Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

15.1.2020

Contents

1 Uvod

Za svaka dva broja l_1 i l_2 možemo pronaći prirodan broj n, takav da svai graf sa n brojem čvorova u sebi sadrži potpun podgraf sa l_1 čvorova ili njegov komplement sadrži podgraf sa l_2 nezavisnih čvorova.
Najmanji broj za koji ovo važi naziva se **Remzijev broj** i on se zapisuje kao $R(l, k)$
Tačne vrednosti Remzijevih brojeva se teško računaju i uglavnom su samo ograničeni intervalima. Trenutno je poznato 9 Remzijevih brojeva za $l_1, l_2 > 2$.

$R(l_1, l_2)$	1	2	3	...
1	1	1	1	1
2	1	2	3	....
3	1	3	...	...
...	1	...	...	...

Table 1: $R(l_{1,2} = 1, 2$

$R(l_1, l_2)$	3	4	5	6
3	6	9	14	18
4	9	18	...	...
5	14	...	...	...
6	18	...	...	...

Table 2: $R(l_{1,2} > 2)$

Teorema 1.1.
$$R(l_1, 1) = (1, l_2) = 1$$

Teorema 1.2.
$$R(l, 2) = R(2, l) = l$$

2 Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve

Teorema 2.1.
$$R(l_1, l_2) \leq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

Dokaz. Iz prethodne teoreme znamo da $R(2, l_1) = l_1$ i $R(2, l_2) = l_2$. Koristeći induciju potvrđujemo da ovo važi i za svako t i s takvo da $t \leq l_2$ i $s < l_2$ ili $s \leq l_1$ i $t < l_2$.

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da važi tvrđenje $R(l_1, l_2) \geq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$, odnosno da postoji graf sa $R(l_1, l_2)$ čvorova koji ne sadrži podgraf sa $l_1 - 1$ čvorova niti njegov komplement sadrži podgraf sa $l_2 - 1$ čvorova.

Neka je u proizvoljan broj čvorova grafa G, broj njemu susednih čvorova označićemo sa N, a broj nesusednih čvorova biće M. To se drugačije može zapisati kao $M = V(G) - N_G(u) - u$. Kako ne bi važilo da graf G sadrži podgraf sa $l_2 - 1$ čvorova mora da važi $N \leq R(l_2 - 1, l_1) - 1$, a samim tim i $M \leq R(l_2, l_1 - 1) - 1$. Ukupan broj čvorova n jednak je zbiru navedenog (čvora u, kao i njegovih susednih i nesusednih čvorova).

$$n = N + M + 1$$

$$n = R(l_2 - 1, l_1) - 1 + R(l_2, l_1 - 1) - 1 + 1$$
$$n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$$

Dobijeni izraz je kontradikcija, te sledi tačno tvrđenje ove teoreme. □

Teorema 2.2. Ako su $R(l_2, l_1 - 1)$ i $R(l_2 - 1, l_1)$ parni brojevi, važi stroga nejednakost, odnosno:

$$R(l_1, l_2) < R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

Dokaz. Uzmimo da su $R(l_1 - 1, l_2)$ i $R(l_1, l_2 - 1)$ parni brojevi. Posmatramo graf G sa $n + 1$ čvorova, odnosno $n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$. Treba pokazati da postoji neki podgraf M koji ima l_2 medjusobno povezanih ili podgraf N sa l_1 medjusobno nepovezanih čvorova. Broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran, a kako su $R(l_2 - 1, l_2)$ i $R(l_2, l_1 - 1$ parni brojevi, n je neparan. Iz toga zaključujemo da graf G sadrži barem jedan čvor parnog stepena. Uzmimo da je to proizvoljan čvor v. Ako je njegov stepen veći ili jednak $R(l_2 - 1, l_1)$ onda neki podgraf indukovan njegovim susednim čvorovima može sadržati novi podgraf sa $l_2 - 1$ povezanih čvorova (Ako njima dodamo povezani v čvor, biće ih l_2, te dobijamo naš podrgaf M), ili l nepovezanih čvorova (što je zapravo podgraf N).
U suprotnom, ako je stepen ovih čvorova strogo manji do $R(l_2 - 1, l_1)$, onda važi i $d_G(V) \leq R(l_2 - 1, l_1) - 2$. Kada toj činjenici dodamo da je $n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$ sledi da je broj nesusednih čvorova čvora v veći ili jednak sa $R(l_2, l_1 - 1)$. Iz ove nejednakosti možemo zaključiti da podgraf indukovan ovim čvorovima sadrži ili gorepomenuti podgraf M (jer sadrži l_2 povezanih čvorova) ili podrgaf sa $l_1 - 1$ nepovezanih čvorova. Ukoliko njemu dodamo čvor v koji

nije povezan, dobijamo l_1 nepovezanih čvorova, odnosno podgraf N.
Time smo dokazali pretpostavku da sko su brojevi $R(l_1-1,l_2)$ i $R(l_1,l_2-1)$ parni, onda svaki graf sa $n+1$ čvorova sadrži ili M ili N podgraf. Iz toga sledi stroga nejednakost $R(l_1,l_2) < R(l_2-1,l_1)+R(l_2,l_1-1)$ jer je $R(l_1,l_2)\leq n$. □

Teorema 2.3.

$$R(l_1,l_2)\leq \binom{l_1+l_2-2}{l_1-1}$$

Dokaz. Kod ovog dokaza koristićemo indukciju. Naša baza biće da dokažemo da nejednakost važi za $l_1=l_2=2$, odnosno

$$R(2,2)\leq \binom{2+2-2}{2-1}$$

$$\binom{2\leq 2}{1}$$

$$2\leq 2$$

Pretpostavimo sada da važi $\forall(l_1,l_2)$ pri čemu je $l_1+l_2\geq 4$.

$$l_1,l_2\geq 2$$

$$l_1+l_2=n+1$$

$$R(l_1,l_2)\leq R(l-1,l_2)+R(l_1,l_2-1)$$

$$R(l_1,l_2)\leq \binom{l_1-1+l_2-2}{l_1-1-1}+\binom{l_1+l_2-1-2}{l_1-1}$$

$$R(l_1,l_2)\leq \binom{l_1+l_2-3}{l_1-2}+\binom{l_1+l_2-3}{l_1-1}$$

$$R(l_1,l_2)\leq \binom{l_1+l_2-2}{l_1-1}$$

Prvu nejednakost dokazali smo , a samu jednakost upotreom Paskalovog identiteta $\binom{n}{l_2}=\binom{n-1}{l_2-1}+\binom{n-1}{l_2}$. □

Teorema 2.4. Za $k\geq 2$ važi

$$R(l_1,l_2,...,l_k)\leq 2+\sum_{i=1}^{k}(R(l_1,l_2...,l_{i-1},l_i-1,l_{i+1},...,l_k)-1)$$

Neka su $l_1,l_2,l_3,...,l_k\in\mathbb{N}$. Tada postoji neki Remzijev broj, neko n, za koje važi $n\to(l_1,l_2,l_3,...,l_k)$ odnosno da postoji kompletan graf G obojen sa k boja, pri čemu je l_i grana obojena istom bojom za neko $1\leq i\leq k$. Najmanje n za koje ovo važi označićemo kao $R(l)_k$.

Dokaz. Ovu teoremu dokazaćemo takođe indukcijom. Naša baza biće Remzijeva teorema za dve boje, odnosno $k=2$.

$$R(l_1,l_2)\leq 2+R(l_2-1,l_1)-1+R(l_2,l_1-1)-1$$

$$R(l_1,l_2)\leq R(l_2-1,l_1)+R(l_2,l_1-1)$$

□

3 Donja ograničenja za Remzijeve brojeve

Teorema 3.1. Neka su dati prirodni brojevi n i k, takvi da $n \geq k > 0$ .Ako je

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

onda važi $R(k, k) > n$.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljno bojenje grana grafa K_n u dve boje - crvenu i plavu takvo da je verovatnoća da je grana uv u grafu obojena crvenom bojom jednaka verovatnoći da je obojena plavom bojom i iznosi

$$P(uv \text{ je crvena}) = P(uv \text{ je plava}) = \frac{1}{2}.$$

Prvo ćemo odrediti verovatnoću da je neki k-podskup K_k početnog grafa monohromatski. Sa M_s označimo događaj da je K_k monohromatski. Kako nam od svih mogućih bojenja ovog k-podskupa odgovaraju samo dva gde su sve grane isključivo crvene ili plave dobijamo da je

$$P(M_s) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Odredimo sada verovatnoću da se u celom K_n grafu nalazi monohromatski K_k podskup i označimo taj događaj sa A. U celom grafu ima $\binom{n}{k}$ ovakvih podskupova koje ćemo označiti sa S. Ipak pošto događaj da je neki K_k monohromatski nije nezavisan u odnosu na to da su ostali podskupovi S monhromatski dobijamo

$$P(A) = P(\bigcup_{|S|=k} M_S) \leq \sum_{|S|=k} P(M_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Iz ovoga sledi da ako je $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ onda važi i $P(A) < 1$, čime dobijamo da pri ovakvim bojenjima grafa K_n postojanje monohromatskog K_k nije garantovano, tj. postoji bojenje koje ga ne sadrži i odatle da je $R(k, k) > n$. □

Teorema 3.2. Neka su dati prirodni brojevi n, k i l, takvi da $n \geq k > 0$ i $n \geq l > 0$. Ako za neki broj p, $0 \leq p \leq 1$ važi

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda je $R(k, l) > n$

Dokaz. Dokaz ove teoreme je sličan dokazu prethodne Teoreme 3.1. Neka je verovatnoća da je proizvoljna grana uv u grafu K_n crvena jednaka p. Tada je verovatnoća da je ona plava jednaka $1 - p$, pa možemo pisati

$$P(uv \text{ je crvena}) = p, \ P(uv \text{ je plava}) = 1 - p, \ \forall uv \in E(K_n)$$

Neka je S potpun k-elementan poskup, a T potpun l-elementan poskup grafa K_n. Označimo sa A_S događaj da je neki podskup S monohromatski crven, a B_T događaj da je poskup T monohromatski plav. Onda je ukupna verovatnoća da u grafu K_n postoji monohromatski obojen K_k u crveno ili K_l u plavo jednaka

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S \cup \bigcup_{|T|=l} B_T\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) + \sum_{|T|=l} P(B_T) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Ako postoji p za koji je krajnji izraz manji od 1, onda zaključujemo da postoji K_n koji sadrži potpuno crveni K_k ili potpuno plavi K_l, pa mora biti $R(k,l) > n$. □

Teorema 3.3. Neka su dati prirodni brojevi n, m i k tako da je $1 \leq k \leq n-2$. Tada je

$$R(m,n) \geq R(m,n-k) + R(m,k+1) - 1.$$

Dokaz. Neka je $r_1 = R(m, n-k)$ i $r_2 = R(m, k+1)$ i bez umanjenja opštosti prva boja crvena, a druga plava. Posmatrajmo grafove $G_1 = K_{r_1-1}$ i $G_2 = K_{r_2-1}$, takve da su im sve grane obojene u crvenu ili plavu boju i da G_1 ne sadrži nijedan crveni K_m i nijedan plavi K_{n-k}, a G_2 ne sadrži nijedan crveni K_m ni plavi K_{k+1} podgraf. Primetimo da na osnovu definicije Remzijevih brojeva ovakvi grafovi sigurno postoje. Neka je $G = G_1 \bigtriangledown G_2$, tako da svaku granu uv, gde $u \in V(G_1)$ i $v \in V(G_2)$ obojimo u plavo. Sada vidimo da je $G = K_{r_1+r_2-2}$ i kako su sve dodate grane između grafova G_1 i G_2 plave, jasno je da G ne sadrži crveni K_m. Sa druge strane najveći monohromatski plavi kompletan podgraf nema više od $(n-k-1) + (k+1-1) = n-1$ čvorova, pa graf G sigurno ne sadrži ni plavi K_n. Odavde sledi $R(m,n) > r_1 + r_2 - 2$ odakle dobijamo traženu nejednakost. □

Teorema 3.4. Neka su dati prirodni brojevi $m, n \geq 2$. Tada važi

$$R(m,n) \geq R(m,n-1) + 2m - 3.$$

Dokaz. Neka je $r = R(m, n-1)$ i $G_1 = K_{r-1}$ takav da ne sadrži crveni K_m i plavi K_{n-1}. Dokažimo da G_1 sigurno sadrži K_{m-1}. Pretpotstavimo suprotno. Tada u G_1 možemo dodati čvor u i povezati ga sa svima ostalima crvenom bojom. Neka je k takvo da je K_k najveći monohromatski crven podgraf grafa G_1. Tada ako mu dodamo čvor u on postaje K_{k+1}. Ako je $k < m-1$ tj. $k+1 < m$ onda graf nastao dodavanjem čvora u na ovaj način ima r čvorova i ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_{n-1}, što je kontradikcija sa izborom r.
U daljem delu dokaza koristićemo samo činjenicu da onda postoji i crven K_{m-2}. Obeležimo njegove čvorove sa $u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}$. Obeležimo sada sa G_2 graf koji nastaje dodavanjem još $m-2$ čvorova $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$, tako da G_2 bude K_{r+m-3} i gde su nove dodate grane incidentne sa v čvorovima obojene na sledeći način. Za svako i povezaćemo u_i i v_i plavom granom, a za svako $i \neq j$ u_i i v_j povežemo crveno, i v_i sa v_j takođe crveno. Za svako $x \in V(G_1)$ i $x \notin \{u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}\}$ povežimo v_i i x istom bojom kao i što je grana xu_i. Na osnovu ovog bojenja

jasno je da se neko v_i može nalaziti u nekom crvenom monohromatskom kompletnom podgrafu G_2 akko se na njegovom mestu u G_1 nalazio u_i. Pošto je u_iv_i plavo oni se zajedno ne mogu nalaziti u njemu pa G_2 ne sadrži crveni K_m. Sa druge strane se K_{n-1} može pojaviti. Jasno je da on mora sadržati bar jedan od čvorova iz $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}\}$, ali pošto su svaka dva čvora iz tog skupa povezana crveno, dobijamo da svaki K_{n-1} mora sadržati tačno jedan čvor v_i i njegov parnjak u_i.
Konstruišimo sada graf G_3 dodavanjem još $m-1$ čvorova $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ u graf G_2 koji su povezani na sledeći način. Za svako $i \neq j$ w_iw_j je crveno, w_iy je plavo za svako y koje nije u_j, v_j ili w_j. Za svako i i j u_iw_j je crveno za $i \geq j$, dok je u suprotnom plavo. Sa druge strane bojimo v_iw_j crveno za $i < j$, a u suprotnom u plavo. Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati da ovako dobijeni graf $G_3 = K_{r+2m-4}$ ne sadrži crveni K_m ni plavi K_n.
Pretpotstavimo suprotno, prvo da postoji crveni K_m. Tada se u njemu mora nalaziti bar jedan w_i, jer G_2 ne sadrži takav podgraf. Kako je svaki w_i povezan plavo sa svakim y koje nije među u i v čvorovima, sledi da se K_m sastoji isključivo od njih i w čvorova. Neka je k indeks najmanjeg, a l indeks najvećeg w čvora u K_m. Tada se u posmatranom K_m nalazi ne više od $l-k+1$ w čvorova. Pored toga svako u_i, mora ispunjavati uslov $i \geq l$, a svako v_i, uslov $i < k$. Zato dobijamo da je maksimalan broj čvorova u crvenom K_m jednak $(l-k+1)+(m-1-l)+(k-1) = m-1$. Kontradikcija.
Pretpotstavimo sada da postoji plavi K_n. Kako su svi w čvorovi povezani međusobno crveno, a bar jedan se mora nalaziti u datom K_n, onda je to tačno jedan w_i. To znači da je posmatrani K_n dobijen dodavanjem čvora w_i na već postojeći K_{n-1} iz G_2. Ipak već smo dokazali da se u svakom takvom K_{n-1} nalazi tačno jedan par čvorova u_j i v_j. Odatle dobijamo da su i w_iu_j i w_iv_j povezani plavo, što je nemoguće zbog izbora bojenja grana incidentnih sa w_i. Kontradikcija.
Tako dobijamo da postoji K_{r+2m-4} takav da ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_n pa mora važiti $R(m,n) \geq R(m,n-1)+2m-3$. □

4 Primene Remzijeve teoreme

Teorema 4.1. Za svako $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za svako bojenje $\chi : \underline{n} \to \underline{k}$ postoje brojevi $x, y, z \in \underline{n}$ sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3,3,\ldots,3)}_{\text{k puta}}$. Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \to \underline{k} : \{i,j\} \mapsto \chi(|i-j|)$$

Zbog $n+1 \to \underbrace{(3,3,\ldots,3)}_{\text{k puta}}$, postoje i_1, i_2 i i_3 obojeni istom bojom, odnosno $\chi^*(\{i_1,i_2\}) = \chi^*(\{i_1,i_3\}) = \chi^*(\{i_2,i_3\})$. Neka je:

$$x := i_1 - i_2,\ y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo $x, y, z \in \{1, \ldots, n\}$ i $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$. $\square$

Teorema 4.2. Za sve $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve proste brojeve $p > n_0$ jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m (\bmod p)$$

ima netrivijalna rešenja. (Rešenje je trvijalno ako $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \pmod p$)

Dokaz. Neka je $n_0 = R(3)_m + 1$. Neka je g generator grupe $\mathbb{Z}_p^*$ (g postoji zbog cikličnosti grupe $\mathbb{Z}_p^*$). Svaki elemenat $x \in \mathbb{Z}_p^*$ možemo zapisati x kao g^a. Imamo $a = mj + i$, za $0 \leq i < m$, tako da je $x = g^{mj+i}$. Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat x skupa $\mathbb{Z}_p^*$ u boju i ako je $x = g^{mj+i}$. Na osnovu Šurove teoreme (4.1), postoje a, b i c obojeni istom bojom, takvi da važi $a + b = c$, odnoso eksponenti a, b i c su kongrueni po modulu m. Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$ i $z = g^{j_c}$. Množenjem gornje jednačine sa g^{-i} dobijamo $x^m + y^m = z^m$ $\square$

Teorema 4.3. Za svaki prirodan broj $n \geq 3$ postoji broj $N(n)$ takav da bilo koji skup od bar N tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan n-tougao

Dokaz. Za $n = 4$ dokazaćemo da $N = 5$ zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka A, B, C, DiE. Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao trougao ABC. D i E se onda nalaze unutar ABC. 2 tačke od A,B i C se moraju nalaziti sa jedne strane prave DE. Neka su to A i C. Tada je $ACDE$ traženi četvorougao.

Neka je X skup od bar $R_4(n, 5)$ tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafove (**??**) znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četvoročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno $R_4(n, 5)$ tačaka, mora postojati ili n-točlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati n-točlani skup tačaka tako da su svi četvorouglovi koje oni obrazuju knoveksni, odnosno konveksan n-toguao od n tačaka. Dakle traženi N postoji i važi $N \leq R_4(n, 5)$

$\square$

Definicija 4.1. Polugrupa **S** je uređen par $(S, \cdot)$, takav da važi

$$\cdot : S \times S \to S \quad \text{i} \quad \forall x, y, z \in S : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

S je grupa ako dodatno važi:

$$\exists e \in S \; \forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s \quad \text{i}$$

$$\forall s \in S \; \exists t \in S : s \cdot t = t \cdot s = e$$

Definicija 4.2. Element s polugrupe $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ je idempotentan, ako je $s \cdot s = s$

Teorema 4.4. Neka je $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ konačna polugrupa. Tada $\mathbf{S}$ sadrži bar jedan idempotentan element.

Dokaz. Neka je S konačna polugrupa čiji je konačan generišući skup A. Izaberimo beskonačnu reč $a_1 a_2 \ldots$ nad A. Posmatrajmo bojenje grafa $0, 1, 2, \ldots$ koje boji granu izmedju i i j, $i \leq j$ u sliku $a_{i+1} \ldots a_j$ u S. Na osnovu Remzijeve teoreme za beskonačne grafove (**??**), moraju postojati $i < j < k$ izmedju kojih se nalaze grane iste boje, odnosno

$$a_{i+1} \ldots a_j = a_{j+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_j \cdot a_{j+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_j \cdot a_{i+1} \ldots a_j.$$

Dakle, elemenat $a_{i+1} \ldots a_j$ je idempotentan.

□

References

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.

[2] Ronald L. Graham, Jaroslav Nešetřil, Steve Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.

[3] J.G.Kalbfleisch. Upper Bounds for Some Ramsey Numbers Journal of combinatorial theory, 1967.

[4] Rita Gajdač. Remzijevi brojevi 2019.

[5] Chung, F.R.K., R.L. Graham, R.M. Wilson. A survey of Bounds for Classical Ramsey Numbers Journal of graph theory, 1989.