МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ
ПРО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ РОБІТ
з навчальної дисципліни
«Ймовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

Тема «Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин»

Здобувач освіти гр. КН-24-1, Бояринцова П. С.
Викладач Сидоренко В. М.

Кременчук 2025

Тема. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

Мета: набути практичних навичок у розв’язанні задач на знаходження законів розподілу та числових характеристик дискретних та неперервних випадкових величин, зокрема нормального закону, та розв’язання типових задач по цій темі.

1.1 Постановка завдання.

Ознайомитися з теоретичними відомостями з теми. Виконати індивідуальні завдання згідно з варіантом. Відповісти на контрольні питання.

1.2 Розв’язання задачі згідно зі своїм варіантом.

Задача 3. Двічі кинута гральна кістка. ДВВ X – різниця між кількістю очок при першому киданні та кількістю очок при другому киданні. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) побудувати графік функції щільності розподілу ДВВ; 3) знайти ймовірність події. (рис. 1).

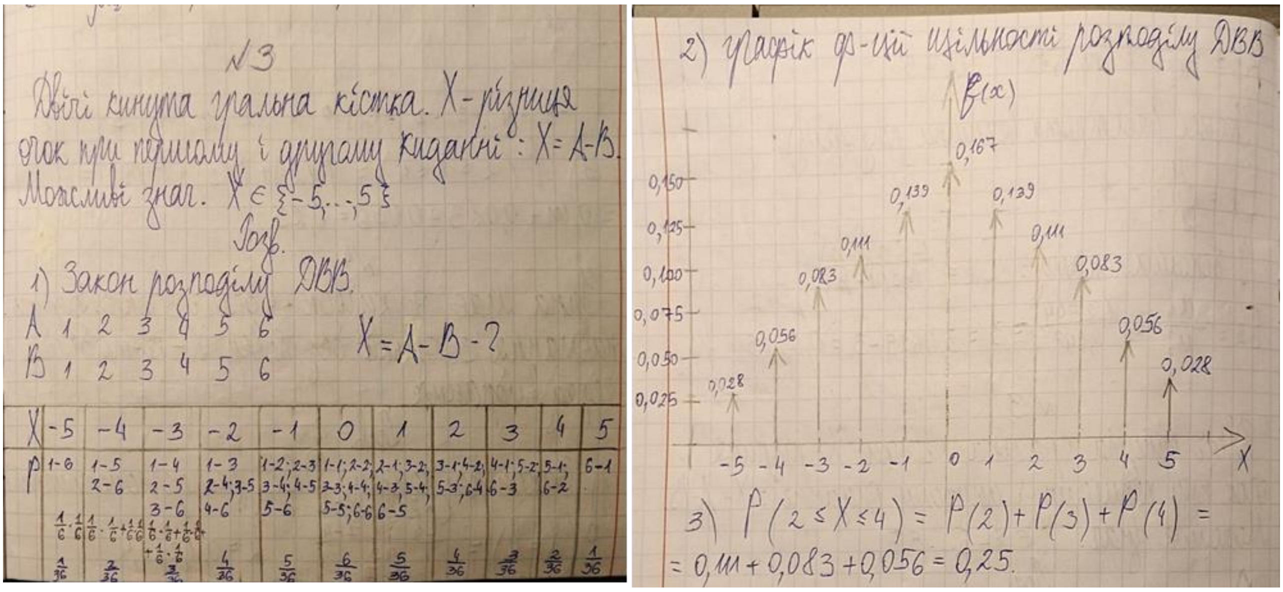
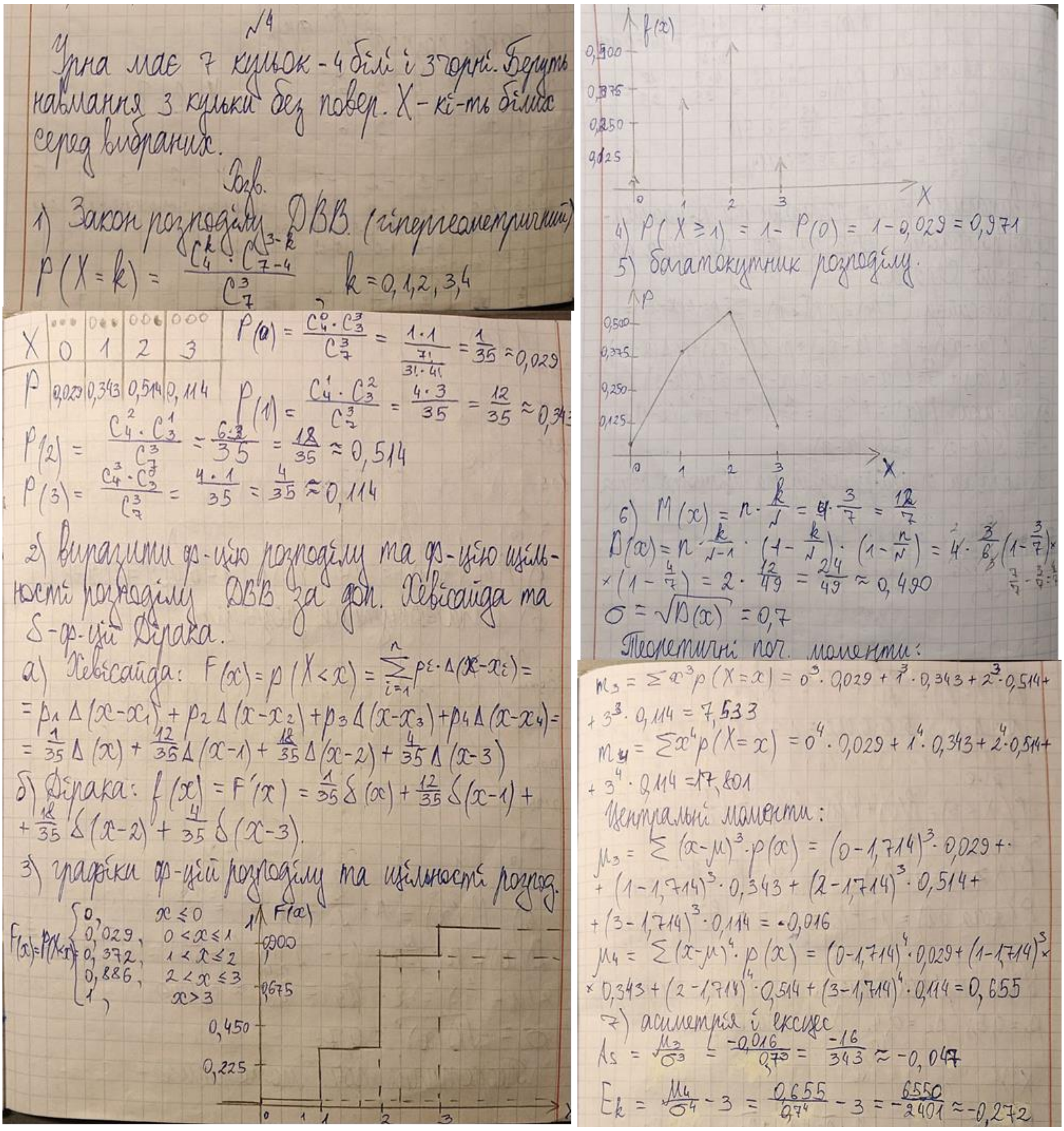


Рисунок 1 – розв’язання задачі 3

Задача 4. В урні 7 кульок, з яких 4 білих, а інші – чорні. З цієї урни наугад беруть 3 кульки. ДВВ X – кількість білих кульок. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та δ -функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірність події $x \geq 1$; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3 та 4 порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес. (рис. 2)



№4

Урна має 7 кульок – 4 білі і 3 чорні. Беруть навмання 3 кульки без повер. X – к-ть білих серед вибраних.

Розв.

1) Закон розподілу ДВВ (гіпергеометричний)

$P(X=k) = \frac{C_4^k \cdot C_{7-4}^{3-k}}{C_7^3}$ $k = 0,1,2,3,4$

X	0	1	2	3
P	0,029	0,343	0,514	0,114

$P(0) = \frac{C_4^0 \cdot C_3^3}{C_7^3} = \frac{1\cdot1}{\frac{7!}{3!\cdot4!}} = \frac{1}{35} \approx 0,029$

$P(1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{4\cdot3}{35} = \frac{12}{35} \approx 0,343$

$P(2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{6\cdot3}{35} = \frac{18}{35} \approx 0,514$

$P(3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4\cdot1}{35} = \frac{4}{35} \approx 0,114$

2) виразити ф-цію розподілу та ф-цію щільності розподілу ДВВ за доп. Хевісайда та δ-ф-ції Дірака.

а) Хевісайда: $F(x) = p(X<x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta(x-x_i) = p_1\Delta(x-x_1) + p_2\Delta(x-x_2) + p_3\Delta(x-x_3) + p_4\Delta(x-x_4) = \frac{1}{35}\Delta(x) + \frac{12}{35}\Delta(x-1) + \frac{18}{35}\Delta(x-2) + \frac{4}{35}\Delta(x-3)$

б) Дірака: $f(x) = F'(x) = \frac{1}{35}\delta(x) + \frac{12}{35}\delta(x-1) + \frac{18}{35}\delta(x-2) + \frac{4}{35}\delta(x-3)$

3) графіки ф-цій розподілу та щільності розпод.

$F(x) = P(X<x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0,029, & 0 < x \le 1 \\ 0,372, & 1 < x \le 2 \\ 0,886, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$

4) $P(X \ge 1) = 1 - P(0) = 1 - 0,029 = 0,971$

5) багатокутник розподілу.

6) $M(x) = n\cdot\frac{k}{N} = 4\cdot\frac{3}{7} = \frac{12}{7}$

$D(x) = n\cdot\frac{k}{N-1}\cdot\left(1-\frac{k}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{N}\right) = 4\cdot\frac{3}{6}\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right)\times\left(1-\frac{4}{7}\right) = 2\cdot\frac{12}{49} = \frac{24}{49} \approx 0,490$

$\sigma = \sqrt{D(x)} = 0,7$

Теоретичні поч. моменти:

$m_3 = \sum x^3 p(X=x) = 0^3\cdot0,029 + 1^3\cdot0,343 + 2^3\cdot0,514 + 3^3\cdot0,114 = 7,533$

$m_4 = \sum x^4 p(X=x) = 0^4\cdot0,029 + 1^4\cdot0,343 + 2^4\cdot0,514 + 3^4\cdot0,114 = 17,801$

Центральні моменти:

$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3\cdot p(x) = (0-1,714)^3\cdot0,029 + (1-1,714)^3\cdot0,343 + (2-1,714)^3\cdot0,514 + (3-1,714)^3\cdot0,114 = -0,016$

$\mu_4 = \sum (x-\mu)^4\cdot p(x) = (0-1,714)^4\cdot0,029 + (1-1,714)^4\times0,343 + (2-1,714)^4\cdot0,514 + (3-1,714)^4\cdot0,114 = 0,655$

7) асиметрія і ексцес

$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-0,016}{0,7^3} = \frac{-16}{343} \approx -0,047$

$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,655}{0,7^4} - 3 = -\frac{6550}{2401} \approx -0,272$

Рисунок 2 – розв’язання задачі 4

Задача 5. Завод відправив на базу 500 цілих деталей. Ймовірність зіпсування кожної деталі в дорозі $p = 0.002$. Знайти закон розподілу ДВВ X, що дорівнює кількості зіпсованих деталей, та знайти ймовірності подій:

− пошкоджено менше 3 деталей;

− пошкоджено більше 2 деталей;

− пошкоджено хоча б одну деталь. (рис. 3):

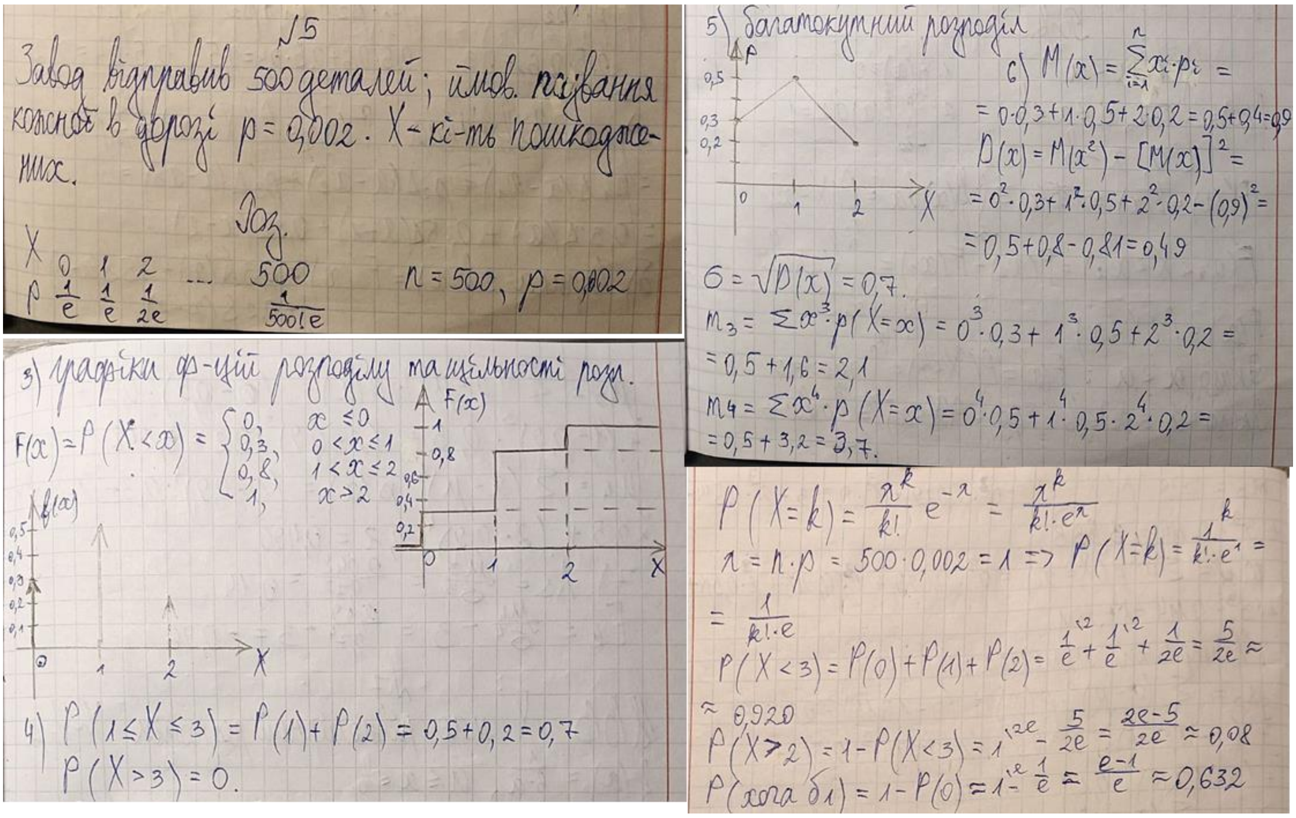


Рисунок 3 – розв’язання задачі 5

Задача 6. Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Ймовірність влучення для першого стрілка при одному пострілі $p1 = 0.5$, для другого – $p2 = 0.4$. ДВВ X – кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ X, що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Хевісайда та δ-функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій $1 \leq x \leq 3$ та $x > 3$; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3 та 4 порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес. (рис. 4)

№6

Два стрілки роблять по одному пострілу:

$p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,4$. X – кі-ть влучень.

Роз.

X	0	1	2
P	$\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2$ $0,5 \cdot 0,6 = 0,3$	$p_1 \cdot \bar{p}_2 + \bar{p}_1 \cdot p_2$ $0,5 \cdot 0,6 + 0,5 \cdot 0,4 = 0,5$	$p_1 \cdot p_2$ $0,5 \cdot 0,4 = 0,2$

2) а) Хевісайда: $F(x) = P(X < x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta(x - x_i) =$
$= p_1 \Delta(x - x_1) + p_2 \Delta(x - x_2) + p_3 \Delta(x - x_3) =$
$= 0,3\Delta(x) + 0,5\Delta(x-1) + 0,2\Delta(x-2)$

б) Дірака: $f(x) = F'(x) = 0,3\delta(x) + 0,5\delta(x-1) +$
$+ 0,2\delta(x-2)$

$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \cdot p(x) = (0-0,9)^3 \cdot 0,3 +$
$+ (1-0,9)^3 \cdot 0,5 + (2-0,9)^3 \cdot 0,2 = 0,048$

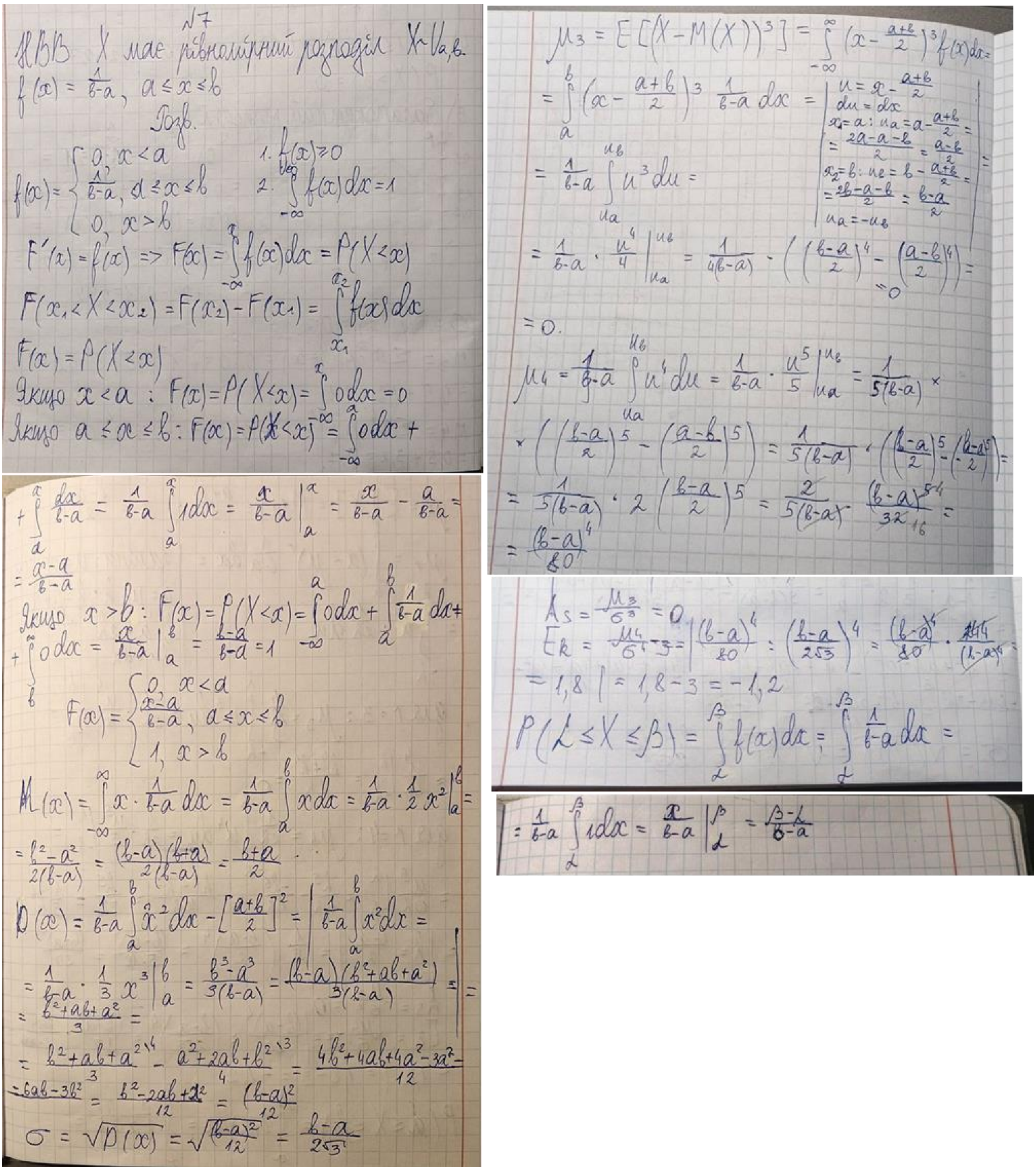
$\mu_4 = \sum (x-\mu)^4 \cdot p(x) = (0-0,9)^4 \cdot 0,3 + (1-0,9)^4 \times$
$\times 0,5 + (2-0,9)^4 \cdot 0,2 = 0,490$

7) $As = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{0,048}{0,7^3} = 0,14$

$Ek = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{0,49}{0,7^4} - 3 = -0,96$

Рисунок 4 – розв’язання задачі 6

Задача 7. НВВ X має рівномірний розподіл з параметрами a, b. Функція щільності рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \le x \le b$. Вивести формулу функції рівномірного розподілу $F(x)$, формулу для математичного сподівання $M(x)$, дисперсії $D(x)$, асиметрії As, ексцесу Ek, ймовірності події $\alpha \le X \le b$. (рис. 5):



№7

НВВ X має рівномірний розподіл $X \sim U_{a,b}$.

$f(x) = \frac{1}{b-a},\ a \le x \le b$

Розв.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x>b \end{cases} \qquad 1.\ f(x) \ge 0 \quad 2.\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X<x)$$

$$F(x_1<X<x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

$$F(x) = P(X<x)$$

Якщо $x<a$: $F(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0$

Якщо $a \le x \le b$: $F(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^x 1dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$

Якщо $x>b$: $F(x) = P(X<x) = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_a^b \frac{1}{b-a}dx + \int_b^{\infty} 0dx = \frac{x}{b-a}\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x>b \end{cases}$$

$$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

$$D(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx - \left[\frac{a+b}{2}\right]^2 = \left| \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \right| =$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2}{12} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{D(x)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

$$\mu_3 = E[(X-M(X))^3] = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3 f(x)dx = \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3 \frac{1}{b-a}dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x - \frac{a+b}{2} \\ du = dx \\ x_1 = a: u_a = a - \frac{a+b}{2} = \frac{2a-a-b}{2} = \frac{a-b}{2} \\ x_2 = b: u_b = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} \\ u_a = -u_b \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{u_a}^{u_b} u^3du = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_{u_a}^{u_b} = \frac{1}{4(b-a)}\cdot\underbrace{\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^4\right)}_{=0} = 0.$$

$$\mu_4 = \frac{1}{b-a}\int_{u_a}^{u_b} u^4du = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{u^5}{5}\Big|_{u_a}^{u_b} = \frac{1}{5(b-a)} \times$$

$$\times \left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^5\right) = \frac{1}{5(b-a)}\cdot\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 - \left(-\frac{b-a}{2}\right)^5\right) =$$

$$= \frac{1}{5(b-a)}\cdot 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 = \frac{2}{5(b-a)}\cdot\frac{(b-a)^5}{32} = \frac{(b-a)^4}{80}$$

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

$$E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \left| \frac{(b-a)^4}{80} : \left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{(b-a)^4}{80}\cdot\frac{144}{(b-a)^4} = 1,8 \right| = 1,8 - 3 = -1,2$$

$$P(\alpha \le X \le \beta) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_\alpha^\beta 1dx = \frac{x}{b-a}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

Рисунок 5 – розв’язання задачі 7

1.3 Отримані результати.

У цій практичній роботі ми ознайомилися з основними поняттями теорії випадкових величин і статистичних характеристик. Навчилися розрізняти дискретні та неперервні випадкові величини, обчислювати та тлумачити математичне сподівання, дисперсію, моду й медіану. Також зрозуміли, що не всі розподіли мають математичне сподівання та дисперсію, і що нормальний розподіл є найпоширенішим у природі й статистиці, бо добре описує більшість реальних процесів.

1.4 Відповіді на контрольні питання.

1. **Навести декілька прикладів дискретної випадкової величини.**

- Кількість влучень у мішень при n пострілах (значення 0,1,…,n).
- Результат підкидання монети, закодований як 0 (решка) або 1 (орел).
- Число телефонних викликів, що надійшли за годину (якщо лічильне).
- Кількість дефектних деталей у партії з фіксованою кількістю виробів.

(Усіх прикладів спільна риса — множина можливих значень є зліченною.)

2. **Навести декілька прикладів неперервної випадкової величини.**

- Час між надходженнями пакетів даних (в секундах, мікросекундах).
- Зростання (або вага) людини в сантиметрах (або кілограмах).
- Інтенсивність опадів за добу (мм).
- Похибка вимірювання довжини (без дискретних кроків).

(У цих прикладах множина можливих значень — неперервний інтервал або вся вісь.)

3. **Чи для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія?**

Ні. Існування математичного сподівання та дисперсії вимагає збіжності відповідних інтегралів/сум. Деякі розподіли (наприклад, розподіл Коші) не мають скінченного математичного сподівання; інші можуть мати скінчене сподівання, але нескінчену дисперсію. Тобто ці характеристики не гарантовані для всіх розподілів.

4. **Як виправдати використання математичного сподівання як числової характеристики для розподілу, який не має скінченного математичного сподівання?**

Якщо сподівання не існує, його не можна використовувати. У такому випадку замість нього беруть **медіану** або **моду** — вони краще описують «середнє» положення таких даних.

5. **Яка форма закону розподілу є універсальною і може бути застосовна як для ДВВ, так і для НВВ?**

Функція розподілу $\mathbf{F(x) = P(X < x)}$— вона підходить і для дискретних, і для неперервних величин.

6. **Які альтернативні числові характеристики можна використовувати для опису розподілу, якщо математичне сподівання не відображає його повністю?**

медіану (середнє за порядком);

моду (найчастіше значення);

дисперсію або середнє квадратичне відхилення.

7. **У чому полягає ймовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання?**

Ймовірнісний сенс: це середнє значення, яке ми очікуємо при нескінченній кількості спостережень.

Статистичний сенс: середнє вибірки (середнє з досліду) наближається до математичного сподівання, якщо робити багато вимірів.

8. **Чому важливо враховувати асиметрію та ексцес при аналізі розподілу величин?**

Бо вони показують форму розподілу:

асиметрія — чи розподіл зміщений вліво або вправо;

ексцес — наскільки «гострий» або «плоский» пік і наскільки «важкі» хвости.

Це допомагає краще розуміти, як розкидані значення і чи є великі відхилення.

9. **Чому, якщо для певної ВВ не існую математичного сподівання, то не існує дисперсія, асиметрія і ексцес? Відповідь обґрунтуйте.**

Бо всі ці показники обчислюються на основі сподівання (через середнє). Якщо середнього немає, то неможливо знайти відхилення від нього, а отже — і дисперсію чи інші характеристики.

10. **Чому на практиці часто можна апріорі вважати розподіл ВВ нормальним?**

Бо за **центральною граничною теоремою** сума великої кількості незалежних випадкових впливів має розподіл, близький до нормального.

У реальному житті більшість показників (зріст, похибки, оцінки тощо) утворюються саме як результат багатьох маленьких впливів, тому нормальний розподіл добре підходить для опису таких даних.