Stacjonarność

ASC 2025

Piotr Żoch

Plan

- Regresja pozorna.
- Funkcje ACF i PCF.
- Badanie stacjonarności: testy DF, ADF, KPSS.

Regresja pozorna

Regresja pozorna

- **Regresja pozorna *(spurious regression)***: zmienne (x_t, y_t) nie mają ze sobą żadnego związku, ale uzyskujemy statystycznie istotnych oszacowania.
- Klasyczny przykład: regresja jednej zmiennej niestacjonarnej na drugą, obie to błądzenie losowe.

$$
\begin{aligned}
x_t &= x_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\
y_t &= y_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N\left(0, \sigma_\nu^2\right) \\
y_t &= \beta x_t + e_t
\end{aligned}
$$

Regresja pozorna

- Objawy regresji pozornej:
  - Wysoka wartość statystyki testowej (*p-value* niskie).
  - Wysokie R^2.
  - Silna autokorelacja reszt.
  - Zmiana wyniku po dodatniu opóźnionej zmiennej objaśniającej (brak statystycznej istotności).

Regresja pozorna

- Dlaczego tak się dzieje?
- Problem:
  - Rozkłady statystyk testowych są niestandardowe (czyli błędem jest badanie istotności zmiennych przy założeniu normalności rozkładu statystyki).
- Estymator OLS nie jest zgodny.
  - nie będzie zbiegać do 0 (prawdziwej wartości w przykładzie powyżej) przy zwiększeniu liczby obserwacji.

Regresja pozorna: przykład

- Przykład: błądzenie losowe z dryfem

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mu_x + x_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\
y_t &= \mu_y + y_{t-1} + \nu_t, \quad \nu_t \sim N\left(0, \sigma_\nu^2\right)
\end{aligned}
$$

- Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
x_t &= \mu_x t + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_k + x_0 \\
y_t &= \mu_y t + \sum_{k=1}^{t} \nu_k + y_0
\end{aligned}
$$

Regresja pozorna: przykład

- Mamy

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t y_t}{\sum_{t=1}^{T} x_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^{T} \left(\mu_x t + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_k + x_0\right) \left(\mu_y t + \sum_{k=1}^{t} \nu_k + y_0\right)}{\sum_{t=1}^{T} \left(\mu_x t + \sum_{k=1}^{t} \epsilon_k + x_0\right)^2}$$

- Aby to uprościć, użyjemy

$$\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^{T} t \to \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T^3} \sum_{t=1}^{T} t^2 \to \frac{1}{3}$$

Regresja pozorna: przykład

- Mamy

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{T^3}\sum_{t=1}^{T}\left(\mu_x t + \sum_{k=1}^{t}\epsilon_k + x_0\right)\left(\mu_y t + \sum_{k=1}^{t}\nu_k + y_0\right)}{\frac{1}{T^3}\sum_{t=1}^{T}\left(\mu_x t + \sum_{k=1}^{t}\epsilon_k + x_0\right)^2}$$

$$\xrightarrow{p} \frac{\mu_y}{\mu_x}$$

- *Uwaga:* w tym przykładzie za regresję pozorną odpowiadały wyrazy zawierające t^2 czyli trend deterministyczny – podobne problemy będziemy mieli przy zmiennych trendostacjonarnych.
- *Uwaga:* podobne problemy występują też w przypadku błądzenia losowego, ale trochę trudniej to pokazać analitycznie.

Regresja pozorna: przykład

- Co w przypadku regresji liniowej

$$x_t = \beta y_t + \gamma x_{t-1} + e_t?$$

- Różnica: uwzględniliśmy x_{t-1} jako zmienną objaśniającą.
- Okazuje się, że to rozwiązuje problem regresji pozornej (wyłumaczenie przy zajęciach dot. kointegracji).
- Praktyczna sugestia: dodać opóźnienia x_t i y_t w regresji.

Funkcje ACF i PACF

ACF

- **Funkcja autokorelacji** *(Autocorrelation Function)* to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami

$$\rho_k = \frac{Cov\left(y_t, y_{t-k}\right)}{Var\left(y_t\right)}$$

i $\rho_k \in [-1, 1]$.
- Użyliśmy $\sqrt{Var\left(y_t\right) Var\left(y_{t-k}\right)} = Var\left(y_t\right)$ (to wymaga stacjonarności).

PACF

- **Funkcja autokorelacji cząstkowej** *(Partial Autocorrelation Function)* to współczynnik korelacji między dwiema realizacjami oddalonymi od siebie o k okresów **bez** uwzględnienia wpływu wszystkich obserwacji "pomiędzy".
- Funkcja ta jest równa wyestymowanemu współczynnikowi α_k w modelu autoregresyjnym k-tego rzędu

$$y_t = \mu + \alpha_1 y_{y-1} + \cdots + \alpha_k y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Test Breusch-Godfrey

- Służy do badania autokorelacji reszt z regresji liniowej

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1,t} + \ldots + \beta_n x_{n,t} + e_t$$
$$e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \ldots + \rho_k e_{t-k} + \varepsilon_t$$

- Wartość statystyki testowej nR^2, gdzie R^2 jest z regresji pomocniczej

$$\hat{e}_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{j,t} + \sum_{i=1}^{k} \rho_i \hat{e}_{t-i} + \varepsilon_t$$

- H0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_k = 0$. Rozkład to $nR^2 \sim \chi^2_k$

Statystyka Q Ljunga-Boxa

$$Q = T\left(T+2\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{\hat{\rho}_i^2}{T-i}$$
$$\sim \chi^2_k$$

- H0: proces jest białym szumem
- Test wykorzystywany przede wszystkim do badania autokorelacji reszt.
- Maddala (2001): test obciążony w kierunku H0, niska moc. Breusch-Godfrey preferowany.

Badanie stacjonarności

Test Dickey-Fullera

- Najpopularniejszy sposób badania stacjonarności zmiennych.
- Model:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid\left(0, \sigma^2\right)$$

- H_0 : proces jest błądzeniem losowym ($\beta = 1$) - niestacjonarność
- H_1 : proces jest procesem AR(1) ($|\beta| < 1$) - stacjonarność

Test Dickey-Fullera

- Model:

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim iid\left(0, \sigma^2\right)$$

- Odejmując y_{t-1} od obu stron

$$\Delta y_t = (\beta - 1)\, y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- $H_0 : \rho = 0$ - **niestacjonarność**
- $H_1 : \rho \in (-2, 0)$ - **stacjonarność**

Test Dickey-Fullera

- **UWAGA:** nie możemy po prostu zastosować OLS i za pomocą statystyki t zbadać istotność w standardowy sposób.
  - H_0: niestacjonarność. Rozkłady statystyk są niestandardowe!
- Wykorzystujemy specjalne tablice z wartościami krytycznymi dla testu DF.
- Uwaga techniczna: wielkości krytyczne rozkładu statystyki DF są zawsze ujemne.

Test Dickey-Fullera

- Procedura:
  - Regresja Δy_t na y_{t-1}.
  - Porównujemy statystykę t z wartościami krytycznymi testu DF:
    - t **poniżej** wartości krytycznej: odrzucamy H_0 (stacjonarność?)
    - t **powyżej** wartości krytycznej: nie odrzucamy H_0 (niestacjonarność?)

Warianty testu DF

- Błądzenie losowe z dryfem

$$y_t = \alpha_1 + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Trend deterministyczny

$$y_t = \alpha_1 + \alpha_2 t + \beta y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- We wszystkich powyższych przypadkach H_0 to też niestacjonarność.

Rozszerzony test DF (ADF)

- Reszty z regresji

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

często wykazują silną autokorelację.

- Rozszerzony test DF (augmented DF)

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie k jest dobrane tak, żeby wyeliminować autokorelację reszt.

Rozszerzony test DF (ADF)

- Procedura:
  - Regresja Δy_t na y_{t-1}.
  - Sprawdzamy autokorelację reszt (test Breuscha-Godfreya, nie Durbina-Watsona).
  - Jeśli jest, dodajemy opóźnioną różnicę Δy_{t-2} do specyfikacji i powtarzamy.
  - W przeciwnym wypadku:
    - t **poniżej** wartości krytycznej: odrzucamy H_0 (stacjonarność?)
    - t **powyżej** wartości krytycznej: nie odrzucamy H_0 (niestacjonarność?)

Test ADF w praktyce

- Reszty z regresji

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

często wykazują silną autokorelację.

- Rozszerzony test DF (augmented DF)

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \varepsilon_t$$

gdzie k jest dobrane tak, żeby wyeliminować autokorelację reszt.

Zmiana strukturalna

- Perron (1989) pokazał, że test ADF ma problemy z odrzuceniem hipotezy zerowej o występowaniu pierwiastka jednostkowego w przypadku zmiany strukturalnej.
- Dla przykładu: proces typu

$$y_t = \beta D_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \sim iid\left(0, \sigma^2\right)$$

$$D_t = \begin{cases} 0 & t < t^* \\ 1 & t \geq t^* \end{cases}$$

Zmiana strukturalna

- Perron (1989) sugeruje modyfikację testu ADF

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \Delta y_{t-i} + \beta D_t + \varepsilon_t$$

- Wymaga to znajomości daty zmiany strukturalnej.
- Modyfikacja: Andrews i Zivot (2002) – poszukiwaniej takiej daty zmiany strukturalnej, że moc testu jest największa.

Test KPSS

- Model:

$$
\begin{aligned}
y_t &= x_t + z_t \\
x_t &= x_{t-1} + v_t \\
z_t &= \mu_0 + \varepsilon_t \\
\varepsilon_t &\sim iid\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \\
v_t &\sim iid\left(0, \sigma_v^2\right)
\end{aligned}
$$

- $H_0 : \sigma_v^2 = 0$ - stacjonarność
- $H_1 : \sigma_v^2 > 0$ - niestacjonarność

Test KPSS

- Procedura:
  - Regresja y_t na stałą (+ ew. trend deterministyczny).
  - Obliczyć sumy $S_t = \sum_{j=1}^{t} e_j$ dla $t = 1, 2, 3, \ldots, T$, gdzie e_j to reszty z regresji powyżej.
  - Statystyka testowa: $KPSS = \frac{1}{T^2} \frac{\sum_{t=1}^{T} S_t^2}{\hat{\sigma}^2}$ gdzie $\hat{\sigma}^2$ to długookresowa wariancja reszt.

Testowanie (nie)stacjonarności

- W przypadku małej próby i procesów o wysokim stopniu persystencji:
  - Test ADF: niska moc.
  - Test KPSS: zaburzenia rozmiaru.
- Przykład: jak odróżnić proces trendostacjonarny

$$y_t = \alpha t + \epsilon_t$$

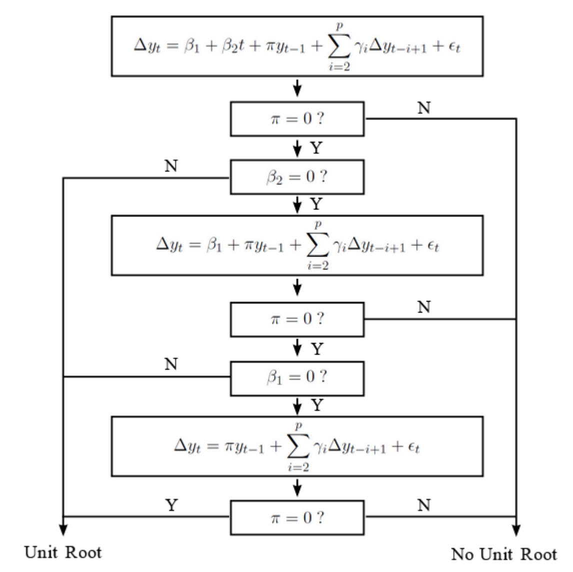
  od błądzenia losowego z dryfem

$$\begin{aligned} y_t &= \mu + y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= y_0 + \mu t + \sum_{i=0}^{t} \epsilon_{t-i} \end{aligned}$$

- Czy to, czy proces jest stacjonarny czy niestacjonarny, ma znaczenie?
- Teoria ekonomii może być bardziej pomocna od testów statystycznych...

Testowanie w praktyce

- Jaki test wybrać? Jakie deterministyczne regresory uwzględnić?
- Problem:
  - dodatkowe deterministyczne komponenty w regresji, które są nieobecne w procesie generującym dane, redukują stopnie swobody i obniżają moc testu stacjonarności.
  - pominięcie deterministycznych komponentów w regresji, które są obecne w procesie generującym dane, obniża moc testu.



Źródło: https://kevinkotze.github.io/ts-6-unit-roots/