Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

15.1.2020

Contents

1 Uvod

$2^{\frac{k}{2}} \leq R(k,k)$ na osnovu Erdosevog dokaza [1]

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

2 Primene Remzijeve teoreme

Teorema 2.1. Za svako $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za svako bojenje $\chi : \underline{n} \to \underline{k}$ postoje brojevi $x, y, z \in \underline{n}$ sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \ldots, 3)}_{\text{k puta}}$. Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \to \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i - j|)$$

Zbog $n + 1 \to \underbrace{(3, 3, \ldots, 3)}_{\text{k puta}}$, postoje i_1, i_2 i i_3 obojeni istom bojom, odnosno $\chi^*(\{i_1, i_2\}) = \chi^*(\{i_1, i_3\}) = \chi^*(\{i_2, i_3\})$. Neka je:

$$x := i_1 - i_2,\ y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo $x, y, z \in \{1, \ldots, n\}$ i $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$. □

Teorema 2.2. Za sve $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve proste brojeve $p > n_0$ jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m (\operatorname{mod} p)$$

ima netrivijalna rešenja. (Rešenje je trvijalno ako $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)$)

Dokaz. Neka je $n_0 = R(3)_m + 1$. Neka je g generator grupe $\mathbb{Z}_p^*$ (g postoji zbog cikličnosti grupe $\mathbb{Z}_p^*$). Svaki elemenat $x \in \mathbb{Z}_p^*$ možemo zapisati x kao g^a. Imamo $a = mj + i$, za $0 \leq i < m$, tako da je $x = g^{mj+i}$. Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat x skupa $\mathbb{Z}_p^*$ u boju i ako je $x = g^{mj+i}$. Na osnovu Šurove teoreme (2.1), postoje a, b i c obojeni istom bojom, takvi da važi $a + b = c$, odnoso eksponenti a, b i c su kongrueni po modulu m. Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$ i $z = g^{j_c}$. Množenjem gornje jednačine sa g^{-i} dobijamo $x^m + y^m = z^m$ □

References

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.

[2] Ronald L. Graham, Jaroslav Nešetřil, Steve Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.