~~证明~~ A为 $m\times n$ 矩阵

证明: $rk(I_m - AA^T) - rk(I_n - A^TA) = m-n$

$\Leftrightarrow$ $m - \dim N(I_m - AA^T) - n + \dim N(I_n - A^TA)$

$= m-n + \dim N(I_n - A^TA) - \dim N(I_m - AA^T)$

所以只需证:

$\dim N(I_n - A^TA) = \dim N(I_m - AA^T)$

但是这俩一个在 $\mathbb{R}^n$, 一个在 $\mathbb{R}^m$. ~~怎么~~

所以一个合理的思路是证明他俩同构:

$(I_n - A^TA)x = 0 \quad \Rightarrow A(I_n - A^TA)x = 0$

$\Rightarrow (I_m - AA^T)Ax = 0$.

发现 ~~如果~~ ~~Ax~~ 若 $x \in N(I_n - A^TA)$, $Ax \in N(I_m - AA^T)$

所以这是单射吗?

$x_1 \neq x_2 \in N(I_n - A^TA)$. 设 $Ax_1 = Ax_2$.

$x_1 = A^TAx_1$ ~~$Ax_1 - Ax_2$~~ $=$

$x_2 = A^TAx_2 \quad \Rightarrow x_1 - x_2 = A^T[A(x_1 - x_2)]$

$= A^T[Ax_1 - Ax_2] = 0$.

$\Rightarrow x_1 = x_2$. 矛盾.

故

反过来同样可以得到

对于 $y \in N(I_m - AA^T)$, $A^Ty \in (I_n - A^TA)$.

且这也是一个单~~射同态~~射。

$x \xrightarrow{A} Ax \xrightarrow{A^T} A^TAx$. 回到自身. 故是一个同构映射.

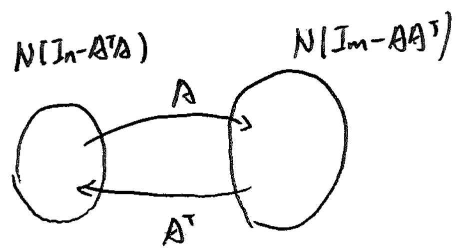
所以:

$N(I_n - A^TA)$ 与 $N(I_m - AA^T)$ 是同构的

故 $\dim N(I_n - A^TA) = \dim N(I_m - AA^T)$

~~所以~~

$\Rightarrow$



A 与 A^T 则成了连接这两个空间的桥梁.