

# Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

8.2.2020

## Sadržaj

1	Uvod	3
2	Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve	6
3	Donja ograničenja za Remzijeve brojeve	8
4	Primene Remzijeve teoreme	13

## Predgovor

U ovom radu ćemo navesti i dokazati neke od teorema u vezi granica za Remzijeve brojeve, kao i primene Remzijeve brojeva u raznim oblastima. U prvom poglavlju ćemo navesti neke od važnijih teorema Remzijeve teorije, koje služe kao osnova za teoreme koje su dokazane u ovom radu. U drugom poglavlju ćemo dokazati neke teoreme u vezi gornjih ograničenja za Remzijeve brojeve. U trećem poglavlju ćemo dokazati neke teoreme u vezi donjih ograničenja za Remzijeve brojeve. Na kraju, u četvrtom poglavlju ćemo videti neke od primena Remzijeve teoreme i njenih uopštenja u rešavanju raznih problema.

## 1 Uvod

Remzijeva teorija je oblast matematike koja se bavi uslovima pod kojim se red mora pojaviti. Najjednostavnija teorema ovog tipa jeste Dirihleov princip:

**Definicija 1.1.** Za prirodan broj  $n > 0$  definišemo

$$\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Neka je dat skup  $X$  i neka je  $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

Bojenje skupa  $X$  sa  $r$  boja je funkcija  $\chi : X \rightarrow r$ . Podskup  $Y \subseteq X$  nazivano monohromatskim (u odnosu na  $\chi$ ), ako je

$$\forall y_1, y_2 : \chi(y_1) = \chi(y_2)$$

**Teorema 1.1** (Dirihleov Princip). Neka je  $A$  konačan skup i neka je  $0 < r < |A|$ . Ako svaki element skupa  $A$  obojimo sa jednom od datih  $r$  boja, onda su najmanje dva elementa objena istom bojom.

Dirihleov princip se može dodatno uopštiti u sledeće tvrđenje:

**Teorema 1.2** (Uopšteni Dirihleov princip). Neka su dati  $n, r \in \mathbb{N}$ , kao i  $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , gde je

$$l_1 + \dots + l_r \leq n + r - 1.$$

Tada za svako bojenje  $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{r}$  postoje  $i \in \underline{r}$ , takvo da važi  $|\chi^{-1}(i)| \geq l_i$

Dirihleov princip i uopšteni Dirihleov princip služe kao osnova za sve teoreme Remzijeve tipa.

Osnovna teorema Remzijeve teorije je Remzijeva teorema za grafove:

**Definicija 1.2.** Za skup  $X$  i prirodan broj  $k > 0$  definišemo

$$[X]^k := \{Y \subseteq X \mid |Y| = k\}.$$

Pišemo

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

ako za svako bojenje  $\chi : \underline{n}^2$  postoje  $i \in \underline{r}$  i  $T \subseteq \underline{n}$  sa  $|T| = l_i$ , takvi da je  $[T]^2$  u odnosu na  $\chi$   $i$ -monohromatsko.

**Teorema 1.3.** Ako je  $n \rightarrow (l_1 - 1, l_2)$  i  $m \rightarrow (l_1, l_2 - 1)$ , tada važi da je i  $n + m \rightarrow (l_1, l_2)$ .

*Dokaz.* Posmatrajmo graf  $G$  sa  $n + m$  čvorova, gde će nam jedna boja predstavljati povezane grane, a druga nepovezane i u njemu uočimo proizvoljan čvor  $u$ . Dokažimo da je on ili povezan sa  $n$  čvorova ili nije povezan sa  $m$  čvorova. Ovo direktno sledi iz uopštenog Dirihleovog principa jer je  $n + m \leq (n + m - 1) + 2 - 1$ . Ako je čvor  $u$  povezan sa  $n$  čvorova tada, kako je  $n \rightarrow (l_1 - 1, l_2)$  tih  $n$  čvorova grade ili  $\overline{K}_{l_2}$  ili  $K_{l_1 - 1}$ . U prvom slučaju je kraj dokaza, dok u drugom primetimo da kada dodamo čvor  $u$  na  $K_{l_1 - 1}$  dobijamo  $K_{l_1}$ . Analogno u slučaju kada čvor  $u$  nije povezan sa  $m$  čvorova imamo ili  $K_{l_1}$  ili  $\overline{K}_{l_2 - 1}$ , gde takođe dodavanjem  $u$  na  $\overline{K}_{l_2 - 1}$  dobijamo  $\overline{K}_{l_2}$ .  $\square$

**Teorema 1.4** (Remzijeva Teorema za obojene grafove). Neka  $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ . Tada postoji  $n$ , za koje važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

**Definicija 1.3.** Najmanji broj  $n$  za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, l_2)$$

naziva se Remzijev broj i označavamo ga sa  $R(l_1, l_2)$ .

**Definicija 1.4.** Najmanji broj  $n$  za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

naziva se Remzijev broj za obojene grafove i označavamo ga sa  $R(l_1, \dots, l_r)$ .

Remzijeva teorema se može proširiti na hipergrafove, kao i na beskonačne grafove.

**Definicija 1.5.** Za  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  i  $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$  pišemo

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k,$$

ako za svako bojenje  $\chi : [n]^k \rightarrow \underline{r}$ , postoji  $i \in \underline{r}$  i  $l_i$ -elementni skup  $T \subseteq \underline{n}$ , tako da je  $[T]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$

**Teorema 1.5** (Remzijeva Teorema za obojene hipergrafove). Neka  $l_1, \dots, l_r, k \in \mathbb{N}$ . Tada postoji  $n$ , za koje važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k$$

**Definicija 1.6.** Sa  $R_k(l_1, \dots, l_r)$  označavamo najmanji broj  $n$  za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k,$$

**Teorema 1.6** (Remzijeva Teorema za beskonačne grafove). Neka  $k, r \in \mathbb{N} \setminus 0$ . Tada za svako bojenje  $\chi : [\mathbb{N}]^k \rightarrow \underline{r}$  postoje beskonačni skup  $M \subseteq \mathbb{N}$  i  $i \in \underline{r}$ , takvi da

$$[M]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$$

Tačne vrednosti Remzijevih brojeva je izuzetno teško izračunati. Poznato je  $R(l_1, 1) = (1, l_2) = 1$  i  $R(l_1, 2) = (2, l_2) = l$ , ali za  $l_1, l_2 \geq 2$  je poznato samo 9 tačnih vrednosti Remzijevih brojeva. Poznata su razna ograničenja koja važe u opštem slučaju, dok su bolja ograničenja poznata samo za neke od vrednosti  $l_1 \leq 10, l_2 \leq 15$ .

$k \setminus l$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	52 59	59 68	66 77	73 87
4		18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1138	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3703	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27485	41525	861 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1265

Slika 1: Poznate vrednosti i ograničenja Remzijevih brojeva

Iako je poznat samo mali broj tačnih vrednosti Remzijevih brojeva, postoje mnoge teoreme u vezi ograničenja za Remzijeve brojeve. Neke od njih ćemo dokazati u sledećim poglavljima.

## 2 Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve

U sledećem delu rada obuhvatićemo četiri teoreme koje govore o gornjim ograničenjima Remzijevih brojeva pri bojenju grafova sa dve ili više boja. Neke od ovih dokaza, kao i mnoge druge u vezi gornjih granica Remzijevih brojeva možete naći u radovima [2], [3] i [4].

**Teorema 2.1.** Za svako  $l_1, l_2 \geq 2$  važi

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

*Dokaz.* Iz definicije Remzijevih brojeva znamo da je  $R(l_1 - 1, l_2) \rightarrow (l_1 - 1, l_2)$  i  $R(l_1, l_2 - 1) \rightarrow (l_1, l_2 - 1)$ , pa na osnovu Teoreme 1.3 dobijamo da je

$$R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) \rightarrow (l_1, l_2),$$

iz čega po definiciji  $R(l_1, l_2)$  sledi nejednakost.  $\square$

**Teorema 2.2.** Ako su  $R(l_1 - 1, l_2)$  i  $R(l_1, l_2 - 1)$  parni brojevi, za  $l_1, l_2 \geq 2$  važi stroga nejednakost, odnosno:

$$R(l_1, l_2) < R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

*Dokaz.* Iz Teoreme 2.1 već znamo da je  $R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$ , pa treba još dokazati da  $R(l_1, l_2) \neq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$ .

Pretpostavimo suprotno da je  $R(l_1, l_2) = R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$  i neka je  $r_1 = R(l_1 - 1, l_2)$  i  $r_2 = R(l_1, l_2 - 1)$ . Tada mora da postoji graf  $G$  sa  $r_1 + r_2 - 1$  čvorova koji ne sadrži ni  $K_{l_1}$  ni  $\overline{K}_{l_2}$  (u suprotnom bi važilo da je  $R(l_1, l_2) < R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) \implies$  kontradikcija). Uočimo proizvoljan čvor  $v$  u grafu  $G$ . Na osnovu dokaza Teoreme 1.3 lako je zaključiti da mora važiti

$$\delta(v) \leq r_1 - 1 \tag{1}$$

$$r_1 + r_2 - 2 - \delta(v) \leq r_2 - 1 \tag{2}$$

jer bi u suprotnom pronašli ili  $K_{l_1}$  ili  $\overline{K}_{l_2}$ . Odavde dobijamo da je  $\delta(v) = r_1 - 1$ . Pošto je izbor čvora  $v$  bio proizvoljan onda stepen svakog čvora u grafu mora biti takođe  $r_1 - 1$ . Ipak pošto  $2 \nmid r_1 - 1$  i  $2 \nmid r_1 + r_2 - 1$  dobijamo

$$2 \nmid \sum_{v \in V(G)} \delta(v) = (r_1 + r_2 - 1)(r_1 - 1),$$

što je u suprotnosti sa prvom teoremom teorije grafova (da je zbir svih stepena čvorova svakog grafa paran broj). Dakle takav graf ne postoji pa je pretpostavka bilo netačna, iz čega sledi tvrđenje.  $\square$

**Teorema 2.3.** Za sve  $l_1, l_2 \geq 2$  važi

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

*Dokaz.* Kod ovog dokaza koristićemo matematičku indukciju.

- Baza indukcije

Naša baza biće da dokažemo da nejednakost važi za  $l_1 = l_2 = 2$ , odnosno

$$R(2, 2) \leq \binom{2+2-2}{2-1}$$

$$\binom{2 \leq 2}{1}$$

$$2 \leq 2$$

- Indukcijska hipoteza

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve brojeve  $x$  i  $y$ , gde  $x \leq l_1$ ,  $y \leq l_2$  i bar jedna nejednakost je stroga.

- Indukcijski korak

Iz Teoreme 2.1 znamo da je

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 - 1 + l_2 - 2}{l_1 - 1 - 1} + \binom{l_1 + l_2 - 1 - 2}{l_1 - 1}$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 2} + \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 1}$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

Gde poslednja nejednakost sledi primenom poznatog Paskalovog identiteta  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ .

□

**Teorema 2.4.** Za  $k \geq 2$  važi

$$R(l_1, l_2, \dots, l_k) \leq 2 + \sum_{i=1}^k (R(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_k) - 1)$$

Neka su  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_k \in \mathbb{N}$ . Tada postoji neki Remzijev broj, neko  $n$ , za koje važi  $n \rightarrow (l_1, l_2, l_3, \dots, l_k)$  odnosno da postoji kompletan graf  $G$  obojen sa  $k$  boja, pri čemu je  $l_i$  grana obojena istom bojom za neko  $1 \leq i \leq k$ . Najmanje  $n$  za koje ovo važi označićemo kao  $R(l)_k$ .

*Dokaz.* Ova teorema dokazuje se slično kao teorema 2.1. samo što sada imamo  $k$  boja. Neka je

$$\begin{aligned} r_1 &= R(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k) \\ r_2 &= R(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k) \\ &\vdots \\ r_k &= R(l_1, l_2, \dots, l_k - 1) \end{aligned}$$

Odredimo  $n$  za koje sigurno važi da je

$$n \rightarrow (l_1, l_2, \dots, l_k)$$

Posmatrajmo proizvoljan graf  $G$  sa  $n$  čvorova u kojem su grane obojene u  $k$  boja. U njemu uočimo proizvoljan čvor  $u$ . Tada  $u$  ima  $n - 1$  suseda sa kojima je povezan granama različitih boja. Odredimo koje vrednosti  $n$  zadovoljavaju osobinu da među  $n - 1$  suseda čvora  $u$  sigurno možemo pronaći  $r_1$  čvorova povezanih sa  $u$  u prvoj boji ili  $r_2$  čvorova povezanih sa  $u$  u drugoj boji ili  $\dots$  ili  $r_k$  čvorova povezanih sa  $u$  u  $k$ -toj boji. Na osnovu uopštenog Dirihleovog principa dobijamo da  $n$  zadovoljava nejednakost

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k \leq (n - 1) + k - 1 \quad (3)$$

Ako je ispunjen ovaj uslov sigurno možemo pronaći bar jednu boju  $i$  tako da je čvor  $u$  povezan sa bar  $r_i$  suseda u toj boji. Obeležimo podgraf indukovanih sa tih  $r_i$  čvorova sa  $H$ . Ako se u njemu nalazi  $j$ -monohromatski  $K_{l_j}$ , gde  $j \neq i$  onda se on nalazi i u  $G$ . U suprotnom mora se pojaviti  $K_{l_i-1}$  koji dodavanjem čvora  $u$  u grafu  $G$  postaje  $K_{l_i}$ . Na osnovu ovoga zaključujemo da je  $n \rightarrow (l_1, l_2, \dots, l_k)$ , a samim tim

$$R(l_1, l_2, \dots, l_k) \leq n,$$

gde je najmanje  $n$  koje zadovoljava uslove nejednakosti (1)

$$n = 2 - k + r_1 + r_2 + \dots + r_k = 2 + \sum_{i=1}^k (r_i - 1)$$

iz čega sledi tražena nejednakost. □

### 3 Donja ograničenja za Remzijeve brojeve

U ovom poglavlju ćemo dokazati neke od bitnijih dokaza u vezi donjih ograničenja Remzijevih brojeva. Prve dve teoreme dokazuju se preko verovatnoće, dok se ostale dokazuju konstrukcijom pogodnih grafova. Dokaz teoreme 3.1 možete naći u radu [1], a ove dokaze, kao i mnoge druge u vezi donjih ograničenja Remzijevih brojeva možete naći u radovima [2] i [3].



**Teorema 3.1.** Neka su dati prirodni brojevi  $n$  i  $k$ , takvi da  $n \geq k > 0$ . Ako je

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

onda važi  $R(k, k) > n$ .

*Dokaz.* Posmatrajmo proizvoljno bojenje grana grafa  $K_n$  u dve boje - crvenu i plavu takvo da je verovatnoća da je grana  $uv$  u grafu obojena crvenom bojom jednaka verovatnoći da je obojena plavom bojom i iznosi

$$P(uv \text{ je crvena}) = P(uv \text{ je plava}) = \frac{1}{2}.$$

Prvo ćemo odrediti verovatnoću da je neki  $k$ -podskup  $K_k$  početnog grafa monohromatski. Sa  $M_s$  označimo događaj da je  $K_k$  monohromatski. Kako nam od svih mogućih bojenja ovog  $k$ -podskupa odgovaraju samo dva gde su sve grane isključivo crvene ili plave dobijamo da je

$$P(M_s) = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Odredimo sada verovatnoću da se u celom  $K_n$  grafu nalazi monohromatski  $K_k$  podskup i označimo taj događaj sa  $A$ . U celom grafu ima  $\binom{n}{k}$  ovakvih podskupova koje ćemo označiti sa  $S$ . Ipak pošto događaj da je neki  $K_k$  monohromatski nije nezavisan u odnosu na to da su ostali podskupovi  $S$  monohromatski dobijamo

$$P(A) = P\left(\bigcup_{|S|=k} M_S\right) \leq \sum_{|S|=k} P(M_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Iz ovoga sledi da ako je  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  onda važi i  $P(A) < 1$ , čime dobijamo da pri ovakvim bojenjima grafa  $K_n$  postojanje monohromatskog  $K_k$  nije garantovano, tj. postoji bojenje koje ga ne sadrži i odatle da je  $R(k, k) > n$ .  $\square$

Naredne dve posledice koje se izvode preko prethodno dokazane teoreme pokazuju nam da kvadratni Remzijevi brojevi rastu eksponencijalno. Nije teško uveriti se da to važi i za sve Remzijeve brojeve, pa ovo objašnjava njihov brz rast i zašto je poznat samo mali broj Remzijevih brojeva.

**Posledica 3.1.1.** Za svako  $k \geq 3$  važi

$$R(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

*Dokaz.* Ako je  $n \geq 2^{\frac{k}{2}}$ , gde je  $n$  takvo da  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ , dobijamo

$$R(k, k) > n \geq 2^{\frac{k}{2}}.$$

U suprotnom kada je  $n < 2^{\frac{k}{2}}$  na osnovu dokaza Teoreme 4.1 imamo:

$$P(\bigcup_{|S|=k} M_S) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}.$$

Sada još treba dokazati da za svako  $k \geq 3$  važi  $\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} < 1$ , tj.  $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$  i ovo možemo dokazati pomoću matematičke indukcije.

- Baza indukcije  
Za  $k = 3$  dobijamo

$$2^{\frac{5}{2}} = 5,66 < 6 = 3!$$

- Indukcijska hipoteza  
Pretpostavimo da za neko  $k \in \mathbb{N}$  važi  $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$ .
- Indukcijski korak

$$2^{\frac{k+3}{2}} = 2^{\frac{k+2}{2}} \sqrt{2} < k! \sqrt{2} < (k+1)k! = (k+1)!$$

Odakle sledi tvrđenje. □

**Posledica 3.1.2.** Za svako  $k \in \mathbb{N}$  važi

$$R(k, k) > \frac{1}{e\sqrt{2}} k \sqrt{2^k}$$

*Dokaz.* Neka je  $N$  najmanje  $n$  za koje važi  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \geq 1$ . Tada je

$$R(k, k) \geq N = (N^k)^{\frac{1}{k}} > \left( \frac{N!}{k!(N-k)!} k! \right)^{\frac{1}{k}} = \left( \binom{N}{k} k! \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$R(k, k) > \left( 2^{\binom{k}{2}-1} k! \right)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{k}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} (k!)^{\frac{1}{k}}$$

Sada ćemo iskoristiti Stirlingovu aproksimaciju za faktorijal  $k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$ , kada  $k \rightarrow +\infty$  i činjenicu da je  $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$  za svako  $k \in \mathbb{N}$ . Odatle dobijamo

$$R(k, k) > \frac{k 2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}} \left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}} \right)$$

Kako uvek važi  $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}} > 1$  kada uvrstimo to u nejednakost dobijamo

$$R(k, k) > \frac{k 2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}}$$

što je i trebalo dokazati. □

Sada ćemo dati uopštenje teoreme 3.1 na sve Remzijeve brojeve, ne samo kvadratne.

**Teorema 3.2.** Neka su dati prirodni brojevi  $n$ ,  $k$  i  $l$ , takvi da  $n \geq k > 0$  i  $n \geq l > 0$ . Ako za neki broj  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$  važi

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda je  $R(k, l) > n$

*Dokaz.* Dokaz ove teoreme je sličan dokazu prethodne Teoreme 3.1. Neka je verovatnoća da je proizvoljna grana  $uv$  u grafu  $K_n$  crvena jednaka  $p$ . Tada je verovatnoća da je ona plava jednaka  $1 - p$ , pa možemo pisati

$$P(uv \text{ je crvena}) = p, P(uv \text{ je plava}) = 1 - p, \forall uv \in E(K_n)$$

Neka je  $S$  potpun  $k$ -elementan poskup, a  $T$  potpun  $l$ -elementan poskup grafa  $K_n$ . Označimo sa  $A_S$  događaj da je neki podskup  $S$  monohromatski crven, a  $B_T$  događaj da je poskup  $T$  monohromatski plav. Onda je ukupna verovatnoća da u grafu  $K_n$  postoji monohromatski obojen  $K_k$  u crveno ili  $K_l$  u plavo jednaka

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S \cup \bigcup_{|T|=l} B_T\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) + \sum_{|T|=l} P(B_T) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Ako postoji  $p$  za koji je krajnji izraz manji od 1, onda zaključujemo da postoji  $K_n$  koji sadrži potpuno crveni  $K_k$  ili potpuno plavi  $K_l$ , pa mora biti  $R(k, l) > n$ .  $\square$

Slede dve teoreme koje predstavljaju vezu između više Remzijevih brojeva. Njihove dokaze možete pogledati i u [7].

**Teorema 3.3.** Neka su dati prirodni brojevi  $n$ ,  $m$  i  $k$  tako da je  $1 \leq k \leq n - 2$ . Tada je

$$R(m, n) \geq R(m, n - k) + R(m, k + 1) - 1.$$

*Dokaz.* Neka je  $r_1 = R(m, n - k)$  i  $r_2 = R(m, k + 1)$  i bez umanjenja opštosti prva boja crvena, a druga plava. Posmatrajmo grafove  $G_1 = K_{r_1-1}$  i  $G_2 = K_{r_2-1}$ , takve da su im sve grane obojene u crvenu ili plavu boju i da  $G_1$  ne sadrži nijedan crveni  $K_m$  i nijedan plavi  $K_{n-k}$ , a  $G_2$  ne sadrži nijedan crveni  $K_m$  ni plavi  $K_{k+1}$  podgraf. Primitimo da na osnovu definicije Remzijevih brojeva ovakvi grafovi sigurno postoje. Neka je  $G = G_1 \nabla G_2$ , tako da svaku granu  $uv$ , gde  $u \in V(G_1)$  i  $v \in V(G_2)$  obojimo u plavo. Sada vidimo da je  $G = K_{r_1+r_2-2}$  i kako su sve dodate grane između grafova  $G_1$  i  $G_2$  plave, jasno je da  $G$  ne sadrži crveni  $K_m$ . Sa druge strane najveći monohromatski plavi kompletan podgraf nema više od  $(n - k - 1) + (k + 1 - 1) = n - 1$  čvorova, pa graf  $G$  sigurno ne sadrži ni plavi  $K_n$ . Odavde sledi  $R(m, n) > r_1 + r_2 - 2$  odakle dobijamo traženu nejednakost.  $\square$

Ova posledica nam daje vezu dva uzastopna Remzijeve broja.

**Posledica 3.3.1.** Neka su dati prirodni brojevi  $m$  i  $n \geq 3$ . Tada je

$$R(m, n) \geq R(m, n-1) + m - 1.$$

*Dokaz.* Direktnom zamenom  $k = 1$  u prethodnoj teoremi dobijamo izraz.  $\square$

Granicu za uzastopne Remzijeve brojeve koju smo sad dobili možemo još malo poboljšati narednom teoremom. Ipak primetimo da nam ona daje linearnu, a ne eksponencijalnu vezu kako smo prethodno dobili u posledicama 3.1.1 i 3.1.2, pa se u klasičnoj Remzijevoj teoriji retko koristi ova teorema, ali nalaze svoju primenu za granice kod generalizovanih Remzijevih brojeva (ako su  $G$  i  $H$  grafovi,  $R(G, H)$  definišemo kao  $R(m, n)$ , ali tako da su  $G$  i  $H$  na mestu  $K_m$  i  $K_n$ )

**Teorema 3.4.** Neka su dati prirodni brojevi  $m, n \geq 2$ . Tada važi

$$R(m, n) \geq R(m, n-1) + 2m - 3.$$

*Dokaz.* Neka je  $r = R(m, n-1)$  i  $G_1 = K_{r-1}$  takav da ne sadrži crveni  $K_m$  i plavi  $K_{n-1}$ . Dokažimo da  $G_1$  sigurno sadrži  $K_{m-1}$ . Pretpotstavimo suprotno. Tada u  $G_1$  možemo dodati čvor  $u$  i povezati ga sa svima ostalima crvenom bojom. Neka je  $k$  takvo da je  $K_k$  najveći monohromatski crven podgraf grafa  $G_1$ . Tada ako mu dodamo čvor  $u$  on postaje  $K_{k+1}$ . Ako je  $k < m-1$  tj.  $k+1 < m$  onda graf nastao dodavanjem čvora  $u$  na ovaj način ima  $r$  čvorova i ne sadrži ni crveni  $K_m$  ni plavi  $K_{n-1}$ , što je kontradikcija sa izborom  $r$ .

U daljem delu dokaza koristićemo samo činjenicu da onda postoji i crven  $K_{m-2}$ . Obeležimo njegove čvorove sa  $u_1, u_2, \dots, u_{m-2}$ . Obeležimo sada sa  $G_2$  graf koji nastaje dodavanjem još  $m-2$  čvorova  $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}$ , tako da  $G_2$  bude  $K_{r+m-3}$  i gde su nove dodate grane incidentne sa  $v$  čvorovima obojene na sledeći način. Za svako  $i$  povezaćemo  $u_i$  i  $v_i$  plavom granom, a za svako  $i \neq j$   $u_i$  i  $v_j$  povežemo crveno, i  $v_i$  sa  $v_j$  takođe crveno. Za svako  $x \in V(G_1)$  i  $x \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{m-2}\}$  povežimo  $v_i$  i  $x$  istom bojom kao i što je grana  $xu_i$ . Na osnovu ovog bojenja jasno je da se neko  $v_i$  može nalaziti u nekom crvenom monohromatskom kompletnom podgrafu  $G_2$  akko se na njegovom mestu u  $G_1$  nalazio  $u_i$ . Pošto je  $u_i v_i$  plavo oni se zajedno ne mogu nalaziti u njemu pa  $G_2$  ne sadrži crveni  $K_m$ . Sa druge strane se  $K_{n-1}$  može pojaviti. Jasno je da on mora sadržati bar jedan od čvorova iz  $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-2}\}$ , ali pošto su svaka dva čvora iz tog skupa povezana crveno, dobijamo da svaki  $K_{n-1}$  mora sadržati tačno jedan čvor  $v_i$  i njegov parnjak  $u_i$ .

Konstruišimo sada graf  $G_3$  dodavanjem još  $m-1$  čvorova  $w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$  u graf  $G_2$  koji su povezani na sledeći način. Za svako  $i \neq j$   $w_i w_j$  je crveno,  $w_i y$  je plavo za svako  $y$  koje nije  $u_j$ ,  $v_j$  ili  $w_j$ . Za svako  $i$  i  $j$   $u_i w_j$  je crveno za  $i \geq j$ , dok je u suprotnom plavo. Sa druge strane bojimo  $v_i w_j$  crveno za  $i < j$ , a u suprotnom u plavo. Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati da ovako dobijeni graf  $G_3 = K_{r+2m-4}$  ne sadrži crveni  $K_m$  ni plavi  $K_n$ .

Pretpotstavimo suprotno, prvo da postoji crveni  $K_m$ . Tada se u njemu mora

nalaziti bar jedan  $w_i$ , jer  $G_2$  ne sadrži takav podgraf. Kako je svaki  $w_i$  povezan plavo sa svakim  $y$  koje nije među  $u$  i  $v$  čvorovima, sledi da se  $K_m$  sastoji isključivo od njih i  $w$  čvorova. Neka je  $k$  indeks najmanjeg, a  $l$  indeks najvećeg  $w$  čvora u  $K_m$ . Tada se u posmatranom  $K_m$  nalazi ne više od  $l - k + 1$   $w$  čvorova. Pored toga svako  $u_i$ , mora ispunjavati uslov  $i \geq l$ , a svako  $v_i$ , uslov  $i < k$ . Zato dobijamo da je maksimalan broj čvorova u crvenom  $K_m$  jednak  $(l - k + 1) + (m - 1 - l) + (k - 1) = m - 1$ . Kontradikcija.

Pretpostavimo sada da postoji plavi  $K_n$ . Kako su svi  $w$  čvorovi povezani međusobno crveno, a bar jedan se mora nalaziti u datom  $K_n$ , onda je to tačno jedan  $w_i$ . To znači da je posmatrani  $K_n$  dobijen dodavanjem čvora  $w_i$  na već postojeći  $K_{n-1}$  iz  $G_2$ . Ipak već smo dokazali da se u svakom takvom  $K_{n-1}$  nalazi tačno jedan par čvorova  $u_j$  i  $v_j$ . Odatle dobijamo da su i  $w_i u_j$  i  $w_i v_j$  povezani plavo, što je nemoguće zbog izbora bojenja grana incidentnih sa  $w_i$ . Kontradikcija.

Tako dobijamo da postoji  $K_{r+2m-4}$  takav da ne sadrži ni crveni  $K_m$  ni plavi  $K_n$  pa mora važiti  $R(m, n) \geq R(m, n - 1) + 2m - 3$ .  $\square$

## 4 Primene Remzijeve teoreme

U ovom poglavlju ćemo videti primene Remzijeve teorije i njenih uopštenja u teoriji brojeva, rešavanju problema u vezi konveksnih mnogouglova i nalaženja idempotentnih elemenata polugrupe. Dokaz teoreme 4.4 možete naći u radu [5], dok dokaz teorema 4.1 i 4.3, kao i mnoge druge primene Remzijeve teoreme možete naći u radu [6].

**Teorema 4.1.** Za svako  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za svako bojenje  $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{k}$  postoje brojevi  $x, y, z \in \underline{n}$  sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

*Dokaz.* Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n + 1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ . Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \rightarrow \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i - j|)$$

Zbog  $n + 1 \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ , postoje  $i_1, i_2$  i  $i_3$  obojeni istom bojom, odnosno

$\chi^*({i_1, i_2}) = \chi^*({i_1, i_3}) = \chi^*({i_2, i_3})$ . Neka je:

$$x := i_1 - i_2, y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo  $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$  i  $x + y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$ .  $\square$

**Definicija 4.1.** Skup generatora  $\{g_1, \dots, g_n\}$  je skup elemenata grupe  $G$  takvih da se primenom operacije grupe na generatore mogu dobiti svi ostali elementi grupe. Kažemo da  $\{g_1, \dots, g_n\}$  generiše grupu  $G$ . Ako postoji  $g$  takvo da je  $\{g\}$  skup generatora grupe  $G$ , kažemo da je  $G$  ciklična i da je  $g$  generator grupe  $G$ .

**Lema 4.2.** Grupa  $\mathbb{Z}_p^*$ , čiji je skup elemenata  $\{0, 1, \dots, p-1\}$  i čija je operacija množenje po modulu  $p$ , gde je  $p$  prost broj je ciklična.

**Teorema 4.3.** Za sve  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za sve proste brojeve  $p > n_0$  jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$$

ima netrivialna rešenja. (Rešenje je trivijalno ako  $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \pmod{p}$ )

*Dokaz.* Neka je  $n_0 = R(3)_m + 1$ . Neka je  $g$  generator grupe  $\mathbb{Z}_p^*$  ( $g$  postoji zbog cikličnosti grupe  $\mathbb{Z}_p^*$ ). Svaki element  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  možemo zapisati  $x$  kao  $g^a$ . Imamo  $a = mj + i$ , za  $0 \leq i < m$ , tako da je  $x = g^{mj+i}$ . Posmatrajmo bojenje koje boji element  $x$  skupa  $\mathbb{Z}_p^*$  u boju  $i$  ako je  $x = g^{mj+i}$ . Na osnovu teoreme 4.1 postoje  $a, b$  i  $c$  obojeni istom bojom, takvi da važi  $a + b = c$ , odnosno eksponenti  $a, b$  i  $c$  su kongrueni po modulu  $m$ . Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su  $x = g^{j_a}$ ,  $y = g^{j_b}$  i  $z = g^{j_c}$ . Množenjem gornje jednačine sa  $g^{-i}$  dobijamo  $x^m + y^m = z^m$   $\square$

**Teorema 4.4.** Za svaki prirodan broj  $n \geq 3$  postoji broj  $N(n)$  takav da bilo koji skup od bar  $N$  tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan  $n$ -tougao

*Dokaz.* Za  $n = 4$  dokazaćemo da  $N = 5$  zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka  $A, B, C, D$  i  $E$ . Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao trougao  $ABC$ .  $D$  i  $E$  se onda nalaze unutar  $ABC$ . 2 tačke od  $A, B$  i  $C$  se moraju nalaziti sa jedne strane prave  $DE$ . Neka su to  $A$  i  $C$ . Tada je  $ACDE$  traženi četvorougao.

Neka je  $X$  skup od bar  $R_4(n, 5)$  tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafove znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četvoročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno  $R_4(n, 5)$  tačaka, mora postojati ili  $n$ -točlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati  $n$ -točlani skup tačaka tako da su svi četvorouglovi koje oni obrazuju konveksni, odnosno konveksan  $n$ -tougao od  $n$  tačaka. Dakle traženi  $N$  postoji i važi  $N \leq R_4(n, 5)$   $\square$

**Definicija 4.2.** Polugrupa  $\mathbf{S}$  je uređen par  $(S, \cdot)$ , takav da važi

$$\cdot : S \times S \rightarrow S \quad \text{i} \quad \forall x, y, z \in S : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$\mathbf{S}$  je grupa ako dodatno važi:

$$\begin{aligned} \exists e \in S \forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s \quad \text{i} \\ \forall s \in S \exists t \in S : s \cdot t = t \cdot s = e \end{aligned}$$

**Definicija 4.3.** Element  $s$  polugrupe  $\mathbf{S} = (S, \cdot)$  je idempotentan, ako je  $s \cdot s = s$

**Definicija 4.4.** Reč polugrupe  $S$  je izraz oblika  $s_1^{n_1} s_2^{n_2} \dots s_k^{n_k}$ ,  $s_1, \dots, s_k \in S$ ,  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , pri čemu  $s_i$  i  $s_j$ ,  $i \neq j$  ne moraju biti različiti.

**Teorema 4.5.** Neka je  $\mathbf{S} = (S, \cdot)$  konačna polugrupa. Tada  $\mathbf{S}$  sadrži bar jedan idempotentan element.

*Dokaz.* Neka je  $S$  konačna polugrupa čiji je konačan generišući skup  $A$ . Izaberimo reč  $a_1 a_2 \dots$  dužine  $n_0 = R(3)_{|S|} + 1$  nad  $A$ . Posmatrajmo bojenje grafa čiji je skup čvorova  $\underline{n}$  koje boji granu između  $i$  i  $j$ ,  $i \leq j$  u vrednost reči  $a_{i+1} \dots a_j$  u  $S$ . Na osnovu teoreme 1.4, moraju postojati  $i < j < k$  između kojih se nalaze grane iste boje, odnosno

$$a_{i+1} \dots a_j = a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{i+1} \dots a_j.$$

Dakle, element polugrupe čija je vrednost  $a_{i+1} \dots a_j$  je idempotentan.

□

## Literatura

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.
- [2] R. L. Graham, J. Nešetřil, S. Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.
- [3] Chung, F.R.K., R.L. Graham, R.M. Wilson. A survey of Bounds for Classical Ramsey Numbers Journal of graph theory, 1989.
- [4] J.G.Kalbfleisch. Upper Bounds for Some Ramsey Numbers Journal of combinatorial theory, 1967.
- [5] P. Erdos G. Szekeresz A combinatorial problem in geometry Compositio Mathematica, tome 2, 1935
- [6] M. Steed. Some theorems and applications of Ramsey Theory
- [7] S. A. Burr, P. Erdos, R. J. Faudree, R.H. Schelp On the Diffeence of Consecutive Ramsey Numbers