Постановка задачі

Нехай $\Omega = (a, b)$ де $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Потрібно знайти таку функцію $u(x)$, яка задовольняє рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)\frac{du(x)}{dx} + \sigma(x)u(x) = f(x) \ \ \forall x \in \Omega \tag{1}$$

та крайові умови

$$\mu\frac{du}{dx}\bigg|_{x=a} = \alpha[u(a) - u_a], \tag{2}$$

$$-\mu\frac{du}{dx}\bigg|_{x=b} = \gamma[u(b) - u_b]. \tag{3}$$

$\mu = \mu(x), \beta = \beta(x), \sigma = \sigma(x), f = f(x)$ – задані функції,
α, γ, u_a, u_b – задані сталі.

Кусково-лінійна апроксимація розв'язку

$$u_h = \sum_{i=0}^{N-1} q_i \varphi_i(x), \qquad (4)$$

де N - кількість скінченних елементів, $\varphi_i(x)$ - функції Куранта.

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, x_{i-1}]; \\ \omega_{i-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{i-1}, x_i]; \quad i = 1, ..., N-2 \\ 1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x), & (x_i, x_{i+1}]; \\ 0 & (x_{i+1}, b]. \end{cases} \qquad (5)$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}} := \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \ \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \ i = 0, ..., N-1. \qquad (6)$$

Система лінійних алгебричних рівнянь

$$\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]\right\}_{\frac{1}{2}}q_0+\alpha q_0+ \tag{7}$$

$$+\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh-3)\Big]\right\}_{\frac{1}{2}}q_1=\frac{1}{2}[hf]_{\frac{1}{2}}+\alpha u_a$$

$$\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(Sh-3)\Big]\right\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1}-$$

$$-\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]_{i-\frac{1}{2}}+\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh-3)\Big]_{i+\frac{1}{2}}\right\}q_i+ \tag{8}$$

$$+\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(Sh+3)\Big]\right\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}=\frac{1}{2}\left\{[hf]_{i-\frac{1}{2}}[hf]_{i+\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh-3)\Big]\right\}_{N-\frac{1}{2}}q_{N-1}+\left\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]\right\}_{N-\frac{1}{2}}q_N+ \tag{9}$$

$$+\gamma q_N=\frac{1}{2}[hf]_{N-\frac{1}{2}}+\gamma u_b$$

Апостеріорний оцінювач

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{||\varepsilon_h||_{i+\frac{1}{2}} \cdot 100\%}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\left(||u_h||^2_{i+\frac{1}{2}} + ||\varepsilon_h||^2_{i+\frac{1}{2}}\right)}} = \frac{||\varepsilon_h||_{i+\frac{1}{2}}\sqrt{N} \cdot 100\%}{\sqrt{||u_h||^2_V + ||\varepsilon_h||^2_V}} \tag{10}$$

$$||u_h||^2_{i+\frac{1}{2}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_h^{'}(x)]^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{q}^2_{i+\frac{1}{2}} dx = [h\dot{q}^2]_{i+\frac{1}{2}} \tag{11}$$

$$\varepsilon_h(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{5}{4}\left\{\frac{h^2}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}} \tag{12}$$

$$||\varepsilon_h||^2_V = \frac{5}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\frac{h^3}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}} \tag{13}$$

$$Pe := \frac{h\beta}{\mu} \quad Sh := \frac{h^2\sigma}{\mu} \tag{14}$$