SEMINARUL 8
Lema substituţiei

1. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ considerăm sistemul de vectori $a = [v_1, v_2, v_3, v_4]$, unde
$$v_1 = (1, 2, -1, 2),\ v_2 = (1, 2, 1, 4),\ v_3 = (2, 3, 0, -1),\ v_4 = (1, 3, -1, 0).$$
Arătaţi că a este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ peste $\mathbb{R}$ şi determinaţi coordonatele lui $v = (2, 3, 2, 10)$ în aceasta bază.

2. În $\mathbb{Z}_5$ - spaţiul vectorial $\mathbb{Z}_5^3$ se consideră vectorii $v_1 = (\widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{1})$, $v_2 = (\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{4})$, $v_3 = (\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{1})$, $v = (\widehat{4}, \widehat{2}, \widehat{1})$
Arătaţi că v_1, v_2, v_3 formează o bază şi calculaţi coordonatele lui v în această bază

3. Arătaţi că matricile $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ formează o bază $\mathbb{R}$- spaţiului vectorial $M_2(\mathbb{R})$.
Determinaţi coordonatele matricii $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ în această bază.

4. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră vectorii
   (a) $(0, 1, 3, 2)$, $(1, 0, 5, 1)$, $(-1, 0, 1, 1)$, $(3, -1, -3, -4)$, $(2, 0, 1, -1)$;
   (b) $(1, 2, 3, 0)$, $(0, 1, -1, 1)$, $(3, 7, 8, 1)$, $(1, 3, 2, 1)$;
   (c) $(1, 2, -1, 2)$, $(2, 3, 0, -1)$, $(2, 4, 0, 6)$, $(1, 2, 1, 4)$, $(3, 6, -1, -1)$, $(1, 3, -1, 0)$.

   Determinaţi care dintre aceşti vectori formează o bază a subspaţiului generat de ei, şi eventualele relaţii de dependenţă .

5. Considerăm aplicaţia $\mathbb{R}$ liniară $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$,
$$f(x, y, z, t, w) = (y - z + 3t + 2w, x - t, 3x + 5y + z - 3t + w, 2x + y + z - 4t - w).$$
Determinaţi $\operatorname{Ker} f$.

6. Considerăm aplicaţia $\mathbb{R}$ liniară $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,
$$f(x, y, z, t) = (x - y + z - t, -2x + y - z, y - 2z + 3t).$$
Determinaţi $\operatorname{Ker} f$.

7. Considerăm aplicaţiile $\mathbb{R}$ liniare
   (a) $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, t) = (x + 2y + z - t, x + 2y - z + t, x + 2y, z - t)$.
   (b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + 2y, y + z, x - 2z)$.

   Determinaţi câte o bază pt $\operatorname{Im} f$ şi $\operatorname{Ker} f$.

8. Fie sistemul $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$.
   (a) Determinaţi o bază a subspaţiului $S \subseteq \mathbb{R}^3$ al soluţilor sistemului şi determinaţi dimensiunea $\mathbb{R}^3/S$.
   (b) Definiţi $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ astefl încât $S = \operatorname{Ker} f$ şi să se verifice
$$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} f + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} f = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3.$$