МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ
ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
з навчальної дисципліни
**«Ймовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»**

Тема «Закони розподілу функцій випадкових величин. Композиція законів розподілу. Розподіл екстремальних значень»

Здобувач освіти гр. КН-24-1, Бояринцова П. С.
Викладач Сидоренко В. М.

Кременчук 2025

**Тема.** Закони розподілу функцій випадкових величин. Композиція законів розподілу.  Розподіл екстремальних значень.

**Мета:** набути практичних навичок у розв’язанні задач з обчислення функцій від випадкових величин, їх законів розподілу та числових характеристик.

## 1.1 Постановка завдання.

Ознайомитися з теоретичними відомостями з теми. Виконати індивідуальні завдання згідно з варіантом. Відповісти на контрольні питання.

## 1.2 Розв’язання задачі згідно зі своїм варіантом.

**Задача 3.** 3. Час між запитами до серверу комп’ютерної мережі є випадковою величиною $X$, що має експоненціальний закон розподілу з параметром $\lambda = 10$. З метою дослідження степені використання серверу необхідно встановити закон розподілу максимумів випадкової величини $X$, тобто деякої випадкової величини $Z = max(X)$.   (рис. 1).

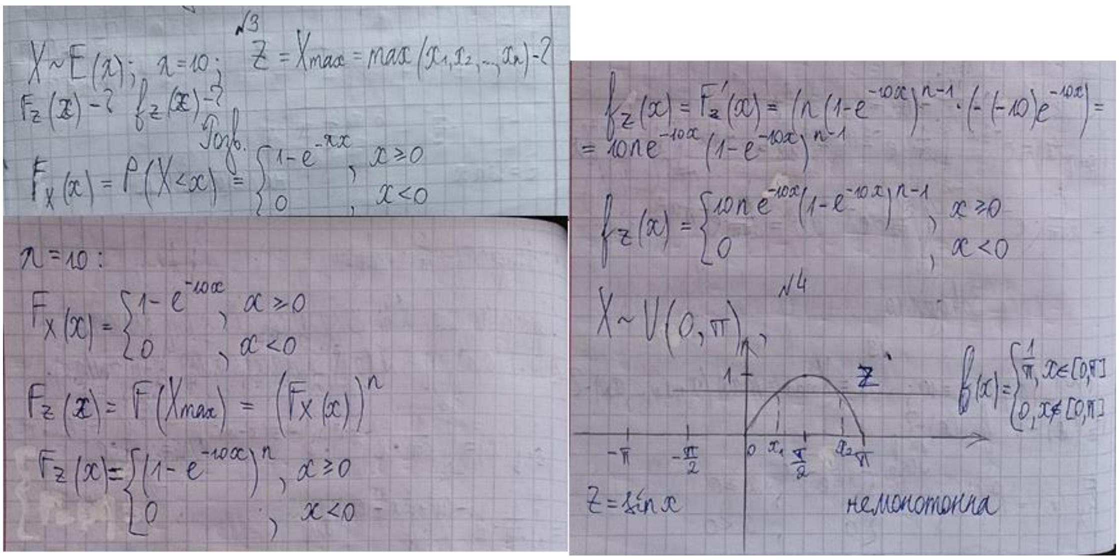
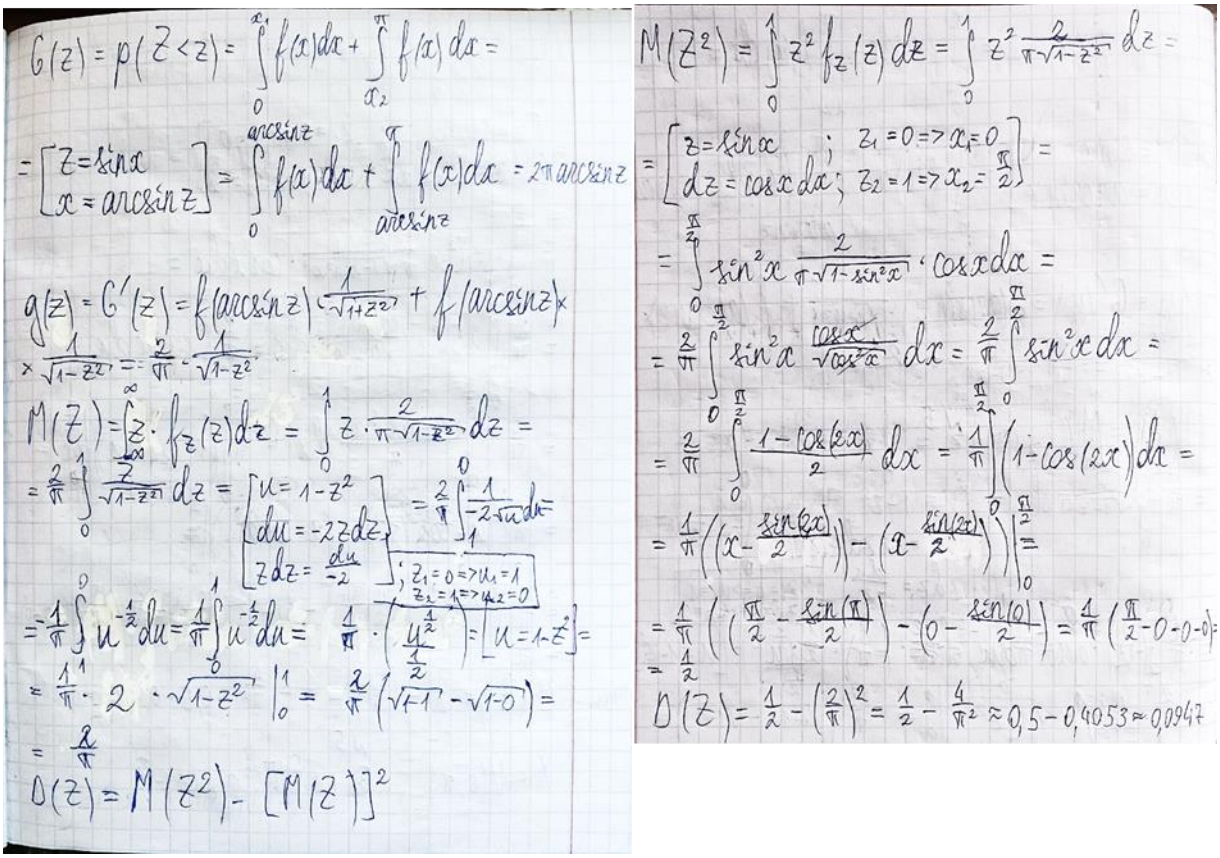


Рисунок 1 – розв’язання задачі 3

**Задача 4.** Випадкова величина $X$ має рівномірний розподіл з параметрами $a = 0$, $b = \pi$. Знайти функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини $Z = sin(X)$, обчислити математичне сподівання $M(Z)$ та дисперсію $D(Z)$. (рис. 2)



$G(z)=p(Z<z)=\int_0^{x_1} f(x)dx+\int_{x_2}^{\pi} f(x)dx=$

$=\begin{bmatrix} z=\sin x \\ x=\arcsin z\end{bmatrix} = \int_0^{\arcsin z} f(x)dx+\int_{\arcsin z}^{\pi} f(x)dx = 2\pi \arcsin z$

$g(z)=G'(z)=f(\arcsin z)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}+f(\arcsin z)\times$

$\times\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$M(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z\cdot f_z(z)dz=\int_0^1 z\cdot\frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}dz=$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}dz=\begin{bmatrix}u=1-z^2\\ du=-2zdz\\ zdz=\frac{du}{-2}\end{bmatrix}; \begin{matrix} z_1=0=>u_1=1\\ z_2=1=>u_2=0\end{matrix} = \frac{2}{\pi}\int_1^0 \frac{1}{-2\sqrt{u}}du=$

$=-\frac{1}{\pi}\int_1^0 u^{-\frac12}du=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-\frac12}du= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{u^{\frac12}}{\frac12}\right)=[u=1-z^2]=$

$=\frac{1}{\pi}\cdot 2\cdot\sqrt{1-z^2}\Big|_0^1=\frac{2}{\pi}(\sqrt{1-1}-\sqrt{1-0})=$

$=\frac{2}{\pi}$

$D(Z)=M(Z^2)-[M(Z)]^2$

$M(Z^2)=\int_0^1 z^2 f_z(z)dz=\int_0^1 z^2\frac{2}{\pi\sqrt{1-z^2}}dz=$

$=\begin{bmatrix} z=\sin x; & z_1=0=>x_1=0\\ dz=\cos x dx; & z_2=1=>x_2=\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\cos x dx=$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x dx=$

$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos(2x))dx=$

$=\frac{1}{\pi}\left(\left(x-\frac{\sin(2x)}{2}\right)-\left(x-\frac{\sin(2x)}{2}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$

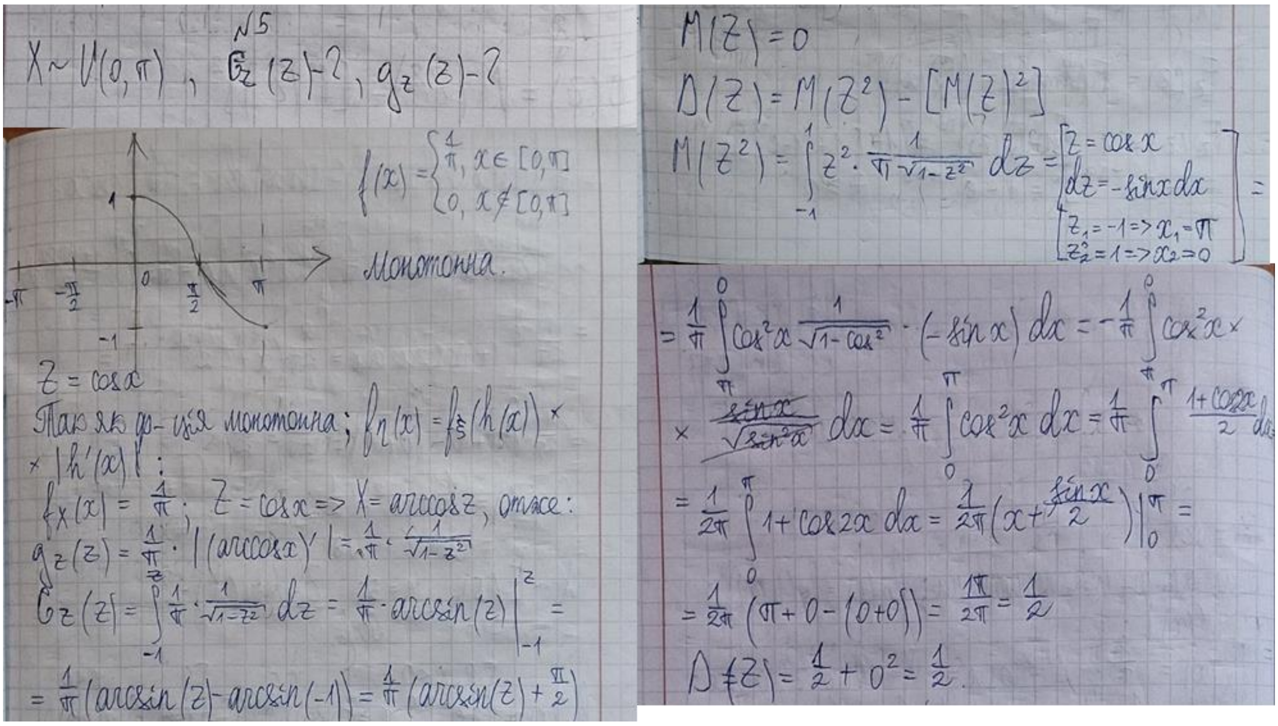
$=\frac{1}{\pi}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\sin(\pi)}{2}\right)-\left(0-\frac{\sin(0)}{2}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0-0-0\right)=$

$=\frac12$

$D(Z)=\frac12-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2=\frac12-\frac{4}{\pi^2}\approx 0,5-0,4053\approx 0,0947$

Рисунок 2 – розв’язання задачі 4

**Задача 5.** Випадкова величина $X$ має рівномірний розподіл з параметрами $a = 0$, $b = \pi$. Знайти функції розподілу та щільності розподілу випадкової величини $Z = cos(X)$, обчислити математичне сподівання $M(Z)$ та дисперсію $D(Z)$. (рис. 3):



№5

$X\sim U(0,\pi)$, $G_Z(z)-?$, $g_z(z)-?$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, x\in[0,\pi]\\ 0, x\notin[0,\pi]\end{cases}$



$Z=\cos x$

Так як ф-ція монотонна; $f_\eta(x)=f_\xi(h(x))\times$ $\times|h'(x)|$:

$f_X(x)=\frac{1}{\pi}$; $Z=\cos x => X=\arccos z$, отже:

$g_Z(z)=\frac{1}{\pi}\cdot|(\arccos x)'|=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

$G_Z(z)=\int_{-1}^{z}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}dz=\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin(z)\Big|_{-1}^{z}=$

$=\frac{1}{\pi}(\arcsin(z)-\arcsin(-1))=\frac{1}{\pi}\left(\arcsin(z)+\frac{\pi}{2}\right)$

$M(Z)=0$

$D(Z)=M(Z^2)-[M(Z)^2]$

$M(Z^2)=\int_{-1}^{1}z^2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-z^2}}dz=\begin{bmatrix}z=\cos x\\dz=-\sin x dx\\ z_1=-1=>x_1=\pi\\ z_2=1=>x_2=0\end{bmatrix}=$

$=\frac{1}{\pi}\int_\pi^0\cos^2 x\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2}}\cdot(-\sin x)dx=-\frac{1}{\pi}\int_\pi^0\cos^2 x\times$

$\times\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos^2 x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{1+\cos 2x}{2}dx=$

$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 1+\cos 2x dx=\frac{1}{2\pi}\left(x+\frac{\sin x}{2}\right)\Big|_0^\pi=$

$=\frac{1}{2\pi}(\pi+0-(0+0))=\frac{1\pi}{2\pi}=\frac12$

$D(Z)=\frac12+0^2=\frac12$.

Рисунок 3 – розв’язання задачі 5

**Задача 6.** Час між запитами до серверу комп'ютерної мережі є випадковою величиною $X$, що має експоненціальний закон розподілу з параметром $\lambda = 5$. З метою дослідження степені використання серверу необхідно встановити закон розподілу мінімумів випадкової величини $X$, тобто деякої випадкової величини $Z = min(X)$. (рис. 4)

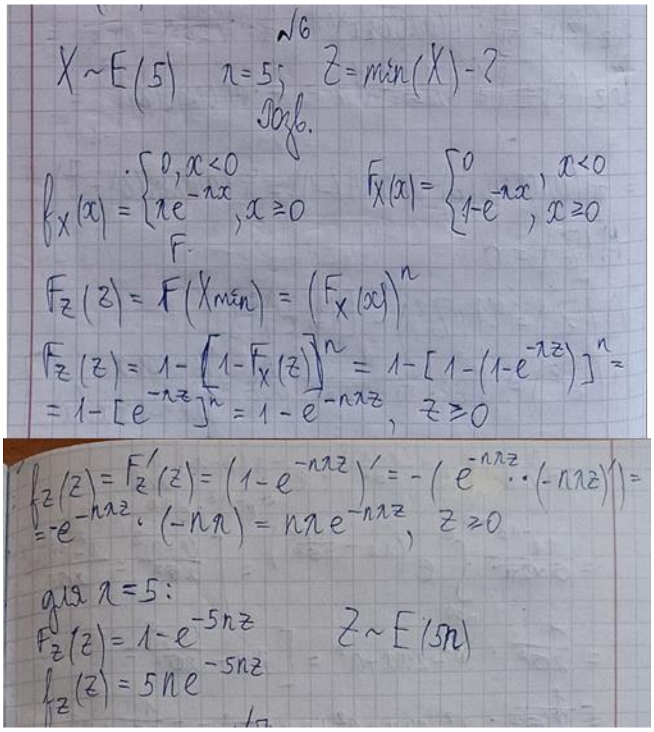
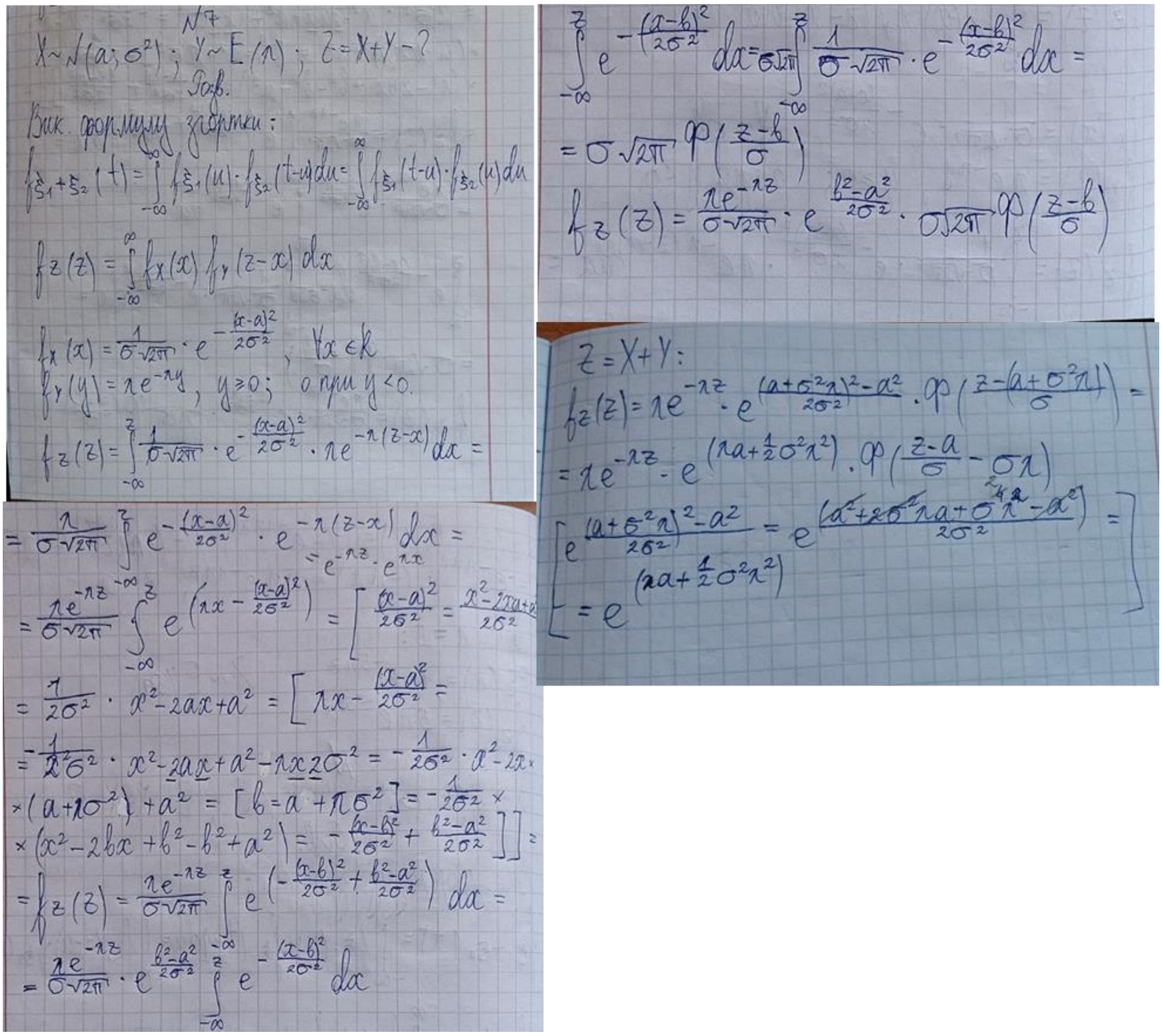


Рисунок 4 – розв'язання задачі 6

**Задача 7.** Знайти закон розподілу. (рис. 5): $Z = X + Y$. $X \sim N(a; \sigma^2)$ , $Y \sim E(\lambda)$.


№7

$X \sim N(a;\sigma^2)$; $Y \sim E(\lambda)$; $Z = X+Y$ – ?

Розв.

Вик. формулу згортки:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(u)\cdot f_{\xi_2}(t-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(t-u)\cdot f_{\xi_2}(u)\,du$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, f_Y(z-x)\,dx$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\quad \forall x\in R$$

$$f_Y(y)=\lambda e^{-\lambda y},\ y\geq 0;\quad 0 \text{ при } y<0.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx=$$

$$=\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot e^{-\lambda(z-x)}\,dx= \quad [=e^{-\lambda z}\cdot e^{\lambda x}]$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{\left(\lambda x-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)}=\left[\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}=\frac{x^2-2xa+a^2}{2\sigma^2}\right.$$

$$=\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2-2ax+a^2=\left[\lambda x-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}=\right.$$

$$=-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2-2ax+a^2-\lambda x 2\sigma^2=-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot x^2-2x\cdot(a+\lambda\sigma^2)+a^2=[b=a+\lambda\sigma^2]=-\frac{1}{2\sigma^2}\times(x^2-2bx+b^2-b^2+a^2)=-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}+\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}\Big]\Big]=$$

$$=f_Z(z)=\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{\left(-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}+\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}\right)}dx=$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}dx=\sigma\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi\left(\frac{z-b}{\sigma}\right)$$

$$f_Z(z)=\frac{\lambda e^{-\lambda z}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{b^2-a^2}{2\sigma^2}}\cdot\sigma\sqrt{2\pi}\,\Phi\left(\frac{z-b}{\sigma}\right)$$

$Z=X+Y$:

$$f_Z(z)=\lambda e^{-\lambda z}\cdot e^{\frac{(a+\sigma^2\lambda)^2-a^2}{2\sigma^2}}\cdot\Phi\left(\frac{z-(a+\sigma^2\lambda)}{\sigma}\right)=$$

$$=\lambda e^{-\lambda z}\cdot e^{\left(\lambda a+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right)}\cdot\Phi\left(\frac{z-a}{\sigma}-\sigma\lambda\right)$$

$$\left[e^{\frac{(a+\sigma^2\lambda)^2-a^2}{2\sigma^2}}=e^{\frac{(a^2+2\sigma^2\lambda a+\sigma^4\lambda^2-a^2)}{2\sigma^2}}=\right.$$

$$\left.=e^{\left(\lambda a+\frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2\right)}\right]$$

Рисунок 5 – розв’язання задачі 7

## 1.3 Отримані результати.

У ході практичної роботи №2 було опрацьовано методи побудови законів розподілу для функцій випадкових величин, включаючи випадки перетворень однієї та кількох незалежних величин. Було досліджено, як за допомогою функцій перетворення та зворотних функцій можна отримати щільність та функцію розподілу нової випадкової величини, а також вивчено формули для обчислення розподілу суми незалежних випадкових величин (згортка щільностей). Крім того, розглянуто закони розподілу екстремальних значень вибірки – максимальних та мінімальних – що є важливим для аналізу пікових навантажень та ризиків у практичних задачах. Отримані знання дозволяють моделювати та прогнозувати поведінку складних випадкових процесів, будувати аналітичні та числові характеристики нових випадкових величин, а також застосовувати ці методи для аналізу та оптимізації систем різного типу.

## 1.4 Відповіді на контрольні питання.

1. **Як знання закону розподілу значень пікових навантажень у комп'ютерній мережі підприємства може допомогти при моделюванні та аналізі пікових навантажень?**

Знання закону розподілу пікових навантажень дозволяє оцінювати ймовірності виникнення критичних станів мережі, планувати резервування ресурсів, прогнозувати пікові навантаження та оптимізувати пропускну здатність системи. Наприклад, знаючи розподіл максимальних значень трафіку протягом доби, можна визначити необхідну ємність каналів зв'язку та уникнути простоїв або перевантажень. Це також дозволяє застосовувати статистичні методи для моделювання та проведення стрес-тестування мережі.

2. **Як знайти математичне сподівання функції одного випадкового аргумента?**

Математичне сподівання функції $\mathrm{Y} = g(x)$ випадкової величини $\xi$ визначається за формулою:

$$E[Y] = E[g(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_{\xi}(x) dx,$$

Де $f_{\xi}(x)$ – щільність розподілу випадкової величини $\xi$. Ця формула дозволяє знаходити очікуване значення будь-якої функції від випадкової величини, враховуючи її розподіл.

3. **Як знайти дисперсію функції одного випадкового аргумента?**

Дисперсія функції випадкової величини $\mathrm{Y} = g(x)$ обчислюється як:

$$D[Y] = E[(Y - E[Y])^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (g(x) - E[g(\xi)])^2) f_{\xi}(x) dx.$$

Це дозволяє оцінити міру розсіювання значень Y відносно її математичного сподівання, що є ключовим для аналізу варіативності систем та прогнозування ризиків.

4. **Чому на етапі обчислення закону розподілу функції від випадкової величини виконати аналіз монотонності функції?**

Аналіз монотонності функції $g(x)$ необхідний для визначення існування та правильного застосування формули для щільності розподілу:

$$f_\eta = \frac{f_\xi(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))}$$

Якщо функція не монотонна, її обернена функція не існує на всій області, і потрібно розбивати її на монотонні ділянки. Це забезпечує коректність перетворення та правильне визначення щільності нової випадкової величини.

5. **Наведіть приклади задач, де виникає потреба в обчисленні закону розподілу суми випадкових величин.**

Приклади включають:

1. Обчислення сумарного навантаження на сервер або канал зв'язку у мережі, де кожен користувач генерує випадковий трафік.
2. Моделювання фінансових ризиків, наприклад, сумарних втрат від кількох незалежних інвестицій.
3. Розрахунок загального часу обслуговування у виробничих системах, коли час обслуговування кожного елемента є випадковим.
4. Аналіз сумарного впливу незалежних шумів у фізичних або інженерних процесах, наприклад у сигнальних системах чи електроніці.

У всіх цих задачах застосування формули згортки дозволяє отримати точну щільність суми випадкових величин та її характеристики.