

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Звіт

на тему:

*"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для
рівняння Лапласа"*

Виконали:

студенти 4-го курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – "Прикладна математика"

Бугрій Б.О.

Середович В.В.

Перевірив:

ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ	3
1 Постановка задачі	3
2 Коректність задачі	4
2.1 Єдиність розв'язку задачі	4
3 Зведення до інтегрального рівняння	5
4 Коректність інтегрального рівняння	5
5 Чисельне розв'язування	5
5.1 Похибка	5
6 Якийсь приклад	5

Вступ

літературний огляд
хто розглядав розв'язування цієї задачі
які процеси описує
мета - розв'язати якимось методом
огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}^2$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2 .

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_1 \in C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмежена область з гладкою границею $\Gamma_2 \in C^2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$ матиме вигляд:

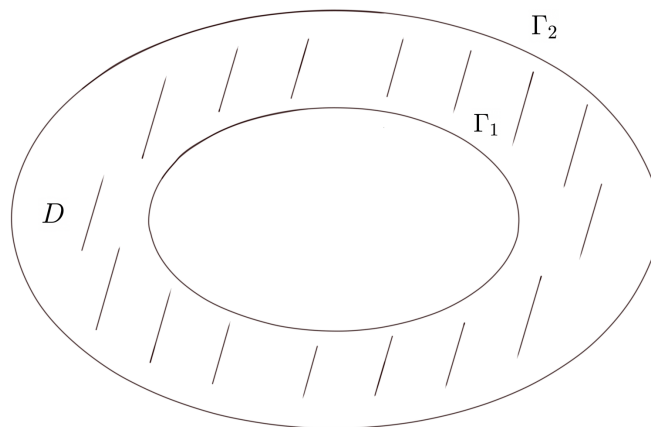


Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cup C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1)$$

2. Граничні умови:

$$u = f_1, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \quad (3)$$

де $v = v(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (2) є умовою Діріхле, а (3) є умовою Неймана.

2 Коректність задачі

...

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 1. Нехай D - область з межею $\partial D \in C^1$ і $\vec{\nu}$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂D . Тоді для $u \in C^1(\bar{D})$ і $v \in C^2(\bar{D})$ має місце перша формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v + \text{grad} u \cdot \text{grad} v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

і для $u, v \in C^2(\bar{D})$ має місце друга формула Гріна

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

Доведення. Посилання на Креса.

Теорема 2. Нехай Γ_1, Γ_2 - гладкі границі, що належать класу C^1 , обмежують двозв'язну (а може ні?) область D . Тоді задача (1) - (3) має на D (може замикання?) не більше одного розв'язку.

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\bar{D}) : u_1 \neq u_2$ - два різні розв'язки задачі (1) - (3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 1 при $u = v = u^*$:

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = \int_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ (чи ні?) на D , $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2 , то отримуємо рівність

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D , тобто $u^* = \text{const}$. Функція u^* неперервна на \bar{D} і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \bar{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

4 Коректність інтегрального рівняння

5 Чисельне розв'язування

5.1 Похибка

6 Якийсь приклад