Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної матаматики

Звіт

на тему:

"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа"

Виконали:
студенти 4-го курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – “Прикладна математика”
Бугрій Б.О.
Середович В.В.

Перевірив:
ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ

літературний огляд
хто розглядав розв'язування цієї задачі
які процеси описує
мета - розв'язати якимось методом
огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2.

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}^2$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$ матиме вигляд:

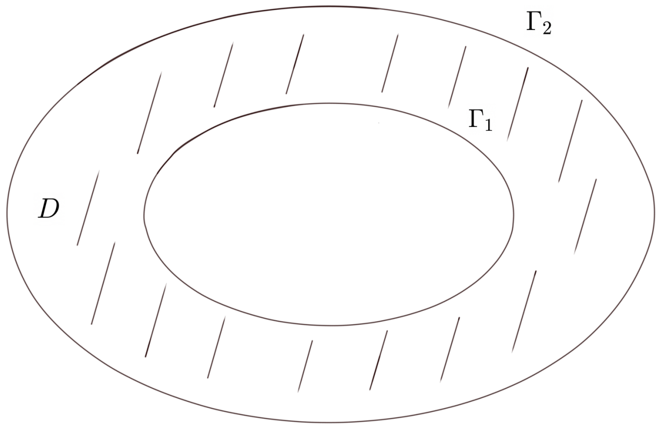

Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \bigcap C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1}$$
2. Граничні умови:
$$u = f_1 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{2}$$
$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2 \quad \text{на} \quad \Gamma_2, \tag{3}$$

де $\nu = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (2) є умовою Діріхле, а (3) є умовою Неймана.

2 Коректність задачі

...

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 1. Нехай D - область з межею $\partial D \in C^1$ і $\overrightarrow{\nu}-$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂D. Тоді для $u \in C^1(\overline{D})$ і $v \in C^2(\overline{D})$ має місце перша формула Гріна

$$\int\limits_D (u\Delta v + gradu \cdot gradv)dx = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds$$

і для $u, v \in C^2(\overline{D})$ має місце друга формула Гріна

$$\int\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) ds$$

Доведення. Посилання на Креса.

Теорема 2. Нехай Γ_1, Γ_2 – гладкі границі, що належать класу C^1, обмежують двозв'язну область D. Тоді задача (1) – (3) має на D не більше одного розв'язку.

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ – два різні розв'язки задачі (1) – (3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 1 при $u = v = u^*$:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = \int\limits_{\partial D} u^*\frac{\partial u^*}{\partial \nu}dS - \int\limits_D u^*\Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ (чи ні?) в D, $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2, то отримуємо рівність

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D, тобто $u^* = \text{const}$. Функція u^* неперервна в $\overline{D}$ і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \overline{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

...

3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення гармонічної функції ...

Теорема 3. Функція

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$$

визначена на $x \neq y,\ x \in \mathbb{R}$ називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого $y \in \mathbb{R}^2$ вона є гармонічною в $\mathbb{R}^2 \backslash \{y\}$.

Означення 1. Нехай функція $\varphi \in C(\partial D)$, тоді

$$u(x) := \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \backslash \partial D$$

називають потенціалом простого шару з густиною φ.

Теорема 4. Нехай ∂D належить класу C^2 і $\varphi \in C(\partial D)$. Тоді потенціал простого шару u з густиною φ неперервний на $\mathbb{R}^m$. На границі області справджується рівність

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in \partial D$$

де інтеграл існує і розуміється як невласний. *Доведення.* Кресс

Щось про стрибок ...?

Теорема 5. Нехай ∂D належить класу C^2. Тоді для потенціалу простого шару u з неперервною густиною φ маємо, що

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial v}(x) := \lim_{h \to +0} v(x) \cdot \operatorname{grad} u(x \pm hv(x))$$

is to be understood in the sense of uniform convergence on ∂D and where the integral exists as an improper integral.

3.2 Загальний вигляд розв'язку

Потенціал простого шару є гармонічною функцією, тому розв'язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D$$

з невідомими густинами $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$.

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ 2\int\limits_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) - \varphi_2(x) + 2\int\limits_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\dfrac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = 2f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{4}$$

Пояснити про стрибок ... (ще раз перевірити на стрибок)

4 Коректність інтегрального рівняння

Теорема 6. Для $\Gamma_i \in C^2$ і $f_i \in C(\Gamma_i)$, $i = 1, 2,$ система інтегралъних рівнянь (4) має єдиний розв'язок $\mu_i \in C(\Gamma_i)\,, i = 1, 2\,,$ який неперервно залежить від вхідих даних.

Доведення: Введемо наступні інтегральні оператори:

$$(A\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_1} \Phi(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_1$$
$$(B\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_2} \Phi(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_1$$
$$(C\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_2$$
$$(D\varphi)(x) := 2\int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)ds(y), \quad x \in \Gamma_2$$

Запишемо систему інтегральних рівнянь 4 в операторному вигляді:

$$\varphi - U\varphi = F \tag{5}$$

де $\varphi_: = (\varphi_1, \varphi_2)^T\,, F := (2f_1, 2f_2)^T$ і оператор U заданий як

$$U := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Позначимо $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Оператори B та C містять неперервні ядра, отже є компактними в $C(\Gamma)$. Оператори A та D містять слабосингулярні ядра, а отже також є компактними. Таким чином ми можемо застосувати теорію Рісса для доведення коректності нашої системи ІР.

Відомо, що простір нулів $N(I - U) = \{0\}$, тобто оператор $(I - U)$ ін'єктивний. Тоді згідно теорії Рісса $(I - U)$ сюр'єктивний, тобто

$$\forall F \in C(\Gamma) \quad \exists! \varphi \in C(\Gamma): \quad (I - U)\varphi = F$$

Тоді, обернений оператор $(I-U)^{-1}$ обмежений і розв'язок операторного рівняння 5 можа подати у вигляді

$$\varphi = (I - U)^{-1}F$$

5 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \tag{6}$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$

Позначимо ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_i, заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left(\frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right)$$

Обчислимо похідну по нормалі від фундаментального розв'язку

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де $r = |x - y|$, отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2}$$

Перейдемо до параметризованої системи. Таким чином використовуючи параметризацію та описані вище перетворення перейдемо до параметризованої системи.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ -\dfrac{\psi_2(t)}{|x'_2(t))|} + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases}$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t)) \cdot |x'_i(t)|,\ g_i = f_i(x_i(t)),\ i = 1, 2;\ t \in [0, 2\pi]$

Ядра матимуть вигляд:

$$K_{11}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t, \tau) = \ln \frac{1}{|x - y|} \Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad ;$$

$$K_{21}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad ;$$

$$K_{22}(t, \tau) = \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau$$

В ядрах K_{12}, K_{21} внаслідок параметризації точки x та y знаходяться на різних кривих, з чого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку K_{11}, K_{22} обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при $t = \tau$.

Для виділення логарифмічної особливості виконаємо наступні перетворення з K_{11}

$$K_{11}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2} \pm \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) = \\ = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}$$

Отже, ядро K_{11} можна записати у вигляді:

$$K_{11}(t,\tau) = {K_{11}}^{(1)}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + {K_{11}}^{(2)}(t,\tau)$$

де ядра ${K_{11}}^{(1)}$ і ${K_{11}}^{(2)}$ матимуть вигляд:

$${K_{11}}^{(1)}(t,\tau) = -\frac{1}{2}; \quad \text{та} \quad {K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau;$$

Для того щоб довизначити ${K_{11}}^{(2)}$, знайдему границю за правилом Лопіталя

$$\lim_{\tau\to t}{K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \lim_{\tau\to t}\ln\frac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2} = \ln\frac{\frac{4}{e}\frac{(t-\tau)^2}{4}}{|x_1'(t)|^2(t-\tau)^2} = \ln\frac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}$$

В результаті отримаємо:

$${K_{11}}^{(2)}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}}{|x_1(t)-x_1(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{e\,|x_1'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

Виділимо сингулярну особливість ядра K_{22}. Знайдемо границю при $\tau \to t$

$$\lim_{\tau\to t}\frac{\partial\Phi(x_2(t),x_2(\tau))}{\partial\nu(t)} = \frac{x_2''(\tau)\cdot\nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}$$

Отримаємо наступне параметризованне подання ядра:

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} \dfrac{(x_2(\tau) - x_2(t)) \cdot \nu(x_2(t))}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}, & t \neq \tau \\ \\ \dfrac{x_2''(t) \cdot \nu(x_2(t))}{2|x_2'(t)|^2}, & t \neq \tau \end{cases}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}{}^{(1)}(t,\tau) \ln\left(\dfrac{4}{e} \sin^2 \dfrac{t-\tau}{2}\right) + K_{11}{}^{(2)}(t,\tau) \right\} d\tau + \\ \qquad\qquad + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ -\pi \dfrac{\psi_2(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau + \int\limits_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

Використовуючи параметризацію ref можемо записати наближенний розв'язок мішаної задачі ref в параметризованому вигляді:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_1(x,\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_2(x,\tau) d\tau, \quad x \in D$$

де відповідні ядра K_1 і K_2 мають вигляд:

$$K_1(x,\tau) = \ln \frac{1}{|x - x_1(\tau)|} \quad \text{та} \quad K_2(x,\tau) = \ln \frac{1}{|x - x_2(\tau)|}$$

6 Чисельне розв'язування

6.1 Метод колокації

...
...
...

Шукані функції подамо у вигляді суми ... (сказати щось про n):

$$\tilde{\psi}_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(k)} \gamma_j^{(k)}(x), \quad k = 1, 2$$

Підставивши їх у систему оримаємо:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t,\tau) d\tau + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t,\tau) d\tau = 2\pi g_1(t) \\ \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(1)} \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t,\tau) d\tau \\ \qquad\qquad + \sum\limits_{j=1}^{n} c_j^{(2)} \left\{ -\pi \dfrac{\gamma_j^{(2)}(t)}{|x_2'(t))|} + \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t,\tau) d\tau \right\} = 2\pi g_2(t) \end{cases}$$

Цю систему необхідно протабулювати n разів по змінній t, щоб знайти відповідні значення векторів $c^{(1)}$ і $c^{(1)}$. Запишемо отриману систему у зручному матричному вигляді

$$Ac = g$$

де

$$A = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & \dots & G_{1n}^{(1)} & G_{11}^{(2)} & \dots & G_{1n}^{(2)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(1)} & & G_{nn}^{(1)} & G_{n1}^{(2)} & & G_{nn}^{(2)} \\ G_{11}^{(3)} & \dots & G_{1n}^{(3)} & G_{11}^{(4)} & \dots & G_{1n}^{(4)} \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \ddots & \\ G_{n1}^{(3)} & & G_{nn}^{(3)} & G_{n1}^{(4)} & & G_{nn}^{(4)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} c_1^{(1)} \\ \vdots \\ c_n^{(1)} \\ c_1^{(2)} \\ \vdots \\ c_n^{(2)} \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 2\pi g_1(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_1(x_n) \\ 2\pi g_2(x_1) \\ \vdots \\ 2\pi g_2(x_n) \end{pmatrix}$$

де

$$G_{ji}^{(1)} = \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{11}(t_i,\tau) d\tau \qquad G_{ji}^{(2)} = \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{12}(t_i,\tau) d\tau$$

$$G_{ji}^{(3)} = \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(1)}(\tau) K_{21}(t_i,\tau) d\tau \qquad G_{ji}^{(4)} = -\pi \frac{\gamma_j^{(2)}(t_i)}{|x_2'(t_i))|} + \int\limits_0^{2\pi} \gamma_j^{(2)}(\tau) K_{22}(t_i,\tau) d\tau$$

Обчислення ядра K_{11}

For the full discretization of the integral equation of the first kind (3.5), which has a logarithmic singularity, we apply a quadrature method together with the quadrature rule [13,14] based on trigonometric interpolation. For this purpose, we choose an equidistant mesh by setting $t_i := i\pi/M, i = 0, \ldots, 2M-1, M \in \mathbb{N}$ and use the quadrature rules

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j)$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1} R_j(t)f(t_j)$$

with known weight functions R_j (see [13]).

$$R_j(t) = -\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}\cos m(t-t_j) + \frac{1}{2n}\cos n(t-t_j)$$

6.2 Похибка

2). Проекційний (інтерполяційний) о-р визначається як

$$(P_n\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{n}\varphi(x_i)\, l_j(x).$$

Для $P_n\varphi$ маємо такі оцінки

$$\varphi \in C^2[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \le \frac{1}{8}h^2\|\varphi''\|_\infty$$
$$\varphi \in C[a,b], \qquad \|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \le w(\varphi, h) \to 0$$

Звідси

$$P_n\varphi \to \varphi \quad \varphi \in C[a,b]$$

Тепер для відповідного інтегрального оператора $A : C[a,b] \to C[a,b]$ маємо за лемою 4.2 $\left\|P_nA - \dot{A}\right\| \to 0, n \to \infty$ Отже, результати теореми 4.1 можна використати в цьому конкретному випадку. Таким чином для дост. великого $n \ge N$ апроксимаційне р-ня цього варіанту методу колокації $(I - P_nA)\varphi_n = P_nf$ має єдиний $_1$ р-к для $f \in C[a,b]i\,\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \le \dot{M}\,\|P_n\varphi - \varphi\|_\infty$. Для $\varphi \in C^2[a,b]\,\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \le M\frac{1}{8}h^2\|\varphi''\|_\infty$ |нтеграли (3) слід обчислювати наближено з використанням квадратур, які не понижують отриманої вище оцінки. Зокрема можна скористатись способом, розглянутим у в-ку м-ду вир. ядер. Для кускової інтерполяці можна вибирати поліноми вищого степеня r. При цьому заг. ідея залишається незмінною і порядок збіжності буде $O\left(h^{r+1}\right)$ для $\varphi \in C^{r+1}[a,b]$.

7 Якийсь приклад