Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

8.2.2020

Sadržaj

Predgovor

U ovom radu ćemo navesti i dokazati neke od teorema u vezi granica za Remzijeve brojeve, kao i primene Remzijevih brojeva u raznim oblastima. U prvom poglavlju ćemo navesti neke od važnijih teorema Remzijeve teorije, koje služe kao osnova za teoreme koje su dokazane u ovom radu. U drugom poglavlju ćemo dokazati neke teoreme u vezi gornjih ograničenja za Remzijeve brojeve. U trećem poglavlju ćemo dokazati neke teoreme u vezi donjih ograničenja za Remzijeve brojeve. Na kraju, u četvrtom poglavlju ćemo videti neke od primena Remzijeve teoreme i njenih uopštenja u rešavanju raznih problema.

1 Uvod

Remzijeva teorija je oblast matematike koja se bavi ulsovima pod kojim se red mora pojaviti. Najjednostavnija teorema ovog tipa jeste Dirihleov princip:

Definicija 1.1. Za prirodan broj $n > 0$ definišemo

$$\underline{n} := \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Neka je dat skup X i neka je $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.
Bojenje skupa X sa r boja je funkcija $\chi : X \to r$ Podskup $Y \subseteq X$ nazivano monohromatskim (u odnosu na χ), ako je

$$\forall y_1, y_2 : \chi(y_1) = \chi(y_2)$$

Teorema 1.1 (Dirihleov Princip)**.** Neka je A konačan skup i neka je $0 < r < |A|$. Ako svaki element skupa A obojimo sa jednom od datih r boja, onda su najmanje dva elementa objena istom bojom.

Dirihleov princip se može dodatno uopštiti u sledeće tvrđenje:

Teorema 1.2 (Uopšteni Dirihleov princip)**.** Neka su dati $n, r \in \mathbb{N}$, kao i $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, gde je

$$l_1 + \ldots + l_r \leq n + r - 1.$$

Tada za svako bojenje $\chi : \underline{n} \to \underline{r}$ postoje $i \in \underline{r}$,takvo da važi $|\chi^{-1}(i)| \geq l_i$

Dirihleov princip i uopšteni Dirihleov princip služe kao osnova za sve teoreme Remzijevog tipa.

Osnovna teorema Remzijeve teorije je Remzijeva teorema za grafove:

Definicija 1.2. Za skup X i prirodan broj $k > 0$ definišemo

$$[X]^k := \{Y \subseteq X | \, |Y| = k\}.$$

Pišemo

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)$$

ako za svako bojenje $\chi : [\underline{n}]^2$ postoje $i \in \underline{r}$ i $T \subseteq \underline{n}$ sa $|T| = l_i$, takvi da je $[T]^2$ u odnosu na χ i-monohromatsko.

Teorema 1.3. Ako je $n \to (l_1 - 1, l_2)$ i $m \to (l_1, l_2 - 1)$, tada važi da je i $n + m \to (l_1, l_2)$.

Dokaz. Posmatrajmo graf G sa $n+m$ čvorova, gde će nam jedna boja predstavljati povezane grane, a druga nepovezane i u njemu uočimo proizvoljan čvor u. Dokažimo da je on ili povezan sa n čvorova ili nije povezan sa m čvorova. Ovo direktno sledi iz uopštenog Dirihleovog principa jer je $n+m \leq (n+m-1)+2-1$. Ako je čvor u povezan sa n čvorova tada, kako je $n \to (l_1 - 1, l_2)$ tih n čvorova grade ili $\overline{K}_{l_2}$ ili K_{l_1-1}. U prvom slučaju je kraj dokaza, dok u drugom primetimo da kada dodamo čvor u na K_{l_1-1} dobijamo K_{l_1}. Analogno u slučaju kada čvor u nije povezan sa m čvorova imamo ili K_{l_1} ili $\overline{K}_{l_2-1}$, gde takođe dodavanjem u na $\overline{K}_{l_2-1}$ dobijamo $\overline{K}_{l_2}$. $\square$

Teorema 1.4 (Remzijeva Teorema za obojene grafove)**.** Neka $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$. Tada postoji n, za koje važi

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)$$

Definicija 1.3. Najmanji broj n za koji važi

$$n \to (l_1, l_2)$$

naziva se Remzijev broj i označavamo ga sa $R(l_1, l_2)$.

Definicija 1.4. Najmanji broj n za koji važi

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)$$

naziva se Remzijev broj za obojene grafove i označavamo ga sa $R(l_1, \ldots, l_r)$.

Remzijeva teorema se može proširiti na hipergrafove, kao i na beskonačne grafove.

Definicija 1.5. Za $n \in \mathbb{N}, r, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ i $l_1, \ldots, l_r \in \mathbb{N}$ pišemo

$$n \to (l_1, \ldots, _r)^k,$$

ako za svako bojenje $\chi : [\underline{n}]^k \to \underline{r}$, postoji $i \in \underline{r}$ i l_i-elementni skup $T \subseteq \underline{n}$, tako da je $[T]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$

Teorema 1.5 (Remzijeva Teorema za obojene hipergrafove)**.** Neka $l_1, \ldots, l_r, k \in \mathbb{N}$. Tada postoji n, za koje važi

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)^k$$

Definicija 1.6. Sa $R_k(l_1, \ldots, l_r)$ označavamo najmanji broj n za koji važi

$$n \to (l_1, \ldots, l_r)^k,$$

Teorema 1.6 (Remzijeva Teorema za beskonačne grafove)**.** Neka $k, r \in \mathbb{N} \backslash 0$. Tada za svako bojenje $\chi : [\mathbb{N}]^k \to \underline{r}$ postoje beskonačni skup $M \subseteq \mathbb{N}$ i $i \in \underline{r}$, takvi da

$$[M]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$$

Tačne vrednosti Remzijevih brojeva je izuzetno teško izračunati. Poznato je $R(l_1, 1) = (1, l_2) = 1$ i $R(l_1, 2) = (2, l_2) = l$, ali za $l_1, l_2 \geq 2$ je poznato samo 9 tačnih vrednosti Remzijevih brojeva. Poznata su razna ograničenja koja važe u opštem slučaju, dok su bolja ograničenja poznata samo za neke od vrednosti $l_1 \leq 10, l_2 \leq 15$.

l *k*	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	52 59	59 68	66 77	73 87
4		18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1138	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3703	5033	401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10578	15263	22112
8						282 1870	317 3583	6090	10630	16944	817 27485	41525	861 63609
9							565 6588	581 12677	22325	38832	64864		
10								798 23556	45881	81123			1265

Slika 1: Poznate vrednosti i ograničenja Remzijevih brojeva

Iako je poznat samo mali broj tačnih vrednosti Remzijevih brojeva, postoje mnoge teoreme u vezi ograničenja za Remzijeve brojeve. Neke od njih ćemo dokazati u sledećim poglavljima.

2 Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve

U sledećem delu rada obuhvatićemo četiri teoreme koje govore o gornjim ograničenjima Remzijevih brojeva pri bojenju grafova sa dve ili više boja. Neke od ovih dokaza, kao i mnoge druge u vezi gornjih granica Remzijevih brojeva možete naći u radovima [2], [3] i [4].

Teorema 2.1. Za svako $l_1, l_2 \geq 2$ važi

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

Dokaz. Iz definicije Remzijevih brojeva znamo da je $R(l_1 - 1, l_2) \to (l_1 - 1, l_2)$ i $R(l_1, l_2 - 1) \to (l_1, l_2 - 1)$, pa na osnovu Teoreme 1.3 dobijamo da je

$$R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) \to (l_1, l_2),$$

iz čega po definiciji $R(l_1, l_2)$ sledi nejednakost. □

Teorema 2.2. Ako su $R(l_1 - 1, l_2)$ i $R(l_1, l_2 - 1)$ parni brojevi, za $l_1, l_2 \geq 2$ važi stroga nejednakost, odnosno:

$$R(l_1, l_2) < R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$$

Dokaz. Iz Teoreme 2.1 već znamo da je $R(l_1, l_2) \leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$, pa treba još dokazati da $R(l_1, l_2) \neq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$.
Pretpotstavimo suprotno da je $R(l_1, l_2) = R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1)$ i neka je $r_1 = R(l_1 - 1, l_2)$ i $r_2 = R(l_1, l_2 - 1)$. Tada mora da postoji graf G sa $r_1 + r_2 - 1$ čvorova koji ne sadrži ni K_{l_1} ni $\overline{K}_{l_2}$ (u suprotnom bi važilo da je $R(l_1, l_2) < R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) \implies$ kontradikcija). Uočimo proizvoljan čvor v u grafu G. Na osnovu dokaza Teoreme 1.3 lako je zaključiti da mora važiti

$$\delta(v) \leq r_1 - 1 \tag{1}$$

$$r_1 + r_2 - 2 - \delta(v) \leq r_2 - 1 \tag{2}$$

jer bi u suprotnom pronašli ili K_{l_1} ili $\overline{K}_{l_2}$. Odavde dobijamo da je $\delta(v) = r_1 - 1$. Pošto je izbor čvora v bio proizvoljan onda stepen svakog čvora u grafu mora biti takođe $r_1 - 1$. Ipak pošto $2 \nmid r_1 - 1$ i $2 \nmid r_1 + r_2 - 1$ dobijamo

$$2 \nmid \sum_{v \in V(G)} \delta(v) = (r_1 + r_2 - 1)(r_1 - 1),$$

što je u suprotnosti sa prvom teoremom teorije grafova (da je zbir svih stepena čvorova svakog grafa paran broj). Dakle takav graf ne postoji pa je pretpostavka bilo netačna, iz čega sledi tvrđenje. □

Teorema 2.3. Za sve $l_1, l_2 \geq 2$ važi

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

Dokaz. Kod ovog dokaza koristićemo matematičku indukciju.

- Baza indukcije
  Naša baza biće da dokažemo da nejednakost važi za $l_1 = l_2 = 2$, odnosno

$$R(2,2) \leq \binom{2+2-2}{2-1}$$

$$\binom{2 \leq 2}{1}$$

$$2 \leq 2$$

- Indukcijska hipoteza
  Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za sve brojeve x i y, gde $x \leq l_1$, $y \leq l_2$ i bar jedna nejednakost je stroga.

- Indukcijski korak
  Iz Teoreme 2.1 znamo da je

$$R(l_1,l_2) \leq R(l_1-1,l_2) + R(l_1,l_2-1)$$

$$R(l_1,l_2) \leq \binom{l_1-1+l_2-2}{l_1-1-1} + \binom{l_1+l_2-1-2}{l_1-1}$$

$$R(l_1,l_2) \leq \binom{l_1+l_2-3}{l_1-2} + \binom{l_1+l_2-3}{l_1-1}$$

$$R(l_1,l_2) \leq \binom{l_1+l_2-2}{l_1-1}$$

  Gde poslednja nejednakost sledi primenom poznatog Paskalovog identiteta $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

$\square$

Teorema 2.4. Za $k \geq 2$ važi

$$R(l_1,l_2,...,l_k) \leq 2 + \sum_{i=1}^{k} (R(l_1,l_2...,l_{i-1},l_i-1,l_{i+1},...,l_k) - 1)$$

Neka su $l_1, l_2, l_3, ..., l_k \in \mathbb{N}$. Tada postoji neki Remzijev broj, neko n, za koje važi $n \to (l_1, l_2, l_3, ..., l_k)$ odnosno da postoji kompletan graf G obojen sa k boja, pri čemu je l_i grana obojena istom bojom za neko $1 \leq i \leq k$. Najmanje n za koje ovo važi označićemo kao $R(l)_k$.

Dokaz. Ova teorema dokazuje se slično kao teorema 2.1. samo što sada imamo k boja. Neka je

$$\begin{aligned} r_1 &= R(l_1 - 1, l_2, \ldots, l_k) \\ r_2 &= R(l_1, l_2 - 1, \ldots, l_k) \\ &\vdots \\ r_k &= R(l_1, l_2, \ldots, l_k - 1) \end{aligned}$$

Odredimo n za koje sigurno važi da je

$$n \to (l_1, l_2, \ldots, l_k)$$

Posmatrajmo proizvoljan graf G sa n čvorova u kojem su grane obojene u k boja. U njemu uočimo proizvoljan čvor u. Tada u ima $n-1$ suseda sa kojima je povezan granama različitih boja. Odredimo koje vrednosti n zadovoljavaju osobinu da među $n-1$ suseda čvora u sigurno možemo pronaći r_1 čvorova povezanih sa u u prvoj boji ili r_2 čvorova povezanih sa u u drugoj boji ili ... ili r_k čvorova povezanih sa u u k-toj boji. Na osnovu uopštenog Dirihleovog principa dobijamo da n zadovoljava nejednakost

$$r_1 + r_2 + \ldots r_k \leq (n-1) + k - 1 \tag{3}$$

Ako je ispunjen ovaj uslov sigurno možemo pronaći bar jednu boju i tako da je čvor u povezan sa bar r_i suseda u toj boji. Obeležimo podgraf indukovan sa tih r_i čvorova sa H. Ako se u njemu nalazi j-monohromatski K_{l_j}, gde $j \neq i$ onda se on nalazi i u G. U suprotnom mora se pojaviti $K_{l_i - 1}$ koji dodavanjem čvora u u grafu G postaje K_{l_i}. Na osnovu ovoga zaključujemo da je $n \to (l_1, l_2, \ldots, l_k)$, a samim tim

$$R(l_1, l_2, \ldots, l_k) \leq n,$$

gde je najmanje n koje zadovoljava uslove nejednakosti (1)

$$n = 2 - k + r_1 + r_2 + \cdots + r_k = 2 + \sum_{i=1}^{k} (r_i - 1)$$

iz čega sledi tražena nejednakost.

□

3 Donja ograničenja za Remzijeve brojeve

U ovom poglavlju ćemo dokazati ne ke od bitnijih dokaza u vezi donjih ograničenja Remzijevih brojeva. Dokaz teoreme 3.1 možete naći u radu [1], a ove dokaze, kao i mnoge druge u vezi donjih ograničenja Remzijevih brojeva možete naći u radovima [2] i [3].

Teorema 3.1. Neka su dati prirodni brojevi n i k, takvi da $n \geq k > 0$ .Ako je

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

onda važi $R(k,k) > n$.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljno bojenje grana grafa K_n u dve boje - crvenu i plavu takvo da je verovatnoća da je grana uv u grafu obojena crvenom bojom jednaka verovatnoći da je obojena plavom bojom i iznosi

$$P(uv \text{ je crvena}) = P(uv \text{ je plava}) = \frac{1}{2}.$$

Prvo ćemo odrediti verovatnoću da je neki k-podskup K_k početnog grafa monohromatski. Sa M_s označimo događaj da je K_k monohromatski. Kako nam od svih mogućih bojenja ovog k-podskupa odgovaraju samo dva gde su sve grane isključivo crvene ili plave dobijamo da je

$$P(M_s) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Odredimo sada verovatnoću da se u celom K_n grafu nalazi monohromatski K_k podskup i označimo taj događaj sa A. U celom grafu ima $\binom{n}{k}$ ovakvih podskupova koje ćemo označiti sa S. Ipak pošto događaj da je neki K_k monohromatski nije nezavisan u odnosu na to da su ostali podskupovi S monhromatski dobijamo

$$P(A) = P(\bigcup_{|S|=k} M_S) \leq \sum_{|S|=k} P(M_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Iz ovoga sledi da ako je $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ onda važi i $P(A) < 1$, čime dobijamo da pri ovakvim bojenjima grafa K_n postojanje monohromatskog K_k nije garantovano, tj. postoji bojenje koje ga ne sadrži i odatle da je $R(k,k) > n$. $\square$

Posledica 3.1.1. Za svako $k \geq 3$ važi

$$R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

Dokaz. Ako je $n \geq 2^{\frac{k}{2}}$, gde je n takvo da $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, dobijamo

$$R(k,k) > n \geq 2^{\frac{k}{2}}.$$

U suprotnom kada je $n < 2^{\frac{k}{2}}$ na osnovu dokaza Teoreme 4.1 imamo:

$$P(\bigcup_{|S|=k} M_S) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}.$$

Sada još treba dokazati da za svako $k \geq 3$ važi $\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} < 1$, tj. $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$ i ovo možemo dokazati pomoću matematičke indukcije.

- Baza indukcije
  Za $k = 3$ dobijamo
$$2^{\frac{5}{2}} = 5,66 < 6 = 3!$$

- Indukcijska hipoteza
  Pretpotstavimo da za neko $k \in \mathbb{N}$ važi $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$.

- Indukcijski korak

$$2^{\frac{k+3}{2}} = 2^{\frac{k+2}{2}}\sqrt{2} < k!\sqrt{2} < (k+1)k! = (k+1)!$$

Odakle sledi tvrđenje. $\square$

Posledica 3.1.2. Za svako $k \in \mathbb{N}$ važi

$$R(k,k) > \frac{1}{e\sqrt{2}} k\sqrt{2^k}$$

Dokaz. Neka je N najmanje n za koje važi $\binom{n}{k}2^{1-\binom{k}{2}} \geq 1$. Tada je

$$R(k,k) \geq N = (N^k)^{\frac{1}{k}} > \left(\frac{N!}{k!(N-k)!}k!\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\binom{N}{k}k!\right)^{\frac{1}{k}}$$

$$R(k,k) > \left(2^{\binom{k}{2}-1}k!\right)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{k}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2}}(k!)^{\frac{1}{k}}$$

Sada ćemo iskoristiti Stirlingovu aproksimaciju za faktorijal $k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$, kada $k \longrightarrow +\infty$ i činjenicu da je $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Odatle dobijamo

$$R(k,k) > \frac{k2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}}\right)$$

Kako uvek važi $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}} > 1$ kada uvrstimo to u nejednakost dobijamo

$$R(k,k) > \frac{k2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}}$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorema 3.2. Neka su dati prirodni brojevi n, k i l, takvi da $n \geq k > 0$ i $n \geq l > 0$. Ako za neki broj p, $0 \leq p \leq 1$ važi

$$\binom{n}{k}p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda je $R(k,l) > n$

Dokaz. Dokaz ove teoreme je sličan dokazu prethodne Teoreme 3.1. Neka je verovatnoća da je proizvoljna grana uv u grafu K_n crvena jednaka p. Tada je verovatnoća da je ona plava jednaka $1-p$, pa možemo pisati

$$P(uv \text{ je crvena}) = p,\ P(uv \text{ je plava}) = 1-p,\ \forall uv \in E(K_n)$$

Neka je S potpun k-elementan poskup, a T potpun l-elementan poskup grafa K_n. Označimo sa A_S događaj da je neki podskup S monohromatski crven, a B_T događaj da je poskup T monohromatski plav. Onda je ukupna verovatnoća da u grafu K_n postoji monohromatski obojen K_k u crveno ili K_l u plavo jednaka

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S \cup \bigcup_{|T|=l} B_T\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) + \sum_{|T|=l} P(B_T) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l}(1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Ako postoji p za koji je krajnji izraz manji od 1, onda zaključujemo da postoji K_n koji sadrži potpuno crveni K_k ili potpuno plavi K_l, pa mora biti $R(k,l) > n$. □

Teorema 3.3. Neka su dati prirodni brojevi n, m i k tako da je $1 \leq k \leq n-2$. Tada je

$$R(m,n) \geq R(m,n-k) + R(m,k+1) - 1.$$

Dokaz. Neka je $r_1 = R(m,n-k)$ i $r_2 = R(m,k+1)$ i bez umanjenja opštosti prva boja crvena, a druga plava. Posmatrajmo grafove $G_1 = K_{r_1-1}$ i $G_2 = K_{r_2-1}$, takve da su im sve grane obojene u crvenu ili plavu boju i da G_1 ne sadrži nijedan crveni K_m i nijedan plavi K_{n-k}, a G_2 ne sadrži nijedan crveni K_m ni plavi K_{k+1} podgraf. Primetimo da na osnovu definicije Remzijevih brojeva ovakvi grafovi sigurno postoje. Neka je $G = G_1 \bigtriangledown G_2$, tako da svaku granu uv, gde $u \in V(G_1)$ i $v \in V(G_2)$ obojimo u plavo. Sada vidimo da je $G = K_{r_1+r_2-2}$ i kako su sve dodate grane između grafova G_1 i G_2 plave, jasno je da G ne sadrži crveni K_m. Sa druge strane najveći monohromatski plavi kompletan podgraf nema više od $(n-k-1)+(k+1-1) = n-1$ čvorova, pa graf G sigurno ne sadrži ni plavi K_n. Odavde sledi $R(m,n) > r_1+r_2-2$ odakle dobijamo traženu nejednakost. □

Posledica 3.3.1. Neka su dati prirodni brojevi m i $n \geq 3$. Tada je

$$R(m,n) \geq R(m,n-1) + m - 1.$$

Dokaz. Direktnom zamenom $k = 1$ u prethodnoj teoremi dobijamo izraz. □

Teorema 3.4. Neka su dati prirodni brojevi $m, n \geq 2$. Tada važi

$$R(m,n) \geq R(m,n-1) + 2m - 3.$$

Dokaz. Neka je $r = R(m,n-1)$ i $G_1 = K_{r-1}$ takav da ne sadrži crveni K_m i plavi K_{n-1}. Dokažimo da G_1 sigurno sadrži K_{m-1}. Pretpostavimo suprotno.

Tada u G_1 možemo dodati čvor u i povezati ga sa svima ostalima crvenom bojom. Neka je k takvo da je K_k najveći monohromatski crven podgraf grafa G_1. Tada ako mu dodamo čvor u on postaje K_{k+1}. Ako je $k < m-1$ tj. $k+1 < m$ onda graf nastao dodavanjem čvora u na ovaj način ima r čvorova i ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_{n-1}, što je kontradikcija sa izborom r.
U daljem delu dokaza koristićemo samo činjenicu da onda postoji i crven K_{m-2}. Obeležimo njegove čvorove sa $u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}$. Obeležimo sada sa G_2 graf koji nastaje dodavanjem još $m-2$ čvorova $v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}$, tako da G_2 bude K_{r+m-3} i gde su nove dodate grane incidentne sa v čvorovima obojene na sledeći način. Za svako i povezaćemo u_i i v_i plavom granom, a za svako $i \neq j$ u_i i v_j povežemo crveno, i v_i sa v_j takođe crveno. Za svako $x \in V(G_1)$ i $x \notin \{u_1, u_2, \ldots, u_{m-2}\}$ povežimo v_i i x istom bojom kao i što je grana xu_i. Na osnovu ovog bojenja jasno je da se neko v_i može nalaziti u nekom crvenom monohromatskom kompletnom podgrafu G_2 akko se na njegovom mestu u G_1 nalazio u_i. Pošto je u_iv_i plavo oni se zajedno ne mogu nalaziti u njemu pa G_2 ne sadrži crveni K_m. Sa druge strane se K_{n-1} može pojaviti. Jasno je da on mora sadržati bar jedan od čvorova iz $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-2}\}$, ali pošto su svaka dva čvora iz tog skupa povezana crveno, dobijamo da svaki K_{n-1} mora sadržati tačno jedan čvor v_i i njegov parnjak u_i.
Konstruišimo sada graf G_3 dodavanjem još $m-1$ čvorova $w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}$ u graf G_2 koji su povezani na sledeći način. Za svako $i \neq j$ w_iw_j je crveno, w_iy je plavo za svako y koje nije u_j, v_j ili w_j. Za svako i i j u_iw_j je crveno za $i \geq j$, dok je u suprotnom plavo. Sa druge strane bojimo v_iw_j crveno za $i < j$, a u suprotnom u plavo. Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati da ovako dobijeni graf $G_3 = K_{r+2m-4}$ ne sadrži crveni K_m ni plavi K_n.
Pretpostavimo suprotno, prvo da postoji crveni K_m. Tada se u njemu mora nalaziti bar jedan w_i, jer G_2 ne sadrži takav podgraf. Kako je svaki w_i povezan plavo sa svakim y koje nije među u i v čvorovima, sledi da se K_m sastoji isključivo od njih i w čvorova. Neka je k indeks najmanjeg, a l indeks najvećeg w čvora u K_m. Tada se u posmatranom K_m nalazi ne više od $l-k+1$ w čvorova. Pored toga svako u_i, mora ispunjavati uslov $i \geq l$, a svako v_i, uslov $i < k$. Zato dobijamo da je maksimalan broj čvorova u crvenom K_m jednak $(l-k+1)+(m-1-l)+(k-1) = m-1$. Kontradikcija.
Pretpostavimo sada da postoji plavi K_n. Kako su svi w čvorovi povezani međusobno crveno, a bar jedan se mora nalaziti u datom K_n, onda je to tačno jedan w_i. To znači da je posmatrani K_n dobijen dodavanjem čvora w_i na već postojeći K_{n-1} iz G_2. Ipak već smo dokazali da se u svakom takvom K_{n-1} nalazi tačno jedan par čvorova u_j i v_j. Odatle dobijamo da su i w_iu_j i w_iv_j povezani plavo, što je nemoguće zbog izbora bojenja grana incidentnih sa w_i. Kontradikcija.
Tako dobijamo da postoji K_{r+2m-4} takav da ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_n pa mora važiti $R(m,n) \geq R(m,n-1) + 2m - 3$. $\square$

4 Primene Remzijeve teoreme

U ovom poglavlju ćemo videti primene Remzijeve teorije i njenih uopštenja u teoriji brojeva, rešavanju problema u vezi konveksnih mnogouglova i nalaženja idempotentnih elemenata polugrupe. Dokaz teoreme 4.4 možete naći u radu [5], dok dokaz teorema 4.1 i 4.3, kao i mnoge druge primene Remzijeve teoreme možete naći u radu [6].

Teorema 4.1. Za svako $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za svako bojenje $\chi : \underline{n} \to \underline{k}$ postoje brojevi $x, y, z \in \underline{n}$ sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \ldots, 3)}_{\text{k puta}}$. Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \to \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i - j|)$$

Zbog $n + 1 \to \underbrace{(3, 3, \ldots, 3)}_{\text{k puta}}$, postoje i_1, i_2 i i_3 obojeni istom bojom, odnosno $\chi^*(\{i_1, i_2\}) = \chi^*(\{i_1, i_3\}) = \chi^*(\{i_2, i_3\})$. Neka je:

$$x := i_1 - i_2,\ y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo $x, y, z \in \{1, \ldots, n\}$ i $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$. $\square$

Definicija 4.1. Skup generatora $\{g_1, \ldots, g_n\}$ je skup elemenata grupe Gtakvih da se primenom operacije grupe na generatore mogu dobiti svi ostali elementi grupe. Kažemo da $\{g_1, \ldots, g_n\}$ generiše grupu G. Ako postoji g takvo da je $\{g\}$ skup generatora grupe G, kažemo da je G ciklična i da je g generator grupe G.

Lema 4.2. Grupa $\mathbb{Z}_p^*$, čiji je skup elemenata $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ i čija je operacija množenje po modulu p, gde je p prost broj je ciklična.

Teorema 4.3. Za sve $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve proste brojeve $p > n_0$ jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m (\operatorname{mod} p)$$

ima netrivijalna rešenja. (Rešenje je trvijalno ako $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)$)

Dokaz. Neka je $n_0 = R(3)_m + 1$. Neka je g generator grupe $\mathbb{Z}_p^*$ (g postoji zbog cikličnosti grupe $\mathbb{Z}_p^*$). Svaki elemenat $x \in \mathbb{Z}_p^*$ možemo zapisati x kao g^a. Imamo $a = mj + i$, za $0 \leq i < m$, tako da je $x = g^{mj+i}$. Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat x skupa $\mathbb{Z}_p^*$ u boju i ako je $x = g^{mj+i}$. Na osnovu teoreme 4.1 postoje a, b i c obojeni istom bojom, takvi da važi $a + b = c$, odnoso eksponenti a, b i c su kongrueni po modulu m. Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$ i $z = g^{j_c}$. Množenjem gornje jednačine sa g^{-i} dobijamo $x^m + y^m = z^m$ $\square$

Teorema 4.4. Za svaki prirodan broj $n \geq 3$ postoji broj $N(n)$ takav da bilo koji skup od bar N tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan n-tougao

Dokaz. Za $n = 4$ dokazaćemo da $N = 5$ zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka A, B, C, D i E. Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao trougao ABC. D i E se onda nalaze unutar ABC. 2 tačke od A,B i C se moraju nalaziti sa jedne strane prave DE. Neka su to A i C. Tada je $ACDE$ traženi četvorougao.

Neka je X skup od bar $R_4(n, 5)$ tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafove znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četvoročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno $R_4(n, 5)$ tačaka, mora postojati ili n-točlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati n-točlani skup tačaka tako da su svi četvorouglovi koje oni obrazuju knoveksni, odnosno konveksan n-toguao od n tačaka. Dakle traženi N postoji i važi $N \leq R_4(n, 5)$

□

Definicija 4.2. Polugrupa **S** je uređen par $(S, \cdot)$, takav da važi

$$\cdot : S \times S \to S \quad \text{i} \quad \forall x, y, z \in S : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

S je grupa ako dodatno važi:

$$\exists e \in S \; \forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s \quad \text{i}$$

$$\forall s \in S \; \exists t \in S : s \cdot t = t \cdot s = e$$

Definicija 4.3. Element s polugrupe $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ je idempotentan, ako je $s \cdot s = s$

Definicija 4.4. Reč polugrupe S je izraz oblika $s_1^{n_1} s_2^{n_2} \ldots s_k^{n_k}$, $s_1, \ldots, s_k \in S$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$, pri čemu s_i i $s_j, i \neq j$ ne moraju biti različiti.

Teorema 4.5. Neka je $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ konačna polugrupa. Tada **S** sadrži bar jedan idempotentan element.

Dokaz. Neka je S konačna polugrupa čiji je konačan generišući skup A. Izaberimo reč $a_1 a_2 \ldots$ dužine $n_0 = R(3)_{|S|} + 1$ nad A. Posmatrajmo bojenje grafa čiji je skup čvorova $\underline{n}$ koje boji granu izmedju i i j, $i \leq j$ u vrednost reči $a_{i+1} \ldots a_j$ u S. Na osnovu teoreme 1.4, moraju postojati $i < j < k$ izmedju kojih se nalaze grane iste boje, odnosno

$$a_{i+1} \ldots a_j = a_{j+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_j \cdot a_{j+1} \ldots a_k = a_{i+1} \ldots a_j \cdot a_{i+1} \ldots a_j.$$

Dakle, elemenat polugrupe čija je vrednost $a_{i+1} \ldots a_j$ je idempotentan.

□

Literatura

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.

[2] R. L. Graham, J. Nešetřil, S. Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.

[3] Chung, F.R.K., R.L. Graham, R.M. Wilson. A survey of Bounds for Classical Ramsey Numbers Journal of graph theory, 1989.

[4] J.G.Kalbfleisch. Upper Bounds for Some Ramsey Numbers Journal of combinatorial theory, 1967.

[5] P. Erdos G. Szekeresz A combinatorial problem in geometry Compositio Mathematica, tome 2, 1935

[6] M. Steed. Some theorems and applications of Ramsey Theory