

Granice za Remzijeve brojeve i primene

Mihailo Milenković, Dejan Gjer, Bojana Čakarević

15.1.2020

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve	5
3	Donja ograničenja za Remzijeve brojeve	8
4	Primene Remzijeve teoreme	12

1 Uvod

Remzijeve teorija je oblast matematike koja se bavi uslovima pod kojim se red mora pojaviti. Najjednostavnija teorema ovog tipa jeste Dirihleov princip:

Definicija 1.1. Za prirodan broj $n > 0$ definišemo

$$\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}.$$

Neka je dat skup X i neka je $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Bojenje skupa X sa r boja je funkcija $\chi : X \rightarrow r$. Podskup $Y \subseteq X$ nazivamo monohromatskim (u odnosu na χ), ako je

$$\forall y_1, y_2 : \chi(y_1) = \chi(y_2)$$

Teorema 1.1 (Dirihleov Princip). Neka je A konačan skup i neka je $0 < r < |A|$. Ako svaki element skupa A obojimo sa jednom od datih r boja, onda su najmanje dva elementa objena istom bojom.

Dirihleov princip se može dodatno uopštiti u sledeće tvrđenje:

Teorema 1.2 (Uopšteni Dirihleov princip). Neka su dati $n, r \in \mathbb{N}$, kao i $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, gde je

$$l_1 + \dots + l_r \leq n + r - 1.$$

Tada za svako bojenje $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{r}$ postoje $i \in \underline{r}$, takvo da važi $|\chi^{-1}(i)| \geq l_i$

Dirihleov princip i uopšteni Dirihleov princip služe kao osnova za sve teoreme Remzijeve tipa.

Osnovna teorema Remzijeve teorije je Remzijeve teorema za grafove:

Definicija 1.2. Za skup X i prirodan broj $k > 0$ definišemo

$$[X]^k := \{Y \subseteq X \mid |Y| = k\}.$$

Pišemo

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

ako za svako bojenje $\chi : [\underline{n}]^2$ postoje $i \in \underline{r}$ i $T \subseteq \underline{n}$ sa $|T| = l_i$, takvi da je $[T]^2$ u odnosu na χ i -monohromatsko.

Teorema 1.3. Ako je $n \rightarrow (l_1 - 1, l_2)$ i $m \rightarrow (l_1, l_2 - 1)$, tada važi da je i $n + m \rightarrow (l_1, l_2)$.

Dokaz. Posmatrajmo graf G sa $n + m$ čvorova, gde će nam jedna boja predstavljati povezane grane, a druga nepovezane i u njemu uočimo proizvoljan čvor u . Dokažimo da je on ili povezan sa n čvorova ili nije povezan sa m čvorova. Ovo direktno sledi iz uopštenog Dirihleovog principa jer je $n + m \leq (n + m - 1) + 2 - 1$. Ako je čvor u povezan sa n čvorova tada, kako je $n \rightarrow (l_1 - 1, l_2)$ tih n čvorova grade ili \overline{K}_{l_2} ili $K_{l_1 - 1}$. U prvom slučaju je kraj dokaza, dok u drugom primetimo da kada dodamo čvor u na $K_{l_1 - 1}$ dobijamo K_{l_1} . Analogno u slučaju kada čvor u nije povezan sa m čvorova imamo ili K_{l_1} ili $\overline{K}_{l_2 - 1}$, gde takođe dodavanjem u na $\overline{K}_{l_2 - 1}$ dobijamo \overline{K}_{l_2} . \square

Teorema 1.4 (Remzijeve Teorema za obojene grafove). Neka $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$. Tada postoji n , za koje važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

Definicija 1.3. Najmanji broj n za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, l_2)$$

naziva se Remzijeve broj i označavamo ga sa $R(l_1, l_2)$.

Definicija 1.4. Najmanji broj n za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)$$

naziva se Remzijeve broj za obojene grafove i označavamo ga sa $R(l_1, \dots, l_r)$.

Remzijeve teorema se može proširiti na hipergrafove, kao i na beskonačne grafove.

Definicija 1.5. Za $n \in \mathbb{N}, r, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $l_1, \dots, l_r \in \mathbb{N}$ pišemo

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k,$$

ako za svako bojenje $\chi : [\underline{n}]^k \rightarrow \underline{r}$, postoji $i \in \underline{r}$ i l_i -elementni skup $T \subseteq \underline{n}$, tako da je $[T]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$

Teorema 1.5 (Remzijeve Teorema za obojene hipergrafove). Neka $l_1, \dots, l_r, k \in \mathbb{N}$. Tada postoji n , za koje važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k$$

Definicija 1.6. Sa $R_k(l_1, \dots, l_r)$ označavamo najmanji broj n za koji važi

$$n \rightarrow (l_1, \dots, l_r)^k,$$

Teorema 1.6 (Remzijeve Teorema za beskonačne grafove). Neka $k, r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Tada za svako bojenje $\chi : [\mathbb{N}]^k \rightarrow \underline{r}$ postoje beskonačni skup $M \subseteq \mathbb{N}$ i $i \in \underline{r}$, takvi da

$$[M]^k \subseteq \chi^{-1}(i)$$

Tačne vrednosti Remzijeve brojeva je izuzetno teško izračunati. Poznato je $R(l_1, 1) = (1, l_2) = 1$ i $R(l_1, 2) = (2, l_2) = l$, ali za $l_1, l_2 \geq 2$ je poznato samo 9 tačnih vrednosti Remzijeve brojeva. Poznata su razna ograničenja koja važe u opštem slučaju, dok su bolja ograničenja poznata samo za neke od vrednosti $l_1 \leq 10, l_2 \leq 15$.

Iako je poznat samo mali broj tačnih vrednosti Remzijeve brojeva, postoje mnoge teoreme u vezi ograničenja za Remzijeve brojeve.

U ovom radu ćemo prvo navesti neke od teorema u vezi gornjih ograničenja za Remzijeve brojeve (brojeva U , $R(l_1, l_2) \leq U$), zatim neke od teorema u vezi donjih ograničenja (brojeva L , $L \leq R(l_1, l_2)$). Na kraju ćemo videti neke od primena Remzijeve teoreme i njenih uopštenja u rešavanju raznih problema.

$k \backslash$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36	40 42	47 50	52 59	59 68	66 77	73 87
4		18	25	36 41	49 61	58 84	73 115	92 149	98 191	128 238	133 291	141 349	153 417
5			43 49	58 87	80 143	101 216	126 316	144 442	171 633	191 848	213 1138	239 1461	265 1878
6				102 165	113 298	132 495	169 780	179 1171	253 1804	263 2566	317 3703		401 6911
7					205 540	217 1031	241 1713	289 2826	405 4553	417 6954	511 10578		22112
8						282 1870	317 3583		6090	10630	16944	817 27485	861 63609
9							565 6588	581 12677		22325	38832	64864	
10								798 23556	45881	81123			1265

Slika 1: Poznate vrednosti i ograničenja Remzijeve brojeva

2 Gornja ograničenja za Remzijeve brojeve

Teorema 2.1.

$$R(l_1, l_2) \leq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

Dokaz. Iz (...) znamo da $R(2, l_1) = l_1$ i $R(2, l_2) = l_2$. Koristeći indukciju potvrđujemo da ovo važi i za svako t i s takvo da $t \leq l_2$ i $s < l_2$ ili $s \leq l_1$ i $t < l_2$.

Pretpostavimo sada suprotno, tj. da važi tvrđenje $R(l_1, l_2) \geq R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$, odnosno da postoji graf sa $R(l_1, l_2)$ čvorova koji ne sadrži podgraf izomorfan sa K_{l_2} niti podgraf izomorfan sa K_{l_1} .

Neka je u proizvoljan broj čvorova grafa G , broj njemu susjednih čvorova označimo sa N , a broj nesusednih čvorova biće M . To se drugačije može zapisati kao $M = V(G) - N_G(u) - u$. Kako ne bi važno da graf G sadrži podgraf izomorfan sa K_{l_2-1} mora da važi $N \leq R(l_2 - 1, l_1) - 1$, a samim tim i $M \leq R(l_2, l_1 - 1) - 1$. Ukupan broj čvorova n jednak je zbiru navedenog (čvorova u , kao i njegovih susjednih i nesusednih čvorova).

$$n = N + M + 1$$

$$n = R(l_2 - 1, l_1) - 1 + R(l_2, l_1 - 1) - 1 + 1$$

$$n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$$

Dobijeni izraz je kontradikcija, te sledi tačno tvrđenje ove teoreme. \square

Teorema 2.2. Ako su $R(l_2, l_1 - 1)$ i $R(l_2 - 1, l_1)$ parni brojevi, važi stroga nejednakost, odnosno:

$$R(l_1, l_2) < R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$$

Dokaz. Uzmimo da su $R(l_1 - 1, l_2)$ i $R(l_1, l_2 - 1)$ parni brojevi. Posmatramo graf G sa $n + 1$ čvorova, odnosno $n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$. Treba pokazati da postoji neki podgraf M koji ima l_2 međusobno povezanih ili podgraf N sa l_1 međusobno nepovezanih čvorova. Broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran, a kako su $R(l_2 - 1, l_2)$ i $R(l_2, l_1 - 1)$ parni brojevi, n je neparan. Iz toga zaključujemo da graf G sadrži barem jedan čvor parnog stepena. Uzmimo da je to proizvoljan čvor v . Ako je njegov stepen veći ili jednak $R(l_2 - 1, l_1)$ onda neki podgraf indukovani njegovim susednim čvorovima može sadržati novi podgraf sa $l_2 - 1$ povezanih čvorova (Ako njima dodamo povezani v čvor, biće ih l_2 , te dobijamo naš podgraf M), ili l nepovezanih čvorova (što je zapravo podgraf N).

U suprotnom, ako je stepen ovih čvorova strogo manji do $R(l_2 - 1, l_1)$, onda važi i $d_G(v) \leq R(l_2 - 1, l_1) - 2$. Kada toj činjenici dodamo da je $n = R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1) - 1$ sledi da je broj nesusednih čvorova čvora v veći ili jednak sa $R(l_2, l_1 - 1)$. Iz ove nejednakosti možemo zaključiti da podgraf indukovani ovim čvorovima sadrži ili gorepomenuti podgraf M (jer sadrži l_2 povezanih čvorova) ili podgraf sa $l_1 - 1$ nepovezanih čvorova. Ukoliko njemu dodamo čvor v koji nije povezan, dobijamo l_1 nepovezanih čvorova, odnosno podgraf N .

Time smo dokazali pretpostavku da su brojevi $R(l_1 - 1, l_2)$ i $R(l_1, l_2 - 1)$ parni, onda svaki graf sa $n + 1$ čvorova sadrži ili M ili N podgraf. Iz toga sledi stroga nejednakost $R(l_1, l_2) < R(l_2 - 1, l_1) + R(l_2, l_1 - 1)$ jer je $R(l_1, l_2) \leq n$. \square

Teorema 2.3.

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

Dokaz. Kod ovog dokaza koristićemo indukciju. Naša baza biće da dokažemo da nejednakost važi za $l_1 = l_2 = 2$, odnosno

$$\begin{aligned} R(2, 2) &\leq \binom{2 + 2 - 2}{2 - 1} \\ &= \binom{2 \leq 2}{1} \\ &= 2 \leq 2 \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da važi $\forall(l_1, l_2)$ pri čemu je $l_1 + l_2 \geq 4$.

$$\begin{aligned} l_1, l_2 &\geq 2 \\ l_1 + l_2 &= n + 1 \\ R(l_1, l_2) &\leq R(l_1 - 1, l_2) + R(l_1, l_2 - 1) \\ R(l_1, l_2) &\leq \binom{l_1 - 1 + l_2 - 2}{l_1 - 1 - 1} + \binom{l_1 + l_2 - 1 - 2}{l_1 - 1} \\ R(l_1, l_2) &\leq \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 2} + \binom{l_1 + l_2 - 3}{l_1 - 1} \end{aligned}$$

$$R(l_1, l_2) \leq \binom{l_1 + l_2 - 2}{l_1 - 1}$$

Prvu nejednakost dokazali smo, a samu jednakost upotreom Paskalovog identiteta $\binom{n}{l_2} = \binom{n-1}{l_2-1} + \binom{n-1}{l_2}$. \square

Teorema 2.4. Za $k \geq 2$ važi

$$R(l_1, l_2, \dots, l_k) \leq 2 + \sum_{i=1}^k (R(l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i - 1, l_{i+1}, \dots, l_k) - 1)$$

Neka su $l_1, l_2, l_3, \dots, l_k \in \mathbb{N}$. Tada postoji neki Remzijev broj, neko n , za koje važi $n \rightarrow (l_1, l_2, l_3, \dots, l_k)$ odnosno da postoji kompletan graf G obojen sa k boja, pri čemu je l_i grana obojena istom bojom za neko $1 \leq i \leq k$. Najmanje n za koje ovo važi označićemo kao $R(l)_k$.

Dokaz. Ova teorema dokazuje se slično kao teorema 2.1. samo što sada imamo k boja. Neka je

$$\begin{aligned} r_1 &= R(l_1 - 1, l_2, \dots, l_k) \\ r_2 &= R(l_1, l_2 - 1, \dots, l_k) \\ &\vdots \\ r_k &= R(l_1, l_2, \dots, l_k - 1) \end{aligned}$$

Odredimo n za koje sigurno važi da je

$$n \rightarrow (l_1, l_2, \dots, l_k)$$

Posmatrajmo proizvoljan graf G sa n čvorova u kojem su grane obojene u k boja. U njemu uočimo proizvoljan čvor u . Tada u ima $n - 1$ suseda sa kojima je povezan granama različitih boja. Odredimo koje vrednosti n zadovoljavaju osobinu da među $n - 1$ suseda čvora u sigurno možemo pronaći r_1 čvorova povezanih sa u u prvoj boji ili r_2 čvorova povezanih sa u u drugoj boji ili \dots ili r_k čvorova povezanih sa u u k -toj boji. Na osnovu uopštenog Dirihleovog principa dobijamo da n zadovoljava nejednakost

$$r_1 + r_2 + \dots + r_k \leq (n - 1) + k - 1 \quad (1)$$

Ako je ispunjen ovaj uslov sigurno možemo pronaći bar jednu boju i tako da je čvor u povezan sa bar r_i suseda u toj boji. Obeležimo podgraf indukovanih sa tih r_i čvorova sa H . Ako se u njemu nalazi j -monohromatski K_{l_j} , gde $j \neq i$ onda se on nalazi i u G . U suprotnom mora se pojaviti K_{l_i-1} koji dodavanjem čvora u u grafu G postaje K_{l_i} . Na osnovu ovoga zaključujemo da je $n \rightarrow (l_1, l_2, \dots, l_k)$, a samim tim

$$R(l_1, l_2, \dots, l_k) \leq n,$$

gde je najmanje n koje zadovoljava uslove nejednakosti (1)

$$n = 2 - k + r_1 + r_2 + \cdots + r_k = 2 + \sum_{i=1}^k (r_i - 1)$$

iz čega sledi tražena nejednakost. □

3 Donja ograničenja za Remzijeve brojeve

Teorema 3.1. Neka su dati prirodni brojevi n i k , takvi da $n \geq k > 0$. Ako je

$$\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1,$$

onda važi $R(k, k) > n$.

Dokaz. Posmatrajmo proizvoljno bojenje grana grafa K_n u dve boje - crvenu i plavu takvo da je verovatnoća da je grana uv u grafu obojena crvenom bojom jednaka verovatnoći da je obojena plavom bojom i iznosi

$$P(uv \text{ je crvena}) = P(uv \text{ je plava}) = \frac{1}{2}.$$

Prvo ćemo odrediti verovatnoću da je neki k -podskup K_k početnog grafa monohromatski. Sa M_s označimo događaj da je K_k monohromatski. Kako nam od svih mogućih bojenja ovog k -podskupa odgovaraju samo dva gde su sve grane isključivo crvene ili plave dobijamo da je

$$P(M_s) = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\binom{k}{2}} = 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Odredimo sada verovatnoću da se u celom K_n grafu nalazi monohromatski K_k podskup i označimo taj događaj sa A . U celom grafu ima $\binom{n}{k}$ ovakvih podskupova koje ćemo označiti sa S . Ipak pošto događaj da je neki K_k monohromatski nije nezavisan u odnosu na to da su ostali podskupovi S monohromatski dobijamo

$$P(A) = P\left(\bigcup_{|S|=k} M_S\right) \leq \sum_{|S|=k} P(M_S) = \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}}.$$

Iz ovoga sledi da ako je $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$ onda važi i $P(A) < 1$, čime dobijamo da pri ovakvim bojenjima grafa K_n postojanje monohromatskog K_k nije garantovano, tj. postoji bojenje koje ga ne sadrži i odatle da je $R(k, k) > n$. □

Posledica 3.1.1. Za svako $k \geq 3$ važi

$$R(k, k) > 2^{\frac{k}{2}}.$$

Dokaz. Ako je $n \geq 2^{\frac{k}{2}}$, gde je n takvo da $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} < 1$, dobijamo

$$R(k, k) > n \geq 2^{\frac{k}{2}}.$$

U suprotnom kada je $n < 2^{\frac{k}{2}}$ na osnovu dokaza Teoreme 4.1 imamo:

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} M_S\right) \leq \binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{k!} 2^{1-\binom{k}{2}} < \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k 2^{1-\frac{k(k-1)}{2}}}{k!} = \frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!}.$$

Sada još treba dokazati da za svako $k \geq 3$ važi $\frac{2^{\frac{k+2}{2}}}{k!} < 1$, tj. $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$ i ovo možemo dokazati pomoću matematičke indukcije.

- Baza indukcije
Za $k = 3$ dobijamo

$$2^{\frac{5}{2}} = 5,66 < 6 = 3!$$

- Indukcijska hipoteza
Pretpostavimo da za neko $k \in \mathbb{N}$ važi $2^{\frac{k+2}{2}} < k!$.
- Indukcijski korak

$$2^{\frac{k+3}{2}} = 2^{\frac{k+2}{2}} \sqrt{2} < k! \sqrt{2} < (k+1)k! = (k+1)!$$

Odakle sledi tvrđenje. □

Posledica 3.1.2. Za svako $k \in \mathbb{N}$ važi

$$R(k, k) > \frac{1}{e\sqrt{2}} k \sqrt{2^k}$$

Dokaz. Neka je N najmanje n za koje važi $\binom{n}{k} 2^{1-\binom{k}{2}} \geq 1$. Tada je

$$R(k, k) \geq N = (N^k)^{\frac{1}{k}} > \left(\frac{N!}{k!(N-k)!} k! \right)^{\frac{1}{k}} = \left(\binom{N}{k} k! \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$R(k, k) > \left(2^{\binom{k}{2}-1} k! \right)^{\frac{1}{k}} = 2^{\frac{k}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{2}} (k!)^{\frac{1}{k}}$$

Sada ćemo iskoristiti Stirlingovu aproksimaciju za faktorijal $k! \sim \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$, kada $k \rightarrow +\infty$ i činjenicu da je $k! \geq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Odatle dobijamo

$$R(k, k) > \frac{k 2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}} \right)$$

Kako uvek važi $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2k}} k^{\frac{1}{2k}} > 1$ kada uvrstimo to u nejednakost dobijamo

$$R(k, k) > \frac{k 2^{\frac{k}{2}}}{e\sqrt{2}}$$

što je i trebalo dokazati. □

Teorema 3.2. Neka su dati prirodni brojevi n, k i l , takvi da $n \geq k > 0$ i $n \geq l > 0$. Ako za neki broj p , $0 \leq p \leq 1$ važi

$$\binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}} < 1$$

onda je $R(k, l) > n$

Dokaz. Dokaz ove teoreme je sličan dokazu prethodne Teoreme 3.1. Neka je verovatnoća da je proizvoljna grana uv u grafu K_n crvena jednaka p . Tada je verovatnoća da je ona plava jednaka $1 - p$, pa možemo pisati

$$P(uv \text{ je crvena}) = p, P(uv \text{ je plava}) = 1 - p, \forall uv \in E(K_n)$$

Neka je S potpun k -elementan poskup, a T potpun l -elementan poskup grafa K_n . Označimo sa A_S događaj da je neki podskup S monohromatski crven, a B_T događaj da je poskup T monohromatski plav. Onda je ukupna verovatnoća da u grafu K_n postoji monohromatski obojen K_k u crveno ili K_l u plavo jednaka

$$P\left(\bigcup_{|S|=k} A_S \cup \bigcup_{|T|=l} B_T\right) \leq \sum_{|S|=k} P(A_S) + \sum_{|T|=l} P(B_T) \leq \binom{n}{k} p^{\binom{k}{2}} + \binom{n}{l} (1-p)^{\binom{l}{2}}$$

Ako postoji p za koji je krajnji izraz manji od 1, onda zaključujemo da postoji K_n koji sadrži potpuno crveni K_k ili potpuno plavi K_l , pa mora biti $R(k, l) > n$. \square

Teorema 3.3. Neka su dati prirodni brojevi n, m i k tako da je $1 \leq k \leq n - 2$. Tada je

$$R(m, n) \geq R(m, n - k) + R(m, k + 1) - 1.$$

Dokaz. Neka je $r_1 = R(m, n - k)$ i $r_2 = R(m, k + 1)$ i bez umanjenja opštosti prva boja crvena, a druga plava. Posmatrajmo grafove $G_1 = K_{r_1-1}$ i $G_2 = K_{r_2-1}$, takve da su im sve grane obojene u crvenu ili plavu boju i da G_1 ne sadrži nijedan crveni K_m i nijedan plavi K_{n-k} , a G_2 ne sadrži nijedan crveni K_m ni plavi K_{k+1} podgraf. Primetimo da na osnovu definicije Remzijeve brojeva ovakvi grafovi sigurno postoje. Neka je $G = G_1 \nabla G_2$, tako da svaku granu uv , gde $u \in V(G_1)$ i $v \in V(G_2)$ obojimo u plavo. Sada vidimo da je $G = K_{r_1+r_2-2}$ i kako su sve dodate grane između grafova G_1 i G_2 plave, jasno je da G ne sadrži crveni K_m . Sa druge strane najveći monohromatski plavi kompletan podgraf nema više od $(n - k - 1) + (k + 1 - 1) = n - 1$ čvorova, pa graf G sigurno ne sadrži ni plavi K_n . Odavde sledi $R(m, n) > r_1 + r_2 - 2$ odakle dobijamo traženu nejednakost. \square

Posledica 3.3.1. Neka su dati prirodni brojevi m i $n \geq 3$. Tada je

$$R(m, n) \geq R(m, n - 1) + m - 1.$$

Dokaz. Direktnom zamenom $k = 1$ u prethodnoj teoremi dobijamo izraz. \square

Teorema 3.4. Neka su dati prirodni brojevi $m, n \geq 2$. Tada važi

$$R(m, n) \geq R(m, n-1) + 2m - 3.$$

Dokaz. Neka je $r = R(m, n-1)$ i $G_1 = K_{r-1}$ takav da ne sadrži crveni K_m i plavi K_{n-1} . Dokažimo da G_1 sigurno sadrži K_{m-1} . Pretpotstavimo suprotno. Tada u G_1 možemo dodati čvor u i povezati ga sa svima ostalima crvenom bojom. Neka je k takvo da je K_k najveći monohromatski crven podgraf grafa G_1 . Tada ako mu dodamo čvor u on postaje K_{k+1} . Ako je $k < m-1$ tj. $k+1 < m$ onda graf nastao dodavanjem čvora u na ovaj način ima r čvorova i ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_{n-1} , što je kontradikcija sa izborom r .

U daljem delu dokaza korist ćemo samo činjenicu da onda postoji i crven K_{m-2} . Obeležimo njegove čvorove sa u_1, u_2, \dots, u_{m-2} . Obeležimo sada sa G_2 graf koji nastaje dodavanjem još $m-2$ čvorova v_1, v_2, \dots, v_{m-2} , tako da G_2 bude K_{r+m-3} i gde su nove dodate grane incidentne sa v čvorovima obojene na sledeći način. Za svako i povežemo u_i i v_i plavom granom, a za svako $i \neq j$ u_i i v_j povežemo crveno, i v_i sa v_j takođe crveno. Za svako $x \in V(G_1)$ i $x \notin \{u_1, u_2, \dots, u_{m-2}\}$ povežimo v_i i x istom bojom kao i što je grana xu_i . Na osnovu ovog bojenja jasno je da se neko v_i može nalaziti u nekom crvenom monohromatskom kompletnom podgrafu G_2 akko se na njegovom mestu u G_1 nalazio u_i . Pošto je $u_i v_i$ plavo oni se zajedno ne mogu nalaziti u njemu pa G_2 ne sadrži crveni K_m . Sa druge strane se K_{n-1} može pojaviti. Jasno je da on mora sadržati bar jedan od čvorova iz $\{v_1, v_2, \dots, v_{m-2}\}$, ali pošto su svaka dva čvora iz tog skupa povezana crveno, dobijamo da svaki K_{n-1} mora sadržati tačno jedan čvor v_i i njegov parnjak u_i .

Konstruišimo sada graf G_3 dodavanjem još $m-1$ čvorova w_1, w_2, \dots, w_{m-1} u graf G_2 koji su povezani na sledeći način. Za svako $i \neq j$ $w_i w_j$ je crveno, $w_i y$ je plavo za svako y koje nije u_j, v_j ili w_j . Za svako i i j $u_i w_j$ je crveno za $i \geq j$, dok je u suprotnom plavo. Sa druge strane bojimo $v_i w_j$ crveno za $i < j$, a u suprotnom u plavo. Da bismo završili dokaz potrebno je još pokazati da ovako dobijeni graf $G_3 = K_{r+2m-4}$ ne sadrži crveni K_m ni plavi K_n .

Pretpotstavimo suprotno, prvo da postoji crveni K_m . Tada se u njemu mora nalaziti bar jedan w_i , jer G_2 ne sadrži takav podgraf. Kako je svaki w_i povezan plavo sa svakim y koje nije među u i v čvorovima, sledi da se K_m sastoji isključivo od njih i w čvorova. Neka je k indeks najmanjeg, a l indeks najvećeg w čvora u K_m . Tada se u posmatranom K_m nalazi ne više od $l - k + 1$ w čvorova. Pored toga svako u_i , mora ispunjavati uslov $i \geq l$, a svako v_i , uslov $i < k$. Zato dobijamo da je maksimalan broj čvorova u crvenom K_m jednak $(l - k + 1) + (m - 1 - l) + (k - 1) = m - 1$. Kontradikcija.

Pretpotstavimo sada da postoji plavi K_n . Kako su svi w čvorovi povezani međusobno crveno, a bar jedan se mora nalaziti u datom K_n , onda je to tačno jedan w_i . To znači da je posmatrani K_n dobijen dodavanjem čvora w_i na već postojeći K_{n-1} iz G_2 . Ipak već smo dokazali da se u svakom takvom K_{n-1} nalazi tačno jedan par čvorova u_j i v_j . Odatle dobijamo da su i $w_i u_j$ i $w_i v_j$ povezani plavo, što je nemoguće zbog izbora bojenja grana incidentnih sa w_i . Kontradikcija.

Tako dobijamo da postoji K_{r+2m-4} takav da ne sadrži ni crveni K_m ni plavi K_n pa mora važiti $R(m, n) \geq R(m, n-1) + 2m - 3$. \square

4 Primene Remzijeve teoreme

Teorema 4.1. Za svako $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za svako bojenje $\chi : \underline{n} \rightarrow \underline{k}$ postoje brojevi $x, y, z \in \underline{n}$ sa osobinom

$$x + y = z \text{ i } \chi(x) = \chi(y) = \chi(z)$$

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n+1 \geq R(3)_k = \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$. Tada ono indukuje sledeće bojenje:

$$\chi^* : [\underline{n+1}]^2 \rightarrow \underline{k} : \{i, j\} \mapsto \chi(|i-j|)$$

Zbog $n+1 \rightarrow \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{k \text{ puta}}$, postoje i_1, i_2 i i_3 obojeni istom bojom, odnosno $\chi^*(\{i_1, i_2\}) = \chi^*(\{i_1, i_3\}) = \chi^*(\{i_2, i_3\})$. Neka je:

$$x := i_1 - i_2, y := i_2 - i_3 \text{ i } z := i_1 - i_3$$

Imamo $x, y, z \in \{1, \dots, n\}$ i $x - y = i_1 - i_2 + i_2 - i_3 = i_1 - i_3 = z$. \square

Teorema 4.2. Za sve $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$, takvo da za sve proste brojeve $p > n_0$ jednačina

$$x^m + y^m \equiv z^m \pmod{p}$$

ima netrivialna rešenja. (Rešenje je trivialno ako $x \cdot y \cdot z \equiv 0 \pmod{p}$)

Dokaz. Neka je $n_0 = R(3)_m + 1$. Neka je g generator grupe \mathbb{Z}_p^* (g postoji zbog cikličnosti grupe \mathbb{Z}_p^*). Svaki elemenat $x \in \mathbb{Z}_p^*$ možemo zapisati x kao g^a . Imamo $a = mj + i$, za $0 \leq i < m$, tako da je $x = g^{mj+i}$. Posmatrajmo bojenje koje boji elemenat x skupa \mathbb{Z}_p^* u boju i ako je $x = g^{mj+i}$. Na osnovu teoreme 4.1 postoje a, b i c obojeni istom bojom, takvi da važi $a + b = c$, odnosno eksponenti a, b i c su kongrueni po modulu m . Dakle,

$$g^{mj_a+i} + g^{mj_b+i} = g^{mj_c+i}$$

Neka su $x = g^{j_a}$, $y = g^{j_b}$ i $z = g^{j_c}$. Množenjem gornje jednačine sa g^{-i} dobijamo $x^m + y^m = z^m$. \square

Teorema 4.3. Za svaki prirodan broj $n \geq 3$ postoji broj $N(n)$ takav da bilo koji skup od bar N tačaka u ravni u opštem položaju sadrži konveksan n -tougao

Dokaz. Za $n = 4$ dokazaćemo da $N = 5$ zadovoljava uslove. Posmatrajmo 5 tačaka A, B, C, D i E . Ako je najmanji konveksni mnogougao petougao ili četvorougao, dokaz je trivijalan. U suprotnom, neka je najmanji takav mnogougao

trougao ABC . D i E se onda nalaze unutar ABC . 2 tačke od A, B i C se moraju nalaziti sa jedne strane prave DE . Neka su to A i C . Tada je $ACDE$ traženi četvorougao.

Neka je X skup od bar $R_4(n, 5)$ tačaka u opštem položaju. Na osnovu Remzijeve teoreme za hipergrafove znamo da je ovaj broj konačan. Obojimo sve četvoročlane podskupove tačaka u plavo ako je četvorougao koje obrazuju konveksan ili u crveno ako je konkavan. Pošto ima ukupno $R_4(n, 5)$ tačaka, mora postojati ili n -točlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi plave boje (konveksni) ili petočlani skup tačaka čiji su svi četvoročlani podskupovi crvene boje. Dokazali smo da među 5 tačaka u opštem položaju mora postojati konveksan četvorougao, dakle mora postojati n -točlani skup tačaka tako da su svi četvorouglovi koje oni obrazuju konveksni, odnosno konveksan n -tougao od n tačaka. Dakle traženi N postoji i važi $N \leq R_4(n, 5)$

□

Definicija 4.1. Polugrupa \mathbf{S} je uređen par (S, \cdot) , takav da važi

$$\cdot : S \times S \rightarrow S \quad \text{i} \quad \forall x, y, z \in S : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

\mathbf{S} je grupa ako dodatno važi:

$$\exists e \in S \quad \forall s \in S : e \cdot s = s \cdot e = s \quad \text{i}$$

$$\forall s \in S \quad \exists t \in S : s \cdot t = t \cdot s = e$$

Definicija 4.2. Element s polugrupe $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ je idempotentan, ako je $s \cdot s = s$

Teorema 4.4. Neka je $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ konačna polugrupa. Tada \mathbf{S} sadrži bar jedan idempotentan element.

Dokaz. Neka je S konačna polugrupa čiji je konačan generišući skup A . Izaberimo beskonačnu reč $a_1 a_2 \dots$ nad A . Posmatrajmo bojenje grafa $0, 1, 2, \dots$ koje boji granu između i i j , $i \leq j$ u sliku $a_{i+1} \dots a_j$ u S . Na osnovu Remzijeve teoreme za beskonačne grafove ($??$), moraju postojati $i < j < k$ između kojih se nalaze grane iste boje, odnosno

$$a_{i+1} \dots a_j = a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{j+1} \dots a_k = a_{i+1} \dots a_j \cdot a_{i+1} \dots a_j.$$

Dakle, element $a_{i+1} \dots a_j$ je idempotentan.

□

Literatura

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler. Proofs from The BOOK. Springer, 1998.
- [2] R. L. Graham, J. Nešetřil, S. Butler. The Mathematics of Paul Erdős II. Springer, 1990.
- [3] Chung, F.R.K., R.L. Graham, R.M. Wilson. A survey of Bounds for Classical Ramsey Numbers Journal of graph theory, 1989.
- [4] J.G.Kalbfleisch. Upper Bounds for Some Ramsey Numbers Journal of combinatorial theory, 1967.
- [5] P. Erdos G. Szekeresz A combinatorial problem in geometry Compositio Mathematica, tome 2, 1935
- [6] M. Steed. Some theorems and applications of Ramsey Theory