

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ  
ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ  
з навчальної дисципліни  
**«Ймовірісно-статистичні методи інформаційних технологій»**

Тема «Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги  
Маркова»

Здобувач освіти гр. КН-24-1, Бояринцова П. С.  
Викладач Сидоренко В. М.

**Тема.** Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова.

**Мета:** набути практичних навичок у розв'язанні задач щодо випадкових процесів, СМО та ланцюгів Маркова.

### 1.1 Постановка завдання.

Ознайомитися з теоретичними відомостями з теми. Виконати індивідуальні завдання згідно з варіантом. Відповісти на контрольні питання.

### 1.2 Розв'язання задачі згідно зі своїм варіантом.

**Задача 3.** Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів–Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для  $n = 2$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 1$  і знайти ймовірності станів.  $P_{зан}$ ,  $P_0$ ,  $A$ ,  $w$ ,  $T_{обс}$ ,  $T_{відг}$  (рис. 1).

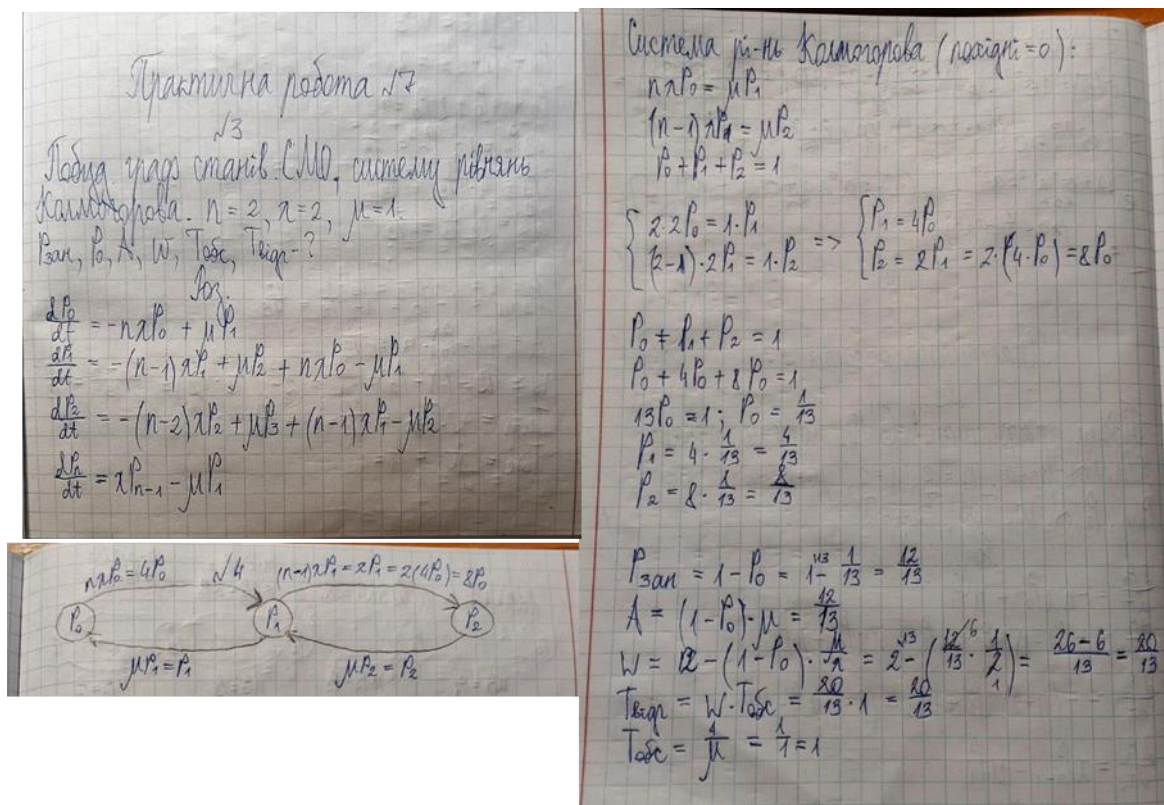


Рисунок 1 – розв'язання задачі 3

**Задача 4.** Задано матрицю переходу  $P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$ . Знайти матрицю переходу  $P_2$  (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \quad P_2 = ? \\
 P_n &= P_1^n; \quad P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 & 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,8 \\ 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,2 & 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рисунок 2 – розв'язання задачі 4

**Задача 5.** Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів–Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для  $n = 4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 1$  і знайти ймовірності станів.  $P_{зан}$ ,  $P_0$ ,  $A$ ,  $w$ ,  $T_{обс}$ ,  $T_{відг}$  (рис. 3).

Робити граф станів СМО, систему р-н Колмогорова.  $n=4$ ,  $\lambda=1$ ,  $\mu=1$   
 $P_{зан}$ ,  $P_0$ ,  $A$ ,  $w$ ,  $T_{обс}$ ,  $T_{відг}$  - ?

$$\begin{aligned}
 P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1 \\
 P_0 + 4P_0 + 12P_0 + 24P_0 + 24P_0 &= 1 \\
 65P_0 &= 1; \quad P_0 = \frac{1}{65} \\
 P_1 &= 4 \cdot \frac{1}{65} = \frac{4}{65}; \quad P_2 = 12 \cdot \frac{1}{65} = \frac{12}{65} \\
 P_3 &= P_4 = 24 \cdot \frac{1}{65} = \frac{24}{65} \\
 P_{зан} &= 1 - P_0 = \frac{64}{65} \\
 A &= (1 - P_0) \cdot \mu = \frac{64}{65} \\
 w &= n - (1 - P_0) \cdot \frac{\mu}{\lambda} = 4 - \left(\frac{64}{65} \cdot 1\right) = \frac{196}{65} = \frac{69}{16} \\
 T_{обс} &= \frac{1}{\mu} = 1 \\
 T_{відг} &= w \cdot T_{обс} = \frac{49}{16}
 \end{aligned}$$

Рисунок 3 – розв'язання задачі 5

**Задача 6.** Задано матрицю переходу  $P_1 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$ . Знайти матрицю переходу  $P_2$  (рис. 4).

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_1^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,4 & 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,6 \\ 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,4 & 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,6 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рисунок 4 – розв'язання задачі 6

**Задача 7.** Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів–Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для  $n = 4$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$  і знайти ймовірності станів.  $P_{зан}$ ,  $P_0$ ,  $A$ ,  $w$ ,  $T_{обс}$ ,  $T_{відг}$  (рис. 5).

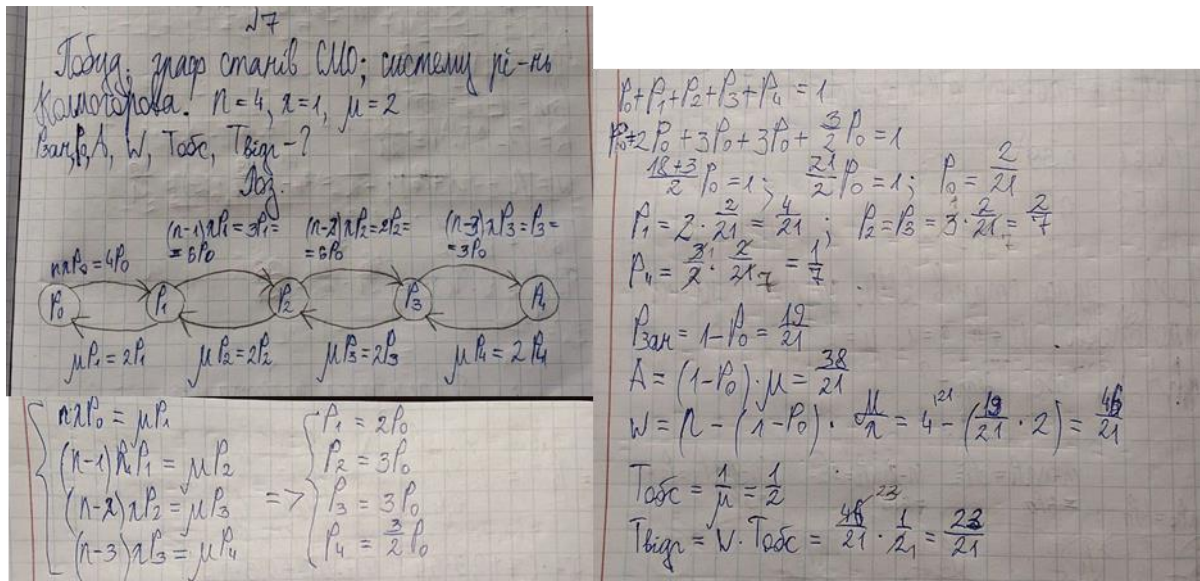


Рисунок 5 – розв'язання задачі 7

### 1.3 Отримані результати.

У ході практичної роботи №7 було досліджено найпростіший потік подій та властивості пуассонівського процесу, побудовано графі станів СМО типу М/М/1 для різних значень параметрів, складено та розв'язано рівняння Колмогорова, визначено стаціонарні ймовірності станів, часи обслуговування та відгуку системи. Також було розглянуто принципи роботи дискретних однорідних ланцюгів Маркова і обчислено матриці переходів для кількох випадків. Отримані результати дозволили оцінити завантаження системи, пропускну здатність, середню кількість заявок у системній фазі та ефективність роботи Web-сервера.

### 1.4 Відповіді на контрольні питання.

#### 1. Що таке СМО і які основні елементи входять у її структуру?

Система масового обслуговування (СМО) — це модель, у якій заявки надходять до системи, очікують у черзі (за наявності), обробляються обслуговуючими приладами та залишають систему. Основні елементи: потік заявок (вхідний потік), черга, канал(и) обслуговування, дисципліна обслуговування та потік виходу.



## **2. Які властивості має найпростіший потік подій і які його характеристики можна виміряти?**

Найпростіший потік має три властивості: стаціонарність, відсутність наслідків (незалежні прирости) та ординарність. Його характеристики: інтенсивність  $\lambda$ , розподіл числа подій за Пуассоном та експоненціальний розподіл міжподієвих інтервалів.

## **3. Які основні характеристики СМО визначають її продуктивність?**

Продуктивність визначають: інтенсивність надходження  $\lambda$ , інтенсивність обслуговування  $\mu$ , ймовірність простою  $P_0$ , завантаження системи  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ , пропускна здатність  $A$ , середня довжина черги, середній час очікування та час перебування заявки в системі.

## **4. Які фактори впливають на інтенсивність потоку подій в СМО?**

Інтенсивність  $\lambda$  залежить від кількості джерел заявок, їхньої активності, зовнішніх умов, ймовірності виникнення подій та принципів генерації запитів у моделі.

## **5. Як визначається інтенсивність обслуговування в СМО?**

Інтенсивність обслуговування  $\mu$  — це середня кількість заявок, які система може обробити за одиницю часу. Зазвичай  $\mu = \frac{1}{T_{\text{обс}}}$ , де  $T_{\text{обс}}$  — середній час обробки однієї заявки.

## **6. Які властивості мають ланцюги Маркова, і як вони застосовуються в теорії СМО?**

Ланцюги Маркова характеризуються відсутністю пам'яті: майбутній стан залежить тільки від поточного, а не від попередніх. У теорії СМО вони описують переходи між кількістю заявок у системі, що дозволяє обчислювати ймовірності станів та показники ефективності.

## **7. Що таке стаціонарний режим роботи СМО і чому він важливий для аналізу?**

Стаціонарний режим — це стан, коли статистичні характеристики системи не змінюються з часом. Він важливий, бо саме у цьому режимі можна обчислити постійні ймовірності станів, середні значення черги та пропускної здатності.

## **8. Як визначається ймовірність втрати заявки в системі масового обслуговування?**

Ймовірність втрати визначається для систем із обмеженою чергою або без черги. Це ймовірність стану, коли система повністю зайнята і нова заявка не може бути прийнята. Для М/М/1/К вона дорівнює  $P_K$  — ймовірності максимального стану.

## **9. Що таке ефективність обслуговування в СМО і як її вимірюють?**

Ефективність характеризує, наскільки система здатна обробляти заявки без затримок і втрат. Вимірюють через пропускну здатність  $A$ , коефіцієнт завантаження  $\rho$ , ймовірність простою, середній час очікування та відгуку.

## **10. Як визначається коефіцієнт завантаження СМО і чому він важливий?**

Коефіцієнт завантаження  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  (або з урахуванням числа каналів). Він показує, яку частку часу система зайнята. Якщо  $\rho \geq 1$ , виникає нескінченне зростання черги — система не справляється з навантаженням, тому  $\rho$  є ключовим показником стабільності та ефективності СМО.