Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка
Факультет прикладної математики та інформатики

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРОБЛЕМАХ ДИФУЗІЇ-АДВЕКЦІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ АДИТИВНИХ МСЕ

Виконав:

Студент групи ПМІ-51

Заяць А.Р.

Перевірив:

Проф. Шинкаренко Г.А.

Львів 2019

Зміст

Вступ

Метод скінченних елементів (МСЕ) є одним і найбільш поширених методів числового розв'язування крайових задач математичної фізики та механіки суцільного середовища.

Для знаходження чисельного розв'язку крайової задачі із наперед заданою точністю існує декілька обчислювальних схем МСЕ: h-адаптивні, p-адаптивні та hp-адаптивні схеми. У роботі розглянуто побудову h-адаптивної схеми МСЕ.

h-Адаптивна схема МСЕ:

- вибираємо деяку початкову кількість скінченних елементів сітки;
- знаходимо чисельний розв'язок крайової задачі для початкового розбиття;
- на кожному скінченному елементі обчислюємо індикатор похибки на основі обраного апостеріорного оцінювача;
- елементи, на яких значення індикатора перевищує очікуване задане значення похибки, ділимо навпіл, додавши вузол в центр мас;
- процес завершується, коли на всіх елементах значення індикатора не перевищує очікуваного значення похибки.

1 Постановка задачі

Нехай $\Omega = (a, b)$ де $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Потрібно знайти таку функцію $u(x)$, яка задовольняє рівняння

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\right) + \beta(x)\frac{du(x)}{dx} + \sigma(x)u(x) = f(x) \;\; \forall x \in \Omega \tag{1}$$

та крайові умови

$$-\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=a} = \alpha[u(a) - u_a], \tag{2}$$

$$-\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\bigg|_{x=b} = \gamma[u(b) - u_b], \tag{3}$$

де $\mu = \mu(x), \beta = \beta(x), \sigma = \sigma(x), f = f(x)$ – задані функції,

α, γ, u_a, u_b – задані сталі.

Умови коректності: $\mu(x) > 0$, $\sigma(x) \geq 0$ майже скрізь в Ω, $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$.

2 Варіаційна задача

Визначимо простори функцій:

$$L^2(\Omega) := \{u \in \Omega : \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx < \infty\}, \tag{4}$$

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : |\nabla u| \in L^2(\Omega)\} \tag{5}$$

∇u - градієнт функції u (вектор перших часткових похідних), у одновимірному випадку він містить лише одну компоненту $du(x)/dx$.

$$V := H^1(\Omega). \tag{6}$$

Крайовій задачі (1)-(3) відповідає варіаційна задача:

$$\begin{cases} \text{Знайти } u \in V \text{ таку, що} \\ c(u,v) =< l, v > \forall v \in V \end{cases} \tag{7}$$

$$c(u,v) := \int_a^b \Big[\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \beta(x)\frac{du(x)}{dx}v(x) + \sigma(x)u(x)v(x)\Big]dx + \alpha u(a)v(a) + \gamma u(b)v(b)$$

$$< l, v >:= \int_a^b f(x)v(x)dx + \alpha u_a v(a) + \gamma u_b v(b)$$

3 Зведення до безрозмірного вигляду

Безрозмірні величини

[Величина] = од. виміру	Норма	Безрозмірна величина
$\Big[x\Big] = m$	l_0	$z = \frac{x}{l_0}$
$\Big[\mu(x)\Big] = \frac{m^2}{s}$	μ_0	$\mu_*(z) = \dfrac{\mu(z)}{\mu_0}$
$\Big[\beta(x)\Big] = \frac{m}{s}$	$\lVert\beta\rVert$	$\beta_*(z) = \dfrac{\beta(z)}{\lVert\beta\rVert}$
$\Big[\sigma(x)\Big] = \frac{1}{s}$	$\lVert\sigma\rVert$	$\sigma_*(z) = \dfrac{\sigma(z)}{\lVert\sigma\rVert}$

$$l_0 = diam\Omega, \quad \mu_0 = \max_{x\in\Omega} |\mu(x)|, \quad ||\beta|| = \max_{x\in\Omega} |\beta(x)|, \quad ||\sigma|| = \max_{x\in\Omega} |\sigma(x)|$$

Замість величин, що мають одиниці виміру, підставимо добутки безрозмірних величин на відповідні норми. Позначимо Z простір безрозмірних координат z. Отримаємо рівняння

$$-\frac{\mu_0}{l_0}\frac{d}{dz}\left(\mu_*(z)\frac{du(z)}{dz}\right)-\beta_*(z)||\beta||\frac{du(z)}{dz}-\sigma_*(z)||\sigma||u(z)l_0=f(z)l_0 \ \ \forall z\in Z \tag{8}$$

та крайові умови

$$-\mu_*(z)\frac{\mu_0}{l_0}\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=a}=\alpha[u(a)-u_a], \tag{9}$$

$$-\mu_*(z)\frac{\mu_0}{l_0}\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=b}=\gamma[u(b)-u_b], \tag{10}$$

Щоб перейти до запису із безрозмірними критеріями – помножимо на l_0 та поділимо на μ_0

$$-\frac{d}{dz}\left(\mu_*(z)\frac{du(z)}{dz}\right)-\frac{||\beta||l_0}{\mu_0}\beta_*(z)\frac{du(z)}{dz}+\frac{||\beta||\ ||\sigma||\,l_0^2}{\mu_0\,||\beta||}\sigma_*(z)u(z)=\frac{l_0^2}{\mu_0}f(z) \ \ \forall z\in Z \tag{11}$$

та крайові умови

$$-\mu_*(z)\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=a}=\frac{\alpha l_0}{\mu_0}[u(a)-u_a], \tag{12}$$

$$-\mu_*(z)\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=b}=\frac{\gamma l_0}{\mu_0}[u(b)-u_b], \tag{13}$$

Остаточний безрозмірний вигляд крайової задачі:

$$-\frac{d}{dz}\left(\mu_*(z)\frac{du(z)}{dz}\right)+Pe[\beta_*(z)\frac{du(z)}{dz}+Sh\ \sigma_*(z)u(z)]=f_*(z) \tag{14}$$

$$-\mu(z)\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=a}=\alpha_*[u(a)-u_a], \tag{15}$$

$$-\mu(z)\frac{du(z)}{dz}\bigg|_{z=b}=\gamma_*[u(b)-u_b], \tag{16}$$

Окрім чисел Пекле (Pe) та Струхаля (Sh) отримуємо ще декілька безрозмірних критеріїв:

$$Pe=\frac{||\beta||l_0}{\mu_0},\quad Sh=\frac{||\sigma||l_0}{||\beta||},\quad f_*(z)=\frac{l_0^2}{\mu_0}f(z),\quad \alpha_*=\frac{\alpha l_0}{\mu_0},\quad \gamma_*=\frac{\gamma l_0}{\mu_0}.$$

$$Pe=\frac{||\beta||}{\frac{\mu_0}{l_0}}=\frac{\text{швидкість конвективного перенесення}}{<<\text{швидкість дифузійного перенесення}>>} \tag{17}$$

$$Sh=\frac{||\sigma||l_0}{||\beta||}=\frac{\text{швидкість біохімічної реакції}}{<\text{швидкість конвективного перенесення}>} \tag{18}$$

4 Кусково-лінійні апроксимації розв'язку

Зафіксуємо деяке $N \in \mathbb{N}$. Поділимо відрізок $[a, b]$ на N скінченних елементів $K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$ так, що $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$.

Визначимо базисні функції Куранта на отриманому розбитті відріза $[a, b]$.

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & x \in (x_1, x_N]. \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}]; \\ \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in (x_{i-1}, x_i]; \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}]; \\ 0, & x \in (x_{i+1}, x_N]. \\ i = 1, ..., N-1 \end{cases} \tag{19}$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}]; \\ \dfrac{x - x_{N-1}}{h}, & x \in (x_{N-1}, x_N]. \end{cases}$$

Спростимо визначення функцій Куранта, ввівши позначення:

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{x - x_i}{h} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, ..., N-1. \tag{20}$$

Адаптуємо формули відповідно до введеного позначення:

$$\frac{x - x_{i-1}}{h} = \omega_{i-\frac{1}{2}}(x),$$

$$\frac{x_{i+1} - x}{h} = \frac{x_i + h - x}{h} = 1 + \frac{x_i - x}{h} = 1 - \frac{x - x_i}{h} = 1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x).$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 1 - \omega_{\frac{1}{2}}(x), & x \in [x_0, x_1]; \\ 0, & x \in (x_1, x_N]. \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}]; \\ \omega_{i-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{i-1}, x_i]; \\ 1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x), & (x_i, x_{i+1}]; \\ 0 & (x_{i+1}, b]. \end{cases} \tag{21}$$

$$i = 1, ..., N-1$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{N-1}]; \\ \omega_{N-\frac{1}{2}}, & x \in (x_{N-1}, x_N]. \end{cases}$$

Запишемо кусково-лінійну апроксимацію розв'язку

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} q_i \varphi_i(x), \tag{22}$$

де N - кількість скінченних елементів, $\varphi_i(x)$ - функції Куранта, $q_i \in \mathbb{R}$ - коефіцієнти розвинення.

На кожному скінченному елементі $K_{i+\frac{1}{2}} = [x_i, x_{i+1}]$ апроксимація розв'язку має вигляд:

$$u_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_i\varphi_i(x) + q_{i+1}\varphi_{i+1}(x) = q_i(1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)) + q_{i+1}\omega_{i+\frac{1}{2}(x)}. \tag{23}$$

Виконаємо декілька перетворень, щоб отримати вигляд апроксимації, зручний для обчислень:

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_i\varphi_i(x) + q_{i+1}\varphi_{i+1}(x) = q_i(1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)) + q_{i+1}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = \\ = q_i + \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)h_{i+\frac{1}{2}}\frac{(q_{i+1} - q_i)}{h_{i+\frac{1}{2}}} = q_i + h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \tag{24}$$

Трансформуємо q_i:

$$q_i = \frac{q_{i+1} + q_i}{2} - \frac{q_{i+1} - q_i}{2h_{i+\frac{1}{2}}}h_{i+\frac{1}{2}} = q_{i+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \tag{25}$$

Підставимо (25) в (24):

$$\begin{aligned} u_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_i + h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_{i+\frac{1}{2}} - h_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} + h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = \\ = q_{i+\frac{1}{2}} + \left[\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\right]h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{26}$$

Уточнимо наявні позначення:

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{27}$$

$$q_{i+\frac{1}{2}} := \frac{q_i + q_{i+1}}{2}, \quad \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} := \frac{q_{i+1} - q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \tag{28}$$

$$u'(x) \approx u'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \tag{29}$$

Отже, апроксимація розв'язку на скінченному елементі $[x_i, x_{i+1}]$ має вигляд:

$$u_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_{i+\frac{1}{2}} + \left[\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\right]h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \tag{30}$$

Апроксимація розв'язку кусково-лінійними функціями:

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N-1}\left(q_{i+\frac{1}{2}} + \left[\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\right]h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{31}$$

5 Система лінійних алгебричних рівнянь

Пригадаємо постановку варіаційної задачі

$$\begin{cases} \text{Знайти } u \in V \text{ таку, що} \\ c(u,v) =< l, v > \forall v \in V \end{cases}$$

$$c(u,v) := \int_a^b \Big[\mu(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + \beta(x)\frac{du(x)}{dx}v(x) + \sigma(x)u(x)v(x)\Big]dx + \alpha u(a)v(a) + \gamma u(b)v(b)$$

$$< l, v >:= \int_a^b f(x)v(x)dx + \alpha u_a v(a) + \gamma u_b v(b)$$

Для обчислення елементів білінійної форми та лінійного функціоналу використаємо теорему про середнє

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u,v) := \mu_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)v'(x)dx + \beta_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)v(x)dx + \\ + \sigma_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x)v(x)dx + \alpha u(a)v(a) + \gamma u(b)v(b) \tag{32}$$

$$< l_{i+\frac{1}{2}}, v >:= f_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \alpha u_a v(a) + \gamma u_b v(b) \tag{33}$$

Враховуючи $u'(x) \approx u'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \dot{q}_{i+\frac{1}{2}}$ та вигляд апроксимації розв'язку

$$u_{i+\frac{1}{2}}(x) = q_{i+\frac{1}{2}} + \Big[\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\Big]h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}$$

ще раз застосуємо теорему про середнє:

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,v) := \mu_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x)dx + \beta_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx \\ + \sigma_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big[q_{i+\frac{1}{2}} + \Big(\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\Big)h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\Big]v(x)dx + \alpha u(a)v(a) + \gamma u(b)v(b)$$

Здійснимо декілька перетворень:

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,v) := \mu_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x)dx + \beta_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \sigma_{i+\frac{1}{2}}q_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \\ + \sigma_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \Big(\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2}\Big)h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}v(x)dx$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,v) := \mu_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x)dx + \beta_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \sigma_{i+\frac{1}{2}}q_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx - \\ - \sigma_{i+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}}\frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \sigma_{i+\frac{1}{2}}h_{i+\frac{1}{2}}\dot{q}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)v(x)dx$$

Згрупуємо доданки:

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, v) := \{\mu\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x)dx + \{\beta\dot{q} + \sigma q - \sigma h\dot{q}\frac{1}{2}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \\ + \{\sigma h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)v(x)dx \tag{34}$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, v) := \{\mu\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v'(x)dx + \{\sigma q + [\beta - \frac{\sigma h}{2}]\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} v(x)dx + \\ + \{\sigma h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)v(x)dx \tag{35}$$

Пригадаємо вигляд функції Куранта $\varphi_i(x)$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 0, & x \in [x_0, x_{i-1}]; \\ \omega_{i-\frac{1}{2}}(x), & x \in (x_{i-1}, x_i]; \\ 1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x), & (x_i, x_{i+1}]; \\ 0 & (x_{i+1}, b]. \end{cases} \tag{36}$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, ..., N-1. \tag{37}$$

$$\omega'_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, ..., N-1. \tag{38}$$

У варіаційному формулюванні замість v використаємо функції Куранта

$$c(u_h, \varphi_i) = c_{i-\frac{1}{2}}(u_h, \omega_{i-\frac{1}{2}}) + c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, 1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}) = \\ = c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, 1) - c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, \omega_{i+\frac{1}{2}}) + c_{i-\frac{1}{2}}(u_h, \omega_{i-\frac{1}{2}}) \tag{39}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}dx = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{x^2}{2} - x_i x\right)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{x_{i+1}^2}{2} - x_{i+1}x_i - \frac{x_i^2}{2} + x_i^2\right) = \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2h_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} \tag{40}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_{i-\frac{1}{2}}(x)dx == \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{2} \tag{41}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega^2_{i+\frac{1}{2}}(x)dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x^2-2x_ix+x_i^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}dx = \frac{1}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\Big(\frac{x^3}{3} - x_ix^2 + x_i^2x\Big)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\
&= \frac{1}{3h^2_{i+\frac{1}{2}}}\big(x_{i+1}^3 - 3x_ix_{i+1}^2 + 3x_i^2x_{i+1} - x_i^3\big) = \frac{(x_{i+1}-x_i)^3}{3h^2_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3}
\end{aligned} \tag{42}
$$

$$
\int_{x_{i-1}}^{x_1} \omega^2_{i-\frac{1}{2}}(x)dx = \frac{h_{i-\frac{1}{2}}}{3} \tag{43}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,1) &= \{\mu\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\ 0 + \{\sigma q + [\beta - \frac{\sigma h}{2}]\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} h_{i+\frac{1}{2}} + \{\sigma h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} = \\
&= \{\sigma q h + \beta\dot{q}h - \frac{\sigma\dot{q}h^2}{2} + \frac{\sigma\dot{q}h^2}{2}\}_{i+\frac{1}{2}} = \{h(\sigma q + \beta\dot{q})\}_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{44}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,\omega_{i+\frac{1}{2}}) &= \{\mu\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}} + \{\sigma q + [\beta - \frac{\sigma h}{2}]\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \{\sigma h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3} = \\
&= \{\frac{\sigma q h}{2} + \dot{q}[\mu + \frac{\beta h}{2} + \frac{\sigma h^2}{12}]\}_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{45}
$$

$$
c_{i-\frac{1}{2}}(u_h,\omega_{i-\frac{1}{2}}) = \{\frac{\sigma q h}{2} + \dot{q}[\mu + \frac{\beta h}{2} + \frac{\sigma h^2}{12}]\}_{i-\frac{1}{2}} \tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
c(u_h,\varphi_i) &= c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,1) - c_{i+\frac{1}{2}}(u_h,\omega_{i+\frac{1}{2}}) + c_{i-\frac{1}{2}}(u_h,\omega_{i-\frac{1}{2}}) = \{h(\sigma q + \beta\dot{q})\}_{i+\frac{1}{2}} - \\
&- \{\frac{\sigma q h}{2} + \dot{q}[\mu + \frac{\beta h}{2} + \frac{\sigma h^2}{12}]\}_{i+\frac{1}{2}} + \{\frac{\sigma q h}{2} + \dot{q}[\mu + \frac{\beta h}{2} + \frac{\sigma h^2}{12}]\}_{i-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{i+\frac{1}{2}} &:= \frac{q_i + q_{i+1}}{2}, \quad \dot{q}_{i+\frac{1}{2}} := \frac{q_{i+1} - q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} \\
q_{i-\frac{1}{2}} &:= \frac{q_{i-1} + q_i}{2}, \quad \dot{q}_{i-\frac{1}{2}} := \frac{q_i - q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
c(u_h,\varphi_i) = \{h\sigma\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{q_i+q_{i+1}}{2} + \{h\beta\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{q_{i+1}-q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \\
-\{\frac{\sigma h}{2}\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{q_i+q_{i+1}}{2} - \{\mu+\frac{\beta h}{2}+\frac{\sigma h^2}{12}\}_{i+\frac{1}{2}}\frac{q_{i+1}-q_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \\
+\{\frac{\sigma h}{2}\}_{i-\frac{1}{2}}\frac{q_{i-1}+q_i}{2} + \{\mu+\frac{\beta h}{2}+\frac{\sigma h^2}{12}\}_{i-\frac{1}{2}}\frac{q_i-q_{i-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
c(u_h,\varphi_i) = \{\frac{h\sigma}{2}\}_{i+\frac{1}{2}}q_i + \{\frac{h\sigma}{2}\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1} + \{\beta\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1} - \{\beta\}_{i+\frac{1}{2}}q_i - \\
-\{\frac{\sigma h}{4}\}_{i+\frac{1}{2}}q_i - \{\frac{\sigma h}{4}\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1} - \{\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{12}\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1} + \{\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{12}\}_{i+\frac{1}{2}}q_i + \\
+\{\frac{\sigma h}{4}\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1} + \{\frac{\sigma h}{4}\}_{i-\frac{1}{2}}q_i + \{\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{12}\}_{i-\frac{1}{2}}q_i - \{\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{12}\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
c(u_h,\varphi_i) = \Big\{-\frac{\mu}{h}-\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{6}\Big\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1} + \\
+\Big\{\Big[\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{3}\Big]_{i-\frac{1}{2}} + \Big[\frac{\mu}{h}-\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{3}\Big]_{i+\frac{1}{2}}\Big\}q_i + \\
+\Big\{-\frac{\mu}{h}+\frac{\beta}{2}+\frac{\sigma h}{6}\Big\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

$$
\begin{aligned}
c(u_h,\varphi_i) = \frac{\mu}{h}\Big\{-1-\frac{\beta h}{2\mu}+\frac{\sigma h^2}{6\mu}\Big\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1} + \\
+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{\beta h}{2\mu}+\frac{\sigma h^2}{3\mu}\Big]_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{h}\Big[1-\frac{\beta h}{2\mu}+\frac{\sigma h^2}{3\mu}\Big]_{i+\frac{1}{2}}\Big\}q_i + \\
+\frac{\mu}{h}\Big\{-1+\frac{\beta h}{2\mu}+\frac{\sigma h^2}{6\mu}\Big\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}
\end{aligned}
\tag{52}
$$

$$c(u_h,\varphi_i)=\frac{\mu}{h}\Big\{-1+\frac{\beta h}{6\mu}\Big(\frac{\sigma h}{\beta}-3\Big)\Big\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1}+$$

$$+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{\beta h}{6\mu}\Big(\frac{2\sigma h}{\beta}+3\Big)\Big]_{i-\frac{1}{2}}+\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{\beta h}{6\mu}\Big(\frac{2\sigma h}{\beta}-3\Big)\Big]_{i+\frac{1}{2}}\Big\}q_i+ \tag{53}$$

$$+\frac{\mu}{h}\Big\{-1+\frac{\beta h}{6\mu}\Big(\frac{\sigma h}{\beta}+3\Big)\Big\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}$$

$$Pe:=\frac{\beta h}{\mu},\quad Sh:=\frac{\sigma h}{\beta} \tag{54}$$

Остаточно отримуємо таку систему рівнянь

$$\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{1}{6}Pe(2Sh-3)\Big]\Big\}_{\frac{1}{2}}q_0+\alpha q_0+ \tag{55}$$

$$+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]\Big\}_{\frac{1}{2}}q_1=\frac{1}{2}[hf]_{\frac{1}{2}}+\alpha u_a$$

$$\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(Sh-3)\Big]\Big\}_{i-\frac{1}{2}}q_{i-1}+$$

$$+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]_{i-\frac{1}{2}}+\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{1}{6}Pe(2Sh-3)\Big]_{i+\frac{1}{2}}\Big\}q_i+ \tag{56}$$

$$+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(Sh+3)\Big]\Big\}_{i+\frac{1}{2}}q_{i+1}=\frac{1}{2}\Big\{[hf]_{i-\frac{1}{2}}[hf]_{i+\frac{1}{2}}\Big\}$$

$$\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[-1+\frac{1}{6}Pe(Sh-3)\Big]\Big\}_{N-\frac{1}{2}}q_{N-1}+\Big\{\frac{\mu}{h}\Big[1+\frac{1}{6}Pe(2Sh+3)\Big]\Big\}_{N-\frac{1}{2}}q_N+ \tag{57}$$

$$+\gamma q_N=\frac{1}{2}[hf]_{N-\frac{1}{2}}+\gamma u_b$$

6 Апостеріорний оцінювач похибки

Розглянемо кусково-квадратичну бабл-функцію

$$b(x) = 4\Big(1 - \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)\Big)\omega_{i+\frac{1}{2}}(x), \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, ..., N-1 \tag{58}$$

$$\omega_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$b(x) = 4\left(\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(x - x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\right)$$

Обчислимо скалярні добутки $(b, b)_{i+\frac{1}{2}}$, $(b', b)_{i+\frac{1}{2}}$ та $(b', b')_{i+\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}(b, b)_{i+\frac{1}{2}} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)b(x)dx = 16\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(x - x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\right)^2 dx = \\ &= 16\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x - x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}} - 2\frac{(x - x_i)^3}{h^3_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{(x - x_i)^4}{h^4_{i+\frac{1}{2}}} d(x - \\ &= 16\left(\frac{(x - x_i)^3}{3h^2_{i+\frac{1}{2}}} - 2\frac{(x - x_i)^4}{4h^3_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{(x - x_i)^5}{5h^4_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\ &= 16\left(\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} + \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{5}\right) = \frac{8h_{i+\frac{1}{2}}}{15}\end{aligned} \tag{59}$$

$$b'(x) = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}} - 8\frac{x - x_i}{h^2_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right) \tag{60}$$

$$\begin{aligned}
(b', b')_{i+\frac{1}{2}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b'(x)dx &= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right)^2 dx = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 - 4\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} + 4\frac{(x - x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}} d(x - x_i) = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\left((x - x_i) - 2\frac{(x - x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + 4\frac{(x - x_i)^3}{3h^2_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\left(h_{i+\frac{1}{2}} - 2h_{i+\frac{1}{2}} + \frac{4h_{i+\frac{1}{2}}}{3}\right) = \frac{16}{3h_{i+\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{61}$$

$$\begin{aligned}
(b', b)_{i+\frac{1}{2}} &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b(x)dx = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(1 - 2\frac{x - x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right)\left((x - x_i) - \frac{(x - x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right)dx = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) - 3\frac{(x - x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} + 2\frac{(x - x_i)^3}{h^2_{i+\frac{1}{2}}} d(x - x_i) = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{(x - x_i)^2}{2} - \frac{(x - x_i)^3}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{(x - x_i)^4}{2h^2_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = \\
&= \frac{16}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{h^2_{i+\frac{1}{2}}}{2} - h^2_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h^2_{i+\frac{1}{2}}}{2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Виведемо вигляд білінійної форми та лінійного функціоналу

$$\begin{aligned}
&c_{i+\frac{1}{2}}(b, b) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mu(x)b'(x)b'(x) + \beta(x)b'(x)b(x) + \sigma(x)b(x)b(x)dx = \\
&\mu(x_{i+\frac{1}{2}})\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b'(x)dx + \beta(x_{i+\frac{1}{2}})\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b(x)dx + \sigma(x_{i+\frac{1}{2}})\int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)b(x)dx = \\
&= \mu_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b'(x)dx + \beta_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)b(x)dx + \sigma_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)b(x)dx = \\
&= \mu_{i+\frac{1}{2}}(b', b')_{i+\frac{1}{2}} + \beta_{i+\frac{1}{2}}(b', b)_{i+\frac{1}{2}} + \sigma_{i+\frac{1}{2}}(b, b)_{i+\frac{1}{2}} = \mu_{i+\frac{1}{2}}\frac{16}{3h_{i+\frac{1}{2}}} + \sigma_{i+\frac{1}{2}}\frac{8h_{i+\frac{1}{2}}}{15} = \\
&= \left\{\frac{16}{3}\frac{\mu}{h} + \frac{8}{15}\sigma h\right\}_{i+\frac{1}{2}} = \left\{\frac{8}{15}\frac{\mu}{h}\left(\frac{16}{3}\frac{15}{8} + \frac{\sigma h^2\beta}{\mu\beta}\right)\right\}_{i+\frac{1}{2}} = \left\{\frac{8}{15}\frac{\mu}{h}(10 + PeSh)\right\}_{i+\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$Pe = \frac{\beta h}{\mu},\ Sh = \frac{\sigma h}{\beta}$$

$$< l_{i+\frac{1}{2}}, b >= \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\Big((x-x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}\Big)dx =$$

$$\frac{4f(x_{i+\frac{1}{2}})}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}dx =$$

$$= \frac{4f_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}d(x-x_i) =$$

$$\frac{4f_{i+\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{(x-x_i)^2}{2} - \frac{(x-x_i)^3}{3h_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= 4f_{i+\frac{1}{2}}\Big(\frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{2} - \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3}\Big) = \frac{2h_{i+\frac{1}{2}}f_{i+\frac{1}{2}}}{3} = \Big\{\frac{2hf}{3}\Big\}_{i+\frac{1}{2}}$$

Розглянемо задачу про похибку

$$\begin{cases} \text{Задано } E_h \subset V\backslash V_h, \ \ dim E_h = N, \\ \\ \text{та апроксимацію Гальоркіна } u_h \in V_h. \\ \\ \text{Знайти похибку } e_h \in E_h \text{ таку, що} \\ \\ c(e_h, v) =< c(u_h, v), v > \forall v \in E_h \end{cases} \tag{62}$$

Побудуємо розв'язок, використавши схему Гальоркіна

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, v) + c_{i+\frac{1}{2}}(e_h, v) =< l_{i+\frac{1}{2}}, v >$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(e_h, v) =< l_{i+\frac{1}{2}}, v > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, v)$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(e_h, b) =< l_{i+\frac{1}{2}}, b > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b) = \Big\{\frac{2hf}{3} - (\beta\dot{q}+\sigma q)\frac{2h}{3}\Big\}_{i+\frac{1}{2}} = \Big\{\frac{2h}{3}(f - \beta\dot{q} - \sigma q)\Big\}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b) = \{\mu\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)dx + \{\beta\dot{q} + \sigma q - \sigma h\dot{q}\frac{1}{2}\}_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)dx +$$
$$+ \{\sigma h\dot{q}\}_{i+\frac{1}{2}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)b(x)dx = \{\big(\beta\dot{q} + \sigma q - \sigma h\dot{q}\frac{1}{2}\big)\frac{2h}{3} + \sigma h\dot{q}\frac{h}{3}\}_{i+\frac{1}{2}} = \{(\beta\dot{q} + \sigma q)\frac{2h}{3}\}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} b'(x)dx = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} 1 - 2\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}d(x-x_i) = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left((x-x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} = 0$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} b(x)dx = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i) - \frac{(x-x_i)^2}{h_{i+\frac{1}{2}}}d(x-x_i) = \frac{4}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{(x-x_i)^2}{2} - \frac{(x-x_i)^3}{3h_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$
$$= 2h_{i+\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{2h_{i+\frac{1}{2}}}{3}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_{i+\frac{1}{2}}(x)b(x)dx = 4\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}}\left(\frac{x-x_i}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(x-x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}}\right)dx =$$

$$= 4\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{(x-x_i)^2}{h^2_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(x-x_i)^3}{h^3_{i+\frac{1}{2}}}d(x-x_i) = 4\left(\frac{(x-x_i)^3}{3h^2_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{(x-x_i)^4}{4h^3_{i+\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$= \frac{4h_{i+\frac{1}{2}}}{3} - h_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_{i+\frac{1}{2}}}{3}$$

$$c_{i+\frac{1}{2}}(e_h, b) =< l_{i+\frac{1}{2}}, b > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b) = \left\{\frac{2h}{3}(f - \beta\dot{q} - \sigma q)\right\}_{i+\frac{1}{2}}$$

Шукатимемо наближення $\varepsilon_h \in E_h$ до істинної похибки апроксимації $e_h := u - u_h$, $e_h \in V \backslash V_h$.

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x) \tag{63}$$

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} c_{i+\frac{1}{2}}(b, b) =< l_{i+\frac{1}{2}}, b > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b)$$

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \frac{< l_{i+\frac{1}{2}}, b > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b)}{c_{i+\frac{1}{2}}(b, b)} = \frac{\left\{\frac{2h}{3}(f - \beta\dot{q} - \sigma q)\right\}_{i+\frac{1}{2}}}{\left\{\frac{16}{3}\frac{\mu}{h} + \frac{8}{15}\sigma h\ \right\}_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$\lambda_{i+\frac{1}{2}} = \varepsilon_h(x_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{< l_{i+\frac{1}{2}}, b > -c_{i+\frac{1}{2}}(u_h, b)}{c_{i+\frac{1}{2}}(b, b)} = \frac{\left\{\frac{2h}{3}(f - \beta\dot{q} - \sigma q)\right\}_{i+\frac{1}{2}}}{\left\{\frac{8}{15}\frac{\mu}{h}(10 + PeSh)\right\}_{i+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{5h^2}{4\mu}\left\{\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$e_h(x) \approx \varepsilon_h(x) := \sum_{i=0}^{N-1} \frac{5h^2}{4\mu}\left\{\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}} b_{i+\frac{1}{2}}(x)$$

$$||\varepsilon_{i+\frac{1}{2}}||^2_V = \lambda^2_{i+\frac{1}{2}} c_{i+\frac{1}{2}}(b, b) = \frac{25}{16}\left\{\frac{h^4}{\mu^2}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)^2}\quad \frac{8}{15}\frac{\mu}{h}(10 + PeSh)\right\}_{i+\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{5}{6}\left\{\frac{h^3}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}}$$

$$||\varepsilon_h||^2_V = \frac{5}{6}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\frac{h^3}{\mu}\frac{(f - \beta\dot{q} - \sigma q)^2}{(10 + PeSh)}\right\}_{i+\frac{1}{2}} \tag{64}$$

7 Стратегія адаптування сітки

На кожному скінченному елементі визначатимемо індикатор:

$$\eta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{||\varepsilon_h||_{i+\frac{1}{2}} \cdot 100\%}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum\limits_{j=0}^{N-1}\left(||u_h||^2_{i+\frac{1}{2}} + ||\varepsilon_h||^2_{i+\frac{1}{2}}\right)}} = \frac{||\varepsilon_h||_{i+\frac{1}{2}}\sqrt{N} \cdot 100\%}{\sqrt{||u_h||^2_V - ||\varepsilon_h||^2_V}} \tag{65}$$

тут

$$||u_h||^2_{i+\frac{1}{2}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_h^{'}(x)]^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dot{q}^2_{i+\frac{1}{2}} dx = [h\dot{q}^2]_{i+\frac{1}{2}} \tag{66}$$

В центр ваги елемента, на якому значення індикатора перевищуватиме задане значення похибки додаємо новий вузол сітки – відповідно отримуємо два скінченних елементи. Продовжуємо, поки на всіх елементах величина індикатора буде маншою від заданої похибки або рівною їй.

Індикатор похибки визначає, який відсоток становить норма похибки від середнього значення норми розв'язку на кожному скінченному елементі.

8 Чисельні результати

Проведемо деякі обчислювальні експерименти для того, щоб показати можливості запропонованої адаптивної схеми МСЕ.

Приклад 1

Вхідні дані: $\mu = 1$, $\beta = 100$, $\sigma = 0$, $f = 100$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 10000$, $\gamma = 10000$, $u_a = 0$, $u_b = 0$. Початкова сітка: $N = 4$.

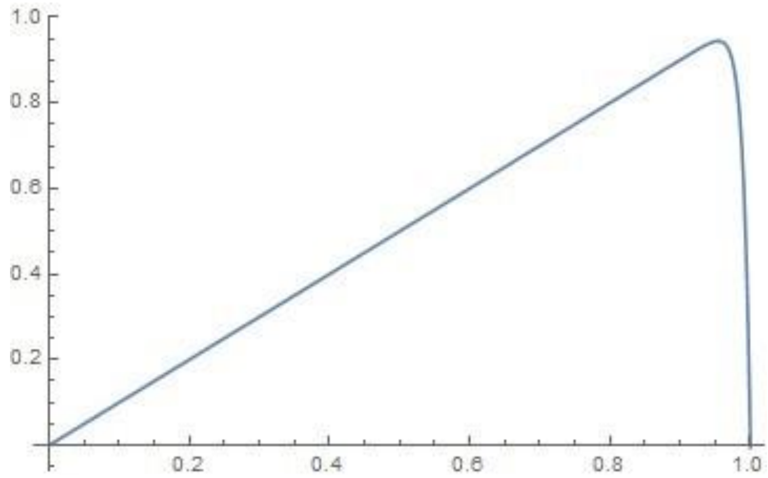

Рис. 3: Точний розв'язок $u(x) = \dfrac{1001}{1100e^{100} - 1000} - \dfrac{1001}{1100e^{100} - 1000}e^{100x} + x$

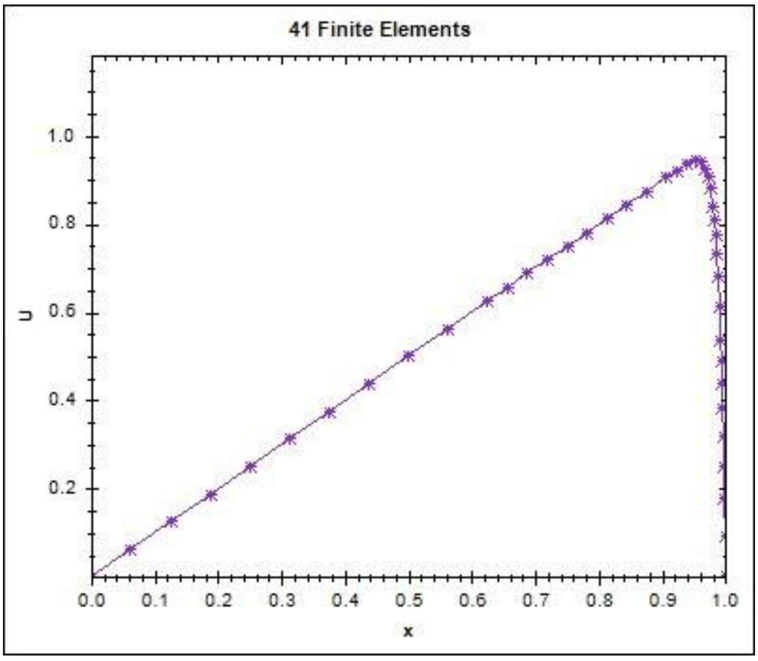

Рис. 4: Наближений розв'язок: $\eta = 10\%$, сітка з 41-го елемента, 9 кроків адаптування

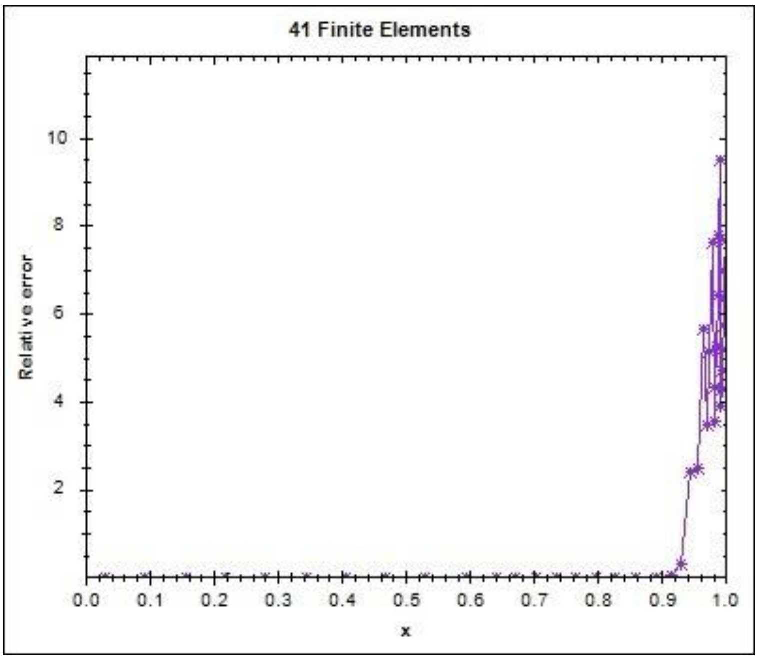

Рис. 5: Розподіл значень індикаторів η

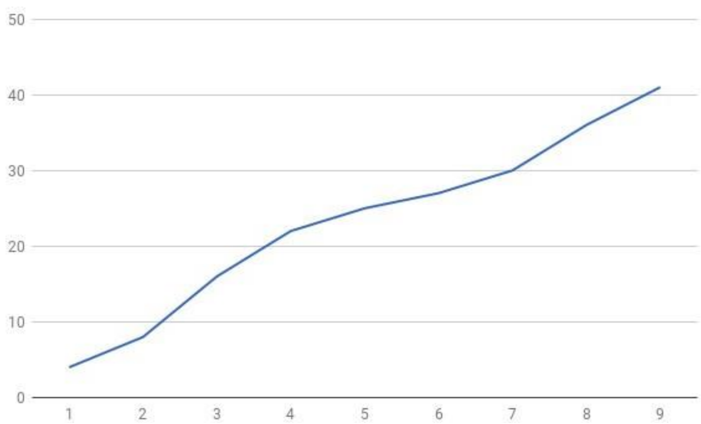

Рис. 6: Зміна кількості скінченних елементів сітки в процесі адаптування

Приклад 2

Вхідні дані: $\mu = 0.0025$, $\beta = 0$, $\sigma = 1$, $f = cos^2(\pi x) + 0.005\pi^2 cos(2\pi x)$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha = 10000$, $\gamma = 10000$, $u_a = 0$, $u_b = 0$. Початкова сітка: $N = 4$.

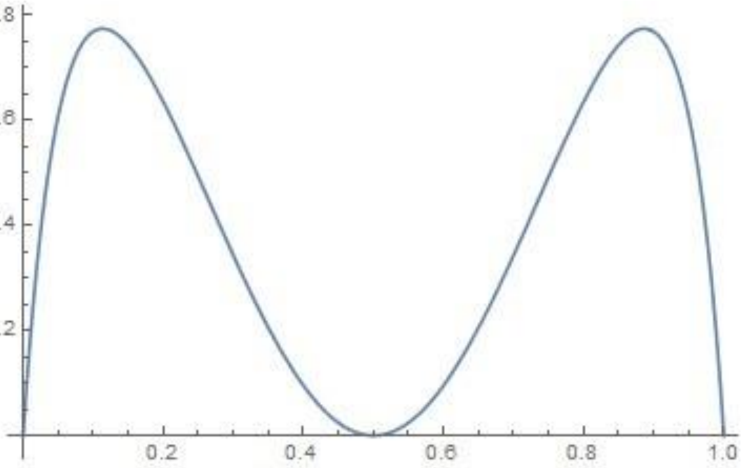

Рис. 7: Точний розв'язок $u(x) = cos^2(\pi x) - \dfrac{exp(-(1-x)/\sqrt{\mu}) + exp(-x/\sqrt{\mu})}{-1/\sqrt{\mu}}$

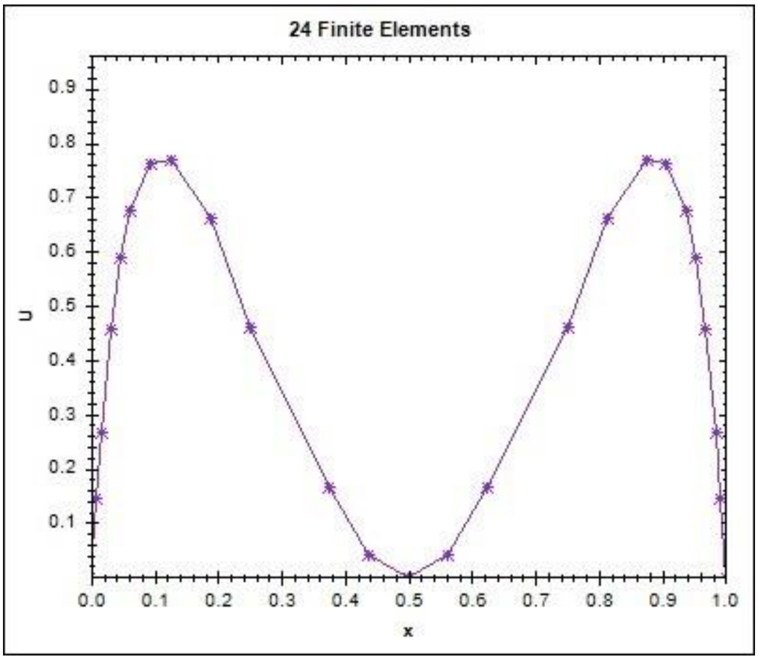

Рис. 8: Наближений розв'язок: $\eta = 1\%$, сітка з 24-х елементів, 6 кроків адаптування

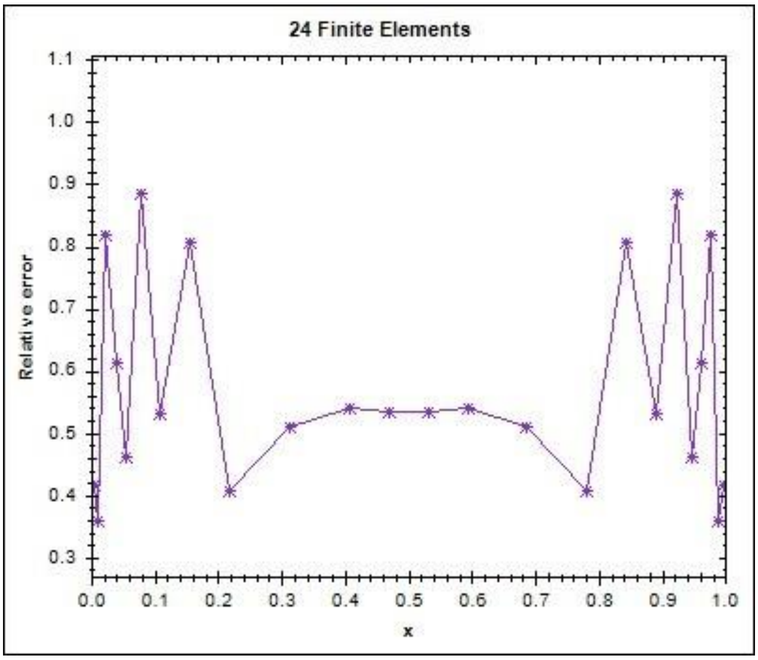

Рис. 9: Розподіл значень індикаторів η

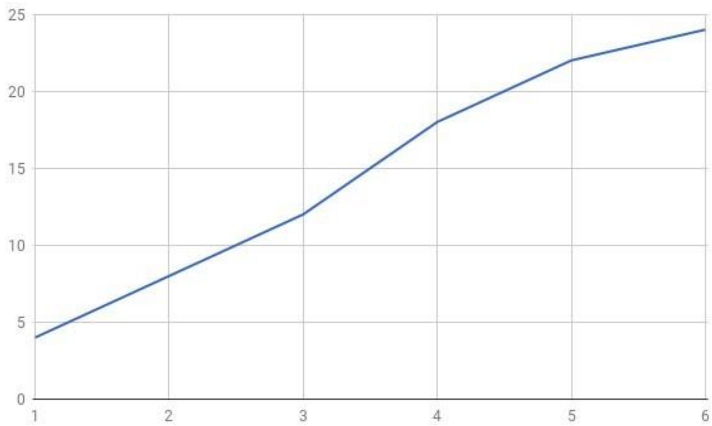

Рис. 10: Зміна кількості скінченних елементів сітки в процесі адаптування

Висновки

Побудовано h-адаптивну схему МСЕ. Основою схеми є класичний метод скінченних елементів з кусково-лінійними апроксимаціями розв'язку на нерівномірних сітках. Узагальнимо переваги h-адаптивної схеми:

- можливість знаходити чисельний розв'язок крайової задачі зі значенням похибки, що не перевищує заданого значення;
- згущення сітки лише в тих ділянках, де похибка обчислення є більшою, ніж це потрібно.

В результаті обчислювальних експериментів ми дійшли таких висновків:

- апостеріорний оцінювач досить точно визначає похибку і тому $h-$адаптивна схема є збіжною;
- $h-$адаптивна схема забезпечує надійний механізм обчислення наближеного розв'язку зі заздалегідь заданою точністю для сингулярно-збурених крайових задач.

Література

[1] Абрамов Є., Ліщіна О., Шинкаренко Г., Ямелинець А. Кусково-лінійні апроксимації $h-$адаптивного методу скінченних елементів для одновимірних крайових задач / Є.Абрамов, О.Ліщіна, Г.Шинкаренко, А.Ямелинець // Вісник Львівського університету. Серія прикл. матем. та інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 3-18.

[2] Иванов М.Г. Размерность и подобие / М.Г.Иванов – Долгопрудный, 2013. – С. 29-32.

[3] Дытнерский Ю.И. Процессы и аппараты химической технологии. Ч.1 / Ю.И. Дытнерский. – М.: Химия. – С. 64-75.