Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної матаматики

Звіт

на тему:

"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа"

Виконали:
студенти IV курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – "Прикладна математика"
Бугрій Б.О.
Середович В.В.

Перевірили:
проф. Хапко Р.С.
ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ

літературний огляд
хто розглядав розв'язування цієї задачі
які процеси описує
мета - розв'язати якимось методом
огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}^2$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2.

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$, причому $D_1 \subset D_2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$ матиме вигляд:

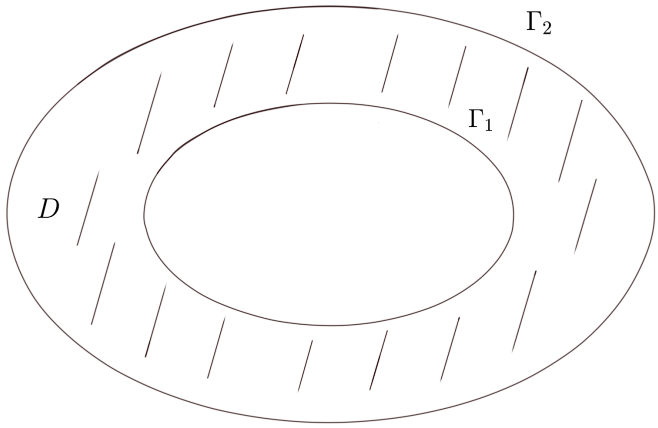

Рис. 1.1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1.1}$$

2. Граничні умови:
$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{1.2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{1.3}$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (1.2) називають умовою Діріхле, а (1.3) – умовою Неймана.

2 Коректність задачі

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 2.1 *Нехай D - область з межею $\partial D \in C^1$ і $\overrightarrow{\nu}-$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂D. Тоді для $u \in C^1(\overline{D})$ і $v \in C^2(\overline{D})$ має місце перша формула Гріна*

$$\int\limits_D (u\Delta v + gradu \cdot gradv)dx = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds$$

Доведення. Див. [3].

Теорема 2.2 *Нехай Γ_1, Γ_2 – гладкі границі, що належать класу C^1, обмежують двозв'язну область D. Тоді задача (1.1) – (1.3) має на D не більше одного розв'язку.*

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ – два різні розв'язки задачі (1.1) – (1.3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 2.1 при $u = v = u^*$:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = \int\limits_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int\limits_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ в D, $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2, то отримуємо рівність

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D, тобто $u^* = \mathrm{const}$. Функція u^* неперервна в $\overline{D}$ і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \overline{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення 3.1 *Нехай* $D \subset \mathbb{R}^2$ *– замкнена обмежена область. Функція* $u \in C^2(D)$, *що набуває дійсних значень, називається гармонічною, якщо вона задовольняє рівняння Лапласа* $\delta u = 0$ *в* D.

Означення 3.2 *Функція*

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \tag{3.1}$$

визначена на $x \neq y$, $x \in \mathbb{R}^2$ *називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого* $y \in \mathbb{R}^2$ *вона є гармонічною в* $\mathbb{R}^2 \backslash \{y\}$.

Означення 3.3 *Нехай функція* $\varphi \in C(\partial D)$, *тоді*

$$u(x) := \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \partial D \tag{3.2}$$

називають потенціалом простого шару з густиною φ.

Теорема 3.4 *Нехай* ∂D *належить класу* C^2 *і* $\varphi \in C(\partial D)$. *Тоді потенціал простого шару* u *з густиною* φ *неперервний на* $\mathbb{R}^2$. *На границі області справджується рівність*

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x, y)ds(y), \quad x \in \partial D \tag{3.3}$$

де інтеграл існує і розуміється як невласний.

Доведення. Див. [3].

Теорема 3.5 *Нехай* ∂D *належить класу* C^2. *Тоді для потенціалу простого шару* u *з неперервною густиною* φ *маємо, що*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial v}(x) := \lim_{h \to +0} v(x) \cdot \operatorname{grad} u(x \pm hv(x))$$

слід розуміти в сенсі рівномірної збіжності на ∂D *і інтеграл існує як невласний.*

Доведення. Див. [3].

3.2 Загальний вигляд розв'язку

Задача (1.1) – (1.3) зводиться до системи інтегральних рівнянь з двома невідомими функціями. Потенціал простого шару є гармонічною функцією, а отже їх сума також гармонічна. Тому розв'язок задачі (1.1) – (1.3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D \tag{3.4}$$

з невідомими густинами $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$.

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \frac{1}{2}\varphi_2(x) + \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) + \\ \qquad\qquad + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{3.5}$$

Потенціал простого шару не має стрибка, але він може виникнути при диференціюванні. В другій частині другого рівняння точка інтегрування та точка спостереження лежать на одній кривій, що і породжує стрибок. Варто звернути увагу на те, що стрибок розглядається на зовнішній границі (границі Неймана), отже він буде додатнім.

4 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \tag{4.1}$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$.

Нехай ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_i, заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left(\frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right) \tag{4.2}$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального роз'вязку

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де $r = |x - y|$, отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \tag{4.3}$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію (4.1) та вище наведенні перетворення подамо систему (3.5) у параметризованому вигляді.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ \dfrac{\psi_2(t)}{|x'_2(t))|} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases} \tag{4.4}$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t))|x'_i(t)|,\ g_i = f_i(x_i(t)),\ i = 1, 2;\ t \in [0, 2\pi]$.

Ядра матимуть вигляд:

$$K_{11}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} , \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} ;$$

$$K_{21}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} ;$$

$$K_{22}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} , \quad t \neq \tau$$

В ядрах K_{12}, K_{21} внаслідок параметризації точки x та y знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку K_{11}, K_{22} обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при $t = \tau$.

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з K_{11}:

$$K_{11}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}$$

Отже, ядро K_{11} можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t,\tau) = K_{11}{}^{(1)}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + K_{11}{}^{(2)}(t,\tau)$$

де ядра $K_{11}{}^{(1)}$ і $K_{11}{}^{(2)}$ матимуть вигляд:

$$K_{11}{}^{(1)}(t,\tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб доозначити $K_{11}{}^{(2)}$, знайдему границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{\tau\to t} K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) = \lim_{\tau\to t}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2} = \ln\frac{\frac{4}{e}\frac{(t-\tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2(t-\tau)^2} = \ln\frac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$$K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Доозначуємо ядро K_{22}. Знайдемо границю при $\tau \to t$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\partial\Phi(x_2(t),x_2(\tau))}{\partial\nu(t)} = \frac{x_2''(\tau)\cdot\nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризоване подання ядра:

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t = \tau \\ \\ \dfrac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t \neq \tau \end{cases}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}{}^{(1)}(t,\tau) \ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right) + K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) \right\} d\tau + \\ \qquad\qquad + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \pi \dfrac{\psi_2(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases} \tag{4.5}$$

Використовуючи параметризацію (4.1) можемо записати розв'язок мішаної задачі (3.4) в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x,\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x,\tau) d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра K_1 і K_2 мають вигляд:

$$K_1(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x,\tau) = \ln\frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

5 Чисельне розв'язування

5.1 Метод колокації

Метод колокації належить до проекційних методів розв'язування лінійних інтегральних рівнянь. Ми будемо використовувати колокацію на основі поділу області D на деякі підобласті, на яких шукана функція апроксимується алгебраїчними поліномами невисокого степеня, в нашому випадку кусково лінійними.

Нехай

$$t_j = a + jh, \quad j = 0, \dots, n \tag{5.1}$$

це рівновіддалений поділ відрізка $[a, b]$ з кроком $h = (b-a)/n$. X_n – простір функцій, неперервних на $[a, b]$, звуження яких на підінтервал $[t_{j-1}, t_j]$ – лінійна функція.

Очевидно, що $\dim X_n = n + 1$ і базис Лагранджа в цьому просторі має вигляд

$$\ell_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{j-1}}{h}, & t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j \geq 1 \\ \dfrac{t_{j+1} - t}{h}, & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j \leq n-1 \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \tag{5.2}$$

з очевидним уточненням для ℓ_0 та ℓ_n. Шукані функції з системи (4.5) подамо у вигляді суми

$$\tilde{\psi}_k(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k)} \ell_j(t), \quad k = 1, 2 \tag{5.3}$$

Підставивши їх у систему (4.5) оримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \\ \qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \left\{ \pi \dfrac{\ell_j(t)}{|x_2'(t)|} + \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases} \tag{5.4}$$

Цю систему необхідно протабулювати на основі рівновіддаленого поділу (5.1) по змінній t щоб знайти відповідні значення векторів $c^{(1)}$ і $c^{(2)}$. Подамо отримані результати в зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_{11} \\ \vdots \\ 2\pi g_{1n} \\ \\ 2\pi g_{21} \\ \vdots \\ 2\pi g_{2n} \end{pmatrix}$$

де

$$G_{ji}^{(1)} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{11}(t_i, \tau) d\tau \qquad G_{ji}^{(2)} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{12}(t_i, \tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(3)} = \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{21}(t_i, \tau) d\tau \qquad G_{ji}^{(4)} = \pi \tfrac{\ell_j(t_i)}{|x_2'(t_i))|} + \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K_{22}(t_i, \tau) d\tau$$

Опираючись на властивості базису (5.2), інтеграли в системі (5.4) можна подати у спрощеному вигляді:

$$\begin{gathered} \int\limits_0^{2\pi} \ell_j(\tau) K\left(t_i, \tau\right) d\tau = \frac{1}{h} \int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \left(\tau - t_{j-1}\right) K\left(t_i, \tau\right) d\tau + \\ + \frac{1}{h} \int\limits_{t_j}^{t_{j+1}} \left(t_{j+1} - \tau\right) K\left(t_i, \tau\right) d\tau \end{gathered} \tag{5.5}$$

де K – одне із ядер.

Результуючий вигляд розв'язку ...

...

...

...

5.2 Дискретизація

Метод колокації є частково дискретним мтодом, що означає що інтеграли в системі рівнянь можемо обчислити точно. На жаль, це не завжди вдається, тому в даній роботі ми дискретизуємо метод використавши квадратури.

Для обчислення ядра K_{11} будемо використовувати відповідну квадратурну формулу. Для цього задаємо рівномірне розбиття:

$$t_i := i\pi/M, \quad i = 0, \dots, 2M-1, M \in N$$

Квадратурна формула буде мати вигляд:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t) f\left(t_j\right) \tag{5.6}$$

з ваговою функцією

$$R_j(t) := -\frac{1}{2M}\left\{1 + 2\sum_{m=1}^{M-1}\frac{1}{m}\cos m\left(t-t_j\right) + \frac{\cos\left(t-t_j\right)}{M}\right\} \tag{5.7}$$

Решта ядер не містять у собі особливості, тим більше легко бачити що вони є щонайменше двічі неперервно диференційовні на заданих кривих, отже доцільно буде для обчислення інтегралів застосувати квадратури трапецій:

$$\int_a^b f(\tau)d\tau \approx h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f\left(t_i\right)\right). \tag{5.8}$$

5.3 Похибка

Теорема 5.1 *Нехай $A : X \to X$ - обмежений лінійний оператор у банаховому просторі X та $(I-A) : X \to X$ – ізоморфізм. Припустимо, що $\|P_nA - A\| \to 0, n \to \infty$. Тоді для достатньо великого $n \geq \mathbb{N}$ оператори $(I-P_nA)^{-1} : X \to X$ існують і є рівномірно обмежені. Для точного і наближеного розв'язку $\varphi - \varphi_n = (I-P_nA)^{-1}(\varphi - P_n\varphi)$ має місце двостороння оцінка*

$$\frac{1}{\|I-P_nA\|}\|\varphi - P_n\varphi\| \leq \|\varphi - \varphi_n\| \leq \left\|(I-P_nA)^{-1}\right\|\|\varphi - P_n\varphi\| \tag{5.9}$$

Проекційний оператор визначається як

$$\left(P_n\varphi\right)(x) = \sum_{j=0}^{n}\varphi\left(x_i\right)l_j(x). \tag{5.10}$$

Для оператора $P_n\varphi$ маємо такі оцінки похибки

$$\varphi \in C^2[a,b], \quad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8}h^2\|\varphi''\|_\infty$$
$$\varphi \in C[a,b], \quad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq w(\varphi, h) \to 0$$

Звідси

$$P_n\varphi \to \varphi, \quad \varphi \in C[a,b]$$

Для відповідного інтегрального оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$ маємо $\|P_n A - A\| \to 0, n \to \infty$. Отже, можемо використовувати результати теореми (5.1) для нашого випадку.

Таким чином для достатньо великого $n \geq N$ апроксимаційне рівняння колокації $(I - P_n A)\, \varphi_n = P_n f$ має єдиний розв'язок:

$$\varphi \in C[a,b], \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \, \|P_n \varphi - \varphi\|_\infty \tag{5.11}$$

$$\varphi \in C^2[a,b] \quad \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq M \frac{1}{8} h^2 \, \|\varphi''\|_\infty \tag{5.12}$$

де M є деякою константою яка залежить від ядер системи.

6 Чисельні експеременти

6.1 Приклад 1

Нехай криві Γ_1 та Γ_2 мають таке параметричне задання

$$\begin{aligned} \Gamma_1 = \{x_1(t) = (0.9\cos t, 0.9\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \\ \Gamma_2 = \{x_2(t) = (2\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\} \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$u(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$f_1 = u \text{ на } \Gamma_2 \quad \text{і} \quad f_2 = \frac{\partial u}{\partial \nu} \text{ на } \Gamma_1$$

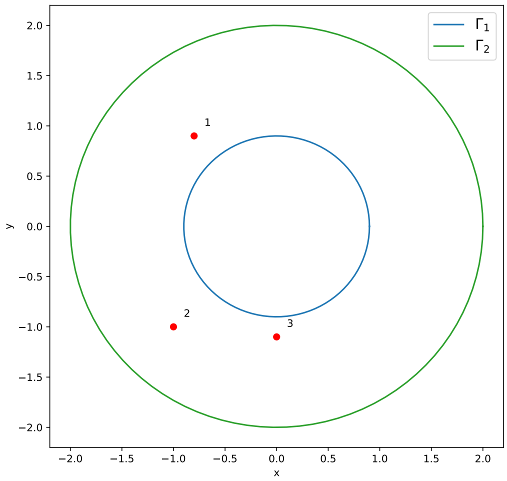

Рис. 6.1: Граничні умови Γ_1, Γ_2 для **??**

Абсолютна похибка розв'язку

n	x = (0.7,1.2)	x = (-0.8,0.9)	x = (-1, -1)
4	3.32×10^{-1}	7.88×10^{-2}	3.11×10^{-1}
8	1.07×10^{-1}	2.64×10^{-2}	4.91×10^{-3}
16	5.30×10^{-2}	5.76×10^{-3}	8.18×10^{-5}
32	1.44×10^{-2}	2.48×10^{-3}	1.61×10^{-5}

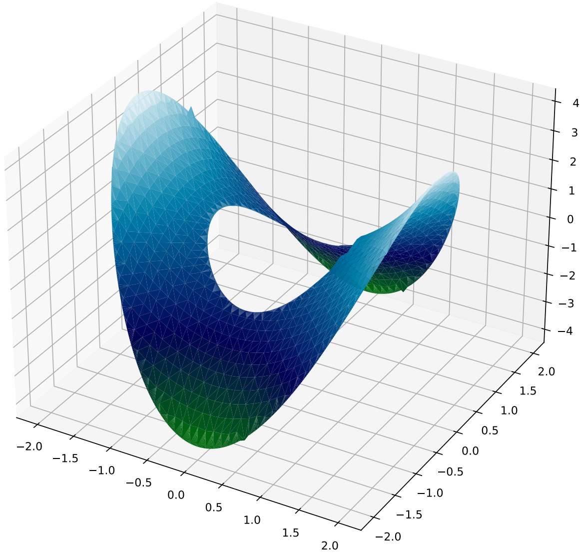

Рис. 6.2: Наближений розв'язок

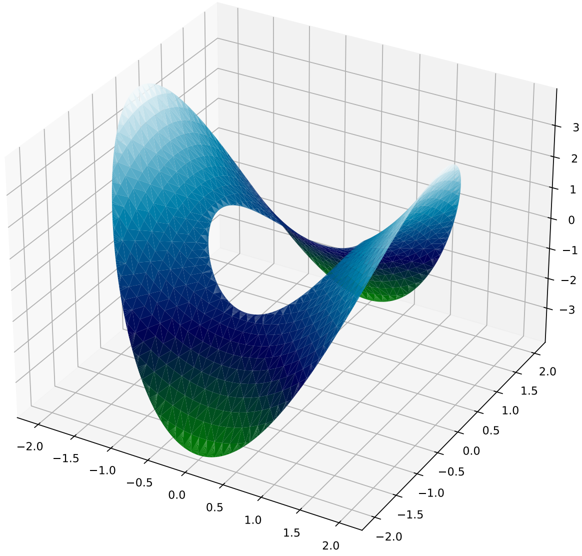

Рис. 6.3: Точний розв'язок

6.2 Приклад 2

7 Висновок

Отже ми розглянули мішану задачу Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа у двозв'язній області. Чисельне розв'язування виконано методом колокацій з використання кусково лінійних базисних функцій. Чисельні експерименти підтверджують ефективність методу для розв'язання мішаної задачі для рівняння Лапласа.

Бібліографія

[1] Chapko R. Johansson B.T. *An alternating boundary integral based method for inverse potential flow around immersed bodies.* J. Numer. Appl. Math. No. 97, 2009, – pp. 10-25. 2009.

[2] R. Chapko O. Sobeyko. *On the numerical solution of a cauchy problem for an elastostatic equation.* Ser. Appl. Math. Inform - 2009. Is. 15. – pp. 135-148. 2009.

[3] R. Kress. *Linear Integral Equations.* Applied Mathematical Sciences. 2012.