

# Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

15.1.2020

## Contents

1	Uvod	3
2	Primene Remzijeve teoreme	4

# 1 Uvod

$2^{\frac{k}{2}} \leq R(k, k)$  na osnovu Erdosevog dokaza [1]

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

## 2 Primene Remzijeve teoreme

**Teorema 2.1.** Za svako  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za svako bojenje  $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{k}$  postoje brojevi  $x, y, z \in \underline{n}$  sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

*Dokaz.* Neka je  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ . Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \rightarrow \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i - j|)$$

Zbog  $n+1 \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$ , postoje  $i_1, i_2$  i  $i_3$  obojeni istom bojom, odnosno

$$\chi^*(\{i_1, i_2\}) = \chi^*(\{i_1, i_3\}) = \chi^*(\{i_2, i_3\}). \text{ Neka je:}$$

$$x := i_1 - i_2, y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo  $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$  i  $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** Za sve  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  postoji neko  $n_0 \in \mathbb{N}$ , takvo da za sve proste brojeve  $p > n_0$  jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$$

ima netrivialna rešenja. (Rešenje je trivijalno ako  $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \pmod{p}$ )

*Dokaz.* Neka je  $n_0 = R(3)_m + 1$ . Neka je  $g$  generator grupe  $\mathbb{Z}_p^*$  ( $g$  postoji zbog cikličnosti grupe  $\mathbb{Z}_p^*$ ). Svaki elemenat  $x \in \mathbb{Z}_p^*$  možemo zapisati  $x$  kao  $g^a$ . Imamo  $a = mj + i$ , za  $0 \leq i < m$ , tako da je  $x = g^{mj+i}$ . Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat  $x$  skupa  $\mathbb{Z}_p^*$  u boju  $i$  ako je  $x = g^{mj+i}$ . Na osnovu Šurove teoreme (2.1), postoje  $a, b$  i  $c$  obojeni istom bojom, takvi da važi  $a + b = c$ , odnosno eksponenti  $a, b$  i  $c$  su kongrueni po modulu  $m$ . Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su  $x = g^{j_a}$ ,  $y = g^{j_b}$  i  $z = g^{j_c}$ . Množenjem gornje jednačine sa  $g^{-i}$  dobijamo  $x^m + y^m = z^m$   $\square$

**Teorema 2.3.** Za svaki prirodan broj  $n \geq 3$  postoji broj  $N(n)$  takav da bilo koji skup od bar  $N$  tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan  $n$ -tougao

*Dokaz.* Za  $n = 4$  dokazaćemo da  $N = 5$  zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka  $A, B, C, D, E$ . Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao trougao  $ABC$ .  $D$  i  $E$  se onda nalaze unutar  $ABC$ . 2 tačke od  $A, B$  i  $C$  se moraju nalaziti sa jedne strane prave  $DE$ . Neka su to  $A$  i  $C$ . Tada je  $ACDE$  traženi četvorougao.

Neka je  $X$  skup od bar  $R_4(n, 5)$  tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafove (??) znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četveročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno  $R_4(n, 5)$  tačaka, mora postojati ili  $n$ -točlani skup tačaka čiji su svi četveročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četveročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati  $n$ -točlani skup tačaka tako da su svi četvorouglovi koje oni obrazuju konveksni, odnosno konveksan  $n$ -tougao od  $n$  tačaka. Dakle traženi  $N$  postoji i važi  $N \leq R_4(n, 5)$

□

## References

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.
- [2] Ronald L. Graham, Jaroslav Nešetřil, Steve Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.