Approximation de π
La formule de *Leibniz-Gregory*

Cette fiche a été élaborée par des enseignantes et des enseignants des lycées et universités de l'académie de Créteil.

Objectifs :

- ▷ Justifier une approximation de π ;
- ▷ Utiliser plusieurs notions de Terminale afin de mener à bien une démonstration (Recherche de primitive, encadrement d'intégrale, suite [géométrique] et somme partielle) ;
- ▷ Introduire (sans en dire le nom) la notion de série numérique.

Mise en place :

Une séance de 2h + le reste en travail à la maison. Les élèves peuvent travailler en groupe ; l'aval du professeur peut être utile pour valider chacune des étapes. Des indications sont proposées à la fin du document.

Contenu :

On propose de démontrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{4\times(-1)^n}{2n+1}, \quad n \geq 0 \end{cases}$$

converge vers π, c'est à dire que

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots + \frac{4\times(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

ce qui peut se réécrire en utilisant une notation bien utile :

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\times(-1)^n}{2n+1}.$$

Cette formule est appelée formule de Leibniz-Gregory.

Ce document correspond à un *découpage* de la page wikipedia *Leibniz formula for π*

`http://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80`.

Etape 0 : on observe

1) Donner les 10 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{4\times(-1)^n}{2n+1}, \quad n \geq 0 \end{cases}$.

2) Que peut-on dire comme premières observations ?

Etape 1 : on montre que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$

3) `[Avec un logiciel de calcul formel]` À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Afin d'avoir plus de renseignement sur la réponse donnée par le logiciel, vous pouvez traiter la question 3-Bis).

3-Bis) `[Sans logiciel de calcul formel]` La fonction trigonométrique *tangente*, est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

La fonction *tangente* admet une *fonction réciproque* qui est arctan (c'est la touche $\tan^{-1}$ de la calculatrice), c'est à dire que

$$\text{pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \text{ on a } \arctan[\tan(x)] = x.$$

La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$.

a. Montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + [\tan(x)]^2$.

b. On admet la formule suivante :

$$[\arctan(\tan(x))]' = \arctan'[\tan(x)] \times \tan'(x) \text{ pour } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

[Cette formule est issue de la formule plus générale $[f \circ g]' = (f' \circ g) \times g'$*]*

Déduire de cette formule que $\arctan'(X) = \dfrac{1}{1+X^2}$.

4) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Etape 2 : on "décompose" $\frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in]0,1[$

5) Montrer que pour $x \in]0,1[$ on a $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{N}(-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$.

Etape 3 : on calcule $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ avec un "petit" terme d'erreur

6) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} + (-1)^{N+1}\int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

7) Après avoir justifié que $0 \leq \dfrac{x^{2N+2}}{1+x^2} \leq x^{2N+2}$, montrer que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

Etape 4 : on fait les comptes !

8) Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$ c'est à dire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$$

9) Etablir la formule de Leibniz-Gregory.

Indications

1) Il suffit de calculer : $u_0 = 0$, $u_1 = u_0 + \dfrac{4 \times (-1)^0}{2 \times 0 + 1} = 0 + 4 = 4...$

2) La suite **semble**-t-elle croitre/décroitre/osciller autour d'une valeur ?

3) `[Avec un logiciel de calcul formel]` Par exemple avec le logiciel XCas on peut utiliser la commande `integrate( f(x) )` pour le calcul d'une primitive de f.

3-Bis) `[Sans logiciel de calcul formel]`

a. Ne pas oublier que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$!

b. On pourra dans un premier temps dériver l'égalité $\arctan(\tan(x)) = x$, puis remplacer $\tan(x)$ par X.

4) On propose les questions intermédiaires suivantes :

a. Calculer $\tan(0)$ et $\tan(\pi/4)$, en déduire $\arctan(0)$ et $\arctan(1)$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

5) On propose les questions intermédiaires suivantes : On fixe $x \in]0,1[$ et on définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ comme étant la suite géométrique de raison $q = -x^2$ et de premier terme $v_0 = 1$.

On définit pour $N \geq 0$ la suite $S_N = v_0 + ... + v_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} v_n$.

a. Montrer que $S_N = \dfrac{1-(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$.

b. En déduire que pour $x \in]0,1[$ on a $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-x^2)^n + \frac{(-x^2)^{N+1}}{1+x^2}$.

6) Intégrez entre 0 et 1 l'égalité de la question précédente !

7) On propose les questions intermédiaires suivantes :

a. Montrer que $0 \leq \dfrac{x^{2N+2}}{1+x^2} \leq x^{2N+2}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{2N+2}\mathrm{d}x$.

c. En appliquant le théorème des gendarmes, montrer que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^1 \frac{x^{2N+2}}{1+x^2}\mathrm{d}x = 0$.

8) En posant $U_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}$, déduire des questions précédentes que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} U_N = \frac{\pi}{4}$ c'est à dire que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

9) Il suffit de multiplier l'égalité de la question précédente par 4.