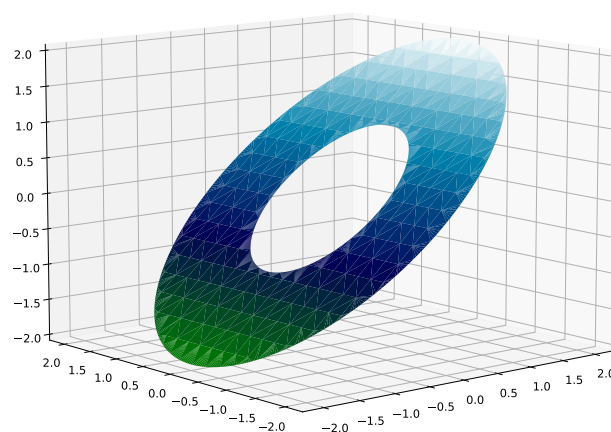


Рис. 6.3: Точний розв'язок

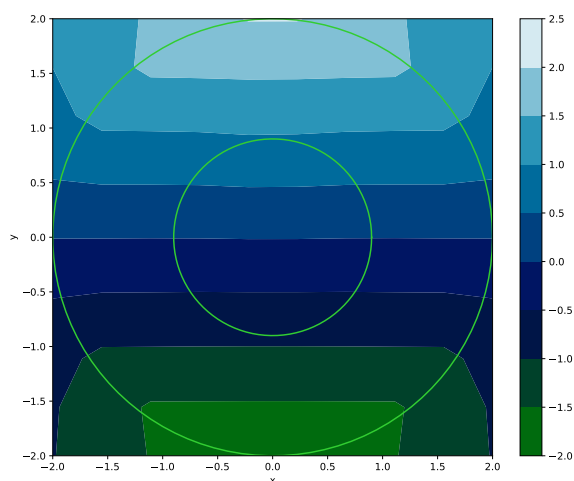


Рис. 6.4: Лінії рівня наближеного розв'язку

## 6.2 Приклад 2

Розглянемо інший приклад для параметричного задання (6.1).

$$\begin{aligned}
 u &= x^2 - y^2, \quad (x, y) \in D \\
 f_1 &= x^2 - y^2 \text{ на } \Gamma_1 \quad \text{і} \quad f_2 = 2x - 2y \text{ на } \Gamma_2
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$



n	$x = (0.7, 1.2)$	$x = (-0.8, 0.9)$	$x = (-1, -1)$
4	$3.32 \times 10^{-1}$	$7.88 \times 10^{-2}$	$3.11 \times 10^{-1}$
8	$1.07 \times 10^{-1}$	$2.64 \times 10^{-2}$	$4.91 \times 10^{-3}$
16	$5.30 \times 10^{-2}$	$5.76 \times 10^{-3}$	$8.18 \times 10^{-5}$
32	$1.44 \times 10^{-2}$	$2.48 \times 10^{-3}$	$1.61 \times 10^{-5}$

Табл. 2: Абсолютна похибка розв'язку

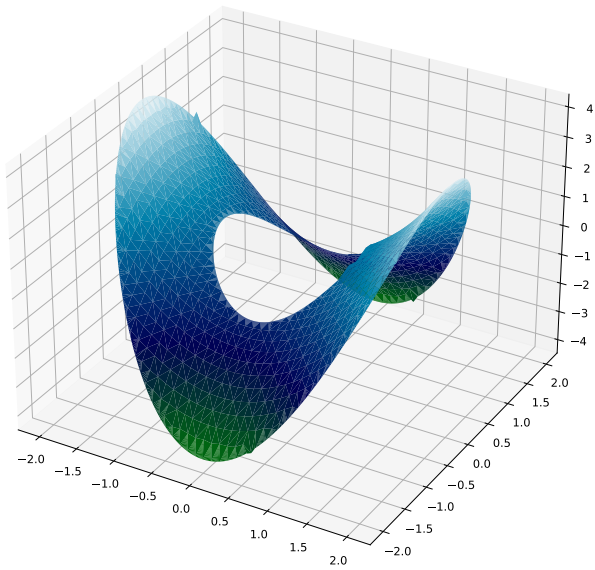


Рис. 6.5: Наближений розв'язок

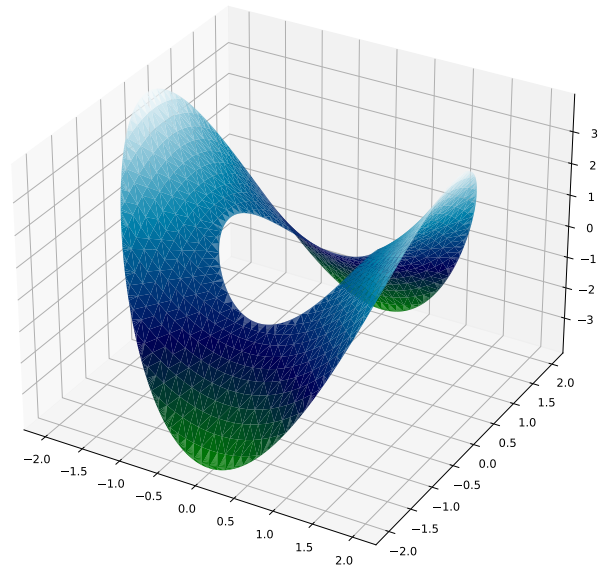


Рис. 6.6: Точний розв'язок

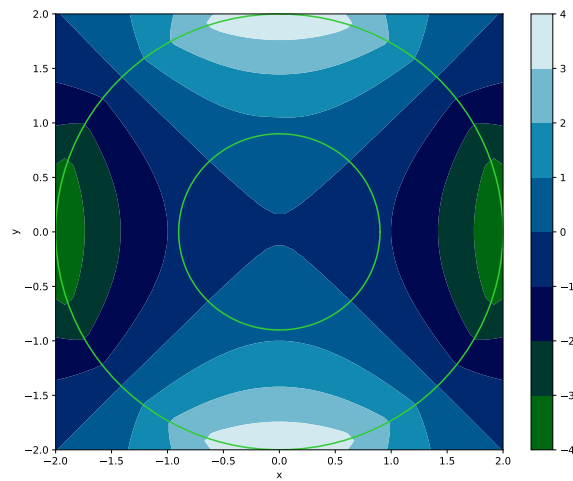


Рис. 6.7: Лінії рівня наближеного розв'язку

## 7 Висновок

У даній роботі ми застосували метод колокації щоб розв'язати мішану задачу Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області. За допомогою параметризації нам вдалось зменшити розмірність задачі, а позбувшись особливостей в ядрах ми змогли застосувати цей проекційний метод інтегральних рівнянь для знаходження наближеного розв'язку.

Використавши кусково лінійні базисні функції, а саме поліноми першого степеня, ми отримали квадратичну збіжність. Чисельні експерименти підтверджують теоретичні оцінки похибки та показують ефективність методу для розв'язання мішаної задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа.

## Бібліографія

- [1] R. Kress. *Linear Integral Equations*. Applied Mathematical Sciences. 2012.
- [2] Chapko R. Johansson B.T. *An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies*. J. Numer. Appl. Math. No. 97, 2009, – pp. 10-25. 2009.
- [3] R. Chapko O. Sobeyko. *On the numerical solution of a cauchy problem for an elastostatic equation*. Ser. Appl. Math. Inform - 2009. Is. 15. – pp. 135-148. 2009.
- [4] Kendall E. Atkinson. *The numerical solution of integral equations of the second kind*. 2009.