Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної матаматики

Звіт

на тему:

"Розв'язування задачі Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа"

Виконали:
студенти 4-го курсу групи ПМп-41
напрямку підготовки (спеціальності)
113 – "Прикладна математика"
Бугрій Б.О.
Середович В.В.

Перевірив:
ст. в. Гарасим Я.С.

Львів - 2020

Зміст

Вступ

літературний огляд
хто розглядав розв'язування цієї задачі
які процеси описує
мета - розв'язати якимось методом
огляд наступних розділів

1 Постановка задачі

Припускаємо, що деяке двовимірне тіло задається двозв'язною областю $D \subset \mathbb{R}$ з досить гладкою границею що складається з внутрішньої кривої Γ_1 та зовнішньої Γ_2.

Нехай $D_1 \subset \mathbb{R}$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_1 \subset C^2$ та $D_2 \subset \mathbb{R}$ – обмеженна область з гладкою границею $\Gamma_2 \subset C^2$. Тоді двозв'язна область $D = D_2 \setminus \overline{D}_1$ матиме вигляд:

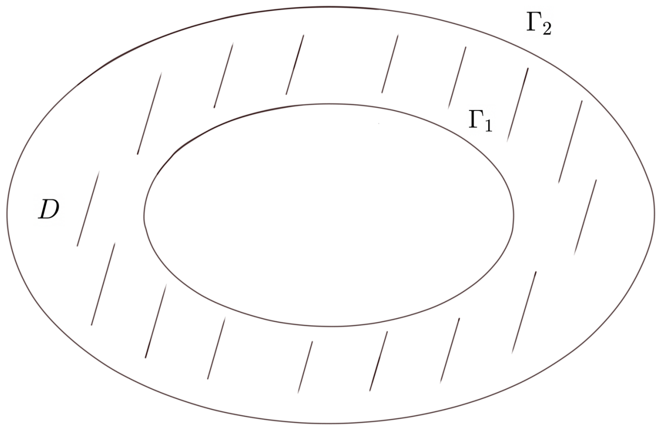

Рис. 1:

Мішана задача Діріхле-Неймана для рівняння Лапласа полягає в знаходженні такої функції $u(x_1, x_2) \in C^2(D) \cup C^1(\overline{D})$ що задовольняє

1. Рівняння Лапласа:
$$\Delta u = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1}$$

2. Граничні умови:
$$u = f_1, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = f_2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_2, \tag{3}$$

де $v = \nu(x)$ - одиничний вектор зовнішньої нормалі, (2) є умовою Діріхле, а (3) є умовою Неймана.

2 Коректність задачі

...

2.1 Єдиність розв'язку задачі

Теорема 1. Нехай D - область з межею $\partial D \in C^1$ і $\overrightarrow{\nu}-$ одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі ∂D. Тоді для $u \in C^1(\overline{D})$ і $v \in C^2(\overline{D})$ має місце перша формула Гріна

$$\int\limits_D (u\Delta v + gradu \cdot gradv)dx = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial \nu}ds$$

і для $u, v \in C^2(\overline{D})$ має місце друга формула Гріна

$$\int\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)dx = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

Доведення. Посилання на Креса.

Теорема 2. Нехай Γ_1, Γ_2 – гладкі границі, що належать класу C^1, обмежують двозв'язну (а може ні?) область D. Тоді задача (1) – (3) має на D (може замикання?) не більше одного розв'язку.

Доведення. Від супротивного. Нехай $\exists u_1, u_2 \in C^2(\overline{D}) : u_1 \neq u_2$ – два різні розв'язки задачі (1) – (3). Запишемо цю задачу для функції $u^* = u_1 - u_2$:

$$\Delta u^* = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$$

$$u^* = u_1 - u_2 = f_1 - f_1 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1$$
$$\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = f_2 - f_2 = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2$$

Застосуємо першу формулу Гріна з теореми 1 при $u = v = u^*$:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = \int\limits_{\partial D} u^* \frac{\partial u^*}{\partial \nu} dS - \int\limits_D u^* \Delta u^* dx$$

Тут $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Так як $\Delta u^* = 0$ (чи ні?) на D, $u^* = 0$ на Γ_1 і $\frac{\partial u^*}{\partial \nu} = 0$ на Γ_2, то отримуємо рівність

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u^*)^2 dx = 0,$$

з якої випливає, що $\frac{\partial u^*}{\partial x_1} = 0$ і $\frac{\partial u^*}{\partial x_2} = 0$ на всій області D, тобто $u^* = \text{const}$. Функція u^* неперервна на $\overline{D}$ і $u^* = 0$ на $\Gamma_1 \subset \overline{D}$, отже $u^* \equiv 0 \Rightarrow u_1 \equiv u_2$, що суперечить початковому припущенню. ■

3 Зведення до інтегрального рівняння

...

3.1 Теорія потенціалів. Потенціал простого шару

Означення гармонічної функції ...

Теорема 3. Функція

$$\Phi(x,y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$$

визначена на $x \neq y,\ x \in \mathbb{R}$ називається фундаментальним розв'язком рівняння Лапласа. Для фіксованого $y \in \mathbb{R}^2$ вона є гармонічною в $\mathbb{R}^2 \backslash \{y\}$.

Означення 1. Нехай функція $\varphi \in C(\partial D)$, тоді

$$u(x) := \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x,y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^m \backslash \partial D$$

називають потенціалом простого шару з густиною φ.

Теорема 4. Нехай ∂D належить класу C^2 і $\varphi \in C(\partial D)$. Тоді потенціал простого шару u з густиною φ неперервний на $\mathbb{R}^m$. На границі області справджується рівність

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x,y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

де інтеграл існує і розуміється як невласний. *Доведення.* Кресс

Щось про стрибок ...?

Теорема 5. Нехай ∂D належить класу C^2. Тоді для потенціалу простого шару u з неперервною густиною φ маємо, що

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

де

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial v}(x) := \lim_{h \to +0} v(x) \cdot \operatorname{grad} u(x \pm h v(x))$$

is to be understood in the sense of uniform convergence on ∂D and where the integral exists as an improper integral.

3.2 Загальний вигляд розв'язку

Потенціал простого шару є гармонічною функцією, тому розв'язок задачі (1) – (3) будемо шукати у вигляді суми потенціалів простого шару

$$u(x) = \int_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y), \quad x \in D$$

з невідомими густинами $\varphi_1 \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2 \in C(\Gamma_2)$.

Враховуючи інтегральне подання розв'язку, крайові умови та властивості потенціалу простого шару, для знаходження невідомих функцій отримаємо таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\Phi(x,y)ds(y) + \int_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\Phi(x,y)ds(y) = f_1(x), \quad x \in \Gamma_1 \\ \displaystyle 2\int_{\Gamma_1} \varphi_1(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) - \varphi_2(x) + 2\int_{\Gamma_2} \varphi_2(y)\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)}ds(y) = 2f_2(x), \quad x \in \Gamma_2 \end{cases}$$

Пояснити про стрибок ... (ще раз перевірити на стрибок)

4 Коректність інтегрального рівняння

5 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 та Γ_2 задані в параметричному вигляді:

$$\Gamma_i := \{x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t)),\ t \in [0, 2\pi]\}, \quad i = 1,2 \tag{4}$$

де $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, 2π періодична $\forall t\ |x'(t)| > 0$

Позначимо ν - одиничний вектор зовнішньої нормалі до кривої Γ_i, заданий як:

$$\nu(x_i(t)) = \left(\frac{x'_{i2}(t)}{|x'_i(t)|}, -\frac{x'_{i1}(t)}{|x'_i(t)|} \right)$$

Обчислимо похідні по нормалі від фундаментального роз'вязку.

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial \ln(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\nu(x)}$$

де $r = |x - y|$, отримаємо

$$\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(x)} = \frac{1}{2\pi}\frac{(y-x)\cdot\nu(x)}{r^2} \quad \text{та} \quad \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} = \frac{1}{2\pi}\frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{r^2}$$

Таким чином використовуючи параметризацію та описані вище перетворення перейдемо до параметризованої системи.

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_1(\tau)K_{11}(t,\tau)d\tau + \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(\tau)K_{12}(t,\tau)d\tau = g_1(t) \\ -\dfrac{\psi_2(x)}{|x_2'(t))|} + \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_1(\tau)K_{21}(t,\tau)d\tau + \dfrac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_2(\tau)K_{22}(t,\tau)d\tau = 2g_2(t) \end{cases}$$

де $\psi_i(t) = \varphi(x_i(t)) \cdot |x_i'(t)|$, $g_i = f_i(x_i(t))$, $i = 1, 2$, ядра матимуть вигляд

$$K_{11}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau$$

$$K_{12}(t,\tau) = \ln \frac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad ;$$

$$K_{21}(t,\tau) = \frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad ;$$

$$K_{22}(t,\tau) = \frac{(x-y)\cdot\nu(y)}{r^2}\Bigg|_{\substack{x = x_2(t) \\ y = x_2(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau$$

В ядрах K_{12}, K_{21} внаслідок параметризації точки x та y знаходяться на різних кривих, в результаті чого при інтегруванні в них не виникають особливості.

У випадку K_{11}, K_{22} обидві точки знаходяться на одній кривій і тому вони мають особливість при $t = \tau$. Для того що її позбутись, можна знайти границю цих ядер при $t \to \tau$ і використати її замість ядра для випадків, коли $t = \tau$.

Скористуємось правилом лопіталя і знайдемо границю........

$$K_{11}(t,\tau) = \begin{cases} K_{11}(t,\tau) = \ln \dfrac{1}{|x-y|}\Bigg|_{\substack{x = x_1(t) \\ y = x_1(\tau)}} \quad , \quad t \neq \tau \\ \\ \quad , \quad t = \tau \end{cases}$$

$$K_{22}(t,\tau) = \begin{cases} K_{22}(t,\tau) = \left.\dfrac{(x-y)\cdot\nu(y)}{r^2}\right|_{\substack{x=x_2(t)\\ y=x_2(\tau)}}, & t \neq \tau \\ t = \tau & \end{cases}$$

1) Розібратиь з тим як записати ядра K11 та K22 для особливих випадків
2) Записати систему інтегральних рівнянь в параметричному вигляді

6 Чисельне розв'язування

6.1 Похибка

7 Якийсь приклад