Método de Romberg

Resumen del libro **Numerical Analysis** de R. Burden y J. Faires, Novena Edición, en la sección 4.5, **página 213**, el cual explica el método de Romberg para aproximar el valor de la integral definida.

El método Romberg es una técnica de integración numérica que utiliza extrapolación para mejorar la precisión de las aproximaciones obtenidas mediante la regla del trapecio compuesta. Proporciona aproximaciones más precisas al integrar una función en un intervalo dado, reduciendo la cantidad de evaluaciones de la función requeridas en comparación con el método de subdivisión regular.

Formulación matemática:

Dado un intervalo [a, b] y una función f(x), el método Romberg se puede formular de la siguiente manera:

1. Paso inicial: Se selecciona un número entero positivo ***n*** que determina el número de filas en la tabla Romberg. Se define $h = \frac{(b-a)}{2^k}$, donde k es el número de filas
2. Paso de subdivisión: Se aplica la regla del trapecio compuesta con ***n*** subdivisiones en el intervalo $[a, b]$. Esto da como resultado la primera columna de la tabla Romberg, que se denota como $R(i, 1)$, donde i representa el número de subdivisiones.
   $R(1, 1) = \frac{h}{2} \cdot (f(a) + f(b))$
3. Extrapolación de Richardson: Se aplica la extrapolación de Richardson para mejorar las aproximaciones. Para la j-ésima columna de la tabla Romberg ($j > 1$), se utiliza la siguiente fórmula:
   $R(i, j) = R(i, j-1) + \frac{(R(i,j-1) - R(i-1,j-1))}{(4^{(j-1)} - 1)}$
   Esto implica que $R(i, j)$ se obtiene promediando las aproximaciones $R(i, j-1)$ y $R(i-1, j-1)$, utilizando un factor de extrapolación basado en las potencias de 4.
4. Se repite el paso 3 hasta alcanzar la última columna de la tabla Romberg. La última aproximación en la tabla, $R(k, k)$, proporciona la estimación final del integral con mayor precisión.

Ejemplo numérico:

Consideremos la integral $\int_0^1 e^x\,dx$. Aplicaremos el método Romberg con $n = 4$.

Paso 1: Se selecciona $n = 4$, lo que implica que $k = 4$ y $h = \frac{(1-0)}{2^4} = 0.0625$.

Paso 2: Aplicamos la regla del trapecio compuesta con $n = 1, 2, 4, 8$ subdivisiones.

$$R(1,1) = \frac{0.0625}{2} \cdot (e^0 + e^1) = 0.613105$$

$$R(2,1) =$$

$$= \frac{0.03125}{2} \cdot (e^0 + e^{0.0625} + e^{0.125} + e^{0.1875} + e^{0.25} + e^{0.3125} + e^{0.375} + e^{0.4375} + e^{0.5} + e^{0.5625} + e^{0.625} + e^{0.6875} + e^{0.75} + e^{0.8125} + e^{0.875} + e^{0.9375} + e^1)$$

$$= 1.03756$$

$$R(4,1) = \frac{0.015625}{2} \cdot (suma\ de\ 17\ evaluaciones\ de\ e\text{^}x) = 1.266065$$

Paso 3: Aplicamos la extrapolación de Richardson.

$$R(2,2) = 1.03756 + \frac{(1.03756 - 0.613105)}{(4-1)} = 1.11831$$

$$R(4,2) = 1.266065 + \frac{(1.266065 - 1.03756)}{(4-1)} = 1.195995$$

$$R(4,3) = 1.195995 + \frac{(1.195995 - 1.11831)}{(4^2-1)} = 1.193977$$

Paso 4: La aproximación final del integral es

$R(4,4) = 1.193977$.