

# Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

15.1.2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Donja ograničenja za Remzijeve brojeve</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Primene Remzijeve teoreme</b>	<b>8</b>

# 1 Uvod

Za svaka dva broja  $l_1$  i  $l_2$  možemo pronaći prirodan broj  $n$ , takav da svaki graf sa  $n$  brojem čvorova u sebi sadrži potpun podgraf sa  $l_1$  čvorova ili njegov komplement sadrži podgraf sa  $l_2$  nezavisnih čvorova.

Najmanji broj za koji ovo važi naziva se **Remzijev broj** i on se zapisuje kao  $R(l, k)$

Tačne vrednosti Remzijevih brojeva se teško računaju i uglavnom su samo ograničeni intervalima. Trenutno je poznato 9 Remzijevih brojeva za  $l_1, l_2 > 2$ .

$R(l_1, l_2)$	1	2	3	...
1	1	1	1	1
2	1	2	3	...
3	1	3	...	...
...	1	...	...	...

Table 1:  $R(l_{1,2} = 1, 2)$

$R(l_1, l_2)$	3	4	5	6
3	6	9	14	18
4	9	18	...	...
5	14	...	...	...
6	18	...	...	...

Table 2:  $R(l_{1,2} > 2)$

**Teorema 1.1.**

$$R(l_1, 1) = (1, l_2) = 1$$

**Teorema 1.2.**

$$R(l, 2) = R(2, l) = l$$

## 2 Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve

**Teorema 2.1.**

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

*Dokaz.* Iz prethodne teoreme znamo da  $R(2, l_1) = l_1$  i  $R(2, l_2) = l_2$ . Koristeći indukciju potvrđujemo da ovo važi i za svako  $t$  i  $s$  takvo da  $t \leq l_2$  i  $s < l_2$  ili  $s \leq l_1$  i  $t < l_2$ .

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da važi tvrđenje  $R(l_1, l_2) \geq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$ , odnosno da postoji graf sa  $R(l_1, l_2)$  čvorova koji ne sadrži podgraf sa  $l_1 - 1$  čvorova niti njegov komplement sadrži podgraf sa  $l_2 - 1$  čvorova.

Neka je  $u$  proizvoljan broj čvorova grafa  $G$ , broj njemu susednih čvorova označimo sa  $N$ , a broj nesusednih čvorova biće  $M$ . To se drugačije može zapisati kao  $M = V(G) - N_G(u) - u$ . Kako ne bi važno da graf  $G$  sadrži podgraf sa  $l_2 - 1$  čvorova mora da važi  $N \leq R(l_2 - 1, l_1) - 1$ , a samim tim i  $M \leq R(l_2, l_1 - 1) - 1$ . Ukupan broj čvorova  $n$  jednak je zbiru navedenog (čvora  $u$ , kao i njegovih susednih i nesusednih čvorova).

$$n = N + M + 1$$

$$n = R(l_2 - 1, l_1) - 1 + R(l_2, l_1 - 1) - 1 + 1$$

$$n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$$

Dobijeni izraz je kontradikcija, te sledi tačno tvrđenje ove teoreme.  $\square$

**Teorema 2.2.**

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

*Dokaz.* Kod ovog dokaza koristimo indukciju. Naša baza biće da dokažemo da nejednakost važi za  $l_1 = l_2 = 2$ , odnosno

$$R(2, 2) \leq \binom{2 + 2 - 2}{2 - 1}$$

$$\binom{2 \leq 2}{1}$$

$$2 \leq 2$$

Pretpostavimo sada da važi  $\forall(l_1, l_2)$  pri čemu je  $l_1 + l_2 \geq 4$ .

$$l_1, l_2 \geq 2$$

$$l_1 + l_2 = n + 1$$

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 - 1 + l_2 - 2}{l_1 - 1 - 1} + \binom{l_1 + l_2 - 1 - 2}{l_1 - 1}$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 2} + \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 1}$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

Prvu nejednakost dokazali smo, a samu jednakost upotreom Paskalovog identiteta  $\binom{n}{l_2} = \binom{n-1}{l_2-1} + \binom{n-1}{l_2}$ .  $\square$

**Teorema 2.3.** Za  $k \geq 2$  važi

$$R(l_1, l_2, \dots, l_k) \leq 2 + \sum_{i=1}^k (R(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_k) - 1)$$

Neka su  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_k \in \mathbb{N}$ . Tada postoji neki Remzijev broj, neko  $n$  za koje važi  $n \rightarrow (l_1, l_2, l_3, \dots, l_k)$ . Najmanje  $n$  za koje ovo važi označićemo kao  $R(l)_k$ .

*Dokaz.* Ovu teoremu dokazaćemo takođe indukcijom. Naša baza biće Remzijeva teorema za dve boje, odnosno  $k = 2$ .

$$R(l_1, l_2) \leq 2 + R(l_2 - 1, l_1) - 1 + R(l_2, l_1 - 1) - 1$$

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

$\square$

### 3 Donja ograničenja za Remzijeve brojeve

**Teorema 3.1.** Neka su dati prirodni brojevi  $n$  i  $k$ , takvi da  $n \geq k > 0$ . Ako je

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

onda važi  $R(k, k) > n$ .

*Dokaz.* Posmatrajmo proizvoljno bojenje grana grafa  $K_n$  u dve boje - crvenu i plavu takvo da je verovatnoća da je grana  $uv$  u grafu obojena crvenom bojom jednaka verovatnoći da je obojena plavom bojom i iznosi

$$P(uv \text{ je crvena}) = P(uv \text{ je plava}) = \frac{1}{2}.$$

Prvo ćemo odrediti verovatnoću da je neki  $k$ -podskup  $K_k$  početnog grafa monohromatski. Sa  $M_s$  označimo događaj da je  $K_k$  monohromatski. Kako nam od svih mogućih bojenja ovog  $k$ -podskupa odgovaraju samo dva gde su sve grane isključivo crvene ili plave dobijamo da je

$$P(M_s) = 2 \left( \frac{1}{2} \right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Odredimo sada verovatnoću da se u celom  $K_n$  grafu nalazi monohromatski  $K_k$  podskup i označimo taj događaj sa  $A$ . U celom grafu ima  $\binom{n}{k}$  ovakvih podskupova koje ćemo označiti sa  $S$ . Ipak pošto događaj da je neki  $K_k$  monohromatski nije nezavisan u odnosu na to da su ostali podskupovi  $S$  monohromatski dobijamo

$$P(A) = P\left(\bigcup_{|S|=k} M_S\right) \leq \sum_{|S|=k} P(M_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Iz ovoga sledi da ako je  $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$  onda važi i  $P(A) < 1$ , čime dobijamo da pri ovakvim bojenjima grafa  $K_n$  postojanje monohromatskog  $K_k$  nije garantovano, tj. postoji bojenje koje ga ne sadrži i odatle da je  $R(k, k) > n$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** Neka su dati prirodni brojevi  $n, k$  i  $l$ , takvi da  $n \geq k > 0$  i  $n \geq l > 0$ . Ako za neki broj  $p, 0 \leq p \leq 1$  važi

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda je  $R(k, l) > n$

*Dokaz.* Dokaz ove teoreme je sličan dokazu prethodne Teoreme 3.1. Neka je verovatnoća da je proizvoljna grana  $uv$  u grafu  $K_n$  crvena jednaka  $p$ . Tada je verovatnoća da je ona plava jednaka  $1 - p$ , pa možemo pisati

$$P(uv \text{ je crvena}) = p, P(uv \text{ je plava}) = 1 - p, \forall uv \in E(K_n)$$

Neka je  $S$  potpun  $k$ -elementan poskup, a  $T$  potpun  $l$ -elementan poskup grafa  $K_n$ . Označimo sa  $A_S$  događaj da je neki podskup  $S$  monohromatski crven, a  $B_T$  događaj da je poskup  $T$  monohromatski plav. Onda je ukupna verovatnoća da u grafu  $K_n$  postoji monohromatski obojen  $K_k$  u crveno ili  $K_l$  u plavo jednaka

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S \cup \bigcup_{|T|=l} B_T\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) + \sum_{|T|=l} P(B_T) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Ako postoji  $p$  za koji je krajnji izraz manji od 1, onda zaključujemo da postoji  $K_n$  koji sadrži potpuno crveni  $K_k$  ili potpuno plavi  $K_l$ , pa mora biti  $R(k, l) > n$ .  $\square$

**Teorema 3.3.** Neka su dati prirodni brojevi  $n, m$  i  $k$  tako da je  $1 \leq k \leq n - 2$ . Tada je

$$R(m, n) \geq R(m, n - k) + R(m, k + 1) - 1.$$

*Dokaz.* Neka je  $r_1 = R(m, n - k)$  i  $r_2 = R(m, k + 1)$  i bez umanjenja opštosti prva boja crvena, a druga plava. Posmatrajmo grafove  $G_1 = K_{r_1-1}$  i  $G_2 = K_{r_2-1}$ , takve da su im sve grane obojene u crvenu ili plavu boju i da  $G_1$  ne sadrži nijedan crveni  $K_m$  i nijedan plavi  $K_{n-k}$ , a  $G_2$  ne sadrži nijedan crveni  $K_m$  ni plavi  $K_{k+1}$  podgraf. Primetimo da na osnovu definicije Remzijevih brojeva

ovakvi grafovi sigurno postoje. Neka je  $G = G_1 \nabla G_2$ , tako da svaku granu  $uv$ , gde  $u \in V(G_1)$  i  $v \in V(G_2)$  obojimo u plavo. Sada vidimo da je  $G = K_{r_1+r_2-2}$  i kako su sve dodate grane između grafova  $G_1$  i  $G_2$  plave, jasno je da  $G$  ne sadrži crveni  $K_m$ . Sa druge strane najveći monohromatski plavi kompletan podgraf nema više od  $(n - k - 1) + (k + 1 - 1) = n - 1$  čvorova, pa graf  $G$  sigurno ne sadrži ni plavi  $K_n$ . Odavde sledi  $R(m, n) > r_1 + r_2 - 2$  odakle dobijamo traženu nejednakost.  $\square$

**Teorema 3.4.** Neka su dati prirodni brojevi  $m, n \geq 2$ . Tada važi

$$R(m, n) \geq R(m, n - 1) + 2m - 3.$$

*Dokaz.* Neka je  $r = R(m, n - 1)$  i  $G_1 = K_{r-1}$  takav da ne sadrži crveni  $K_m$  i plavi  $K_{n-1}$ . Dokažimo da  $G_1$  sigurno sadrži  $K_{m-1}$ . Pretpostavimo suprotno. Tada u  $G_1$  možemo dodati čvor  $u$  i povezati ga sa svima ostalima crvenom bojom. Neka je  $k$  takvo da je  $K_k$  najveći monohromatski crven podgraf grafa  $G_1$ . Tada ako mu dodamo čvor  $u$  on postaje  $K_{k+1}$ . Ako je  $k < m - 1$  tj.  $k + 1 < m$  onda graf nastao dodavanjem čvora  $u$  na ovaj način ima  $r$  čvorova i ne sadrži ni crveni  $K_m$  ni plavi  $K_{n-1}$ , što je kontradikcija sa izborom  $r$ .

U daljem delu dokaza koristimo samo činjenicu da onda postoji i crven  $K_{m-2}$ . Obeležimo njegove čvorove sa  $u_1, u_2, \dots, u_{m-2}$ . Obeležimo sada sa  $G_2$  graf koji nastaje dodavanjem još  $m - 2$  čvorova  $v_1, v_2, \dots, v_{m-2}$ , tako da  $G_2$  bude  $K_{r+m-3}$  i gde su nove dodate grane incidentne sa  $v$  čvorovima obojene na sledeći način. Za svako  $i$  povežemo  $u_i$  i  $v_i$  plavom granom, a za svako  $i \neq j$   $u_i$  i  $v_j$  povežemo crveno, i  $v_i$  sa  $v_j$  takođe crveno. Za svako  $x \in V(G_1)$  i  $x \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{m-2}\}$  povežimo  $v_i$  i  $x$  istom bojom kao i što je grana  $xu_i$ . Na osnovu ovog bojenja jasno je da se neko  $v_i$  može nalaziti u nekom crvenom monohromatskom kompletnom podgrafu  $G_2$  akko se na njegovom mestu u  $G_1$  nalazio  $u_i$ . Pošto je  $u_i v_i$  plavo oni se zajedno ne mogu nalaziti u njemu pa  $G_2$  ne sadrži crveni  $K_m$ . Sa druge strane se  $K_{n-1}$  može pojaviti. Jasno je da on mora sadržati bar jedan od čvorova iz  $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-2}\}$ , ali pošto su svaka dva čvora iz tog skupa povezana crveno, dobijamo da svaki  $K_{n-1}$  mora sadržati tačno jedan čvor  $v_i$  i njegov parnjak  $u_i$ .

Konstruišimo sada graf  $G_3$  dodavanjem još  $m - 1$  čvorova  $w_1, w_2, \dots, w_{m-1}$  u graf  $G_2$  koji su povezani na sledeći način. Za svako  $i \neq j$   $w_i w_j$  je crveno,  $w_i y$  je plavo za svako  $y$  koje nije  $u_j, v_j$  ili  $w_j$ . Za svako  $i$  i  $j$   $u_i w_j$  je crveno za  $i \geq j$ , dok je u suprotnom plavo. Sa druge strane bojimo  $v_i w_j$  crveno za  $i < j$ , a u suprotnom u plavo. Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati da ovako dobijeni graf  $G_3 = K_{r+2m-4}$  ne sadrži crveni  $K_m$  ni plavi  $K_n$ .

Pretpostavimo suprotno, prvo da postoji crveni  $K_m$ . Tada se u njemu mora nalaziti bar jedan  $w_i$ , jer  $G_2$  ne sadrži takav podgraf. Kako je svaki  $w_i$  povezan plavo sa svakim  $y$  koje nije među  $u$  i  $v$  čvorovima, sledi da se  $K_m$  sastoji isključivo od njih i  $w$  čvorova. Neka je  $k$  indeks najmanjeg, a  $l$  indeks najvećeg  $w$  čvora u  $K_m$ . Tada se u posmatranom  $K_m$  nalazi ne više od  $l - k + 1$   $w$  čvorova. Pored toga svako  $u_i$  mora ispunjavati uslov  $i \geq l$ , a svako  $v_i$ , uslov  $i < k$ . Zato dobijamo da je maksimalan broj čvorova u crvenom  $K_m$  jednak  $(l - k + 1) + (m - 1 - l) + (k - 1) = m - 1$ . Kontradikcija.

Pretpotstavimo sada da postoji plavi  $K_n$ . Kako su svi  $w$  čvorovi povezani međusobno crveno, a bar jedan se mora nalaziti u datom  $K_n$ , onda je to tačno jedan  $w_i$ . To znači da je posmatrani  $K_n$  dobijen dodavanjem čvora  $w_i$  na već postojeći  $K_{n-1}$  iz  $G_2$ . Ipak već smo dokazali da se u svakom takvom  $K_{n-1}$  nalazi tačno jedan par čvorova  $u_j$  i  $v_j$ . Odatle dobijamo da su i  $w_i u_j$  i  $w_i v_j$  povezani plavo, što je nemoguće zbog izbora bojenja grana incidentnih sa  $w_i$ . Kontradikcija. Tako dobijamo da postoji  $K_{r+2m-4}$  takav da ne sadrži ni crveni  $K_m$  ni plavi  $K_n$  pa mora važiti  $R(m, n) \geq R(m, n-1) + 2m - 3$ .  $\square$

## 4 Primene Remzijeve teoreme

**Teorema 4.1.** Za svako  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za svako bojenje  $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{k}$  postoje brojevi  $x, y, z \in \underline{n}$  sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

*Dokaz.* Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ . Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \rightarrow \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i - j|)$$

Zbog  $n+1 \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ , postoje  $i_1, i_2$  i  $i_3$  obojeni istom bojom, odnosno  $\chi^*({i_1, i_2}) = \chi^*({i_1, i_3}) = \chi^*({i_2, i_3})$ . Neka je:

$$x := i_1 - i_2, y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo  $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$  i  $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$ .  $\square$

**Teorema 4.2.** Za sve  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za sve proste brojeve  $p > n_0$  jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$$

ima netrivialna rešenja. (Rešenje je trivialno ako  $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \pmod{p}$ )

*Dokaz.* Neka je  $n_0 = R(3)_m + 1$ . Neka je  $g$  generator grupe  $\mathbb{Z}_p^*$  ( $g$  postoji zbog cikličnosti grupe  $\mathbb{Z}_p^*$ ). Svaki elemenat  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  možemo zapisati  $x$  kao  $g^a$ . Imamo  $a = mj + i$ , za  $0 \leq i < m$ , tako da je  $x = g^{mj+i}$ . Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat  $x$  skupa  $\mathbb{Z}_p^*$  u boju  $i$  ako je  $x = g^{mj+i}$ . Na osnovu Šurove teoreme (4.1), postoje  $a, b$  i  $c$  obojeni istom bojom, takvi da važi  $a + b = c$ , odnosno eksponenti  $a, b$  i  $c$  su kongrueni po modulu  $m$ . Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su  $x = g^{j_a}$ ,  $y = g^{j_b}$  i  $z = g^{j_c}$ . Množenjem gornje jednačine sa  $g^{-i}$  dobijamo  $x^m + y^m = z^m$ .  $\square$



**Teorema 4.3.** Za svaki prirodan broj  $n \geq 3$  postoji broj  $N(n)$  takav da bilo koji skup od bar  $N$  tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan  $n$ -tougao

*Dokaz.* Za  $n = 4$  dokazaćemo da  $N = 5$  zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka  $A, B, C, D, E$ . Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao trougao  $ABC$ .  $D$  i  $E$  se onda nalaze unutar  $ABC$ . 2 tačke od  $A, B$  i  $C$  se moraju nalaziti sa jedne strane prave  $DE$ . Neka su to  $A$  i  $C$ . Tada je  $ACDE$  traženi četvorougao.

Neka je  $X$  skup od bar  $R_4(n, 5)$  tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafe (??) znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četvoročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno  $R_4(n, 5)$  tačaka, mora postojati ili  $n$ -točlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati  $n$ -točlani skup tačaka tako da su svi četvoročlani koje oni obrazuju konveksni, odnosno konveksan  $n$ -tougao od  $n$  tačaka. Dakle traženi  $N$  postoji i važi  $N \leq R_4(n, 5)$

□

**Definicija 4.1.** Polugrupa  $\mathbf{S}$  je uređen par  $(S, \cdot)$ , takav da važi

$$\cdot : S \times S \rightarrow S \quad \text{i} \quad \forall x, y, z \in S : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

$\mathbf{S}$  je grupa ako dodatno važi:

$$\exists e \in S \quad \forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s \quad \text{i}$$

$$\forall s \in S \quad \exists t \in S : s \cdot t = t \cdot s = e$$

**Definicija 4.2.** Element  $s$  polugrupe  $\mathbf{S} = (S, \cdot)$  je idempotentan, ako je  $s \cdot s = s$

**Teorema 4.4.** Neka je  $\mathbf{S} = (S, \cdot)$  konačna polugrupa. Tada  $\mathbf{S}$  sadrži bar jedan idempotentan element.

*Dokaz.* Neka je  $S$  konačna polugrupa čiji je konačan generišući skup  $A$ . Izaberimo beskonačnu reč  $a_1 a_2 \dots$  nad  $A$ . Posmatrajmo bojenje grafa  $0, 1, 2, \dots$  koje boji granu između  $i$  i  $j$ ,  $i \leq j$  u sliku  $a_{i+1} \dots a_j$  u  $S$ . Na osnovu Remzijeve teoreme za beskonačne grafove (??), moraju postojati  $i < j < k$  između kojih se nalaze grane iste boje, odnosno

$$a_{i+1} \dots a_j = a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{i+1} \dots a_j.$$

Dakle, element  $a_{i+1} \dots a_j$  je idempotentan.

□

## References

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.
- [2] Ronald L. Graham, Jaroslav Nešetřil, Steve Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.