Dekompozycja szeregów czasowych

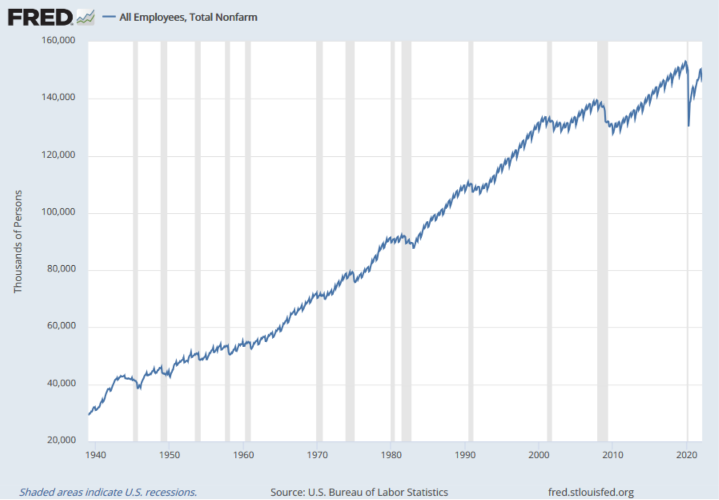
ASC 2025

Piotr Żoch

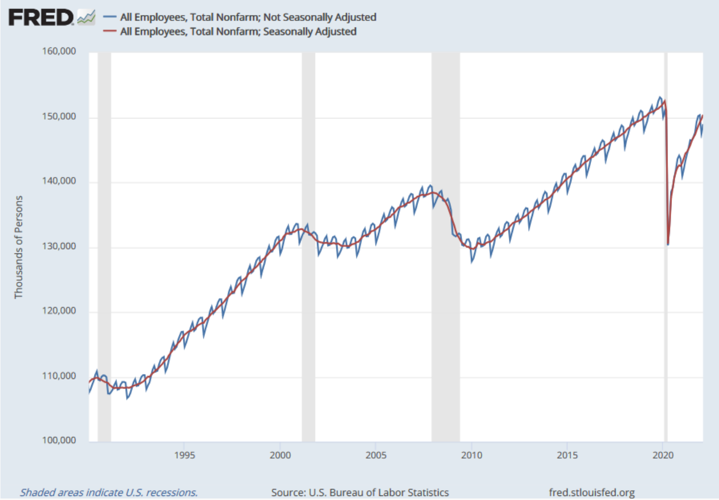
Plan

- Składowe szeregów czasowych.
- Metody wyrównywania sezonowego.

Składowe szeregów czasowych



Składowe szeregów czasowych



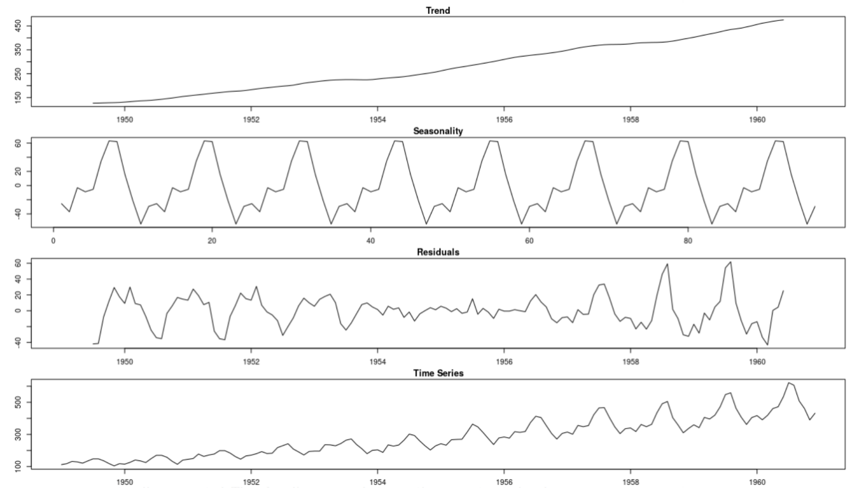
Składowe szeregów czasowych

- Składowa przypadkowa.
- Składowa systematyczna (efekt oddziaływań stałego zestawu czynników na zmienną prognozowaną):
    - Trend (tendencja rozwojowa).
    - Stały poziom (przeciętny długookresowy poziom zmiennej).
    - Składowa okresowa:
        - Wahania sezonowe.
        - Wahania cykliczne.

Składowe szeregów czasowych

- **Tendencja rozwojowa (trend)**
  - długookresowa skłonność do jednokierunkowych zmian (wzrostu lub spadku) wartości badanej zmiennej.
- **Stały (przeciętny) poziom**
  - występuje, gdy w szeregu czasowym nie ma tendencji rozwojowej, wartości zmiennej prognozowanej oscylują zaś wokół pewnego (stałego poziomu).
- **Wahania cykliczne**
  - długookresowe rytmiczne wahania wartości wokół tendencji rozwojowej lub stałego (przeciętnego) poziomu.
- **Wahania sezonowe**
  - wahania wartości obserwowanej zmiennej wokół tendencji rozwojowej lub stałego (przeciętnego) poziomu tej zmiennej. Mają skłonność do powtarzania się w określonym czasie.

Składowe szeregów czasowych



Dekompozycja szeregów czasowych

- Wyodrębnienie poszczególnych składników nie zawsze jest łatwe z uwagi na rozmaite interakcje, które zachodzą pomiędzy nimi.
- Różne metody dekompozycji (średnie ruchome, wydzielanie komponentów o różnej częstotliwości, procedury TRAMO/SEATS itd).

Trend

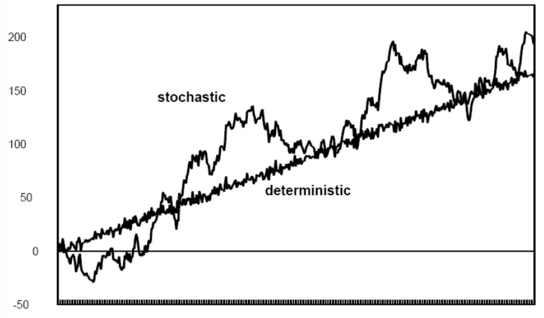
- Trend
  - deterministyczny

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha + \beta t + \epsilon_t \\
y_t &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \epsilon_t \\
y_t &= \kappa e^{\delta t} e^{\epsilon_t} \\
\epsilon_t &\sim iid\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)
\end{aligned}
$$

  - stochastyczny

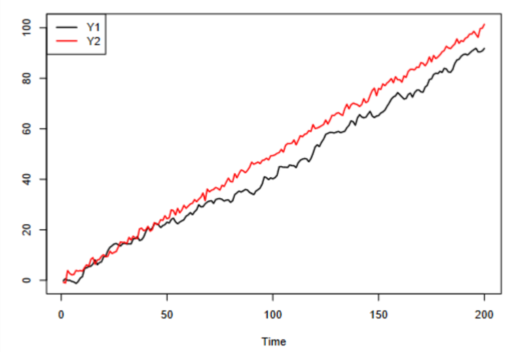
$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha + y_{t-1} + \epsilon_t \\
\epsilon_t &\sim iid\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)
\end{aligned}
$$

Trend



Trend

- W praktyce rozróżnienie może nie być łatwe...



Wahania sezonowe

- Dwa typy sezonowości:
  - **Deterministyczna**
    - Wartości obserwacji szeregu cechującego się sezonowością deterministyczną wahają się z amplitudą względnie stała.
    - Proces, którego bezwarunkowa średnia zależy od podokresu roku (np. miesiąca, kwartału)
    - Ten rodzaj sezonowości jest modelowany za pomocą zmiennych zerojedynkowych, ich liczba zależna od liczby okresów w roku.
  - **Stochastyczna**
    - Charakteryzuje się zmiennym w czasie wzorcem sezonowości.

Wahania sezonowe

- Deterministyczna sezonowość (przykład):

$$y_t = \sum_{s=1}^{S} \delta_{t,s} m_s + \epsilon_t$$

  $\delta_{t,s} = 1$ jeśli okres t przypada na sezon s (np. $\delta_{t,12} = 1$ jeśli okres t to grudzień w przypadku danych miesięcznych).

- Stochastyczna sezonowość (przykład – sezonowy pierwiastek jednostkowy):

$$y_t = y_{t-S} + \epsilon_t$$

Metody wyrównywania sezonowego

- Punktem wyjścia jest założenie, ze szereg czasowy można zdekomponować na elementy:
  - **czynnik sezonowy** S_t – regularne fluktuacje sezonowe;
  - **cykl i trend** C_t – długookresowy trend, cykl koniunkturalny i inne składniki cykliczne;
  - **trading-day** TD_t – kształt kalendarza – korekta ze względu na rożną długość miesięcy, liczbę dni roboczych itp.; nie liczony dla danych kwartalnych
  - **składnik losowy** I_t
- Chcemy uzyskać dane wyrównane sezonowo SA_t

Metody wyrównywania sezonowego

- Postać addytywna

$$Y_t = S_t + C_t + TD_t + I_t$$
$$SA_t = C_t + I_t$$

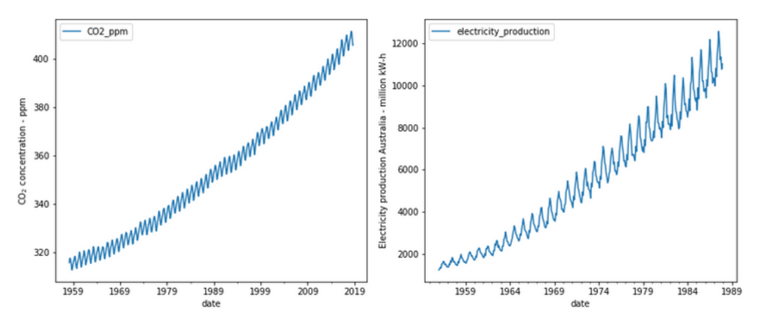
czyli amplituda wahań sezonowych i losowych jest stała.

- Postać multiplikatywna

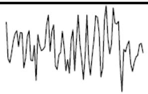
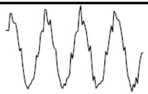
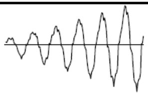
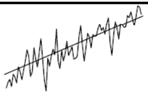
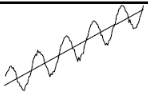
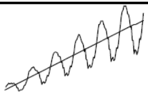
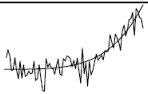
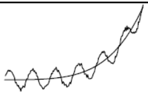
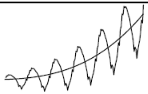
$$Y_t = S_t \times C_t \times TD_t \times I_t$$
$$SA_t = C_t \times I_t$$

czyli amplituda wahań sezonowych i losowych zależy od trendu.

Postać addytywna vs postać multiplikatywna



Postać addytywna vs postać multiplikatywna

Sezonowość → **Trend ↓**	Brak	Sezonowość addytywna	Sezonowość multyplikatywna
Brak			
Trend addytywny			
Trend multyplikatywny			

Obserwacje nietypowe

- **O charakterze jednorazowym** *(additive outlier (AO))* powodujące zmianę wartości zmiennej zależnej tylko w jednym okresie

$$AO_t^{(t_0)} = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

Obserwacje nietypowe

- **O charakterze przejściowym** *(temporary change (TC))*, powodujące tymczasowe przesunięcie poziomu zmiennej zależnej, przy czym powrót ze skokowej zmiany wartości zmiennej zależnej w do poziomu pierwotnego następuje zgodnie z funkcją wykładniczą w postaci

$$TC_t^{(t_0)} = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ \alpha^{t-t_0} & t \neq t_0 \end{cases}$$

Obserwacje nietypowe

- **O charakterze długotrwałym** *(level shift (LS))*, powodujące długotrwałe przesunięcie poziomu zmiennej zależnej

$$LS_t^{(t_0)} = \begin{cases} -1 & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

Metody wyrównywania sezonowego

- Dwie popularne metody to:
    - **X-12-ARIMA** (obecnie X-13-ARIMA-SEATS)
    - **TRAMO/SEATS**
- Obie dostępne w programie **Demetra+** (opracowany przez Eurostat, darmowy).

X-12-ARIMA

- Metoda ad hoc, dobór filtrów nie zależy od właściwości statystycznych szeregu czasowego.
- Nieco myląca nazwa, model ARIMA jest w niej wykorzystywany jedynie do estymacji wartości prognozowanych.
    1. Trend obliczany za pomocą średnich ruchomych.
    2. Odjąć trend od szeregu, pozostaje komponent sezonowy i nieregularny.
    3. Komponent sezonowy obliczany za pomocą średnich ruchomych.
    4. Odjąć komponent sezonowy od szeregu.
    5. Ponowić (1) i (2) z nieco innymi wagami.
    6. Ponowić (3) i (4) z nieco innymi wagami.
    7. Otrzymać trend i komponent nieregularny odejmując uzyskany w (6) komponent sezonowy od szeregu.

TRAMO/SEATS

- **TRAMO** ("Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations and Outliers"): dopasowuje proces SARIMAX do szeregu i oczyszcza szereg z wpływu wybranych czynników X (kalendarzowych, nietypowych...) za pomocą tego modelu.
- **SEATS** ("Seasonal Extraction in ARIMA Time Series"): korzysta ze specyfikacji SARIMA, by zdekomponować szereg na elementy: trendu, sezonowości, nieregularny.