

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ
ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
з навчальної дисципліни
«Ймовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

Тема «Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги
Маркова»

Здобувач освіти гр. КН-24-1, Бояринцова П. С.
Викладач Сидоренко В. М.

Кременчук 2025

Тема. Найпростіший потік подій. Елементи теорії СМО. Ланцюги Маркова.

Мета: набути практичних навичок у розв'язанні задач щодо випадкових процесів, СМО та ланцюгів Маркова.

1.1 Постановка завдання.

Ознайомитися з теоретичними відомостями з теми. Виконати індивідуальні завдання згідно з варіантом. Відповісти на контрольні питання.

1.2 Розв'язання задачі згідно зі своїм варіантом.

Задача 3. Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів–Web-сервер» (система M/M/1) і систему рівнянь Колмогорова для $n = 2$, $\lambda = 2$, $\mu = 1$ і знайти ймовірності станів. $P_{\text{зан}}$, P_0 , A , w , $T_{\text{обс}}$, $T_{\text{відг}}$ (рис. 1).

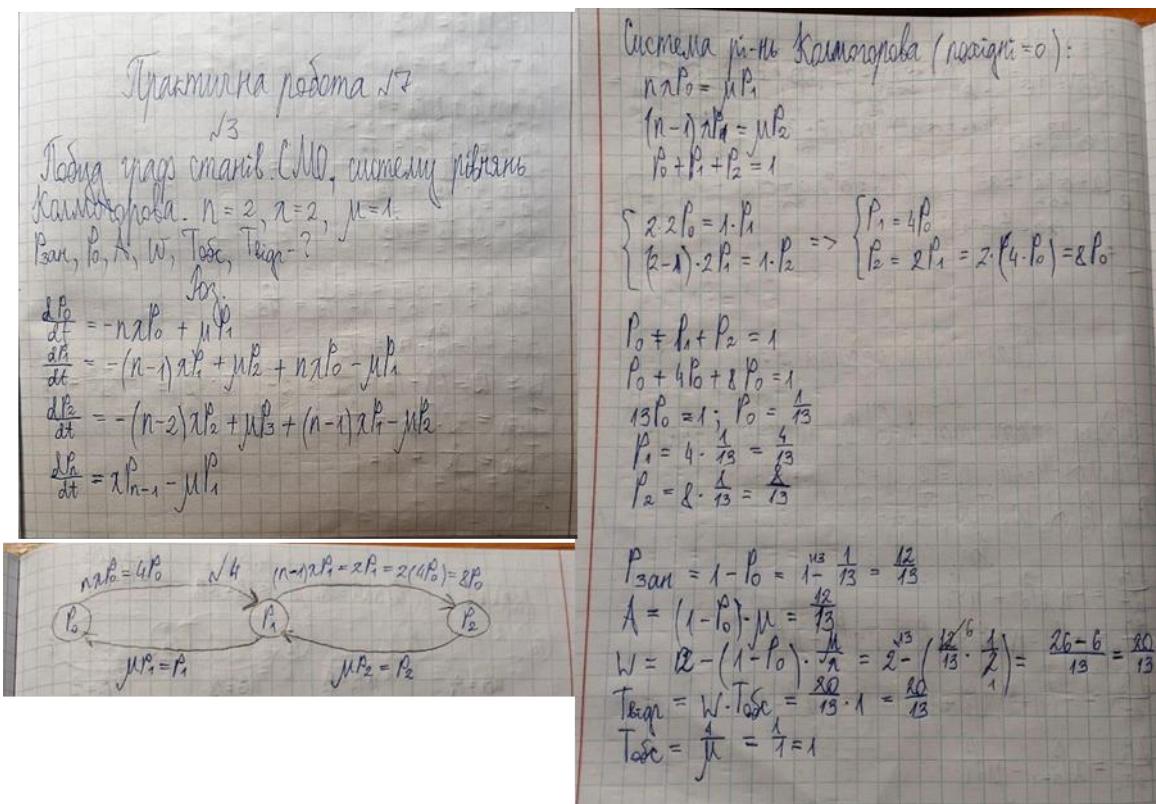


Рисунок 1 – розв'язання задачі 3

Задача 4. Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу P_2 (рис. 2).

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} & P_2 = ? \\
 P_n &= P_1^n; \quad P_2 = P_1^2 = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,2 & 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,8 \\ 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,2 & 0,2 \cdot 0,5 + 0,8 \cdot 0,8 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,35 & 0,65 \\ 0,26 & 0,74 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рисунок 2 – розв’язання задачі 4

Задача 5. Побудувати граф станів СМО «n-клієнтів–Web-сервер» (система M/M/1) і систему рівнянь Колмогорова для $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$ і знайти ймовірності станів. $P_{\text{зан}}$, P_0 , A , w , $T_{\text{обс}}$, $T_{\text{відг}}$ (рис. 3).

Побуд. граф станів. СМО, систему рівн. Колмогорова. $n=4$, $\lambda=1$, $\mu=1$. Розл., P_0 , A , w , $T_{\text{обс}}$, $T_{\text{відг}}$?

$$\begin{aligned}
 \lambda P_0 &= P_1 & \frac{\lambda}{(n-1)\lambda} P_1 &= P_2 & \frac{(n-2)\lambda}{2\lambda} P_2 &= P_3 & \frac{(n-3)\lambda}{3\lambda} P_3 &= P_4 \\
 \mu P_1 &= P_1 & \mu P_2 &= P_2 & \mu P_3 &= P_3 & \mu P_4 &= P_4
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda P_0 = P_1 \\ (n-1)\lambda P_1 = \mu P_2 \\ (n-2)\lambda P_2 = \mu P_3 \\ (n-3)\lambda P_3 = \mu P_4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 = \lambda P_0 \\ P_2 = 12 P_0 \\ P_3 = 24 P_0 \\ P_4 = 24 P_0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 &= 1 \\
 P_0 + 4P_0 + 12P_0 + 24P_0 + 24P_0 &= 1 \\
 65P_0 &= 1; \quad P_0 = \frac{1}{65} \\
 P_1 &= 4 \cdot \frac{1}{65} = \frac{4}{65}; \quad P_2 = 12 \cdot \frac{1}{65} = \frac{12}{65} \\
 P_3 &= P_4 = 24 \cdot \frac{1}{65} = \frac{24}{65}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{зан}} &= 1 - P_0 = \frac{64}{65} \\
 A &= (1 - P_0) \cdot \mu = \frac{64}{65} \\
 W &= n - (1 - P_0) / \mu = 4 - \left(\frac{64}{65} \cdot 1 \right) = \frac{196}{65} = \frac{49}{16} \\
 T_{\text{обс}} &= \frac{1}{\mu} = 1 \\
 T_{\text{відг}} &= W \cdot T_{\text{обс}} = \frac{49}{16}
 \end{aligned}$$

Рисунок 3 – розв’язання задачі 5

Задача 6. Задано матрицю переходу $P_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$. Знайти матрицю переходу P_2 (рис. 4).

$$\begin{aligned}
 P_2 &= P_1^2 = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,7 \cdot 0,7 + 0,3 \cdot 0,4 & 0,7 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,6 \\ 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,4 & 0,4 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,6 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рисунок 4 – розв’язання задачі 6

Задача 7. Побудувати граф станів СМО « n -клієнтів–Web-сервер» (система М/М/1) і систему рівнянь Колмогорова для $n = 4$, $\lambda = 1$, $\mu = 2$ і знайти ймовірності станів. $P_{\text{зан}}$, P_0 , A , w , $T_{\text{обс}}$, $T_{\text{відг}}$ (рис. 5).

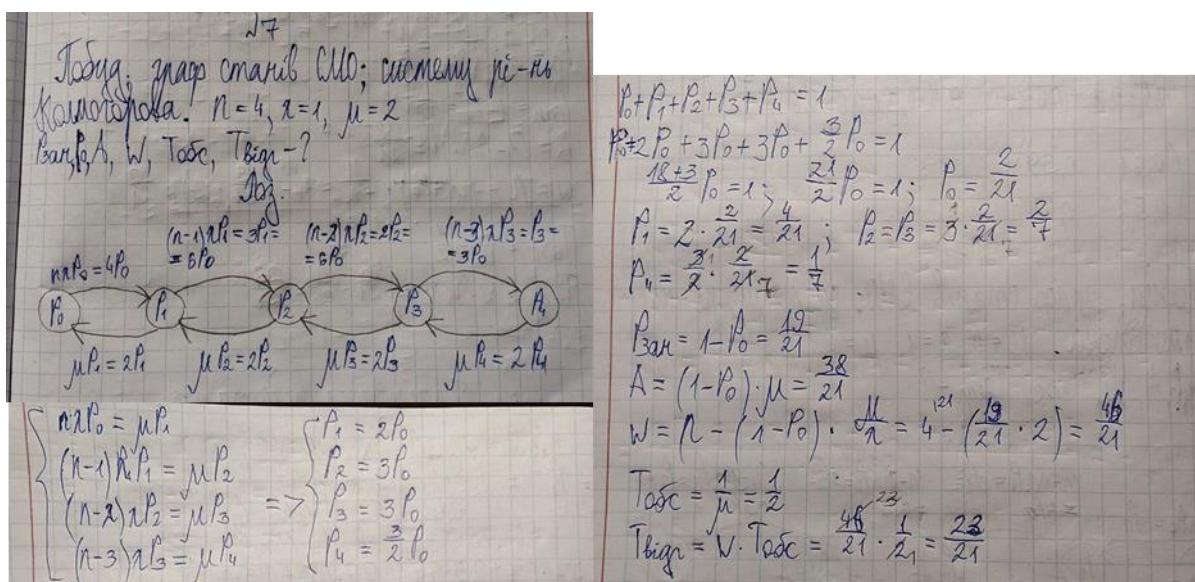


Рисунок 5 – розв’язання задачі 7

1.3 Отримані результати.

У ході практичної роботи №7 було досліджено найпростіший потік подій та властивості пуассонівського процесу, побудовано графи станів СМО типу М/М/1 для різних значень параметрів, складено та розв’язано рівняння Колмогорова, визначено стаціонарні ймовірності станів, часи обслуговування та відгуку системи. Також було розглянуто принципи роботи дискретних однорідних ланцюгів Маркова і обчислено матриці переходів для кількох випадків. Отримані результати дозволили оцінити завантаження системи, пропускну здатність, середню кількість заявок у системній фазі та ефективність роботи Web-сервера.

1.4 Відповіді на контрольні питання.

1. Що таке СМО і які основні елементи входять у її структуру?

Система масового обслуговування (СМО) — це модель, у якій заявки надходять до системи, очікують у черзі (за наявності), обробляються обслуговуючими приладами та залишають систему. Основні елементи: потік заявок (вхідний потік), черга, канал(и) обслуговування, дисципліна обслуговування та потік виходу.

2. Які властивості має найпростіший потік подій і які його характеристики можна вимірюти?

Найпростіший потік має три властивості: стаціонарність, відсутність наслідків (незалежні приrostи) та ординарність. Його характеристики: інтенсивність λ , розподіл числа подій за Пуассоном та експоненціальний розподіл міжподієвих інтервалів.

3. Які основні характеристики СМО визначають її продуктивність?

Продуктивність визначають: інтенсивність надходження λ , інтенсивність обслуговування μ , ймовірність простою P_0 , завантаження системи $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, пропускна здатність A , середня довжина черги, середній час очікування та час перебування заявки в системі.

4. Які фактори впливають на інтенсивність потоку подій в СМО?

Інтенсивність λ залежить від кількості джерел заявок, їхньої активності, зовнішніх умов, ймовірності виникнення подій та принципів генерації запитів у моделі.

5. Як визначається інтенсивність обслуговування в СМО?

Інтенсивність обслуговування μ — це середня кількість заявок, які система може обробити за одиницю часу. Зазвичай $\mu = \frac{1}{T_{обc}}$, де $T_{обc}$ — середній час обробки однієї заявки.

6. Які властивості мають ланцюги Маркова, і як вони застосовуються в теорії СМО?

Ланцюги Маркова характеризуються відсутністю пам'яті: майбутній стан залежить тільки від поточного, а не від попередніх. У теорії СМО вони описують переходи між кількістю заявок у системі, що дозволяє обчислювати ймовірності станів та показники ефективності.

7. Що таке стаціонарний режим роботи СМО і чому він важливий для аналізу?

Стаціонарний режим — це стан, коли статистичні характеристики системи не змінюються з часом. Він важливий, бо саме у цьому режимі можна обчислити постійні ймовірності станів, середні значення черги та пропускної здатності.

8. Як визначається ймовірність втрати заяви в системі масового обслуговування?

Ймовірність втрати визначається для систем із обмеженою чергою або без черги. Це ймовірність стану, коли система повністю зайнята і нова заявка не може бути прийнята. Для $M/M/1/K$ вона дорівнює P_K — ймовірності максимального стану.

9. Що таке ефективність обслуговування в СМО і як її вимірюють?

Ефективність характеризує, наскільки система здатна обробляти заяви без затримок і втрат. Вимірюють через пропускну здатність A , коефіцієнт завантаження ρ , ймовірність простою, середній час очікування та відгуку.

10. Як визначається коефіцієнт завантаження СМО і чому він важливий?

Коефіцієнт завантаження $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (або з урахуванням числа каналів). Він показує, яку частку часу система зайнята. Якщо $\rho \geq 1$, виникає нескінченне зростання черги — система не справляється з навантаженням, тому ρ є ключовим показником стабільності та ефективності СМО.