

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Львівський національний університет імені Івана Франка  
Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

## Звіт

на тему:

*"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для  
рівняння Лапласа"*

Виконали:

студенти 4-го курсу групи ПМп-41  
напрямку підготовки (спеціальності)  
113 – "Прикладна математика"

Бугрій Б.О.

Середович В.В.

Перевірив:

ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

# Зміст

Вступ	3
1 Постановка задачі	3
2 Коректність задачі	4
2.1 Єдиність розв'язку задачі . . . . .	4
3 Зведення до інтегрального рівняння	5
3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару . . . . .	5
3.2 Загальний вигляд розв'язку . . . . .	6
4 Коректність інтегрального рівняння	6
5 Параметризація	6
6 Чисельне розв'язування	8
6.1 Похибка . . . . .	8
7 Якийсь приклад	8

# Вступ

літературний огляд  
хто розглядав розв'язування цієї задачі  
які процеси описує  
мета - розв'язати якимось методом  
огляд наступних розділів

## 1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю  $D \subset \mathbb{R}^2$  з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої  $\Gamma_1$  та зовнішньої  $\Gamma_2$ .

Нехай  $D_1 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_1 \subset C^2$  та  $D_2 \subset \mathbb{R}^2$  – обмежена область з гладкою границею  $\Gamma_2 \subset C^2$ . Тоді двозв'язна область  $D = D_2 \setminus \overline{D_1}$  матиме вигляд:

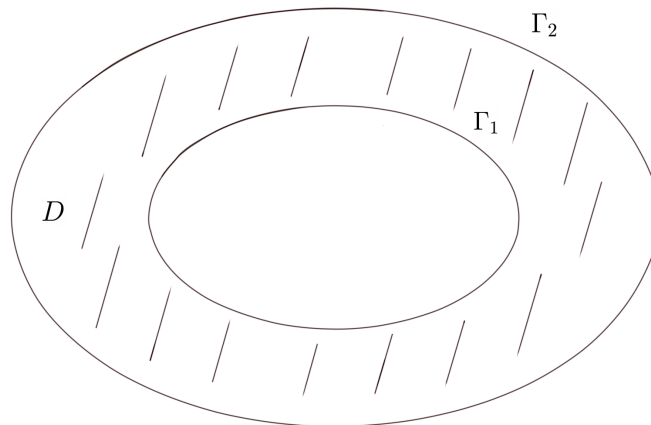


Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції  $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cup C^1(\overline{D})$  що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \quad (1)$$

2. Граничні умови:

$$u = f_1, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \quad (3)$$

де  $v = \nu(x)$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (2) є умовою Діріхле, а (3) є умовою Неймана.

## 2 Коректність задачі

...

### 2.1 Єдиність розв'язку задачі

**Теорема 1.** Нехай  $D$  - область з межею  $\partial D \in C^1$  і  $\vec{\nu}$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі  $\partial D$ . Тоді для  $u \in C^1(\overline{D})$  і  $v \in C^2(\overline{D})$  має місце перша формула Гріна

$$\int_D (u\Delta v + \text{grad} u \cdot \text{grad} v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds$$

і для  $u, v \in C^2(\overline{D})$  має місце друга формула Гріна

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

*Доведення.* Посилання на Креса.

**Теорема 2.** Нехай  $\Gamma_1, \Gamma_2$  - гладкі границі, що належать класу  $C^1$ , обмежують двозв'язну (а може ні?) область  $D$ . Тоді задача (1) - (3) має на  $D$  (може замикання?) не більше одного розв'язку.

*Доведення.* Від супротивного. Нехай  $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$  - два різні розв'язки задачі (1) - (3). Запишемо цю задачу для функції  $u^* = u_1 - u_2$ :

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 1 при  $u = v = u^*$ :

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = \int_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут  $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Так як  $\Delta u^* = 0$  (чи ні?) на  $D$ ,  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$  на  $\Gamma_2$ , то отримуємо рівність

$$\int_D (\text{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що  $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$  і  $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$  на всій області  $D$ , тобто  $u^* = \text{const}$ . Функція  $u^*$  неперервна на  $\overline{D}$  і  $u^* = 0$  на  $\Gamma_1 \subset \overline{D}$ , отже  $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$ , що суперечить початковому припущенню. ■

### 3 Зведення до інтегрального рівняння

...

#### 3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення гармонічної функції ...

**Теорема 3.** Функція

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$$

визначена на  $x \neq y$ ,  $x \in \mathbb{R}$  називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого  $y \in \mathbb{R}^2$  вона є гармонічною в  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ .

**Означення 1.** Нехай функція  $\varphi \in C(\partial D)$ , тоді

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus \partial D$$

називають потенціалом простого шару з густиною  $\varphi$ .

**Теорема 4.** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$  і  $\varphi \in C(\partial D)$ . Тоді потенціал простого шару  $u$  з густиною  $\varphi$  неперервний на  $\mathbb{R}^m$ . На границі області справджується рівність

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

де інтеграл існує і розуміється як невластний. *Доведення.* Кресс

Щось про стрибок ...?

**Теорема 5.** Нехай  $\partial D$  належить класу  $C^2$ . Тоді для потенціалу простого шару  $u$  з неперервною густиною  $\varphi$  маємо, що

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x) \cdot \text{grad } u(x \pm hv(x))$$

is to be understood in the sense of uniform convergence on  $\partial D$  and where the integral exists as an improper integral.

### 3.2 Загальний вигляд розв'язку

Потенціал простого шару є гармонічною функцією, тому розв'язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D$$

з невідомими густинами  $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$ ,  $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$ .

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \Phi(x, y) ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \Phi(x, y) ds(y) = f_1(x), & x \in \Gamma_1 \\ 2 \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) - \varphi_2(x) + 2 \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} ds(y) = 2f_2(x), & x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Пояснити про стрибок ... (ще раз перевірити на стрибок)

## 4 Коректність інтегрального рівняння

## 5 Параметризація

Припустимо, що криві  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_2$  задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)), t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

де  $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $2\pi$  періодична  $\forall t |x'_i(t)| > 0$

Позначимо  $\nu$  - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої  $\Gamma_i$ , заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left( \frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right)$$

Обчислимо похідні по нормалі від фундаментального розв'язку.

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \ln(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \nu(x)}$$

де  $r = |x - y|$ , отримаємо

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(y - x) \cdot \nu(x)}{r^2} \quad \text{та} \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{r^2}$$

Таким чином використовуючи параметризацію та описані вище перетворення перейдемо до параметризованої системи.

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{11}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ -\frac{\psi_2(x)}{|x'_2(t)|} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases}$$

де  $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t)) \cdot |x'_i(t)|$ ,  $g_i = f_i(x_i(t))$ ,  $i = 1, 2$ , ядра матимуть вигляд

$$\begin{aligned} K_{11}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} , \quad t \neq \tau \\ K_{12}(t, \tau) &= \ln \frac{1}{|x - y|} \bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} ; \\ K_{21}(t, \tau) &= \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{r^2} \bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} ; \\ K_{22}(t, \tau) &= \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{r^2} \bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} , \quad t \neq \tau \end{aligned}$$

В ядрах  $K_{12}$ ,  $K_{21}$  внаслідок параметризації точки  $x$  та  $y$  знаходяться на різних кривих, зчого випливає що ці ядра неперервні і при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку  $K_{11}$ ,  $K_{22}$  обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають, відповідно, логарифмічну і сингулярну особливості при  $t = \tau$ . Для того щоб їх позбутись, необхідно знайти границі цих ядер при  $t \rightarrow \tau$  і використати границю замість ядра для випадків, коли  $t = \tau$ .

Скористуємось правилом лопітала і знайдемо границю.....

Ядро  $K_{22}$  можна записати у вигляді

$$K_{11}(t, \tau) = K_{11}^{(1)}(t, \tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau)$$

$$K_{11}^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2} |x'_2(\tau)|;$$

$$K_{11}^{(2)}(t, \tau) = \frac{1}{2} |x'_2(\tau)| \ln \frac{\frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2}}{|x_2(t) - x_2(\tau)|^2}$$

$$K_{22}(t, \tau) = \begin{cases} K_{22}(t, \tau) = \frac{(x - y) \cdot \nu(y)}{r^2} \Big|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}}, & t \neq \tau \\ -\frac{1}{2\pi} \frac{x'_{21}(\tau)x''_{22}(\tau) - x'_{22}(\tau)x''_{21}(\tau)}{|x'_2(\tau)|}, & t = \tau \end{cases}$$

Отже, система буде мати вигляд

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) \left\{ K_{11}^{(1)}(t, \tau) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_{11}^{(2)}(t, \tau) \right\} d\tau \\ \quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{12}(t, \tau) d\tau = g_1(t) \\ -\frac{\psi_2(x)}{|x'_2(t)|} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1(\tau) K_{21}(t, \tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2(\tau) K_{22}(t, \tau) d\tau = 2g_2(t) \end{cases}$$

## 6 Чисельне розв'язування

### 6.1 Похибка

## 7 Якийсь приклад