

El algoritmo de Newton-Raphson es un método numérico utilizado para encontrar soluciones a sistemas de ecuaciones no lineales. Se basa en la aproximación de una función no lineal mediante una recta tangente a su curva en un punto inicial, y luego utiliza esta recta para encontrar la intersección con el eje  $x$ , que se toma como la siguiente aproximación de la solución.

### **Única incógnita**

Cuando se utiliza el algoritmo de Newton-Raphson para resolver una ecuación no lineal con una sola variable, La idea principal detrás del método es aproximar la solución utilizando una recta tangente a la curva de la función en la aproximación inicial. El punto de intersección de la recta tangente con el eje  $x$  se toma como la siguiente aproximación de la solución.

### **Varias incógnitas**

El algoritmo de Newton-Raphson también se puede utilizar para resolver sistemas de ecuaciones no lineales con varias incógnitas. En este caso, la matriz Jacobiana de la función no lineal se utiliza en lugar de la derivada de la función.

El método iterativo de Newton-Raphson es una herramienta valiosa en el campo de la matemática aplicada y la ingeniería para encontrar soluciones numéricas a sistemas de ecuaciones no lineales. Estas ecuaciones pueden ser difíciles de resolver analíticamente, especialmente cuando se trata de sistemas complejos con varias incógnitas. El método de Newton utiliza una aproximación inicial de la solución y luego itera para encontrar la solución exacta.

En el caso de un sistema de ecuaciones no lineales, el método de Newton-Raphson utiliza una matriz jacobiana  $J_f(x)$  para aproximar la solución. La matriz jacobiana es una matriz cuadrada compuesta por las primeras derivadas parciales de las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  con respecto a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . En otras palabras, la matriz jacobiana es una herramienta para evaluar cómo cambian las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  cuando las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  cambian en pequeñas cantidades. La matriz jacobiana  $J_f(x)$  es esencial para el método iterativo de Newton-Raphson ya que se utiliza en cada iteración del método para aproximar la solución. En cada iteración, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales de la forma  $J_f(x_k)y=f(x_k)$  para obtener el vector  $y$ , que se utiliza para calcular la siguiente aproximación de la solución. Si la matriz jacobiana no es invertible, entonces el método no se puede utilizar y se debe buscar otra técnica.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

El método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales se define mediante la siguiente fórmula iterativa:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - [\mathbf{J}f(\mathbf{x}_k)]^{-1} f(\mathbf{x}_k)$$

Donde  $\mathbf{x}_k$  y  $\mathbf{x}_{k+1}$  son aproximaciones sucesivas de la solución del sistema de ecuaciones,  $\mathbf{J}f(\mathbf{x}_k)$  es la matriz jacobiana evaluada en  $\mathbf{x}_k$ ,  $[\mathbf{J}f(\mathbf{x}_k)]^{-1}$  es la inversa de la matriz jacobiana evaluada en  $\mathbf{x}_k$ , y  $f(\mathbf{x}_k)$  es el vector de las funciones evaluadas en  $\mathbf{x}_k$ .

En cada iteración del método, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales  $\mathbf{J}f(\mathbf{x}_k)\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_k)$  para obtener el vector  $\mathbf{y}$ , que se utiliza para calcular la siguiente aproximación de la solución. Este proceso se repite hasta que se alcanza la precisión deseada o se cumple un número máximo de iteraciones.

La aproximación inicial de la solución también es crítica para el éxito del método iterativo de Newton-Raphson. Si la aproximación inicial está muy lejos de la solución real, el método puede no converger o puede converger a una solución incorrecta. Por lo tanto, es importante elegir una aproximación inicial que se acerque a la solución real. Una ventaja importante del método de Newton-Raphson es su rápida convergencia, especialmente cuando las aproximaciones iniciales son buenas y la matriz jacobiana es invertible. Sin embargo, la convergencia puede ser lenta o incluso divergente si la matriz jacobiana no es invertible o si las aproximaciones iniciales están muy lejos de la solución real.

En conclusión, el método iterativo de Newton-Raphson es una técnica valiosa para aproximar la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Este método se basa en la matriz jacobiana de las funciones que definen el sistema de ecuaciones y utiliza una aproximación lineal local para encontrar la solución. La matriz jacobiana es fundamental en el método y su invertibilidad es esencial para el éxito del método. Además, la aproximación inicial de la solución también es importante para el éxito del método.

### Pseudocódigo **Única incógnita**

1. Definir la función  $f(x)$ , derivada de  $f(x)$  como  $f\_deriv$ , aproximación inicial  $x\_0$ , una tolerancia de error aceptable  $tol$ , un número máximo de iteraciones  $max\_iter$ .
2. Inicializar una variable de iteración  $i = 0$ .
3. Mientras  $i$  sea menor que  $max\_iter$ :
  - a. Calcular  $f(x\_0)$ .
  - b. Calcular  $f\_deriv(x\_0)$ .
  - c. Calcular la siguiente aproximación  $x\_1 = x\_0 - f(x\_0)/f\_deriv(x\_0)$ .
  - d. Si  $abs(x\_1 - x\_0) < tol$ , salir del ciclo.
  - e. Actualizar  $x\_0 = x\_1$ .
  - f. Incrementar  $i$  en 1.
4. Devolver  $x\_0$  como la solución aproximada

### Pseudocódigo **Varias incógnitas**

1. Definir una función vectorial  $F(x)$  que tome un vector  $x$  de variables y devuelva otro vector, La matriz jacobiana  $J(x)$  de  $F(x)$ , Una aproximación inicial del vector de variables  $x\_0$ , Una tolerancia de error aceptable  $tol$ . Un número máximo de iteraciones  $max\_iter$ .
2. Inicializar una variable de iteración  $i = 0$ .
3. Mientras  $i$  sea menor que  $max\_iter$ :
  - a. Calcular  $F(x\_0)$ .
  - b. Calcular  $J(x\_0)$ .
  - c. Resolver el sistema de ecuaciones lineales  $J(x\_0) * delta\_x = -F(x\_0)$  para  $delta\_x$ .
  - d. Calcular la siguiente aproximación  $x\_1 = x\_0 + delta\_x$ .
  - e. Si la norma de la diferencia entre  $x\_1$  y  $x\_0$  es menor que  $tol$ , salir del ciclo.
  - f. Actualizar  $x\_0 = x\_1$ .
  - g. Incrementar  $i$  en 1.
4. Devolver  $x\_0$  como la solución aproximada.