Instituto Tecnológico de Costa Rica — Ingeniería en Computadores
Profesor: Juan Pablo Soto Quirós

Sucessiones para Aproximar Funciones Trascendentes

Definición: Una función trascendente es una función que no satisface una ecuación polinómica cuyos coeficientes sean a su vez polinomios. Lo anterior contrasta con las funciones algebraicas, las cuales satisfacen dicha ecuación. En otras palabras, una función trascendente es una función que trasciende al álgebra en el sentido de que no se puede expresar en términos de una secuencia finita de operaciones algebráicas de suma, resta, multiplicación, división y elevando a potencias constantes. Las más importantes entre ellas son las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas, las funciones exponenciales y los logaritmos.

A pesar de que una función trascendente $f(x)$ no se puede expresar en términos de operaciones algebráicas, podemos aproximar el valor numérico de $f(a)$ utilizando una sucesión basado en una serie de potencia, donde a es un valor que se encuentra en el dominio de f.

A continuación, presentaremos un conjunto de sucesiones para aproximar el valor numérico de una función trascendente.

- $f(a) = e^a$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

  $$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^n}{n!}.$$

  Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \sin(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

  $$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

  Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \cos(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

  $$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!}.$$

  Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \ln(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando la serie

  $$S_k(a) = \frac{2(a-1)}{a+1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n}.$$

  Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \sinh(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

$$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \cosh(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

$$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a^{2n}}{(2n)!}.$$

Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \sin^{-1}(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

$$S_k(a) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} a^{2n+1}.$$

Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

- $f(a) = \tan^{-1}(a)$: Esta función se puede aproximar utilizando el polinomio

$$S_k(a) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{2n+1}, & \text{si } a \in [-1, 1] \\ \displaystyle\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)a^{2n+1}}, & \text{si } a > 1 \\ \displaystyle-\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{k} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)a^{2n+1}}, & \text{si } a < -1 \end{cases}$$

Un criterio de parada es $|S_{k+1}(a) - S_k(a)| < tol$, donde tol es una tolerancia dada.

Observaciones:

- No se mencionan métodos numéricos para algunas funciones trascendentes que no se encuentran en este documento. Para la implementación de estas funciones, se puede utilizar propiedades matemáticas para re-escribir dichas funciones en términos de los métodos iterativos ya explicados, por ejemplo, $\cos^{-1}(x) = \pi/2 - \sin^{-1}(x)$ y $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$.

- La función $f(x) = \sqrt[p]{a}$ es una función algebráica, específicamente una función radical. Sin embargo, hablando de implementación computacional, para realizar el cálculo número de $f(a) = \sqrt[p]{a}$, **donde p es un número entero positivo mayor a 2, y $a > 0$ cuando p es par**, se utiliza una sucesión numérica que solo involucra las operaciones de resta, multiplicación y división. Por ejemplo, el valor $f(a) = \sqrt[q]{a}$ se puede aproximar utilizando la iteración

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^p - a}{p x_k^{p-1}},$$

donde $x_0 = \frac{a}{2}$ es el valor inicial. Un criterio de parada es $|x_{k+1} - x_k| < tol|x_{k+1}|$, donde tol es una tolerancia dada.

- La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es una función algebráica, específicamente una función racional. Sin embargo, hablando de implementación computacional, para realizar el cálculo número de $\frac{1}{a}$, donde $a > 0$, se utiliza una sucesión numérica que solo involucra las operaciones de resta y multiplicación. Por ejemplo, el valor $f(a) = a^{-1}$ se puede aproximar utilizando la iteración

$$x_{k+1} = x_k(2 - a \cdot x_k),$$

donde x_0 es el valor inicial dado por:

$$x_0 = \begin{cases} \texttt{eps}^{15} & \text{si } 80! < a < 100! \\ \texttt{eps}^{11} & \text{si } 60! < a \leq 80! \\ \texttt{eps}^{8} & \text{si } 40! < a \leq 60! \\ \texttt{eps}^{4} & \text{si } 20! < a \leq 40! \\ \texttt{eps}^{2} & \text{si } 0! < a \leq 20! \end{cases}$$

donde $\texttt{eps} = 2.2204 \times 10^{-16}$. Un criterio de parada es $|x_{k+1} - x_k| < tol|x_{k+1}|$, donde tol es una tolerancia dada. **Nota:** Computacionalmente hablando, si $a \geq 100!$, entonces $a^{-1} \leq 1.0715 \times 10^{-156}$. Por lo tanto, en la implementación computacional, el método retornará el valor de cero si $a \geq 100!$ (es decir, numéricamente hablando, que $a^{-1} = 0$).