Ecuaţii diferenţiale si sisteme dinamice

Cătălin-George Lefter

Editura Alexandru Myller
Iaşi, 2006

EDITURA ALEXANDRU MYLLER
Iaşi, B-DUL CAROL I, nr.11,
tel. 0232-201061 / fax. 0232-201060
http://www.math.uaic.ro/∼sm/

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
LEFTER, CĂTĂLIN-GEORGE
Ecuaţii diferenţiale şi sisteme dinamice /
Cătălin-George Lefter. - Iaşi : Editura Alexandru Myller, 2006
Bibliogr.
Index.
ISBN (10) 973-86987-7-4 ; ISBN (13) 978-973-86987-7-4
517.9

Referent ştiinţific
Prof. Univ. Dr. Ioan I. Vrabie
Facultatea de Matematică
Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" Iaşi

Cuprins

Prefaţă

Această lucrare are la bază cursul opţional de *Ecuaţii diferenţiale şi sisteme dinamice*, predat de autor la Facultatea de Matematică, Universitatea "Al.I.Cuza", la anul al II-lea de studiu. Scopul acesteia este de a face o introducere în teoria sistemelor dinamice, în strânsă legătură cu teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Ea se adresează în special studenţilor Facultăţii de Matematică, dar poate fi utilă tuturor celor interesaţi de aceste ramuri ale matematicii.

În primul capitol se prezintă noţiunile introductive şi se dau exemple de sisteme dinamice cu timp discret si cu timp continuu, acestea din urmă provenind din ecuaţii diferenţiale. Dintre sistemele dinamice cu timp discret este de menţionat shiftul Bernoulli, a cărui dinamică descrie un mod de apariţie a haosului într-o clasă largă de sisteme dinamice.

Capitolul 2 este dedicat studiului stabilităţii sistemelor liniare şi introducerii noţiunilor de dihotomie ordinară şi dihotomie exponenţială. Acestea sunt importante pentru studiul existenţei soluţiilor mărginite pentru sistemele neliniare, precum şi pentru a arăta existenţa orbitelor umbră pentru pseudoorbite. Rezultatele prezentate în acest capitol vor fi utile în capitolul 7, la studiul dinamicilor de tip shift Bernoulli ce apar la sistemele diferenţiale cu orbite periodice ale căror varietăţi stabilă şi instabilă se intersectează transversal.

În capitolul 3 se face un studiu local al sistemelor diferenţiale, mai precis se studiază acestea în vecinătatea punctelor staţionare şi comportarea la mici perturbaţii, precum şi stabilitatea condiţională a punctelor staţionare şi a soluţiilor periodice. Se arată existenţa varietăţilor stabilă şi instabilă pentru punctele staţionare sau pentru orbitele periodice hiperbolice. În cazul sistemelor autonome ce posedă soluţii periodice se prezintă un rezultat de stabilitate asimptotică orbitală.

Capitolul 4 este dedicat studiului global al sistemelor diferenţiale în plan şi se prezintă teorema Poincaré-Bendixson. De asemenea, sunt studiate sistemele dinamice pe tor. În cazul acestora se introduce numărul de rotaţie şi se caracterizează cu ajutorul acestuia existenţa orbitelor periodice. Studiul sistemelor pe tor, în paralel cu sistemele în plan, pune în evidenţă importanţa topologiei spaţiului fazelor, precum şi transferul de la comportamentul determinist către cel ergodic. Este de asemenea definit indexul punctelor staţionare.

Noţiunea de stabilitate structurală este prezentată în capitolul 5, unde se prezintă o caracterizare a sistemelor structural stabile în dimensiune 1, pe S^1, şi în dimensiune 2, în plan şi pe torul T^2). Existenţa sistemelor dinamice instabile structural, care nu au într-o vecinătate niciun alt sistem structural stabil, este un mod de a privi apariţia haosului.

Capitolul 6 este o introducere în calculul variaţiilor şi se vor studia în special sistemele hamiltoniene. Se prezintă formalismul hamiltonian, se deduc ecuaţiile Euler-Lagrange, folosind principiul minimei acţiuni al lui Maupertuis, şi ecuaţiile lui Hamilton, folosind transformata Legendre. Se demonstrează teorema lui Liouville asupra integrabilităţii sistemelor hamiltoniene care posedă n integrale prime în involuţie. Pentru un astfel de sistem există coordonate acţiune-unghi în care dinamica sistemului este superpoziţia dintre o translaţie n dimensională şi o miscare condiţional periodică pe torul T^n.

Capitolul 7 prezintă câteva metode din teoria perturbaţiilor. Se studiază mai întâi comportarea sistemelor integrabile perturbate şi se prezintă metoda medierii. În continuare sunt studiate sistemele ce posedă orbite homoclinice transversale şi se arată că în dinamica acestora se poate scufunda o dinamică haotică de tip shift Bernoulli. Se prezintă, de asemenea, metoda funcţiei lui Melnikov de detectare a orbitelor homoclinice transversale pentru sisteme planare perturbate.

CAPITOLUL 1

Introducere

Introducem în acest capitol noţiunile fundamentale ce vor fi studiate în lucrare: sistem dinamic, spaţiul fazelor, diverse tipuri de orbite, mulţimi invariante, stabilitate etc. Sunt prezentate exemple de sisteme dinamice. În cazul sistemelor dinamice cu timp discret se consideră *shiftul Bernoulli* ce prezintă un interes deosebit deoarece reprezintă un mod de apariţie a haosului într-o clasă largă de sisteme dinamice. În ce priveşte sistemele dinamice cu timp continuu, se consideră cele generate de sistemele de ecuaţii diferenţiale. Se prezintă câteva exemple concrete, provenind din studiul unor fenomene fizice.

1.1. Noţiuni de bază şi proprietăţi generale

DEFINIŢIA 1.1.1. Fie X un spaţiu topologic, numit şi *spaţiul fazelor*, şi $(I,+)$ un semigrup topologic, *spaţiul timpului*. Un *sistem dinamic (autonom)* pe X se defineşte printr-o aplicaţie continuă

$$\Phi : X \times I \to X$$

ce are proprietăţile

(1) $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$
(2) $\Phi(\Phi(\mathbf{x}, t), s) = \Phi(\mathbf{x}, t + s)$ (proprietatea semigrupală)

Cele două proprietaţi exprimă faptul că $t \to \Phi_t := \Phi(\cdot, t)$ este morfism de semigrupuri de la I la semigrupul aplicaţiilor continue pe X. Dacă I este grup atunci sistemul dinamic va fi mai fi numit *flux*, în caz contrar *semiflux*.În exemplele considerate în lucrarea de faţă spaţiul timpului I va fi unul dintre spaţiile $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$,$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ iar X va fi un spaţiu metric complet. Dacă $I \in \{\mathbf{N}, \mathbf{Z}\}$ avem un *sistem dinamic cu timp discret* ((semi)-*flux discret*) iar dacă $I \in \{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\}$ atunci avem de-a face cu un *sistem dinamic cu timp continuu* ((*semi*)-*flux continuu*).

În cele ce urmează definim noţiunea de *orbită*, precum şi diferitele tipuri de orbite de al căror studiu ne vom ocupa.

DEFINIŢIA 1.1.2. *Orbita* ce trece prin $\mathbf{x} \in X$ este

$$\gamma = \gamma_{\mathbf{x}} := \{\Phi(\mathbf{x}, t), t \in I\}.$$

Vom mai utiliza notaţia $\gamma_{\mathbf{x}}(t) := \Phi(\mathbf{x}, t)$.

Pentru un flux definit pe $\mathbf{Z}$ sau $\mathbb{R}$, notăm cu $\gamma^+ = \gamma_{\mathbf{x}}^+ := \{\Phi(\mathbf{x}, t), t \geq 0\}$ *orbita pozitivă* şi, în mod similar, cu $\gamma^- = \gamma_{\mathbf{x}}^- := \{\Phi(\mathbf{x}, t), t \leq 0\}$ *orbita negativă*.

Un punct $\mathbf{x} \in X$ care verifică $\Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}$ pentru orice $t \in I$ se numeşte *punct staţionar* sau *punct de echilibru* pentru sistem. În acest caz orbita ce trece prin $\mathbf{x}$ se reduce la un punct: $\{\mathbf{x}\} = \gamma_{\mathbf{x}}$.

Dacă există $T \in I$ astfel încât

$$\gamma_{\mathbf{x}}(t + T) = \gamma_{\mathbf{x}}(t) \quad , \quad t \in I,$$

atunci $\gamma_{\mathbf{x}}$ se numeşte *orbită periodică.*

Fie $\mathbf{x}_0$ un punct staţionar pentru un sistem dinamic pentru care $I \in \{\mathbf{Z}, \mathbf{R}\}$. Vom spune că γ este *orbită homoclinică* în $\mathbf{x}_0$ dacă

$$\gamma(t) \to \mathbf{x}_0 \quad , \quad t \to \pm\infty.$$

Dacă $\mathbf{x}_1$ este un al doilea punct staţionar şi

$$\gamma(t) \to \mathbf{x}_0 \quad , \quad t \to -\infty,$$
$$\gamma(t) \to \mathbf{x}_1 \quad , \quad t \to \infty,$$

atunci γ se numeşte *orbită heteroclinică.*

Portretul fazelor este o reprezentare grafică a punctelor staţionare şi a orbitelor generice ale sistemului.

În continuare introducem noţiunile de invarianţă şi de stabilitate ale mulţimilor din spaţiul fazelor.

DEFINIŢIA 1.1.3. O mulţime $\Omega \subset X$ se numeşte *pozitiv* (*negativ*) *invariantă* dacă pentru orice $t \geq 0$ ($t \leq 0$),

$$\Phi(\Omega, t) \subset \Omega.$$

Dacă această incluziune are loc pentru orice $t \in I$, atunci mulţimea se numeşte *invariantă*. Observăm aici că orbitele sunt întotdeauna mulţimi invariante.

Vom spune că o mulţime invariantă $\Omega \subset X$ este *stabilă* dacă, pentru orice vecinătate $\mathcal{U}$ a sa, există o altă vecinătate $\mathcal{V}$ astfel încât,

$$\mathbf{x} \in \mathcal{V} \Longrightarrow \gamma_{\mathbf{x}}(t) \in \mathcal{U}, \quad t \geq 0.$$

Dacă, în plus, există o vecinătate $\mathcal{U}'$ a lui Ω astfel încât

$$\mathbf{x} \in \mathcal{U}' \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} dist(\gamma_{\mathbf{x}}(t), \Omega) \to 0,$$

atunci mulţimea Ω se numeşte *asimptotic stabilă.*

În cazul în care Ω este formată numai dintr-un punct (în mod necesar staţionar) obţinem *stabilitatea în sens Liapunov* (v.[**5**] pentru detalii sau Anexa B). Cazul în care Ω este o orbită obţinem noţiunile de *stabilitate orbitală*, respectiv *stabilitate orbitală asimptotică.*

Mulţimea invariantă Ω se numeşte *atractor pozitiv* dacă este *asimptotic stabilă*. Mulţimea invariantă Ω se numeşte *atractor negativ* dacă este atractor pozitiv pentru sistemul dinamic obţinut prin schimbarea sensului timpului: $\check{\Phi}(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}, -t)$.

În studiul stabilităţii şi al comportării asimptotice pentru sistemele dinamice, un rol important îl joacă mulţimea punctelor limită la $\pm\infty$:

DEFINIŢIA 1.1.4. Fie $\mathbf{x} \in X$. Definim *mulţimea ω-limită* a lui $\mathbf{x}$ astfel:

$$\omega(\mathbf{x}) = \omega(\gamma_{\mathbf{x}}) := \{\mathbf{y} \in X, \exists\ t_n \to \infty, \Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y}\}.$$

În mod asemănător se defineşte *mulţimea α-limită* a lui $\mathbf{x}$:

$$\alpha(\mathbf{x}) = \alpha(\gamma_{\mathbf{x}}) := \{\mathbf{y} \in X, \exists\ t_n \to -\infty, \Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y}\}.$$

PROPOZIŢIA 1.1.1. *Mulţimea ω-limită este mulţime invariantă şi închisă. Dacă sistemul dinamic este cu timp continuu şi $\gamma_{\mathbf{x}}^+$ este relativ compactă în X, atunci $\omega(\mathbf{x})$ este mulţime compactă şi conexă.*

Demonstraţie Dacă $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$ şi $\Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y}$ atunci pentru orice t, $\Phi_{t+t_n}(\mathbf{x}) \to \Phi_t(\mathbf{y})$ deci $\Phi_t(\mathbf{y}) \in \omega(\mathbf{x})$. Pe de altă parte, fie $\mathbf{y}_n \in \omega(\mathbf{x})$ şi $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$. Există $t_n \in I$, $t_n > n$ astfel încât $dist(\Phi_{t_n}(\mathbf{x}), \mathbf{y}_n) < 1/n$. Rezultă, folosind inegalitatea triunghiului, că $dist(\Phi_{t_n}(\mathbf{x}), \mathbf{y}) \to 0$, deci $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$.

Considerăm acum un sistem dinamic cu timp continuu, cu spaţiul fazelor X şi fie $\gamma_{\mathbf{x}}^+$ o semiorbită relativ compactă în X. Arătăm că $\omega(\mathbf{x})$ este mulţime compactă şi conexă. Compactitatea rezultă imediat din faptul că aceasta este mărginită, închisă şi conţinută în închiderea orbitei γ. Să arătăm acum că $\omega(\mathbf{x})$ este conexă. Presupunem că nu ar fi adevărat, deci ar exista $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ mulţimi deschise, disjuncte, $\mathcal{U}_i \cap \omega(\mathbf{x}) \neq \phi$ şi $\omega(\mathbf{x}) \subset \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Întrucât este vorba de mulţimea ω-limită, rezultă că există $t_n, s_n \to \infty$ astfel încât $\Phi_{t_n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_1$ şi $\Phi_{s_n}(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_2$. Deoarece sistemul dinamic considerat este cu timp continuu, rezultă că există τ_n între s_n şi t_n astfel încât $\Phi_{\tau_n}(\mathbf{x}) \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$. Pe de altă parte, pentru un subşir, notat tot cu τ_n, $\Phi_{\tau_n}(\mathbf{x}) \to \mathbf{y} \notin \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, contradicţie. ∎

OBSERVAŢIA 1.1.1. Dacă spaţiul fazelor este $\mathbb{R}^n$ sau un spaţiu metric compact, atunci pentru orice orbită mărginită γ a unui sistem dinamic cu timp continuu, mulţimea $\omega(\gamma)$ este compactă şi conexă.

DEFINIŢIA 1.1.5. Fie $\mathbf{x} \in X$ un punct staţionar. *Varietatea stabilă* a lui $\mathbf{x}$ este

$$W^s(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X, \Phi_t(\mathbf{y}) \to \mathbf{x},\ \text{pentru } t \to \infty\}.$$

Varietatea instabilă a lui $\mathbf{x}$ este

$$W^u(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X, \Phi_t(\mathbf{y}) \to \mathbf{x} \text{ pentru } t \to -\infty\}\ .$$

OBSERVAŢIA 1.1.2. Dacă $\mathbf{y} \in W^s(\mathbf{x}) \cap W^u(\mathbf{x})$ atunci $\gamma_{\mathbf{y}}$ este orbită homoclinică în $\mathbf{x}$.

Definiţia 1.1.6. *Constanta de miscare*, sau *integrala primă,* este o funcţie neconstantă $U : X \to \mathbb{R}$ care este constantă pe traiectoriile sistemului dinamic: $U(\Phi_t(\mathbf{x})) = const = C(\mathbf{x})$.

Observaţia 1.1.3. În cazul unui sistem dinamic ce provine dintr-un sistem de ecuaţii diferenţiale, cunoaşterea unui număr suficient de integrale prime funcţional independente ($n-1$ unde n este dimensiunea sistemului) este echivalentă cu integrarea acelui sistem de ecuaţii (v.[**5**]).

Cazul sistemelor hamiltoniene este deosebit de interesant şi se va vedea în capitolul 6 cum cunoasterea a n integrale prime în involuţie este suficientă pentru integrarea sistemului. Mai mult, în acest caz se va arăta existenţa coordonatelor acţiune-unghi în care dinamica sistemului respectiv este superpoziţia dintre o translatie într-un spaţiu n dimensional şi o mişcare condiţional periodică pe torul T^n.

Definiţia 1.1.7. Un punct $\mathbf{x} \in X$ este *punct "nonwandering"* (în traducere nerătăcitor) pentru fluxul Φ_t dacă pentru orice vecinătate U a lui $\mathbf{x}$ şi pentru orice $T > 0$ există $t > T$ astfel încât $\Phi_t(U) \cap U \neq \phi$. Un punct din complementara mulţimii nonwandering se numeşte *punct wandering.* (rătăcitor)

1.2. Exemple de sisteme dinamice

Sisteme dinamice cu timp discret.

Fie (X, Φ) un sistem dinamic cu timp discret ($I \in \{\mathbf{N}, \mathbf{Z}\}$). Să notăm cu $f(x) = \Phi_1(x)$. Proprietatea semigrupală ne spune că

$$\Phi(x, n) = f^n(x).$$

Reciproc, dată o funcţie continuă $f : X \to X$, putem defini un sistem dinamic pe X prin formula precedentă. Acesta este flux dacă şi numai dacă f este homeomorfism al lui X.

Aşadar, un sistem dinamic cu timp discret este definit printr-un spatiu topologic şi o aplicaţie continuă pe acesta. În primul exemplu considerat mai jos prezentăm un sistem dinamic, numit *shift Bernoulli,* care este interesant în mod special fiindcă dinamica respectiva, model pentru dinamicile haotice, se regăseşte într-o clasă largă de sisteme dinamice, mai precis în cazul acelor sisteme ce posedă traiectorii homoclinice ale căror varietăţi stabilă şi instabilă se intersectează transversal (v. §7.2).

Exemplul 1.2.1. *Shiftul Bernoulli.*

Fie Σ mulţimea şirurilor bi-infinite $\mathbf{a} = (a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, $a_i \in A$ unde A este o mulţime finită. Pe Σ introducem următoarea distanţă

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} \frac{\delta(a_i, b_i)}{2^{2|i|+1}},$$

unde $\delta(a, b) = 1$ dacă $a \neq b$ şi $\delta(a, a) = 0$. Proprietăţile distanţei se verifică imediat. De asemenea, dacă notăm cu $I_0 = [\frac{1}{2}, \infty)$, $I_k = [\frac{4^{-k}}{2}, \frac{4^{-k+1}}{3}]$, se observă că aceste intervale sunt disjuncte două câte două, iar dacă $a_i = b_i$ pentru $|i| < k$, $a_k \neq b_k$ atunci $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in I_k$.

Să arătăm în continuare că (Σ, d) este o *mulţime de tip Cantor* adică este un spaţiu metric compact, total neconex (singurele submulţimi conexe sunt punctele) şi fară puncte izolate.

Pentru a arăta compactitatea, fie $(\mathbf{a}^n)_{n\in\mathbf{N}}$ un şir în Σ. Extragem mai întâi un subşir $(\mathbf{a}^{n_{k,0}})_k$ care are prima componentă, $a_0^{n_{k,0}}$ constantă. Repetăm procedeul şi la pasul l obţinem un subşir al tuturor subşirurilor precedente $(\mathbf{a}^{n_{k,l}})$ care au aceleasi valori pe poziţiile $i = 0, \pm 1, ..., \pm \dot{l}$. Subşirul $(\mathbf{a}^{n_{k,k}})$ este un subsir în Σ. Limita este şirul $\mathbf{a}$ care pe poziţia l are elementul $\mathbf{a}^{n_{k,l}}$, $|l| \leq k$, şi pentru care are loc $d(\mathbf{a}^{n_{k,k}}, \mathbf{a}) \in I_{k+1}$.

Arătăm în continuare că orice submulţime M a lui Σ, ce conţine măcar două elemente, nu este conexă. Acest lucru este o consecinţă a faptului că mulţimea din $\mathbb{R}_+$ unde ia valori distanţa d nu este conexă. Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$, $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in I_k$ şi fie mulţimile deschise $U = \{\mathbf{c} \in \mathbf{\Sigma} | d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) < \frac{5}{12} 4^{-k}\}$, $V = \{\mathbf{c} \in \Sigma | d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) > \frac{5}{12} 4^{-k}\}$. Se observă că $\mathbf{a} \in U$, $\mathbf{b} \in V$ şi $M = (U \cap M) \cup (V \cap M)$.

Pentru a arăta ca Σ nu conţine puncte izolate este suficient să observăm că pentru $\mathbf{a} \in \mathbf{\Sigma}$ şirul $(\mathbf{a}^n)$ definit prin $a_i^n = a_i$ pentru $|i| \leq n$ şi a_i^n oarecare pentru $|i| > n$, satisface $\lim \mathbf{a}^n = \mathbf{a}$.

Sistemul dinamic numit *shift Bernoulli* se defineşte prin funcţia continuă $\sigma : \Sigma \to \Sigma$,

$$(\sigma(\mathbf{a}))_i = \mathbf{a}_{i+1}.$$

PROPOZIŢIA 1.2.1. *Pentru sistemul dinamic (Σ, σ) există orbite periodice de orice perioadă. Există de asemenea orbite dense în Σ.*

Demonstraţie Într-adevăr, dacă elementul $\mathbf{a}$ este format prin repetarea unui bloc de lungime n, atunci $\sigma^n(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ şi există deci un număr finit de orbite periodice de perioadă n. Se observă în plus că orbitele periodice formează o mulţime densă în Σ.

Pentru a arăta existenţa unei orbite dense, fie $\mathbf{a} \in \mathbf{\Sigma}$ $a_i = a_{-i}$ construit prin concatenarea tuturor blocurilor de lungime 1, apoi a celor de lungime 2, 3... etc. Orbita $\{\sigma^n(\mathbf{a}), n \in \mathbf{N}\}$ este densă în Σ. ■

EXEMPLUL 1.2.2. *Oscilaţia unei bile elastice*

În acest exemplu considerăm dinamica unei mingi oscilând prin impact repetat cu o suparafaţă ce vibrează sinusoidal. Fie u, v respectiv w viteza absolută de apropiere a bilei de suprafaţă, viteza după impact respectiv viteza suprafeţei în momentul impactului. Dacă $0 \leq \alpha < 1$ este coeficientul de restituire, atunci la momentul t_i al impactului are loc

$$v(t_i) - w(t_i) = -\alpha(u(t_i) - w(t_i)).$$

Presupunând că distanţa parcursă de minge între două momente de impact succesive este mare în raport cu amplitudinea de oscilatie a suprafeţei putem presupune că

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2v(t_j)}{g},$$
$$u(t_{j+1}) = -v(t_j).$$

g reprezintă acceleraţia gravitaţională. Oscilaţia suprafeţei vibrante este

$$w(t) = -\beta \sin \omega t.$$

Notând $v_i = v(t_i)$, $\phi_i = \omega t_i$, $I_i = 2\omega v_i/g$, $\gamma = 2\beta(1+\alpha)\omega/g$ dinamică este descrisă de

$$\begin{cases} \phi_{i+1} & = \phi_i + I_i \\ I_{i+1} & = -\gamma \sin(\phi_i + I_i) + \alpha I_i \end{cases}.$$

Se verifică usor că funcţia ce descrie sistemul dinamic

$$f\begin{pmatrix} \phi \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi + I \\ -\gamma \sin(\phi + I) + \alpha I \end{pmatrix}$$

este homeomorfism deci generează un flux. Punctele staţionare sunt $\phi = n\pi$, $I = 0$.

Observaţia 1.2.1. Se poate arăta că sistemul prezentat mai sus posedă o mulţime compactă invariantă pe care dinamica este de tip aplicaţie potcoavă ("Smale horseshoe", v. [**10**]). Această dinamică este o variantă geometrică a unui shift Bernoulli. De altfel are loc următorul rezultat:

Teorema 1.2.1. *(Smale-Birkhoff, v.[**10**], p.252) Fie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfism astfel încât $\mathbf{x}$ este un punct fix hiperbolic pentru care există $\mathbf{y} \in W^s(\mathbf{x}) \cap W^u(\mathbf{x})$, punct de intersecţie transversal, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Atunci $\mathbf{f}$ posedă o mulţime invariantă hiperbolică pe care o iteraţie a lui $\mathbf{f}$ este topologic echivalentă cu un shift Bernoulli.*

Observaţia 1.2.2. Vom demonstra o variantă a acestei teoreme în cazul sistemelor dinamice cu timp continuu, în capitolul 7.

Ecuaţii diferenţiale şi sisteme dinamice.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o funcţie local lipschitziană. Să considerăm sistemul diferenţial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

şi să notăm cu $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ soluţia ce verifică $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Atunci pe Ω se defineşte un sistem dinamic prin

$$\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}(t, 0, \mathbf{y}).$$

Proprietatea semigrupală rezultă din unicitatea soluţiei problemei Cauchy iar continuitatea din proprietatea de continuitate a soluţiei problemei Cauchy în raport cu datele iniţiale (v. [**5**], [**18**])

Trebuiesc făcute câteva observaţii. În primul rând se poate întâmpla ca soluţia problemei Cauchy $\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{y})$ să nu fie definită global ci numai pe un interval maximal $I_{\mathbf{y}} = (T_-, T_+)$ cu $T_+ \neq \infty$ sau $T_- \neq -\infty$. în această situaţie nu putem vorbi de un sistem dinamic în sensul strict al definiţiei date. Avem două posibilităţi de a trata această situaţie. Prima ar fi o uşoară modificare a definiţiei unui sistem dinamic în următorul sens: presupunem că pentru orice $\mathbf{x} \in X$ se dă un interval deschis $I_{\mathbf{x}} = (T_-(\mathbf{x}), T_+(\mathbf{x})) \subset \mathbf{R}$, $0 \in I_{\mathbf{x}}$ astfel încât, dacă $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$, atunci $\limsup T_-(\mathbf{x}_n) \leq T_-(\mathbf{x})$ şi $\liminf T_+(\mathbf{x}_n) \geq T_+(\mathbf{x})$. Un sistem dinamic se defineşte printr-o aplicaţie continuă $\Phi : D \subset X \times T \to X$ unde $D = \{(\mathbf{x}, t), t \in I_{\mathbf{x}}\}$ cu proprietăţile:

(1) $\Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$
(2) Dacă $t \in I_{\mathbf{x}}$ şi $s \in I_{\Phi(\mathbf{x},t)}$ atunci $t + s \in I_{\mathbf{x}}$ şi are loc proprietatea semigrupală $\Phi(\Phi(\mathbf{x}, t), s) = \Phi(\mathbf{x}, t + s)$.

Un astfel de sistem dinamic se mai numeşte *flux local*.

Al doilea mod de a trata situaţia în care sistemul diferenţial nu are soluţii globale este să considerăm un sistem dinamic topologic echivalent cu acesta (v. capitolul 5). Să presupunem că $\Omega = \mathbb{R}^n$ şi să considerăm sistemul diferenţial

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 + |\mathbf{f}(\mathbf{x})|} \quad .$$

Traiectoriile acestui sistem coincid cu traiectoriile primului sistem şi soluţiile sunt definite global pentru că membrul drept al ecuaţiei este mărginit. Această operaţie de trecere la noul sistem dinamic corespunde la o schimbare a parametrizării traiectoriilor. A considera noul sistem dinamic este avantajos numai dacă se studiază proprietăţi ale sistemului dinamic ce nu depind de parametrizare.

Condiţia impusă lui $\mathbf{f}$ de a fi local lipschitziană asigură unicitatea soluţiei problemei Cauchy. Se pot considera, desigur, şi alte condiţii care să asigure cel puţin unicitatea la dreapta, cum ar fi de exemplu condiţia de disipativitate:

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 0.$$

În cazul în care $\mathbf{f}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe o varietate diferenţiabilă compactă M, soluţia problemei Cauchy este definită global şi avem un sistem dinamic pe această varietate (v. Anexa C.)

Dacă considerăm sisteme diferenţiale neautonome

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

$\mathbf{f} : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, introducând ca necunoscută suplimentară pe t şi ecuaţia $\dfrac{dt}{dt} = 1$, obţinem un sistem dinamic pe $\mathbb{R} \times \Omega$. Dacă în plus $\mathbf{f}$ este periodică în t, să zicem de perioadă 2π, atunci obţinem un sistem dinamic pe $S^1 \times \Omega$.

Un sistem diferenţial neautonom defineşte un *sistem dinamic (flux) neautonom* pe Ω şi anume o funcţie continuă $\Phi : \Omega \times T \times T \to \mathbb{R}^n$, $\Phi_{t,s}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}, t, s) := \mathbf{x}(t, s, \mathbf{y})$ care are proprietăţile

(1) $\Phi_{t,t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
(2) $\Phi_{t,r} \circ \Phi_{r,s} = \Phi_{t,s}$ (proprietatea semigrupală).

Exemplul 1.2.3. *Ecuaţii Liénard*

Aceste ecuaţii modeleaza fenomene fizice oscilatorii în care energia este disipată la amplitudini mari şi generată la amplitudini mici. Ecuaţiile Liénard sunt de forma

$$x'' + f(x)x' + g(x) = p(t). \tag{1}$$

Ipotezele asupra funcţiilor ce intervin în ecuaţie sunt:

- f funcţie pară, $f(0) < 0$,
- $F(x) := \int_0^x f(t)dt \to \infty$ pentru $x \to \infty$, $F(x)$ are un singur zero pe $(0, \infty)$ $F(a) = 0$, F monotonă pe (a, ∞),
- $xg(x) > 0$ pentru $x \neq 0$.

Acestă ecuaţie este echivalentă cu următorul sistem de ordinul întâi:

$$\begin{cases} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) + p(t) \end{cases} \tag{2}$$

Aceste ecuaţii, în ipotezele de mai sus posedă în general cicluri limită. Un caz particular este *ecuaţia van der Pol*:

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = p(t) \quad . \tag{3}$$

Exemplul 1.2.4. *Ecuaţia lui Duffing*

Considerăm ecuaţia

$$x'' + \delta x' + x^3 - x = \gamma \cos \omega t \quad . \tag{4}$$

Aceasta modelează de exemlu vibraţia unei tije într-un câmp neuniform produs de doi magneţi (v. [**10**], p.82). Aceasta se tansformă în mod uzual într-un sistem:

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= -\delta y - x^3 + x + \gamma \cos \omega t \end{cases} \quad . \tag{5}$$

Pentru acest sistem, vom arăta în capitolul 7 existenţa unei dinamici haotice. Observăm că ecuaţia lui Duffing este o ecuaţie de tip Liénard, însă ipotezele asupra lui f, g nu mai sunt satisfăcute.

Exemplul 1.2.5. *Sistemul lui Lorenz* Sistemul este următorul

$$\begin{cases} x' &= \sigma(y - x) \\ y' &= \rho x - y - xz \\ z' &= -\beta z + xy \end{cases}$$

unde $\sigma, \rho, \beta > 0$. Acest sistem reprezintă de fapt o trunchiere a unui sistem Boussinesq ce apare în meteorologie şi care modelează curgerea unui fluid în prezenţa unei surse de căldură. Acesta este unul din primele sisteme diferenţiale în care a fost pusă în evidenţă apariţia haosului, în sensul existenţei unui atractor global cu structură neregulată (v. [**10**], [**15**]).

1.3. Exerciţii şi probleme

1.1. Fie $X = [0,1]$ şi $f : X \to X$, $f(x) = 2x(\mathrm{mod}\,1)$. Să se arate că pentru sistemul dinamic discret definit de f pe X există orbite periodice de orice perioadă şi orbite dense în X.

1.2. Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită şi $f : X \to X$ o funcţie continuă şi surjectivă cu proprietatea că pentru orice $D \subset X$, $\mu(f(D)) = \mu(D)$. Să se arate că pentru orice $x \in X$ şi orice vecinătate U a sa există $y \in U$ şi $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $f^n(y) \in U$. (Teorema de recurenţă a lui Poincaré).

1.3. Fie $\theta \in \mathbb{R}$, $f : S^1 \to S^1$, $f(\varphi) = \varphi + \theta \,\mathrm{mod}\, 2\pi$. Să se arate că există orbite periodice ale sistemului dinamic discret determinat de f dacă şi numai dacă $\theta/2\pi \in \mathbf{Q}$. Dacă $\theta/2\pi \notin \mathbf{Q}$ atunci orice orbită este densă în S^1.

1.4. Fie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă cu propietatea că

$$(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y}), \mathbf{x} - \mathbf{y}) \leq 0$$

(proprietatea de disipativitate). Să se arate că problema Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

are soluţie unică la dreapta, globală, deci defineşte un semiflux. Să se demonstreze că dacă mulţimea punctelor staţionare $F = \{\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ este nevidă, atunci pentru orice $\mathbf{x}$, $\omega(\mathbf{x})$ este nevidă, compactă şi pentru orice $\mathbf{z} \in F$ există $r > 0$ astfel încât $\omega(\mathbf{x}) \subset \partial B_r(\mathbf{z})$.

1.5. Să se rezolve sistemele următoare şi să se determine varietăţile stabilă şi instabilă ale punctului staţionar $\mathbf{0}$.

$$(1)\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = y + x^2 \end{cases};$$

$$(2)\ \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y + x^2 \\ z' = z + y^2 \end{cases}.$$

1.6. Să se integreze ecuaţia lui Duffing

$$x'' - x + x^3 = 0$$

şi să se indice punctele staţionare, orbitele periodice precum şi orbitele homoclinice.

Pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = xy \\ y' = 1 - y^2 \end{cases}$$

să se determine punctele staţionare şi orbitele heteroclinice.

1.7. Pentru sistemul lui Lorenz prezentat în exemplul 1.2.5 să se arate că, dacă $\rho > 1$, există două puncte staţionare pentru sistem, iar originea posedă o varietate instabilă $1-$dimensională. Dacă $\rho \in (0,1)$ să se arate, folosind metoda funcţiei Liapunov, că originea este global asimptotic stabilă.

CAPITOLUL 2

Sisteme liniare

Pentru început studiem în acest capitol sistemele liniare cu coeficienţi periodici (teoria lui Floquet), definim multiplicatorii caracteristici şi exponenţii caracteristici pentru aceste sisteme. Caracterizarea stabilităţii sistemelor liniare anticipează noţiunile de dihotomie ordinară şi exponenţială. Exemple de sisteme ce prezintă astfel de dihotomii sunt sistemele liniare cu matrice constantă hiperbolică sau cu matrice periodică cu exponenţi caracteristici care nu sunt pur imaginari. Sunt prezentate proprietăţile de bază ale dihotomiilor, cum ar fi robusteţea (invarianţa la mici perturbaţii în anumite clase de funcţii), existenţa soluţiilor mărginite pentru sistemele neomogene şi pentru sistemele neliniare sau existenţa orbitelor umbră pentru pseudoorbite. Rezultatele privind stabilitatea sistemelor liniare vor fi folosite în capitolul următor la studiul stabilităţii condiţionale şi al stabilităţii orbitale, iar rezultatele asupra dihotomiilor vor fi utile §7.2 pentru a arăta existenţa unei dinamici haotice în sistemele diferenţiale ce posedă orbite homoclinice transversale.

2.1. Sisteme liniare cu coeficienţi periodici

Considerăm sistemul liniar omogen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{6}$$

unde $\mathbf{A}(t)$ este o funcţie periodică de perioadă T cu valori în $M_{n\times n}(\mathbf{R})$. Are loc următoarea teoremă de caracterizare a matricilor fundamentale pentru aceste tipuri de sisteme liniare:

Teorema 2.1.1. *Fie $\mathbf{X}(t)$ o matrice fundamentală pentru (6). Există atunci $\mathbf{P}(t) \in M_{n\times n}$, periodică de perioadă T, şi $R \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$ astfel încât*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}(t)e^{tR}.$$

Demonstraţie Se observă că $\mathbf{X}(t+T)$ este matrice fundamentală pentru acelaşi sistem, întrucât coeficienţii sistemului sunt T-periodici. Rezultă că există o matrice nesingulară C astfel încât $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\cdot C$. Putem scrie $C = e^{TR}$ unde $R \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Fie $\mathbf{P}(t) = \mathbf{X}(t)e^{-tR}$. Se verifică printr-un calcul imediat că $\mathbf{P}$ este periodică de perioadă T. ∎

Observaţia 2.1.1. Fie două matrici fundamentale scrise în această formă, legate prin relaţia

$$\mathbf{P}_1(t)e^{tR_1} = \mathbf{P}_2(t)e^{tR_2}D$$

unde D este o matrice nesingulară. Rezultă de aici, trecând t în $t+T$ că

$$e^{TR_1} = D^{-1}e^{TR_2}D$$

deci valorile proprii ale lui e^{TR} sunt bine determinate, nedepinzând de matricea fundamentală aleasă. Acestea se numesc *multiplicatori caracteristici.* Valorile proprii ale lui R, care sunt unic determinate modulo $2k\pi i$, se numesc *exponenţi caracteristici.*

Observaţia 2.1.2. Există soluţii periodice de perioadă T pentru (6) dacă şi numai dacă sistemul are un multiplicator caracteristic egal cu 1. Sistemul are o soluţie periodică de perioadă nT dacă şi numai dacă are un multiplicator caracteristic care este rădăcină de ordinul n a unităţii. Unui astfel de multiplicator caracteristic îi corespunde un exponent caracteristic de forma $\frac{2k\pi i}{n}$.

Observaţia 2.1.3. Există o matrice fundamentală $\mathbf{X}(t)$ astfel încât dacă $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)C$ atunci C să fie în formă canonică Jordan reală. Într-adevăr, fie $\mathbf{Y}(t)$ o matrice fundamentală, $\mathbf{Y}(t+T) = \mathbf{Y}(t)C_1$. Fie $C = S^{-1}C_1S$ forma Jordan reală a matricii C_1. Atunci $\mathbf{X}(t) = \mathbf{Y}(t)S$ este matricea fundamentală căutată.

Observaţia 2.1.4. Dacă $\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}(t)e^{tR}$, făcând schimbarea liniară de necunoscută cu matrice periodică $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{y}(t)$, şi ţinând seama că $\mathbf{X}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)$, ecuaţia în $\mathbf{y}$ este $\mathbf{y}'(t) = R\mathbf{y}(t)$ adică un sistem liniar cu coeficienţi constanţi.

2.2. Stabilitatea Liapunov a sistemelor liniare

Pentru definiţia stabilităţii în sens Liapunov precum şi a câtorva proprietăţi de bază a se poate consulta [**5**] sau [**18**] (v. şi anexa B). Aşa cum se ştie, stabilitatea Liapunov în cazul sistemelor liniare este o caracteristică a sistemului şi nu a unei soluţii particulare (v. [**5**]) şi este echivalentă cu stabilitatea soluţiei banale a sistemului liniar omogen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{7}$$

cu $t \in J = [0, \infty)$. Fie $\mathbf{X}(t)$ o matrice fundamentală a sistemului. Următorul rezultat dă o caracterizare a diferitelor tipuri de stabilitate:

Propoziţia 2.2.1. *1. Sistemul liniar este stabil dacă şi numai dacă există o constantă $K > 0$ astfel încât $\| \mathbf{X}(t) \| \leq K$, $t \geq 0$*

2. Sistemul liniar este asimptotic stabil dacă şi numai dacă $\| \mathbf{X}(t) \| \to 0$ pentru $t \to \infty$.

3. Sistemul liniar este uniform stabil dacă şi numai dacă există o constantă $K > 0$ astfel încât $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq K$ pentru $0 \leq s \leq t$.

4. Sistemul liniar este uniform asimptotic stabil dacă şi numai dacă există constantele $K, \alpha > 0$ astfel încât $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ pentru $0 \leq s \leq t$.

Demonstraţie Pentru primele două afirmaţii se poate consulta [**5**] sau [**18**]. În ce priveşte stabilitatea uniformă, afirmaţia rezultă direct din definiţie.

Studiem stabilitatea asimptotică uniformă şi demonstrăm punctul *4*. Presupunem că sistemul (7) este uniform asimptotic stabil. Ţinând seama de definiţie, aceasta are loc dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $T(\varepsilon) > 0$ astfel încât $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq \varepsilon$ pentru $t \geq s + T(\varepsilon)$. Stabilitatea uniformă ne asigură existenţa unei constante pozitive K astfel încât pentru $0 \leq s \leq t$, $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq K$. Fie $\varepsilon = e^{-1}$ şi $T = T(e^{-1})$. Rezultă, scriind $\mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_1)\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}^{-1}(t_2)...\mathbf{X}(t_n)\mathbf{X}^{-1}(s)$ cu $t \geq t_1 > ... > t_n = s$, $t_i - t_{i+1} = T$, $n = [\frac{t-s}{T}]$, că

$$\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq Ke^{-[\frac{t-s}{T}]} \leq Ke^{-\alpha(t-s)},$$

unde $\alpha = \dfrac{1}{T}$. Reciproca rezultă imediat. ∎

Următoarea propoziţie ne arată că stabilitatea uniformă şi stabilitatea asimptotică uniformă se păstrează la perturbaţii mici ale matricii sistemului, în sensuri precizate după caz. Este vorba deci de un rezultat de robusteţe.

Propoziţia 2.2.2. *Fie sistemul*

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t))\mathbf{y} \tag{8}$$

Fie $\mathbf{Y}(t)$ *o matrice fundamentală a acesui sistem.*

Dacă $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq K$ *pentru* $s, t \in J$, $s \leq t$ *şi* $\int_J \| \mathbf{B}(t) \| \, dt = \delta < \infty$ *atunci* $\| \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(s) \| \leq Ke^{\delta K}$.

Dacă $\| \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s) \| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}$ *pentru* $s, t \in J$, $s \leq t$ *şi* $\| \mathbf{B}(t) \| \leq \delta < \infty$, $t \in J$ *atunci* $\| \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(s) \| \leq Ke^{-\beta(t-s)}$ *cu* $\beta = \alpha - \delta K$.

Demonstraţie Fie $\mathbf{y}(t)$ o soluţie oarecare a ecuaţiei (8). Formula variaţiei constantelor ne dă

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{y}(s) + \int_s^t \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(u)\mathbf{B}(u)\mathbf{y}(u)du.$$

Deci, pentru $s \leq t$ obţinem:

$$|\mathbf{y}(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{y}(s)| + \int_s^t Ke^{-\alpha(t-s)} \| \mathbf{B}(u) \| \, |\mathbf{y}(u)|du,$$

unde $\alpha = 0$ în cazul stabilităţii uniforme. Notăm $w(t) = e^{\alpha t}|y(t)|$ şi obţinem

$$w(t) \leq Kw(s) + \int_s^t K \| \mathbf{B}(u) \| \, w(u)du$$

de unde, folosind inegalitatea lui Gronwall, deducem:

$$w(t) \leq Kw(s)e^{K\int_s^t \|\mathbf{B}(u)\|du},$$

deci

$$|y(t)| \leq K|y(s)|e^{-\alpha(t-s)}e^{K\int_s^t \|\mathbf{B}(u)\|du}.$$

Întrucât $\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t)\mathbf{Y}^{-1}(s)\xi$ cu ξ un vector constant, obţinem concluzia în fiecare din cele două situaţii menţionate. ■

2.3. Dihotomii ordinare şi dihotomii exponenţiale

Să considerăm pentru început sistemul liniar cu coeficienţi constanţi

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{9}$$

unde $\mathbf{A}$ este o matrice ce nu are valori proprii cu parte reală 0. Atunci

$$\mathbb{R}^n = W_s \oplus W_u,$$

unde W_s, W_u sunt subspaţii liniare invariante ale lui $\mathbf{A}$, corespunzătoare valorilor proprii cu parte reală negativă, respectiv pozitivă. W_s se numeşte *subspaţiul stabil*, iar W_u se numeşte *subspaţiul instabil*, . Denumirile sunt motivate de faptul că dacă $\mathbf{x}_0 \in W_s$ (respectiv $\mathbf{x}_0 \in W_u$), atunci soluţia sistemului liniar

$$\Phi_t(\mathbf{x}_0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \to 0,$$

pentru $t \to \infty$ (respectiv $t \to -\infty$).

Fie $\mathbf{Q}$ proiecţia pe W_s corespunzătoare acestei descompuneri: $\ker \mathbf{Q} = W_u$, $\operatorname{Im} \mathbf{Q} = W_s$. Fie $K := \| \mathbf{Q} \| = \sup_{|\mathbf{x}|=1} |\mathbf{Q}\mathbf{x}|$. Atunci

$$\begin{aligned} &\| \Phi_t \circ \mathbf{Q} \| \leq K' e^{-\alpha t}, \qquad t \geq 0 \\ &\| \Phi_t \circ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \| \leq K' e^{\alpha t}, \quad t \leq 0, \end{aligned} \tag{10}$$

unde $0 < \alpha < \min |\operatorname{Re}(\lambda_k)|$, $K' > 1 + K$.

În continuare considerăm un sistem liniar cu coeficienţi periodici. Deducem inegalităţi similare cu (10) în cazul hiperbolic. Mai precis, să considerăm sistemul liniar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \tag{11}$$

unde $\mathbf{A}(\mathbf{t})$ este $T-$periodică şi toţi multiplicatorii caracteristici au modulul diferit de 1. Fie $\mathbf{X}(t)$ o matrice fundamentală care admite reprezentarea $\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}(t)e^{tR}$ cu $\mathbf{P}$ matrice $T-$periodică. *Aplicaţia perioadă* definită prin

$$\mathbf{f}_{T,s}(x) = \mathbf{X}(T+s)\mathbf{X}^{-1}(s)x$$

este un operator liniar, iar valorile proprii ale lui $\mathbf{f}_T := \mathbf{f}_{T,0}$ sunt exact multiplicatorii caracteristici ai sistemului liniar.

Fie W_s, W_u subspaţiile invariante ale lui f_T corespunzătoare valorilor proprii de modul < 1 respectiv > 1 şi fie $\mathbf{Q}$ proiectorul corespunzător pe W_s. Notăm cu

$$W_s(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)W_s,\ W_u(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)W_u.$$

Are loc $\mathbb{R}^n = W_s(t) \oplus W_u(t)$ şi proiectorul corespunzător pe $W_s(t)$ este

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(0)\mathbf{Q}\mathbf{X}(0)\mathbf{X}^{-1}(t).$$

Acesta verifică:

$$\Phi_{t,s} \circ \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}(t) \circ \Phi_{t,s}.$$

Fie $K = \parallel \mathbf{Q} \parallel$, $K_1 = \max_{t\in[0,T]} \parallel \mathbf{X}(t)\mathbf{X}(0)^{-1} \parallel$, $K_2 = \max_{t\in[0,T]} \parallel \mathbf{X}(0)\mathbf{X}(t)^{-1} \parallel$. Fie $0 < \lambda < 1$, $|\lambda| > |\lambda_i|$ dacă $|\lambda_i| < 1$ şi $|\lambda^{-1}| < |\lambda_i|$ dacă $|\lambda_i| > 1$. Rezultă că există o constantă $K' \geq 1 + K$ suficient de mare astfel încât au loc inegalităţile:

$$\begin{array}{ll} \parallel \mathbf{f}_T^m \circ \mathbf{Q} \parallel \leq K'\lambda^m & m \geq 0 \\ \parallel \mathbf{f}_T^m \circ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}) \parallel \leq K'\lambda^{-m} & m \leq 0. \end{array}$$

Aşadar, există o constantă $K'' > 1 + K'K_1K_2$ astfel încât pentru $m \geq 0$ are loc:

$$\begin{array}{ll} \parallel \mathbf{f}_{T,s}^m \circ \mathbf{Q}(s) \parallel \leq K''\lambda^m & m \geq 0 \\ \parallel \mathbf{f}_{T,s}^m \circ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(s)) \parallel \leq K''\lambda^{-m} & m \leq 0. \end{array} \tag{12}$$

Fie acum t, s oarecare. Există m, n întregi astfel încât $t - mT = t' \in [0,T]$, $s - nT = s' \in [0,T]$ şi, ţinând seama că $\Phi_{t+T,s+T} = \Phi_{t,s}$, obţinem că:

$$\Phi_{t,s}(\mathbf{Q}(s)x) = \Phi_{t-nT,s'}(\mathbf{Q}(s')x) =$$

$$= \mathbf{f}_{T,t'}^{m-n}(\Phi_{t',s'}(\mathbf{Q}(s')x)) = \mathbf{f}_{T,t'}^{m-n} \circ \mathbf{Q}(t')\Phi_{t',s'}(x).$$

Folosind (12) obţinem, cu o constantă $\widetilde{K} > 0$ suficient de mare,

$$\begin{array}{ll} \parallel \Phi_{t,s} \circ \mathbf{Q}(s) \parallel \leq \widetilde{K}\lambda^{t-s} = \widetilde{K}e^{(t-s)\log\lambda}, & t \geq s \\ \parallel \Phi_{t,s} \circ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(s)) \parallel \leq \widetilde{K}\lambda^{s-t} = \widetilde{K}e^{(s-t)\log\lambda}, & t \leq s. \end{array}$$

Consideraţiile de mai sus motivează următoarea definiţie:

Definiţia 2.3.1. Să considerăm acum sistemul (11) cu coeficienţi continui pe un interval $J = (a,b) \subset \mathbb{R}$. Vom spune că acesta admite *dihotomie exponenţială* pe intervalul (a,b) dacă, pentru $\mathbf{X}(t)$ matrice fundamentală, există o proiecţie $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q}$ şi constantele $K, \alpha > 0$ astfel încât:

$$\begin{array}{ll} \parallel \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(s) \parallel \leq Ke^{-\alpha(t-s)} & \text{pentru } t \geq s, \\ \parallel \mathbf{X}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s) \parallel \leq Ke^{-\alpha(s-t)} & \text{pentru } s \geq t. \end{array} \tag{13}$$

Se spune că sistemul posedă *dihotomie ordinară* dacă inegalităţile de mai sus sunt satisfăcute pentru $\alpha = 0$.

Observaţia 2.3.1. Notăm

$$\mathbf{Q}(t) := \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(t)$$

şi existenţa unei dihotomii exponenţiale este echivalentă cu existenţa unei proiecţii $\mathbf{Q}(t)$ ce satisface

$$\parallel \Phi_{t,s} \circ \mathbf{Q}(s) \parallel \leq \widetilde{K}e^{-\alpha(t-s)} \quad , \quad t \geq s$$

$$\parallel \Phi_{t,s} \circ (\mathbf{I} - \mathbf{Q}(s)) \parallel \leq \widetilde{K}e^{-\alpha(s-t)} \quad , \quad t \leq s$$

împreună cu condiţia de compatibilitate

$$\Phi_{t,s} \circ \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}(t) \circ \Phi_{t,s}.$$

Am vazut deci, în exemplele de mai sus, două situaţii în care sistemele liniare admit dihotomii exponenţiale.

Cazurile interesante sunt $J = \mathbb{R}_+$ şi $J = \mathbf{R}$. Pentru moment să considerăm $J = \mathbb{R}_+$. În cele ce urmează vom prezenta câteva proprietăţi importante ale dihotomiilor. Pentru o expunere pe larg asupra subiectului recomandăm [**7**].

Existenţa dihotomiilor, ordinare sau exponenţiale, sunt strâns legate de existenţa soluţiilor mărginite pentru sistemul neautonom, în anumite ipoteze asupra termenului liber. Fie ecuaţia liniară neomogenă

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t). \tag{14}$$

Să considerăm următoarele spaţii de funcţii care sunt spaţii Banach cu normele precizate:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{f} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{B}} := \sup_{t\geq 0} \int_t^{t+1} |\mathbf{f}(s)|ds < \infty\},$$

$$\mathcal{L} = L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n), \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{L}} = \int_0^{\infty} |\mathbf{f}(s)|ds.$$

Are loc următorul rezultat:

TEOREMA 2.3.1. *Ecuaţia neomogenă (14) are cel puţin o soluţie mărginită pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{L}$ dacă şi numai dacă ecuaţia omogenă (11) admite dihotomie ordinară.*

Ecuaţia neomogenă (14) are cel puţin o soluţie mărginită pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{B}$ dacă şi numai dacă ecuaţia omogenă (11) admite dihotomie exponenţială.

Demonstraţie În cazul în care ecuaţia omogenă admite o dihotomie ordinară (respectiv exponenţială) atunci arătăm că o soluţie mărginită pentru ecuaţia neautonomă cu $\mathbf{f} \in \mathcal{L}$ (respectiv $\mathbf{f} \in \mathcal{B}$) este dată de formula

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds - \int_t^{\infty} \mathbf{X}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds$$

Faptul că această formulă, analogă formulei variaţiei constantelor, ne dă o soluţie a sistemului neautonom rezultă printr-un calcul elementar. Dacă $\mathbf{f} \in \mathcal{L}$ şi sistemul autonom admite o dihotomie ordinară rezultă imediat că $\sup |\mathbf{y}(t)| \leq C \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{L}} < \infty$.

Să presupunem acum că $\mathbf{f} \in \mathcal{B}$ şi sistemul omogen admite dihotomie exponenţială. Atunci

$$\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{f}(s)|ds \leq \sum_{k=0}^{[t]} \int_k^{k+1} e^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{f}(s)|ds \leq$$

$$\leq (1 + \sum_{k=0}^{[t]} e^{-\alpha(t-k)}) \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{B}} = \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{B}} (1 + e^{-\alpha t}\frac{e^{\alpha([t]+1)} - 1}{e^{\alpha} - 1}) \leq C \| \mathbf{f} \|_{\mathcal{B}} .$$

La fel se arată că

$$\int_t^{\infty} e^{-\alpha(t-s)}|\mathbf{f}(s)|ds \leq C \parallel \mathbf{f} \parallel_{\mathcal{B}},$$

deci soluţia $\mathbf{y}(t)$ a sistemului neautonom este mărginită.

În ce priveşte demonstraţia reciprocei, aceasta se bazează pe teorema graficului închis şi o omitem (v.[**7**], p.23). ■

OBSERVAŢIA 2.3.2. Dacă sistemul (11) admite o dihotomie exponenţială pe $J = \mathbb{R}$ atunci sistemul (14) admite pentru orice $\mathbf{f} \in \mathcal{B}$ o unică soluţie mărginită. Aceasta este dată de formula

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds - \int_t^{\infty} \mathbf{X}(t)(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds.$$

Într-adevăr, se verifică uşor că aceasta este soluţie mărginită şi este unică deoarece sistemul liniar omogen are ca soluţie mărginită numai pe 0. Pentru a vedea acest lucru este suficient să observăm că proiecţia ce ne dă dihotomia exponenţială este unic. Pentru aceasta presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Atunci proiectorul $\mathbf{Q}$ are proprietatea că soluţiile lui (11) ce verifică $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \in \mathrm{Im}\ \mathbf{Q}$ sunt mărginite pe $[0, \infty)$. Dacă $\mathbf{x}_0 \in \mathrm{Ker}\ \mathbf{Q}$ atunci soluţia respectivă este mărginită pe $(-\infty, 0]$ şi în plus pentru $s \geq 0$

$$\|\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{X}(0)(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{X}(0)(\mathbf{I}-\mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s)\|\|\mathbf{X}(s)x_0\| \leq Ke^{-\alpha s}\|\mathbf{X}(s)\mathbf{x}_0\|,$$

de unde $\mathbf{X}(s)\mathbf{x}_0 \to +\infty$, exponenţial pentru $\mathbf{x}_0 \neq 0$. Aşadar, unica soluţie a sistemului omogen, mărginită pe $\mathbb{R}$, este 0.

OBSERVAŢIA 2.3.3. Se arată de asemenea (v. [**7**], p.67) că sistemul (11) admite o dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă admite dihotomii exponenţiale pe $(-\infty, 0]$ şi pe $[0, \infty)$ cu proiecţii $\mathbf{Q}_1$, respectiv $\mathbf{Q}_2$ iar $\mathbb{R}^n$ este sumă directă dintre subspaţiul stabil pe $[0, \infty)$ şi subspaţiul instabil pe $(-\infty, 0]$: $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}\ \mathbf{Q}_1 \oplus \mathrm{Im}\ \mathbf{Q}_2$.

În continuare prezentăm câteva proprietăţi fundmentale ale dihotomiilor ordinare şi exponenţiale. Pentru demonstraţii detaliate v. [**7**].

Proprietatea de robusteţe. Aceasta reprezintă o generalizare a propoziţiei 2.2.2. Considerăm sistemul liniar

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t))\mathbf{y} \tag{15}$$

TEOREMA 2.3.2. *Dacă sistemul liniar (11) admite dihotomie exponenţială pe* $\mathbb{R}_+$, *cu constantele* $K > 1, \alpha > 0$, *atunci sistemul liniar perturbat (15), cu*

$$\delta = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \parallel \mathbf{B}(t) \parallel < \alpha/4K^2,$$

admite dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}_+$ *cu constantele* $K' = 5K^2/2, \alpha' = \alpha - 2K\delta$.

TEOREMA 2.3.3. *Dacă sistemul liniar (11) admite dihotomie ordinară pe* $\mathbb{R}_+$, *atunci sistemul liniar perturbat (15) cu*

$$\int_0^\infty \| \mathbf{B}(t) \| \, dt < \infty$$

admite dihotomie ordinară pe $\mathbb{R}_+$.

Proprietatea de prelungire. Există dihotomie exponenţială pe orice interval (a', b'), $a' \leq a < b \leq b'$ cu $a' = -\infty$ numai dacă $a = -\infty$, $b' = \infty$ numai dacă $b = \infty$. Aceasta rezultă imediat din faptul că existenţa unei dihotomii exponenţiale pe interval compact este evidentă iar existenţa acesteia pe (a', b') rezultă prin eventuală modificare a constantelor ce intervin în inegalităţi.

Dacă $\| \mathbf{B}(t) - \mathbf{A}(t) \| \to 0$ pentru $t \to a$ şi $t \to b$ atunci sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{B}(t)\mathbf{x}$$

admite dihotomie exponenţială pe (a, b). Aceasta rezultă imediat din proprietăţile de robusteţe şi de prelungire.

Concatenarea. Fie $(t_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ un şir strict monoton, $t_k \to \pm\infty$ când $k \to \pm\infty$. Să presupunem că sistemul (11) admite dihotomie exponenţială pe toate intervalele $I_k = [t_{k-1}, t_k]$, cu constantele $K \geq 1, \alpha > 0$ şi proiecţiile $Q_k(t)$, astfel încât

$$\inf_k (t_k - t_{k-1}) \geq 2\alpha^{-1} \log K$$

şi

$$\mathbf{Q}_k(t_{k-1}) = \mathbf{Q}_{k-1}(t_{k-1}). \tag{16}$$

Atunci sistemul (11) admite dihotomie exponenţială pe $\mathbf{R}$. Proiecţia corespunzătoare este $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_k(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ iar constantele ce intervin sunt K^2 şi $\alpha/2$.

OBSERVAŢIA 2.3.4. Condiţia de compatibilitate nu este necesară. Se poate arăta (v.[**14**], Lemma 3.2) că dacă $A(t)$ este mărginită pe $\mathbf{R}$, $\| A(t) \| < C$ şi

$$\inf_k (t_k - t_{k-1}) \geq 2\alpha^{-1} \log 3K,$$

atunci există $\delta = \delta(K, C) > 0$ astfel încât, dacă

$$\| \mathbf{Q}_k(t_{k-1}) - \mathbf{Q}_{k-1}(t_{k-1}) \| \leq \delta,$$

atunci sistemul (11) admite dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}$ cu constante depinzând de K, α.

2.4. Dihotomii exponenţiale şi sisteme neliniare

Să considerăm sistemul neliniar :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{h}(t) \tag{17}$$

Teorema pe care o demonstrăm în continuare se referă la *existenţa soluţiilor mărginite pe* $\mathbb{R}$ ale acestui sistem:

TEOREMA 2.4.1. *Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(1) *Sistemul liniar*
$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$$
admite dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}$ *cu proiecţie* $\mathbf{Q}$ *şi constante* $K, \alpha > 0$.

(2) $\mathbf{f}(t, 0) = 0$.

(3) *Pentru* $|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}| \leq \rho$ *este verificată condiţia Lipschitz*
$$|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq \gamma|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$
cu $2K\gamma/\alpha < 1$.

(4) $|\mathbf{h}(t)| \leq \rho(\alpha - 2K\gamma)/2K$, $t \in \mathbf{R}$.

Atunci există o unică soluţie $\mathbf{x}(t)$ *a sistemului (17) ce verifică* $|\mathbf{x}(t)| \leq \rho$, $t \in \mathbf{R}$.

Demonstraţie Se observă că $\mathbf{x}(t)$ este soluţie mărginită a sistemului (17) dacă şi numai dacă este soluţie a ecuaţiei integrale

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(s)[\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) + \mathbf{h}(s)]ds -$$
$$- \int_{t}^{\infty} \mathbf{X}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s)[\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) + \mathbf{h}(s)]ds.$$

Existenţa rezultă imediat folosind teorema de punct fix a lui Banach aplicată operatorului

$$(\mathcal{T}\mathbf{x})(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{X}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}^{-1}(s)[\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s) + \mathbf{h}(s)]ds -$$
$$- \int_{t}^{\infty} \mathbf{X}(t)(\mathbf{I} - \mathbf{Q})\mathbf{X}^{-1}(s)[\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s) + \mathbf{h}(s)]ds,$$

definit pe spaţiul $M = \{\mathbf{x} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, continuă, $|\mathbf{x}(t)| \leq \rho\}$. Se arată uşor, folosind ipotezele, că $\mathcal{T}(M) \subset M$ şi că $\mathcal{T}$ este contracţie şi, deci, are un unic punct fix. ■

Ca o primă aplicaţie să considerăm o soluţie $\mathbf{z}(t)$ a sistemului neliniar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{18}$$

astfel încât sistemul în variaţie

$$\mathbf{x}' = f_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x}$$

să admită dihotomie exponenţială pe $\mathbf{R}$. Presupunem de asemenea că $\mathbf{f_x}$ este uniform continuă în raport cu $(t, \mathbf{x})$ şi arătăm că într-o vecinătate suficient de mică a lui $\mathbf{z}(t)$ nu există alta soluţie $\mathbf{y}(t)$. Fie $\mathbf{x}(t) := \mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)$. Acesta verifică ecuaţia

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f_x}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \tag{19}$$

unde

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)) - \mathbf{f_x}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x}.$$

Se observă că $\mathbf{g}(t, 0) = 0$ şi

$$\mathbf{g_x}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f_x}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}) - \mathbf{f_x}(t, \mathbf{z}(t)) = o(1) \quad , \quad \mathbf{x} \to 0.$$

Rezultă deci că într-o vecinătate suficient de mică a lui $\mathbf{0}$ există o unică soluţie mărginită pe $\mathbb{R}$ a sistemului (19). Dar $\mathbf{0}$ este soluţie deci $\mathbf{x}(t) = 0$ şi $\mathbf{y}(t) = \mathbf{z}(t)$. ∎

Următoarea aplicaţie se referă la *existenţa orbitelor umbră*. Să considerăm din nou sistemul neliniar (18). Fie de asemenea o partiţie a lui $\mathbb{R}$ în intervale $\mathcal{I}_k = [t_{k-1}, t_k]$ şi fie $\mathbf{y}_k$ un şir de soluţii ale sistemului neliniar pe aceste intervale astfel încât

$$|\mathbf{y}_k(t_{k-1}) - \mathbf{y}_{k-1}(t_{k-1})| = |\mu_k| < \mu.$$

Vom numi acest şir de soluţii *μ-pseudoorbită*.

Orbita $\mathbf{y}(t)$ se numeşte *$\beta-$orbită umbră* a lui $\{\mathbf{y}_k(t)\}$ dacă

$$\sup_{t \in \mathcal{I}_k} |\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_k(t)| < \beta.$$

Are loc următoarea teoremă ([**14**]):

TEOREMA 2.4.2. *Fie $\{\mathbf{y}_k(t)\}$ o μ-pseudoorbită a sistemului (18) astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute*

1. $\mathbf{f_x}(t, \mathbf{x})$ *este mărginită* $|\mathbf{f_x}(t, \mathbf{x})| < C$*, continuă în* t *şi uniform continuă în* $\mathbf{x}$ *uniform în raport cu* t.
2. *Sistemul în variaţie*

   $$\mathbf{x}' = \mathbf{f_x}(t, \mathbf{y}_k(t))\mathbf{x}$$

   admite dihotomie exponenţială pe $[t_{k-1}, t_k]$ *cu constante* K, α *şi proiecţie* $\mathbf{Q}_k(t)$.
3. $\| \mathbf{Q}_{k-1}(t_{k-1}) - \mathbf{Q}_k(t_{k-1}) \| \leq \mu$.
4. $t_k - t_{k-1} \geq \tau$.

Atunci există $\beta_0, \tau_0 > 0$ *şi o funcţie* $\alpha_0(\beta)$ *astfel încât dacă* $\tau \geq \tau_0$, $0 < \beta \leq \beta_0$ *şi* $\mu \leq \mu_0(\beta)$ *atunci există o unică* $\beta-$*orbită umbră a pseudoorbitei*$\{\mathbf{y}_k(t)\}$.

Demonstraţie Pentru μ suficient de mic şi τ suficient de mare, din proprietatea de concatenare, rezultă că sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f_x}(t, \mathbf{y}(t))\mathbf{x}$$

admite dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}$ cu constante depinzând de K, α (am notat $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_k(t)$ pentru $t \in [t_{k-1}, t_k]$).

Fie acum

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_k(t) + \frac{\mu_k}{2} \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} + \frac{\mu_{k-1}}{2} \frac{t - t_k}{t_k - t_{k-1}} \quad , \quad t \in [t_{k-1}, t_k].$$

Se observă că avem estimările:

$$|\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \mu \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$
$$|\mathbf{z}'(t) - \mathbf{y}'(t)| \leq \mu \tau^{-1} \quad , \quad t \neq t_k.$$

Pe de altă parte

$$|\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t)) - \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{y}(t))| = o(1) \quad , \quad \mu \to 0$$

şi proprietatea de robusteţe implică faptul că sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x}$$

admite dihotomie exponenţială pe $\mathbf{R}$.

Fie acum $\mathbf{y}_1(t)$ o soluţie oarecare a sistemului (18) şi $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}_1(t) - \mathbf{z}(t)$. Atunci $\mathbf{x}(t)$ verifică

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \tag{20}$$

unde

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -\mathbf{z}'(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{x}.$$

Ţinând seamă că $|\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})| < C$ se observă că $\mathbf{g}$ verifică următoarele estimări

$$\mathbf{g}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t) + \mathbf{x}) - \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{z}(t)) = o(1) \quad , \quad \mathbf{x} \to 0$$
$$|\mathbf{g}(t, 0)| \leq |\mathbf{f}(t, \mathbf{z}(t)) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)| + |\mathbf{z}'(t) - \mathbf{y}'(t)| \leq C\mu \quad , \quad t \neq t_k.$$

Ipotezele teoremei 2.4.1 sunt satisfăcute cu $\rho = \beta/2$, $\beta < \beta_0$ (astfel încât $\gamma = \sup_{|x|<\beta} |g_x(t, x)| < \alpha/2K$), $\mu < \rho(\alpha - 2K\gamma)/(2KC)$. Rezultă existenţa unei unice soluţii mărginite de $\beta/2$ a sistemului (20). Are loc

$$|\mathbf{y}_1(t) - \mathbf{y}(t)| \leq |\mathbf{x}(t)| + |\mathbf{z}(t) - \mathbf{y}(t)| \leq \frac{\beta}{2} + \mu < \beta,$$

dacă în plus $\mu < \beta/2$, ceea ce spune că $\mathbf{y}_1$ este β-orbită umbră a μ pseudoorbitei $\mathbf{y} = \{\mathbf{y}_k\}$. ■

2.5. Exerciţii şi probleme

2.1. Să se rezolve următoarele ecuaţii liniare şi să se studieze existenţa dihotomiilor:

(1) $x'' - kx' = 0$;
(2) $x'' + 3x' + 2x = 0$;
(3) $x'' - 2x' + 10x = 0$.

2.2. Să se rezolve sistemele liniare, omogene, cu următoarele matrici, şi să se decidă dacă acestea admit dihotomii ordinare sau exponenţiale:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.3. Să se determine multiplicatorii şi exponenţii caracteristici ai sistemului liniar omogen cu matricea $A(t) = f(t)\tilde{A}$ cu f o funcţie continuă, T periodică şi $\tilde{A} \in M_n(R)$ o matrice constantă.

În ce condiţii asupra lui f sistemul liniar are soluţii periodice pentru orice matrice constantă $\tilde{A}$?

2.4. Sistemul

$$\begin{cases} x' = -(\sin 2t)x + (\cos 2t - 1)y \\ y' = (\cos 2t + 1)x + (\sin 2t)y \end{cases}$$

admite matricea fundamentală

$$\begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & e^{-t}(\cos t + \sin t) \\ e^t(\cos t + \sin t) & e^{-t}(-\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Să se determine multiplicatorii caracteristici. Pe ce intervale admite sistemul dihotomii ordinare sau exponenţiale?

2.5. Să se determine o matrice fundamentală a sistemului liniar cu matricea

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1 - \sin^2 t \\ 1 - \sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}$$

ştiind că acesta admite soluţia $\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$. Să se determine multiplicatorii şi exponenţii caracteristici. Studiaţi existenţa dihotomiilor.

2.6. Să se găsească o matrice fundamentală pentru sistemul liniar cu coeficienţi periodici

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = h(t)y \end{cases}$$

unde h este o funcţie periodică de perioadăT. Să se găsească multiplicatorii caracteristici în cazul particular $h(t) = (\sin t + \cos t)/(2 + \sin t - \cos t)$.

2.7. Considerăm sistemul liniar cu coeficienţi periodici de perioadă T

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Fie $\mu_1, ..., \mu_n$ multiplicatorii caracteristici. Să se arate că

$$\mu_1 \cdot ... \cdot \mu_n = \exp\left(\int_0^T Tr\{\mathbf{A}(s)\}ds\right).$$

2.8. Să se studieze stabilitatea sistemului liniar cu matricea

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} -1+3\cos^2 t & 1-\sin t\cos t \\ -1+\sin t\cos t & -1+3\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

2.9. Fie sistemul

$$\begin{cases} x' = 2x + y + x\cos t - y\sin t \\ y' = -x + 2y - x\cos t + y\sin t. \end{cases}$$

Să se arate că $(e^{2t} sint, e^{2t} cost)$ este soluţie şi să se determine o matrice fundamentală. Să se găsească multiplicatorii caracteristici.

Există soluţii care verifică $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = 0$? Dar soluţii periodice?

2.10. Fie sistemul liniar cu matricea $A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & -b(t) \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}$, unde a, b sunt funcţii T periodice. Să se determine multiplicatorii caracteristici.

CAPITOLUL 3

Studiul local al sistemelor dinamice

În acest capitol se face un studiu calitativ, în vecinătatea punctelor de echilibru sau a soluţiilor periodice, pentru sistemele dinamice ce provin din sisteme diferenţiale. În cazul sistemelor în dimensiune 2 caracterizăm punctele staţionare nedegenerate şi comportarea acestora la perturbări.

Se consideră apoi metoda primei aproximaţii şi se demonstrează, în cazul pubctelor staţionare nedegenerate hiperbolice, existenţa varietăţilor stabilă şi instabilă. Cazul soluţiilor periodice este de asemena considerat. Dacă sistemul este autonom, metoda primei aproximaţii nu furnizează nici o informaţie. De altfel, stabilitatea asimptotica nici nu poate avea loc. Se demonstrează în schimb că dacă numai un singur exponent caracteristic are partea reală 0, iar ceilalţi $n-1$ au partea reală negativă, atunci soluţia periodică este orbital asimptotic stabilă.

3.1. Sisteme în dimensiune 2

Coordonate polare.

Pentru studiul local al sistemelor în dimensiune 2 este utilă transformarea acestora din coordonate carteziene în coordonate polare în jurul punctelor de echilibru. Coordonatele polare se definesc astfel :

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases},$$

unde $(r,\theta) \in (0,\infty) \times [0,2\pi)$ (sau $(r,\theta) \in (0,\infty) \times S^1$). Sistemul liniar perturbat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

cu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, se scrie în coordonate polare astfel:

$$\begin{cases} r' = r[a\cos^2\theta + (b+c)\cos\theta\sin\theta + d\sin^2\theta] + F_1\cos\theta + F_2\sin\theta \\ \\ r\theta' = r[c\cos^2\theta + (d-a)\cos\theta\sin\theta - b\sin^2\theta] + F_2\cos\theta - F_1\sin\theta, \end{cases}$$

unde $F_i = F_i(r,\theta) = f_i(r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Studiul local al sistemelor liniare.

Considerăm sistemul liniar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{21}$$

unde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ este matrice nesingulară, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Facând o schimbare de necunoscută (dacă forma Jordan reală este $\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$, schimbarea este $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$), putem presupune că $\mathbf{A}$ este în forma canonică Jordan reală. Cazurile posibile sunt:

I. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. În acest caz sistemul se rezolvă imediat iar soluţia este

$$x_1 = x_1^0 e^{\lambda t},\ x_2 = x_2^0 e^{\mu t}.$$

a) $\lambda = \mu$. În acest caz curbele integrale au ecuaţia $x_1 = Cx_2$ sau $x_2 = Cx_1$ şi sunt semidrepte cu capătul în origine. $\mathbf{0}$ se numeste în acest caz *nod propriu*.
b) $\lambda \neq \mu$, $\lambda\mu > 0$. În acest caz curbele integrale au ecuaţia $x_1 = C|x_2|^{\frac{\lambda}{\mu}}$ sau $x_2 = C|x_1|^{\frac{\mu}{\lambda}}$. $\mathbf{0}$ se numeste *nod impropriu* pentru că toate traiectoriile, mai puţin două, au o unică direcţie limită în origine.
c)$\lambda\mu < 0$. Curbele integrale au ecuaţia $|x_1|^{\mu}|x_2|^{-\lambda} = C$ pentru $\lambda < 0 < \mu$. $\mathbf{0}$ se numeşte *punct şa*.

II. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Rezolvând sistemul se obţin soluţiile de forma $x_1 = (x_1^0 + x_2^0 t)e^{\lambda t}$, $x_2 = x_2^0 e^{\lambda t}$. Avem aşadar următoarea expresie pentru matricea fundamentală:

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Şi în acest caz $\mathbf{0}$ se numeşte *nod impropriu*: toate traiectoriile au aceeaşi direcţie limită în origine.

IV. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$. În acest caz

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}.$$

Sistemul se scrie în coordonate polare astfel:

$$\begin{cases} r' &= \alpha r \\ \theta' &= \beta \end{cases},$$

iar curbele integrale au, în coordonate polare, ecuaţia

$$\frac{\alpha}{\beta}\theta + \ln r = C. \tag{22}$$

a) Dacă $\alpha \neq 0$, (22) este ecuaţia unei spirale logaritmice şi în acest caz $\mathbf{0}$ se numeşte *punct spiral*.
b) Dacă $\alpha = 0$, (22) este ecuaţia unui cerc, traiectoriile sunt cercuri cu centrul în origine iar $\mathbf{0}$ se numeste *centru*.

Studiul local al sistemelor liniare perturbate.

Considerăm sistemul liniar perturbat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{23}$$

unde $\mathbf{A} \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ este nesingulară , $\mathbf{f}$ este o funcţie de clasă C^1 definită într-o vecinătate a originii şi

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = o(r)$$

pentru $r \to 0$. Ultima condiţie implică, în particular, că $\mathbf{0}$ este soluţie.

Ne interesează în ce măsură proprietăţile întâlnite în cazul liniar se păstreaza la mici perturbaţii.

$\mathbf{0}$ se numeşte *atractor* stabil (instabil) pentru sistemul neliniar dacă orice soluţie tinde la $\mathbf{0}$ pentru $t \to \infty$ (respectiv $t \to -\infty$).
O consecinţă imediată a teoremei Poincaré-Liapunov (v.[**5**],[**18**]) este:

PROPOZIŢIA 3.1.1. *Dacă* $\mathbf{0}$ *este atractor pentru sistemul liniar (21), atunci acesta este atractor şi pentru sistemul neliniar (23).*

Noduri proprii şi puncte spirale.

$\mathbf{0}$ se numeşte *nod* pentru sistemul (23) dacă pentru $t \to \infty$ (sau pentru $t \to -\infty$) orice soluţie tinde la $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ este atractor) într-o direcţie limită bine definită. Dacă în plus orice direcţie este o direcţie limită, atunci nodul se numeşte *nod propriu.*

$\mathbf{0}$ se numeşte *punct spiral* dacă este atractor şi orice soluţie, scrisă în coordonate polare, satisface $|\theta(t)| \to \infty$ când $r(t) \to 0$.

În ceea ce priveşte punctele spirale, acestea se conservă la mici perturbaţii şi în acest sens are loc următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 3.1.2. *Daca* $\mathbf{0}$ *este punct spiral pentru sistemul liniar (21), atunci este punct spiral şi pentru sistemul perturbat (23).*

Demonstraţie Considerăm $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha\beta \neq 0, \alpha < 0$. În coordonate polare, a doua ecuaţie are forma:

$$\theta' = \beta + o(1) \quad , \quad r \to 0.$$

Are loc, de asemenea, $r(t) \to 0$ dacă $t \to \infty$ şi deci $|\theta(t)| \to \infty$ pentru $t \to \infty$. Deci $\mathbf{0}$ este punct spiral pentru sistemul neliniar. ∎

Dacă în plus are loc

$$\theta - \frac{\beta}{\alpha} \ln r \underset{r \to 0}{\to} C$$

atunci $\mathbf{0}$ se numeste *punct spiral propriu.* Exemplele următoare ne arată că, în general, un nod propriu pentru sistemul liniar nu rămâne un nod propriu pentru sistemul perturbat şi un punct spiral nu rămâne un punct spiral propriu la perturbaţii.

Exemplul 3.1.1. *Fie sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + \dfrac{x_2}{\ln r} \\ \\ x_2' = -x_2 - \dfrac{x_1}{\ln r} \end{cases}$$

Acesta se scrie în coordonate polare

$$\begin{cases} r' = -r \\ \\ \theta' = -\frac{1}{\ln r} \end{cases},$$

şi se obţine $\theta(r) \to \infty$ când $r \to 0$, deşi pentru sistemul liniar $\mathbf{0}$ este nod propriu.

Exemplul 3.1.2. *Fie sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - x_2 + \dfrac{x_1}{\ln r} \\ \\ x_2' = x_1 - x_2 - \dfrac{x_2}{\ln r} \end{cases}.$$

În coordonate polare acesta se scrie

$$\begin{cases} r' = -r + \dfrac{r}{\ln r} \\ \\ \theta' = 1 \end{cases}.$$

Integrând sistemul obţinem

$$\theta + \ln r = -\ln(|\ln r - 1|) + C \to -\infty$$

când $r \to 0$, deci pentru sistemul perturbat $\mathbf{0}$ nu mai este punct spiral propriu aşa cum este pentu sistemul liniar.

În cazul în care perturbarea este mică, într-un sens care va fi precizat, punctele spirale proprii şi nodurile proprii se păstrează. În acest sens are loc următorul rezultat:

Teorema 3.1.1. *Dacă*

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x})| \le h(r)$$

cu $h : [0, r_0] \to \mathbb{R}_+$, $h(r) = o(r)$ pentru $r \to 0$ şi

$$\int_0^{r_0} \frac{h(r)}{r^2} < +\infty,$$

atunci, dacă $\mathbf{0}$ este punct spiral propriu (nod propriu) pentru sistemul liniar, el este punct spiral propriu (respectiv nod propriu) pentru sistemul neliniar. În particular aceasta se întâmplă dacă $h(r) = r^{1+\varepsilon}, \varepsilon > 0$.

Demonstraţie Presupunem $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \beta \geq 0, \alpha < 0$. Sistemul, în vecinătatea originii, se scrie în coordonate polare

$$\begin{cases} r' & = \alpha r + o(r) \\ r\theta' & = \beta r + f_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta. \end{cases}$$

Întrucât $r(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$, din prima ecuaţie obţinem că $r' < 0$ în vecinătatea originii şi putem scrie ecuaţia pentru $\theta = \theta(r)$:

$$\frac{d\theta}{dr} = G(r, \theta) := \frac{\beta + G_1(r, \theta)}{\alpha(r + G_2(r, \theta))}$$

unde $G_1 = (f_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta)/r$, $G_2 = (f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta)/\alpha$. Ecuaţia se mai poate scrie

$$\frac{d\theta}{dr} - \frac{\beta}{\alpha r} = F(r, \theta) := \frac{-\beta F_2 + r F_1}{\alpha r(r + F_2)}. \tag{24}$$

Un calcul simplu arată că

$$|F(r, \theta)| \leq C \frac{h(r)}{r^2}.$$

Integrând (24) şi ţinând seama de ipoteza asupra lui h, obţinem că următoarea limită există şi este finită

$$l = \lim_{t\to\infty} [\theta(t) - \frac{\beta}{\alpha} \ln r(t)]. \tag{25}$$

Rămâne de arătat că pentru orice $l \in \mathbb{R}$ există o soluţie pentru sistem sau, echivalent, soluţie pentru (24) care să verifice (25). Acest lucru este echivalent, notând $\varphi(r) = \theta(r) - \frac{\beta}{\alpha} \ln r$, cu a rezolva ecuaţia integrală

$$\varphi(r) = l + \int_0^r F(s, \varphi(s) + \frac{\beta}{\alpha} \ln s) ds.$$

Pentru a arăta existenţa unei soluţii fie

$$\varphi_\delta(r) = \begin{cases} l & , \quad -\delta \leq r \leq 0 \\ l + \displaystyle\int_0^r F(s, \varphi_\delta(s - \delta) + \frac{\beta}{\alpha} \ln s) ds & , \quad 0 \leq r \leq r_0 \end{cases}$$

Se arată uşor că $\{\varphi_\delta\}$ este o familie de funcţii continue, uniform mărginită şi echiuniform continuă pe $[0, r_0]$,. Deci $\{\varphi_\delta\}$ are un punct limită φ, soluţie pentru ecuaţia integrală. ■

Noduri improprii. Considerăm pentru început primul tip de nod impropriu şi anume cazul în care $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ cu $\mu < \lambda < 0$. Pentru sistemul perturbat are loc următorul rezultat:

TEOREMA 3.1.2. *Într-o vecinătate a originii, orice orbită tinde la* $\mathbf{0}$ *şi are o direcţie limită ce face cu axa* Ox_1 *un unghi ce poate fi* $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Există o infinitate de orbite tinzând la origine cu un unghi limită 0 *sau* π *şi cel puţin câte o orbită corespunzând unghiurilor* $\pi/2, 3\pi/2$.

Demonstraţie Fie $\delta > 0$ suficient de mic astfel încât dacă $r(0) < \delta$ atunci pentru orice t $r' < 0$ şi $r(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$. Acest lucru este posibil pentru că originea este asimptotic stabilă. Ecuaţia în θ este

$$\theta' = \frac{\mu - \lambda}{2} \sin 2\theta + o(1) \quad , \quad r \to 0.$$

Fie sectoarele discului de rază δ

$$\begin{array}{ll} S_1^{\varepsilon,\delta} = \{r < \delta, |\theta| < \varepsilon\} & S_2^{\varepsilon,\delta} = \{r < \delta, |\theta - \pi| < \varepsilon\} \\ S_3^{\varepsilon,\delta} = \{r < \delta, |\theta - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon\} & S_4^{\varepsilon,\delta} = \{r < \delta, |\theta - \frac{3\pi}{2}| < \varepsilon\} \end{array}$$

Tinând cont de ecuaţia în θ, se observă că pentru δ suficient de mic $S_1^{\varepsilon,\delta}, S_2^{\varepsilon,\delta}$ sunt mulţimi pozitiv invariante. De asemenea, dacă la un moment dat traiectoria se află în $B_\delta \setminus \bigcup_i S_i^{\varepsilon,\delta}$ atunci aceasta intră în $S_1^{\varepsilon,\delta}$sau $S_2^{\varepsilon,\delta}$ în timp finit fără posibilitate de a intra în $S_3^{\varepsilon,\delta}$ şi $S_4^{\varepsilon,\delta}$. Rezultă deci primul punct al teoremei şi existenţa unei infinităţi de traiectorii ce converg la origine cu un unghi limită de 0 sau π.

Rămâne de arătat că există măcar câte o soluţie cu unghi limită de $\pi/2$ sau $3\pi/2$. Fie $x_0 \in S_3^{\varepsilon,\delta}$. Fie $x_0 \in S_3^{\varepsilon,\delta}, |x_0| = \delta$. Există două posibilităţi: fie $\gamma_{x_0}^+ \subset S_3^{\varepsilon,\delta}$, fie la un moment $t > 0$ traiectoria intersectează unul din segmentele de frontieră $\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$. Din teorema de continuitate în raport cu datele iniţiale rezultă că mulţimea acelor $x, |x| = \delta$ pentru care a doua posibilitate are loc este o mulţime deschisă a porţiunii de frontieră a lui $S_3^{\varepsilon,\delta}$, $|x| = \delta$, rezulta ca există măcar un x_0 pentru care are loc prima variantă. Fie acum $\varepsilon_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ cu δ_n , corespunzător lui ε_n ales suficient de mic. Fie $x_n, |x_n| = \delta_n$ astfel încât $\gamma_{x_n}^+ \subset S_3^{\varepsilon_n,\delta_n}$. Fie de asemenea $\{y_n\} = \gamma_{x_n} \cap \{|x| = \delta\}$ şi fie y_0 un punct limită al şirului y_n. Rezultă, în mod evident, că $\gamma_{y_0}^+$ tinde la origine cu un unghi limită egal cu $\pi/2$. Analog se arată existenţa unei orbite ce converge la origine cu ununghi limită de $3\pi/2$. ■

OBSERVAŢIA 3.1.1. *(v.[**6**], p.384) Se poate arăta că există exact câte o orbită ce are în origine un unghi limită de* $\pi/2$, *respectiv* $3\pi/2$.

În cazul în care pentru sistemul liniar avem un nod impropriu de tipul al doilea, are loc următorul rezultat a carui demonstraţie, asemănătoare celei anterioare, o omitem :

TEOREMA 3.1.3. *Fie* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, *cu* $\lambda < 0$ *şi să presupunem că* $f(x) = O(r^{1+\delta})$. *Atunci soluţiile sistemului neliniar, ce pleacă dintr-o vecinătate suficient de mică a originii, converg la origine pentru* $t \to \infty$ *cu un unghi limită de* 0 *sau* π, *mai precis*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = 0.$$

Centri. Presupunem că $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$ deci pentru sistemul liniar $\mathbf{0}$ este centru.

$\mathbf{0}$ se numeşte *centru pentru sistemul neliniar* dacă există un şir de orbite periodice ale acestuia OP_n conţinând $\mathbf{0}$ în interior, ce converg la origine când $n \to \infty$.

TEOREMA 3.1.4. *În condiţiile enunţate mai sus, originea este fie punct spiral, fie centru pentru sistemul neliniar.*

Demonstraţie Să presupunem că originea nu este nici punct spiral nici centru pentru sistemul neliniar. Fie atunci o vecinătate a originii ce nu conţine orbite periodice . Scriind sistemul în coordonate polare observăm că:

$$r' = o(1), \quad \theta' = \beta + o(1) \ .$$

Rezultă că, dacă r_0 este suficient de mic, traiectoria intersectează în măcar două puncte o semidreaptă ce pleacă din origine, de exemplu Ox_1. Fie aceste puncte de intersecţie succesivă, P_1, P_2. Sa presupunem că $P_2 < P_1$ (în caz contrar facem schimbarea de variabilă $t \to -t$). Rezultă atunci că există un sir de intersecţii succesive ale traiectorii cu axa (Ox_1), fie aceste puncte $P_1 > P_2 > ... > P_n > ...$ (v. §4.1). Întrucât am presupus că $\mathbf{0}$ nu este nici punct spiral, putem presupune că $P_n \to P > 0$. Pe de altă parte, ecuaţia se scrie în vecinătatea lui $\mathbf{0}$ astfel:

$$\frac{dr}{d\theta} = G(r,\theta) := \frac{f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta}{\beta + (f_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta)/r}$$

şi se observă că $G(r, \theta + 2\pi) = G(r, \theta)$. Întrucât soluţia considerată mai sus $r = r(\theta)$ este mărginită pentru $\theta > 0$, rezultă folosind un argument de compactitate că, pe un subşir, $r(theta + 2n\pi)$ converge uniform pe compacte la o funcţie $\overline{r} = \overline{r}(\theta)$ care este o soluţie periodică de perioadă 2π (teorema lui Massera). Rezultă astfel că punctul P aparţine acestei traiectorii. Am găsit aşadar o traiectorie periodică netrivială în vecinătatea lui $\mathbf{0}$, ceea ce contrazice presupunerea făcută. ■

Următoarele exemple ne arată că ambele situaţii menţionate în teoremă sunt posibile:

EXEMPLUL 3.1.3. *Fie sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + \dfrac{x_1}{\log r} \\ \\ x_2' = x_1 + \dfrac{x_2}{\log r} \end{cases}$$

În coordonate polare acesta se scrie:

$$\begin{cases} r' = \dfrac{r}{\log r} \\ \theta' = 1 \end{cases}$$

şi obţinem $r(t) = \exp(-\sqrt{2t + \log^2 r_0})$, $\theta(t) = t + \theta_0$, *deci originea este punct spiral pentru sistem.*

EXEMPLUL 3.1.4. *Fie sistemul*

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1 \sin r \\ x_2' = x_1 + x_2 \cos r \end{cases}$$

Pentru acesta există un şir de orbite periodice ce tinde la origine, şi anume $OP_n : \{r_n(t) = n\pi,\ \theta_n(t) = t\}$, *deci originea este centru.*

Puncte şa. În cazul perturbării sistemelor liniare ce au un punct şa are loc următorul rezultat :

TEOREMA 3.1.5. *Fie* $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda\mu < 0$. *Există atunci câte o unică orbită ce tinde la* $\mathbf{0}$ *pentru* $t \to \infty$ *cu unghi limită* 0, *respectiv* π. *Există, de asemenea, câte o unică orbită ce tinde la* $\mathbf{0}$, *pentru* $t \to -\infty$, *în direcţiile limită ce fac cu axa* Ox_1 *unghiuri de* $\pi/2$, *respectiv* $3\pi/2$. *Orice altă orbită din vecinătatea originii nu poate tinde la* $\mathbf{0}$ *pentru* $t \to \pm\infty$.

Demonstraţia acestei teoreme o vom da în cazul general al sistemelor diferenţiale în $\mathbb{R}^n$, teorema 3.2.3.

3.2. Stabilitatea condiţională

În această sectiune studiem stabilitatea soluţiei banale a sistemului perturbat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{26}$$

unde $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbf{R})$, $\mathbf{f} \in C^1$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = o(|\mathbf{x}|)$, $\mathbf{f}_\mathbf{x} = o(1)$ pentru $\mathbf{x} \to 0$. Amimtim următoarea variantă a teoremei Liapunov-Poincaré (v. [**5**] sau anexa B):

TEOREMA 3.2.1. *Dacă* $\mathbf{A}$ *este matrice Hurwitz (are valorile proprii* λ_i, $i = 1, ..., n$ *cu* $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$*) atunci soluţia banală a ecuaţiei (26) este asimptotic stabilă.*

Dacă măcar o autovaloare a matricii $\mathbf{A}$ are partea reală pozitivă, atunci are loc următorul rezultat de instabilitate:

Teorema 3.2.2. *Dacă există măcar o autovaloare λ cu* $\operatorname{Re}\lambda > 0$, *atunci soluţia banală a ecuaţiei (26) este instabilă.*

Această teoremă este o consecinţă imediată a rezultatului următor ce se referă la existenţa varietăţilor stabilă, respectiv instabilă. O demonstraţie independentă de acesta poate fi găsită în [**6**] (Th.1.2, Ch.13).

În cele ce urmează ne propunem să studiem mai atent cazul în care A este o matrice ce are deopotrivă valori proprii cu părţile reale negative sau pozitive. Are loc:

Teorema 3.2.3. *Presupunem că* $\mathbf{A}$ *are k valori proprii cu partea reală negativă şi $n-k$ valori proprii cu partea reală pozitivă. Există atunci, în spaţiul fazelor, într-o vecinătate suficient de mică a originii, o varietate diferenţiabilă k dimensională W^s, numită varietate stabilă), ce conţine originea, astfel încât $x_0 \in W^s$ dacă şi numai dacă $x(t,0,x_0) \to \mathbf{0}$ pentru $t \to \infty$. Există, de asemenea, o varietate diferenţiabilă $n-k$ dimensională W^u, numită varietate instabilă, cu proprietatea că $x_0 \in W^u$ dacă şi numai dacă $x(t,0,x_0) \to \mathbf{0}$ pentru $t \to -\infty$.*

Demonstraţie Există $\mathbf{S} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, matrice nesingulară, astfel încât

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix},$$

cu $\mathbf{B}_1$ având k valori proprii cu partea reală negativă şi $\mathbf{B}_2$ cu cele $n-k$ valori proprii cu partea reală pozitivă. Făcând schimbarea de necunoscută $\mathbf{y} = \mathbf{S}\mathbf{x}$, ecuaţia (26) se transformă în ecuaţia de aceeaşi formă

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)), \tag{27}$$

unde $\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{S}\mathbf{f}(\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y})$. Fie

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t\mathbf{B}_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t\mathbf{B}_2} \end{pmatrix}.$$

Se observă că $\mathbf{X}_j' = \mathbf{B}\mathbf{X}_j,$ $e^{t\mathbf{B}} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2$. Considerăm ecuaţia integrală

$$\varphi(t,\mathbf{a}) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{X}_1(t-s)\mathbf{g}(\varphi(s,\mathbf{a}))ds - \int_t^\infty \mathbf{X}_2(t-s)\mathbf{g}(\varphi(s,\mathbf{a}))ds \tag{28}$$

unde $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Vom arăta că soluţia acestei ecuaţii integrale există, este soluţie pentru (27) şi satisface $\varphi(t,\mathbf{a}) \to 0$ pentru $t \to \infty$. Existenţa o vom arăta prin metoda aproximaţiilor succesive. Fie $\varphi_0(t,\mathbf{a}) = 0$ şi

(29)

$$\varphi_{k+1}(t,\mathbf{a}) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{X}_1(t-s)\mathbf{g}(\varphi_k(s,\mathbf{a}))ds - \int_t^\infty \mathbf{X}_2(t-s)\mathbf{g}(\varphi_k(t,\mathbf{a}))ds.$$

Ţinând cont de estimările

$$\begin{array}{ll} \| \mathbf{X}_1(t) \| \leq Ce^{-(\alpha+\sigma)t} & t \geq 0 \\ \| \mathbf{X}_2(t) \| \leq Ce^{\sigma t} & t \leq 0 \end{array}$$

şi de faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât

$$|\mathbf{g}(\mathbf{y}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{y}_2)| \leq \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |\mathbf{y}_1| < \delta, |\mathbf{y}_2| < \delta,$$

se obţine, prin inducţie, alegând $2\varepsilon C < \sigma/2$ şi $2C|a| < \delta$, că

$$|\varphi_{k+1}(t, \mathbf{a}) - \varphi_k(t, \mathbf{a})| \leq \frac{C|a|e^{-\alpha t}}{2^k}.$$

De aici se obţine că şirul $\{\varphi_k\}$ al aproximaţiilor succesive converge uniform pe $[0, \infty)$. Aşadar, putem trece la limită în (29) şi obţinem o soluţie φ pentru (28), ce satisface

$$|\varphi(t, a)| < 2C|a|e^{-\alpha t} \quad , \quad t \geq 0.$$

De aici $\varphi(t, \mathbf{a}) \to 0$ pentru $t \to \infty$. Se deduce de asemenea, derivând (28), că φ este soluţie pentru (27).

În ce priveşte unicitatea, să arătăm că dacă $\varphi(t, \mathbf{a})$ şi $\tilde{\varphi}(t, \mathbf{a})$ sunt soluţii pentru (28) care satisfac $|\varphi(t, \mathbf{a})| < \delta$, $|\tilde{\varphi}(t, \mathbf{a})| < \delta$, $t \geq 0$, atunci $\varphi(t, \mathbf{a}) = \tilde{\varphi}(t, \mathbf{a})$. Într-adevăr, notând cu $M = \sup |\varphi(t, \mathbf{a}) - \tilde{\varphi}(t, \mathbf{a})|$, obţinem

$$|\varphi(t, \mathbf{a}) - \tilde{\varphi}(t, \mathbf{a})| \leq C\varepsilon e^{-\sigma t} \int_0^t e^{\sigma s} |\varphi(s, \mathbf{a}) - \tilde{\varphi}(s, \mathbf{a})| ds +$$

$$+ C\varepsilon e^{\sigma t} \int_t^\infty e^{-\sigma s} |\varphi(s, \mathbf{a}) - \tilde{\varphi}(s, \mathbf{a})| ds \leq 2C\varepsilon M/\sigma.$$

Alegând de la început $\varepsilon < \sigma/2C$, din inegalitatea precedentă obţinem $M = 0$, deci unicitatea.

Se observă din (28) că $\varphi(t, \mathbf{a})$ nu depinde de $a_{k+1}, ..., a_n$, ci numai de $a_1, ..., a_k$, iar componenta j a lui φ verifică $\varphi^j(0, a) = a_j$, $j = 1, ..., k$. Pentru celelalte componente avem

$$\varphi^j(0, \mathbf{a}) = -(\int_0^\infty \mathbf{X}_2(-s)\mathbf{g}(\varphi(s, \mathbf{a}))ds)_j =: \theta_j(a_1, ..., a_k) \quad , \quad j = k+1, ..., n,$$

relaţii care definesc o varietate diferenţiabilă k-dimensională W^s (varietatea stabilă). Soluţiile cu data iniţială pe această varietate converg, pentru $t \to \infty$, la $\mathbf{0}$.

Rămâne de arătat că, dacă data iniţială nu aparţine lui W^s, soluţia corespunzătoare nu poate să ramână într-o vecinătate a lui $\mathbf{0}$. Fie deci $\mathbf{y}(t)$ o soluţie pentru (27), cu $\mathbf{y}(0)$ suficient de mic, pentru care presupunem ca $|\mathbf{y}(t)| < \delta$, $t \geq 0$. Întrucât $\mathbf{g}(\mathbf{y}(t))$ rămâne mărginit, putem scrie

$$\mathbf{y}(t) = e^{t\mathbf{B}}\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)\mathbf{B}}\mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) = \mathbf{X}_1(t)\mathbf{y}(0) +$$

$$+ \int_0^t \mathbf{X}_1(t-s)\mathbf{g}(\mathbf{y}(s))ds - \int_t^\infty \mathbf{X}_2(t-s)\mathbf{g}(\mathbf{y}(s))ds + \mathbf{X}_2(t)\mathbf{v}, \tag{30}$$

unde

$$\mathbf{v} = \int_0^\infty \mathbf{X}_2(-s)\mathbf{g}(\mathbf{y}(s))ds + \mathbf{y}(0).$$

Se observă că primii trei termenii din (30) sunt mărginiţi pentru $t \to \infty$. Rămâne de studiat ultimul termen, şi anume $\mathbf{X}_2(t)\mathbf{v}$. Ori acesta este mărginit numai dacă componentele vectorului $\mathbf{v}$, $v_{k+1} = ... = v_n = 0$, adică dacă $\mathbf{y}$ este soluţie pentru (28) $y(0) \in S$.

Pentru a demonstra existenţa varietăţii instabile trecem t în $-t$ şi varietatea stabilă a sistemului obţinut este de fapt varietatea instabilă a sistemului iniţial. ∎

Observaţia 3.2.1. *Regularitatea varietăţii W^s depinde de regularitatea lui f. Mai precis, dacă $f \in C^k$, atunci funcţiile $\theta_j \in C^k$ (v.* [**6**], *Teorema 4.2).*

Observaţia 3.2.2. Se poate arăta existenţa varietăţii stabile, de dimensiune egală cu numărul valorilor proprii cu partea reală negativă, chiar dacă restul valorilor proprii nu au partea reală strict pozitivă. De altfel se poate arăta în plus existenţa unei *varietăţi centrale*, invariantă la flux şi care are drept spaţiu tangent în $\mathbf{0}$ spaţiul propriu corespunzător valorilor proprii cu partea reală nulă. Această varietate nu mai este unic determinată (v. [**10**] p.127, [**15**] p.115).

3.3. Stabilitatea soluţiilor periodice

Considerăm sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{31}$$

unde $\mathbf{F} \in C^1$ este T-periodică în t şi presupunem existenţa unei soluţii T-periodice $\mathbf{p}(t)$. O soluţie cu perioadă minimală mT cu $m > 1$, dacă există, se numeşte *subarmonică*. Studiem stabilitatea soluţiei T periodice $\mathbf{p}$ prin metoda primei aproximaţii. Fie $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ o altă soluţie şi fie $\mathbf{y} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$. Are loc

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{p}(t))\mathbf{y} + \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \tag{32}$$

unde

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y} + \mathbf{p}(t)) - \mathbf{F}(t, \mathbf{p}(t)) - \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{p}(t))\mathbf{y} = o(|\mathbf{y}|) \quad , \quad \mathbf{y} \to 0.$$

uniform în raport cu t. De asemenea,

$$\mathbf{f}_\mathbf{y}(t, \mathbf{y}) = o(1) \quad , \quad \mathbf{y} \to 0. \tag{33}$$

Sistemul liniarizat, sau sistemul în variaţie, este:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}_\mathbf{x}(t, \mathbf{p}(t))\mathbf{y}. \tag{34}$$

Teorema Poincaré-Liapunov, împreună cu remarca 2.1.4, ne conduc la următorul rezultat de stabilitate asimptotică a soluţiilor periodice:

TEOREMA 3.3.1. *Dacă exponenţii caracteristici asociaţi sistemului liniar (34) au toţi partea reală negativă, atunci soluţia periodică* $\mathbf{p}(t)$ *a sistemului (31) este asimptotic stabilă.*

Cazul autonom, când $\mathbf{F}$ nu depinde explicit de t, nu se poate încadra în teorema precedentă. Într-adevăr, derivând în raport cu t ecuaţia $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{p}(t))$, obţinem că $\mathbf{y}(t) = \mathbf{p}'(t)$ este soluţie pentru (34) deci, tinând seama de observaţia 2.1.2, măcar un exponent caracteristic are partea reală $\mathbf{0}$. Pe de altă parte, nici stabilitatea asimptotică nu poate fi obţinută pentru că, de exemplu, $\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t+\mu)$ este soluţie, $|\mathbf{q}(0) - \mathbf{p}(0)| < \delta$ pentru μ suficient de mic dar $\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t) \nrightarrow 0$ când $t \to \infty$. Se obţine însă, în ipopteze suplimentare, următorul rezultat:

TEOREMA 3.3.2. *Dacă* $\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ *nu depinde explicit de* t *şi* $n-1$ *exponenţi caracteristici ai sistemului (34) au partea reală negativă, atunci există* $\varepsilon > 0$ *astfel încât dacă* $\mathbf{q}(\mathbf{t})$ *este o soluţie cu proprietatea că există* t_0, t_1 *pentru care are loc*

$$|\mathbf{q}(t_1) - \mathbf{p}(t_0)| < \varepsilon,$$

atunci există o constantă $\tilde{t}$, *numită fază limită, astfel încât are loc*

$$\lim_{t\to\infty} |\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t + \tilde{t})| = 0.$$

Vom spune în această situaţie că soluţia $\mathbf{p}(t)$ *este orbital asimptotic stabilă.*

Demonstraţie Vom presupune, fără a restrânge generalitatea, că $\mathbf{p}(0) = \mathbf{0}$ şi $\mathbf{p}'(0) = \lambda \mathbf{e}_1, \lambda > 0$. Aceasta se realizează printr-o schimbare ortogonală de reper. Ecuaţia (32) devine

$$\mathbf{y}' = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{p}(t))\mathbf{y} + \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \tag{35}$$

şi notăm cu $\mathbf{X}(t)$ o soluţie fundamentală a sistemului liniarizat astfel încât (v. observaţia 2.1.3):

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C} = \mathbf{X}(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_1 \end{pmatrix}.$$

Putem scrie $\mathbf{C} = e^{TR}$, unde:

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_1 \end{pmatrix},$$

iar $R_1 \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ are valorile proprii cu partea reală strict negativă. Are loc (v. §2.1):

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{P}(t)e^{tR},$$

unde $\mathbf{P}(t)$ este T-periodică. Fie

$$\mathbf{X}_1(t,s) = \mathbf{P}(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)R_1} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}(s),$$

$$\mathbf{X}_2(t,s) = \mathbf{P}(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}(s).$$

Se observă că
$$\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(s)^{-1} = \mathbf{X}_1(t,s) + \mathbf{X}_2(t,s).$$
De asemenea, matricile $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sunt reale. Într-adevăr,
$$\mathbf{X}_2(t,s) = \mathbf{P}(t)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}(s),$$
produsul primelor două matrici este prima coloana a lui $\mathbf{X}(t)$ iar produsul ultimelor două matrici este prima linie a lui $\mathbf{X}^{-1}(t)$, deci $\mathbf{X}_2$ este matrice reală şi, în consecinţă, $\mathbf{X}_1$ este matrice reală. Dacă presupunem că cei $n-1$ exponenţi caracteristici au partea reală mai mică decât $-\sigma$ atunci avem estimările:

$$\begin{aligned} &|\mathbf{X}_1(t,s)| \leq Ce^{-\sigma(t-s)} \quad , \quad t \geq s, \\ &|\mathbf{X}_2(t,s)| \leq C. \end{aligned} \tag{36}$$

Considerăm ecuaţia integrală:

$$\varphi(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{X}_1(t,s)\mathbf{f}(s,\varphi(s))ds - \int_t^\infty \mathbf{X}_2(t,s)\mathbf{f}(s,\varphi(s))ds, \tag{37}$$

unde $\mathbf{a} = (0, a_2, ..., a_n)^T$. Vom arăta că soluţiile acestei ecuaţii integrale există, sunt soluţii pentru (35) şi satisfac $\varphi(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$. Dacă soluţia există atunci, cu un calcul simplu, se poate vedea că aceasta este soluţie şi pentru (35).

Existenţa o arătăm prin metoda aproximaţiilor succesive. Pentru $t \geq 0$ avem, întrucât prima componentă a lui $\mathbf{a}$ este $a_1 = 0$,

$$|\mathbf{X}(t)\mathbf{a}| \leq C_1|\mathbf{a}|e^{-\sigma t} \tag{38}$$

şi pentru $|\mathbf{y}_1|, |\mathbf{y}_2| < \delta$,

$$|\mathbf{f}(t,\mathbf{y}_1) - f(t,\mathbf{y}_2)| < \frac{\sigma}{8C}|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2|. \tag{39}$$

Fie $|\mathbf{a}| < \delta/2C_1$ şi fie şirul aproximaţiilor succesive, $\varphi_0(t) = 0$

$$\varphi_{k+1}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{a} + \int_0^t \mathbf{X}_1(t,s)\mathbf{f}(s,\varphi_k(s))ds - \int_t^\infty \mathbf{X}_2(t,s)\mathbf{f}(s,\varphi_k(s))ds.$$

Prin inducţie se demonstrează uşor, folosind (38) şi (39), că

$$|\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \leq \frac{C_1|a|e^{-\sigma t/2}}{2^k}.$$

Obţinem astfel un şir de funcţii uniform convergent pe $[0,\infty)$ la o funcţie φ ce satisface

$$|\varphi(t)| \leq 2C_1|\mathbf{a}|e^{-\sigma t/2}.$$

În plus φ este soluţie pentru (37) şi deci pentru (35). Aceasta tinde la $\mathbf{0}$, uniform în raport cu $\mathbf{a}$, pentru $t \to \infty$.

Rămâne de studiat mulţimea formată din valorile iniţiale ale acestor soluţii. Facem $t = 0$ în (37) şi obţinem

$$\varphi(0, \mathbf{a}) = \mathbf{X}(0)\mathbf{a} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty \mathbf{P}^{-1}(s)\mathbf{f}(s, \varphi(s, \mathbf{a}))ds. \tag{40}$$

Întrucât integrala nu are contribuţii la componentele $2, ..., n$ ale lui $\varphi(0, \mathbf{a})$, rezultă că, notând cu $y_j = \varphi_j(0, a)$ atunci $(y_2, ..., y_n) = \mathbf{T}(a_2, ..., a_n)$, unde $\mathbf{T}$ este o aplicaţie liniară bijectivă. Egalitatea (40) se poate scrie

$$y_1 + \sum_{k=2}^{n} y_k + G(y_2, ..., y_n) = 0, \tag{41}$$

unde $G = o(|\mathbf{y})|)$ pentru $\mathbf{y} \to 0$. Aceasta este ecuaţia unei suprafeţe S ce conţine pe $\mathbf{0} = \mathbf{p}(0)$, definită pentru $|(y_2, ...y_n)| < \delta$ şi al cărei plan tangent în $\mathbf{0}$ are ecuaţia

$$y_1 + \sum_{k=2}^{n} y_k = 0.$$

Deci $\mathbf{p}'(0) = \lambda\mathbf{e}_1$ nu este tangent la S. Fie acum soluţia $\mathbf{q}$ astfel încât $|\mathbf{q}(t_1) - \mathbf{p}(t_0)| < \varepsilon$, unde ε este suficient de mic astfel încât soluţia $\phi(t) = \mathbf{q}(t - t_0 + t_1)$, care verifică inegalitatea $|\phi(t_0) - \mathbf{p}(t_0)| < \varepsilon$, să satisfacă $|\phi(t) - \mathbf{p}(t)| < \delta$ pentru $|t - t_0| < 2T$. Rezultă că soluţia $\phi(t)$ intersectează suprafaţa S pentru un t_2, $|t_2 - t_0| < 2T$. Rezultă că soluţia $\psi(t) = \phi(t + t_2)$ satisface $\psi(t) - \mathbf{p}(t) \to 0$ şi deci $\mathbf{q}(t - t_0 + t_1 + t_2) - \mathbf{p}(t) \to 0$. Teorema este demonstrată cu $\tilde{t} = t_0 - t_1 - t_2$. ■

Observaţia 3.3.1. Această teoremă poate fi uşor generalizată, ţinând seama de rezultatele paragrafului precedent. Astfel, fie γ orbită periodică şi să presupunem că există k exponenţi caracteristici cu partea reală negativă şi $n - k - 1$ au partea reală pozitivă. Există atunci varietăţile stabilă $W^s(\gamma)$, respectiv instabilă $W^u(\gamma)$ în spaţiul fazelor extins $(\mathbf{x}, t)$, de dimensiune $k+1$, respectiv $n - k$, caracterizate de proprietatea că

$$\text{dist}\left(\Phi_t\left(\mathbf{x}\right), \gamma\right) \to 0$$

pentru $t \to \infty$ dacă $(\mathbf{x}, t) \in W^s(\gamma)$ şi pentru $t \to -\infty$ dacă $(\mathbf{x}, t) \in W^u(\gamma)$. De altfel, dacă W^s, W^u sunt varietăţile stabilă şi instabilă ale aplicaţiei Poincaré (v. paragraful 4.1) atunci $W^s(\gamma) = \{\Phi_t\left(W^s\right), t \geq 0\}$, $W^u(\gamma) = \{\Phi_t\left(W^u\right), t \leq 0\}$.

3.4. Exerciţii şi probleme

3.1. Pentru ecuaţiile şi sistemele din exerciţiile 2.1,2.2 să se schiţeze portretul fazelor.

3.2. Pentru următoarele sisteme să se determine punctele staţionare, natura acestora şi apoi să se schiţeze portretul fazelor:

(1) $\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - 1 \\ y' = 2y \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x' = x - xy \\ y' = y - x^2 \end{cases}$;

(3) $\begin{cases} x' = 2x - 2xy \\ y' = 2y - x^2 + y^2 \end{cases}$.

Să se studieze natura punctelor staţionare pentru ecuaţiile:

(1) $x'' - xx' + x = 0$;

(2) $x'' + xx' + \sin x = 0$.

3.3. Considerăm următorul sistem:

$$\begin{cases} x' = x - ax^2 - cxy \\ y' = y - by^2 + dxy \end{cases}$$

cu $a, b, c, d > 0$, $x, y \geq 0$. Acesta reprezintă un model pentru evoluţia a două specii în competiţie. Să se determine punctele staţionare şi să se studieze natura acestora.

3.4. Pentru următoarele sisteme să se calculeze primele 3 iteraţii pentru aproximarea varietăţilor stabilă, respectiv instabilă în origine:

(1) $\begin{cases} x' = -x - y^2 \\ y' = y + x^2 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y + x^2 \\ z' = -z + y \end{cases}$.

3.5. Considerăm ecuaţia lui Liénard

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0$$

unde f, g sunt funcţii netede. Presupunem ca există o soluţie T-periodică $\varphi(t)$. Să se găsească condiţii pentru ca aceasta sa fie orbital asimptotic stabilă.

3.6. Considerăm ecuaţia

$$x'' - (1 - x^2 - y^2)x' + x = 0.$$

Să se determine punctele staţionare şi să se studieze stabilitatea. Să se scrie în coordonate polare şi să se determine o soluţie periodică. Să se găsească exponenţii caracteristici ai sistemului liniarizat şi să se studieze stabilitatea soluţiei periodice.

3.7. Fie sistemul
$$\begin{cases} x' = 1 + y - x^2 - y^2 \\ y' = 1 - x - x^2 - y^2 \end{cases}.$$
Să se determine punctele staţionare şi să se studieze stabilitatea acestora. Să se scrie sistemul în coordonate polare şi să se găsească o soluţie periodică. Determinaţi exponenţii caracteristici ai sistemului liniarizat şi stabilitatea acestei soluţii.

3.8. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x' = \mu x + y - x f(r) \\ y' = -x + \mu y - y f(r) \end{cases},$$
unde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $f \in C^1$, $f(r) > 0$ pentru $r > 0$ şi $f(0) = 0$. Să se arate că pentru $\mu \leq 0$ originea este un punct spiral global asimptotic stabil, iar pentru $\mu > 0$ originea este punct spiral instabil şi, în plus, sistemul posedă o orbită periodică stabilă. Să se schiţeze portretul fazelor.

3.9. Fie sistemul
$$\mathbf{x}' = -\nabla V(\mathbf{x}),$$
unde $V \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Să se demonstreze că dacă un punct staţionar este minim local strict pentru V atunci el este asimptotic stabil. Dacă $n = 2$ şi V este funcţie analitică, atunci orice punct staţionar nedegenerat $\mathbf{x}_0$ (i.e. $\nabla V(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ şi $D^2V(\mathbf{x}_0)$ nedegenerată) este fie punct şa, fie nod propriu.

CAPITOLUL 4

Sisteme în dimensiune 2. Studiu global

Studiul global al sistemelor planare beneficiază, ca ingredient esenţial, de *teorema lui Jordan*: o curbă simplă închisă împarte planul în exact două părţi conexe dintre care una este mărginită. Rezultatul principal privind sistemele planare este *teorema Poincaré-Bendixson* de caracterizare a mulţimilor $\omega-$limită ce nu conţin puncte staţionare. Acestea sunt orbite periodice numite *cicluri limită.* Instrumentul de bază utilizat în demonstraţie este aplicaţia Poincaré, ale carei existenţă şi proprietăţi, utile şi în studiul local al stabilităţii orbitelor periodice, sunt demonstrate în primul paragraf.

În continuare studiem sistemele dinamice pe torul $2-$dimensional. Se pune în evidenţă existenţa soluţiilor uniform distribuite în cazuri particulare, simple. Este introdus numărul de rotaţie şi se caracterizează cu ajutorul acestuia existenţa soluţiilor periodice. Menţionăm aici că diferenţa calitativă semnificativă faţă de cazul planar provine din faptul că topologia spaţiului fazelor este diferită. Pentru o trecere în revistă a teoriei sistemelor dinamice pe varietăţi 2-dimensionale se poate consulta [**13**].

În final se introduce indexul curbelor în raport cu un câmp vectorial precum şi indexul punctelor staţionare.

4.1. Aplicaţia Poincaré

Aplicaţia Poincaré este instrumentul de bază în studiul comportării traiectoriilor în vecinătatea unei soluţii periodice. Se mai numeşte si aplicaţia dată de prima întoarcere.
Fie sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{42}$$

unde $\mathbf{f} \in C^1(D), D \subset \mathbb{R}^n$ si Γ este o orbită periodică a acestuia, imagine a unei solutii periodice $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$, de perioadă T. Fie, de asemenea, un hiperplan Π perpendicular pe Γ in $\mathbf{x}_0$. Are loc următoarea teoremă care şi defineste aplicaţia Poincaré:

Teorema 4.1.1. *În conditiile enunţate mai sus, există o vecinătate $N_\delta(\mathbf{x}_0)$ şi o funcţie $\tau : N_\delta(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1, \tau(\mathbf{x}_0) = T$, astfel încât*

$$\Phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Pi,$$

pentru oricare $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{x}_0)$. *Aplicaţia*

$$P : N_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Pi \to \Pi, \quad P(\mathbf{x}) = \Phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$$

se numeste aplicaţia Poincaré.

Demonstraţie Considerăm funcţia $G(t, \mathbf{x}) = [\Phi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_0] \cdot f(\mathbf{x}_0)$. Se observă că $\Phi_t(\mathbf{x}) \in \Pi \Longleftrightarrow G(t, \mathbf{x}) = 0$. Lui G îi aplicăm teorema funcţiilor implicite în $(T, \mathbf{x}_0)$. $G \in C^1$ şi

$$\frac{\partial G}{\partial t}(T, \mathbf{x}_0) = |f(\mathbf{x}_0)|^2 \neq 0,$$

deci ipotezele din teorema funcţiilor implicite sunt satisfăcute. Rezultă că există $\tau : N_\delta(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încât $\tau(\mathbf{x}_0) = T$ şi $G(\tau(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = 0$ deci $\Phi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Pi$. ■

Observaţia 4.1.1. Existenţa aplicaţiei Poincaré este asigurată si în situaţia mai generală în care hiperplanul Π nu este perpendicular pe $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ ci este satisfăcută condiţia de transversalitate $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \nparallel \Pi$. Mai mult, făcând schimbarea $t \to -t$, se observă că aplicaţia Poincaré este difeomorfism local.

Observaţia 4.1.2. În cazul $n = 2$ hiperplanul Π este o dreaptă, pe care putem alege o orientare.

Se observă că aplicaţia Poincaré P defineşte în vecinătatea lui $\mathbf{x}_0$ o funcţie monotonă. Într-adevăr, întrucât $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \nparallel \Pi$, rezultă că $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ este transversal la Π într-o vecinătate a lui $\mathbf{x}_0$ şi deci câmpul vectorial $\mathbf{f}$ este îndreptat înspre aceeaşi parte a lui Π. Fie acum $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \Pi$, $\mathbf{x}_2 = P(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_3 = P(\mathbf{x}_2)$. Trebuie arătat că $\mathbf{x}_3$ nu se află între $\mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{x}_2$, presupuse distincte, adică neaparţinând unei traiectorii periodice. Aceasta rezultă imediat din teorema lui Jordan aplicată curbei simple închise definite de traiectoria sistemului cuprinsă între $\mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{x}_2$ şi segmentul $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$. Ţinem seama că traiectoria $\{\Phi_t(\mathbf{x}_2), t > 0\}$ nu poate intersecta portiunea de traiectorie cuprinsă intre $\mathbf{x}_1$ şi $\mathbf{x}_2$ şi nici segmentul deschis $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ care trebuie intersectat în aceeaşi direcţie ca în capete.

Observaţia 4.1.3. Sistemul liniarizat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_\mathbf{x}(\Phi_t(\mathbf{x}_0))\mathbf{x}$$

este un sistem liniar cu coeficienţi periodici, ai cărui multiplicatori caracteristici sunt $\lambda_1 = 1$ iar restul $\lambda_2, ..., \lambda_n$ coincid cu valorile proprii ale lui $DP(\mathbf{0})$ (v.[**15**], p.205).

O primă utilizare a aplicaţiei Poincaré este la studiul stabilităţii soluţiilor periodice în cazul sistemelor planare. Pentru simplitatea scrierii, şi fără a restrânge generalitatea, considerăm $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ şi $\Pi = \mathbb{R}$. Funcţia de deplasare se defineşte prin

$$d(x) = P(x) - x \ , \ x \in \mathbb{R}$$

cu $|x| < \varepsilon$ şi ε suficient de mic. Are loc:

TEOREMA 4.1.2. *Dacă $d'(0) < 0$ ciclul Γ este stabil (orbital asimptotic stabil), iar dacă $d'(0) > 0$ ciclul Γ este instabil.*

Demonstraţie Dacă $d'(0) < 0$, rezultă că pentru $x > 0$ suficient de mic $d(x) < 0$, adică $P(x) < x$ şi, în plus, $0 < P(x)$ (traiectoria care trece prin x rămâne de aceeaşi parte a traiectoriei periodice care trece prin $\mathbf{0}$). Pentru $x < 0$ are loc $x < P(x) < 0$. Fie $x > 0$ şi construim şirul $x_n = P^n(x)$ care este un şir de numere pozitive descrescător, deci convergent la un $y \geq 0$. Întrucât $x_{n+1} = P(x_n)$, trecând la limită, obţinem $y = P(y)$ şi deci $y = 0$, ceea ce înseamnă că ciclul Γ este orbital asimptotic stabil. Un raţionament analog se face in cazul $d'(0) > 0$. ∎

Următoarea teoremă ne dă o formulă de calcul al derivatei aplicaţiei Poincaré:

TEOREMA 4.1.3. *Pentru $x_0 \in \Gamma$ are loc*

$$P'(x_0) = e^{\int_0^T \nabla\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))dt}, \tag{43}$$

unde $\nabla \cdot \mathbf{f}$ reprezintă divergenţa câmpului vectorial $\mathbf{f}$.

Demonstraţie Fără a restrânge generalitatea, presupunem $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ şi $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ paralel cu axa Ox_1, deci $\Pi = Ox_2$. Are loc, pentru $y \in Ox_2$,

$$P(y) = \Phi^2_{\tau(y)}((0, y)),$$

unde $\Phi_t(x_1, x_2) = (\Phi^1_t(x_1, x_2), \Phi^2_t(x_1, x_2))$. Derivând, obţinem :

$$\begin{aligned} P'(y) &= \frac{d}{dt}\Phi^2_{\tau(y)}((0, y)) \cdot \tau'(y) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_{\tau(y)}((0, y)) = \\ &= f_2(\Phi_{\tau(y)}((0, y))) \cdot \tau'(y) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_{\tau(y)}((0, y)). \end{aligned} \tag{44}$$

Pe de altă parte, ţinând seama de alegerea transversalei, are loc

$$\Phi^1_{\tau(y)}((0, y)) = 0$$

şi derivând această egalitate obţinem:

$$\frac{d}{dt}\Phi^1_{\tau(y)}((0, y)) \cdot \tau'(y) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_{\tau(y)}((0, y)) = 0,$$

deci

$$\tau'(y) = -\frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_{\tau(y)}((0, y))}{f_1(\Phi_{\tau(y)}((0, y)))}. \tag{45}$$

Înlocuind (45) în (44) obţinem:

(46)
$$P'(y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_{\tau(y)}((0,y)) \cdot f_1(\Phi_{\tau(y)}((0,y))) - f_2(\Phi_{\tau(y)}((0,y))) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_{\tau(y)}((0,y))}{f_1(\Phi_{\tau(y)}((0,y)))}.$$

Ţinând seama acum de proprietatea semigrupală a sistemelor dinamice, are loc:

$$\Phi_{t+T}(x_1,x_2) = \Phi_T(\Phi^1_t(x_1,x_2), \Phi^2_t(x_1,x_2))$$

şi, prin derivare în raport cu t în $t=0$, obţinem:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t \mid_{t=T} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_T \cdot f_1(\Phi_0) + \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi_T \cdot f_2(\Phi_0),$$

de unde avem că:

$$\begin{cases} f_1(\Phi_T) = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Phi^1_T \cdot f_1(\Phi_0) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_T \cdot f_2(\Phi_0) \\ \\ f_2(\Phi_T) = & \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Phi^2_T \cdot f_1(\Phi_0) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_T \cdot f_2(\Phi_0) \end{cases}.$$

Pentru simplitatea scrierii am omis argumentele funcţiilor, care se deduc usor din ecuaţia precedentă. Din acest sistem, obţinem că

$$f_1(\Phi_0) = \frac{\dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_T \cdot f_1(\Phi_T) - f_2(\Phi_T) \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_T}{\dfrac{\partial}{\partial x_1}\Phi^1_T \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_T - \dfrac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_T \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Phi^2_T}. \tag{47}$$

În ecuaţia (47) luăm $(x_1, x_2) = (0,0)$ şi înlocuim în egalitatea (46) pentru $y = 0$. Obţinem astfel

$$P'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi^1_T(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^2_T(0) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Phi^1_T(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi^2_T(0).$$

Dar acesta nu este altceva decât determinantul derivatei in raport cu datele iniţiale a lui Φ_t (v. [**5**],[**18**]). Putem deci aplica teorema lui Liouville (v. [**5**]) şi obţinem (43). ■

Corolar 4.1.1. *Soluţia periodică $\mathbf{x}(t)$, de perioadă T, este asimptotic stabilă dacă*

$$\int_0^T \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))dt < 0$$

şi este instabilă dacă

$$\int_0^T \nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))dt > 0.$$

Dacă are loc egalitatea, atunci situaţia este indecisă, putând avea loc, după caz, atât stabilitatea cât şi instabilitatea.

4.2. Teorema Poincaré-Bendixson

În acest paragraf este studiată structura mulţimilor ω-limită în cazul soluţiilor mărginite la $+\infty$, ale ecuaţiei (42) în dimensiune 2, adică $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Rezultatul central al acestui paragraf este *teorema Poincaré-Bendixson*, care spune în esenţă că mulţimile ω-limită, care nu conţin puncte staţionare ale sistemului, sunt traiectorii periodice ale acestuia.Vom demonstra pentru început câteva rezultate preliminare.

Vom numi *transversală* la câmpul vectorial $\mathbf{f}$ un segment închis de dreaptă l ce nu conţine puncte în care $\mathbf{f} \parallel l$.

Observaţia 4.2.1. Fiecare punct nestaţionar pentru sistem este conţinut într-o transversală.

Lema 4.2.1. *a) O transversală este intersectată de traiectorii în aceeaşi direcţie.*
b) Daca $\mathbf{x}_0 \in l$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate B_δ a lui $\mathbf{x}_0$, astfel încât $\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0)$ intersectează pe l la un moment t, $|t| < \varepsilon$.

Demonstraţie a) Rezultă imediat din faptul că l este transversală la câmpul vectorial f.
b) Pentru simplitate, să presupunem că $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$, iar $l \subset Ox_1$. Pentru a demonstra afirmaţia, trebuie rezolvată, în raport cu t, ecuaţia $\Phi_t^2(\mathbf{x}) = 0$, în vecinătatea punctului $(t, \mathbf{x}) = (0, \mathbf{0})$. Întrucât

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^2(\mathbf{0})|_{t=0} = f_2(\mathbf{0}) \neq 0,$$

afirmaţia rezultă prin aplicarea teoremei funcţiilor implicite. ∎

Lema 4.2.2. *Un arc finit A al unei orbite γ intersectează pe l într-un număr finit de puncte ordonate. Dacă γ este orbită periodică, atunci $\gamma \cap l = \{\mathbf{x}_0\}$.*

Demonstraţie Faptul că punctele de intersecţie sunt ordonate pe l s-a demonstrat în paragraful precedent (v. observaţia 4.1.2). Rămâne de arătat că punctele de intersecţie sunt în număr finit. Raţionăm prin reducere la absurd şi presupunem că nu ar fi aşa. Atunci acestea ar forma un şir pe l, $\mathbf{x}(t_n)$, $t_n \to t_0$ (arcul este finit). Există atunci $\xi_n \in (t_n, t_{n+1})$ astfel încât

$$\mathbf{x}'(\xi_n) = \frac{x(t_{n+1}) - x(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \parallel l.$$

Trecând la limită, obţinem că $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{x}'(t_0) \parallel l$, ceea ce contrazice faptul că l este transversală.

În cazul unei orbite periodice, să presupunem că aceasta ar intersecta l succesiv în P_1 şi P_2. Fie Γ curba Jordan formată din arcul de traiectorie cuprins între cele două puncte şi segmentul $[P_1, P_2]$. Să presupunem, pentru a face o alegere, că $\gamma^+(P_2)$ intră mai întâi în interiorul curbei Γ. Traiectoria γ este însă periodică, deci $\gamma^+(P_2)$ trebuie să ajungă în punctul P_1. Aceasta nu se poate întâmpla înainte ca $\gamma^+(P_2)$ să iasă din $\operatorname{int}\Gamma$, pentru că segmentul $[P_1, P_2]$ nu poate fi intersectat în unicul mod posibil, fiind vorba de o transversală, decât din exteriorul curbei Γ. Această trecere dintr-o componentă conexă a planului în cealaltă nu se poate face deci, decât intersectând arcul deschis de traiectorie cuprins între punctele P_1 şi P_2 ceea ce nu se poate deoarece P_1 nu ar mai aparţine în acest fel orbitei periodice. Un raţionament analog se face în situaţia în care $\gamma^+(P_2)$ intersectează mai întâi exteriorul curbei Γ. Contradicţia la care am ajuns ne arată că o transversală intersectează o traiectorie periodică în cel mult un punct. ■

Lema 4.2.3. *Daca $\gamma^+ \cap \omega(\gamma^+) \neq \emptyset$, atunci γ^+ este orbită periodică.*

Demonstraţie Să presupunem că γ^+ nu ar fi orbită periodică. Fie $\mathbf{x}_0 \in \gamma^+ \cap \omega(\gamma^+)$. Întrucât $\mathbf{x}_0$ este punct regulat, fie l o transversala la câmpul vectorial $\mathbf{f}$ în $\mathbf{x}_0$. Cum $\mathbf{x}_0 \in \omega(\gamma^+)$ rezultă că γ^+ intră în vecinătăţi oricât de mici ale lui $\mathbf{x}_0$. Aceasta implică, conform lemei 4.2.1, că γ^+ intersectează pe l într-o infinitate de puncte în vecinătatea lui $\mathbf{x}_0$, iar aceste puncte formează un şir monoton $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n, ...$ pe l (observaţia 4.1.2) care nu poate converge la $\mathbf{x}_0$. ■

Observaţia 4.2.2. Analizând demonstraţia lemei precedente, se observă că $l \cap \omega(\gamma^+)$ nu poate conţine decât cel mult un punct.

Lema 4.2.4. *Dacă $\omega(\gamma^+)$ conţine o orbită periodică, atunci coincide cu aceasta.*

Demonstraţie Să presupunem că $\omega(\gamma^+)$ ar conţine o orbită periodică $\gamma_{\mathbf{x}}$ cu care nu coincide . Ştim că $\omega(\gamma^+)$ este mulţime conexă şi fie $\mathbf{y} \in \gamma_{\mathbf{x}}$ punct de acumulare pentru $\omega(\gamma^+) \setminus \gamma_{\mathbf{x}}$. Fie, de asemenea, o transversală l în $\mathbf{y}$. Pentru $\mathbf{z} \in \omega(\gamma^+) \setminus \gamma_{\mathbf{x}}$ suficient de apropiat de $\mathbf{y}$, $\gamma_{\mathbf{z}}$ intersectează pe l într-un punct diferit de $\mathbf{y}$ pentru că $\gamma_z \subset \omega(\gamma^+) \setminus \gamma_{\mathbf{x}}$, ceea ce contrazice lema 4.2.3 şi observaţia 4.2.2. ■

În acest moment putem demonstra rezultatul principal al acestui paragraf:

Teorema 4.2.1. *(Poincaré-Bendixson) Fie γ^+ semiorbită mărginită pentru care $\omega(\gamma^+)$ nu conţine decât puncte regulate ale lui* $\mathbf{f}$. *Atunci $\omega(\gamma^+)$ este orbită periodică. Dacă $\gamma^+ \neq \omega(\gamma^+)$ atunci $\omega(\gamma^+)$ se numeşte ciclu limită.*

Demonstraţie Fie $\mathbf{x}_0 \in \omega(\gamma^+)$ şi fie $\mathbf{x} \in \omega(\mathbf{x}_0) \subset \omega(\gamma^+)$. Din ipoteză, $\mathbf{x}$ este punct regulat Fie l o transversală în $\mathbf{x}$. Ţinând seama de observaţia 4.2.2, avem că $l \cap \omega(\gamma^+) = \{\mathbf{x}\}$. Rezultă atunci că $\gamma_{\mathbf{x}_0}$ este orbită periodică. Într-adevăr, aceasta trebuie să intersecteze l în $\mathbf{x}$ sau în puncte oricât de apropiate de $\mathbf{x}$, ori această ultimă situaţie nu este posibilă. Rezultă deci, că $\mathbf{x} \in \gamma_{\mathbf{x}_0}$ şi, conform lemei 4.2.3, $\gamma_{\mathbf{x}_0}$ este orbită periodica. Din lema 4.2.4 obţinem că $\omega(\gamma^+)$ este orbită periodică. ■

4.3. Ecuaţii diferenţiale pe tor

Vom studia ecuaţia (42) în care $\mathbf{f}$ este un câmp vectorial pe torul 2-dimensional $T^2 = S^1 \times S^1$.
Considerăm mai întâi cazul cel mai simplu, $\mathbf{f}(x_1, x_2) = (\alpha, \beta)$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.3.1. *Dacă raportul* $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta} \in \mathbf{Q}$, *atunci orice curbă integrală este închisă (soluţiile ecuaţiei sunt periodice). Dacă* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, *atunci orice curbă integrală este densă peste tot în tor.*

Demonstraţie Să presupunem că $\lambda \in \mathbf{Q}$, ceea ce înseamna că $\lambda = p/q$, $p, q \in \mathbf{Z}$. Rezolvând ecuaţia, obţinem

$$x_1 = x_1^0 + \alpha t,\ x_2 = x_2^0 + \beta t.$$

Se observă că, pentru $\bar{t} = \dfrac{2p\pi}{\alpha} = \dfrac{2q\pi}{\beta}$,

$$x_1(\bar{t}) = x_1^0 (\mathrm{mod}\, 2\pi),\ x_2(\bar{t}) = x_2^0 (\mathrm{mod}\, 2\pi),$$

deci soluţia ecuaţiei pe tor este periodică.
Pentru a studia cazul $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$ avem nevoie de câteva rezultate preliminare, ce prezintă un interes deosebit.

Fie M o varietate diferenţiabilă (subvarietate a unui spaţiu euclidian) şi $\mathbf{f}$ un câmp vectorial pe M. Considerăm ecuaţia (42) în această situaţie şi fie $\varphi(t)$ o soluţie a acesteia.

Se spune că orbita φ este *uniform distribuită* în $D \subset M$, dacă

$$\lim_{T \to \infty} \frac{\mu\{t \in [0, T] : \varphi(t) \in D\}}{T} = \frac{\mu(D)}{\mu(M)}.$$

Fie $g : M \to \mathbf{R}$. Numim *media temporală* a lui g, de-a lungul traiectoriei $\{\Phi_t(\mathbf{x}), t \geq 0\}$, limita (în cazul în care aceasta există)

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\Phi_t(\mathbf{x})) dx =: \widehat{g}(\mathbf{x}).$$

În cele ce urmează ne plasăm în ipotezele teoremei 4.3.1.

Propoziţia 4.3.1. *Dacă* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$, *atunci pentru orice functie continuă (sau Riemann integrabilă)* g, *definită pe* M, *are loc egalitatea între media în raport cu timpul şi media spaţială, mai precis:*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(\Phi_t(x)) dx = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g dx_1 dx_2. \tag{48}$$

Demonstraţie Demonstrăm mai întâi (48) pentru funcţii de forma $e^{i(k,x)}$ unde $k = (k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^2, (k, x) = k_1 x_1 + k_2 x_2$. Fie $\omega = (\alpha, \beta)$. Are loc, pentru

$k \neq 0$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T e^{i(k,x+\omega t)}dt = \frac{1}{T}e^{i(k,x)}\int_0^T e^{i(k,\omega)t}dt = \frac{e^{i(k,x)}}{i(k,\omega)}\cdot\frac{1}{T}[e^{i(k,\omega)T}-1] \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Pe de altă parte,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k,x)}dx_1dx_2 = 0,$$

deci (48) este satisfăcută în această situaţie (cazul $k = 0$ este evident). Din liniaritate rezultă teorema pentru polinoame trigonometrice, complexe sau reale. În cazul general, teorema rezultă din faptul că orice funcţie continuă pe tor poate fi aproximată în topologia convergenţei uniforme prin polinoame trigonometrice. Cazul funcţiilor integrabile poate fi tratat asemănator, ţinând seama că o funcţie integrabilă poate fi aproximată uniform, cu exceptia unei mulţimi de măsură oricât de mică, cu funcţii continue. ■

În acest moment putem încheia demonstraţia teoremei 4.3.1, folosind propoziţia 4.3.1 în care luăm pe $g = \chi_D$, funcţia caracteristică a unei mulţimi deschise $D \subset T^2$, şi obţinând chiar ceva mai mult şi anume că soluţiile sunt uniform distribuite. ■

Observaţia 4.3.1. Putem să considerăm ecuaţii pe torul n-dimensional $T^n, \mathbf{f}(x) = \omega = (\omega_{1,\ldots,}\omega_n)$. Se demonstrează analog că, daca ω este nerezonant (pentru orice $\mathbf{k} \in \mathbf{Z}^n$, $(\mathbf{k},\omega) \neq 0$), atunci traiectoriile sunt uniform distribuite, deci dense peste tot.

Observaţia 4.3.2. Propoziţia 4.3.1 este de fapt un caz particular al unui rezultat central în teoria ergodică şi anume *teorema Birkhoff-Khinchin* (v.[**8**] p.11). Menţionăm aici enunţul acestei teoreme.

Fie (M,Σ,μ) un spaţiu cu masură de probabilitate, $f \in L^1(M)$ şi $T : M \to M$ un endomorfism (T măsurabilă şi pentru orice $A \in \Sigma$, $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))$). Atunci *a.p.t.* $\mathbf{x} \in M$ următoarea limită există şi este finită:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(\mathbf{x})) \overset{def}{=} \overline{f}(\mathbf{x}).$$

În cazul unui semiflux Φ_t de endomorfisme (se presupune în plus că pentru orice f măsurabilă pe M funcţia $(t,\mathbf{x}) \to f(\Phi_t(\mathbf{x}))$ este măsurabilă) există *a.p.t.* $\mathbf{x} \in M$ limita

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(\Phi_t(\mathbf{x})) \overset{def}{=} \overline{f}(\mathbf{x}).$$

Mai mult, $\overline{f}$ este invariantă adică $\overline{f}(T(\mathbf{x})) = \overline{f}(\mathbf{x})$, respectiv $\overline{f}(\Phi_t(\mathbf{x})) = \overline{f}(\mathbf{x})$. $\overline{f} \in L^1(M)$ şi

$$\int_M f(\mathbf{x})d\mu = \int_M \overline{f}(\mathbf{x})d\mu.$$

Rămâne de observat că, în cazul unui *sistem dinamic ergodic* (cu proprietatea că dacă A este mulţime invariantă atunci în mod necesar $\mu(A) = 0$ sau 1) atunci o funcţie invariantă la flux este constantă *a.p.t.*

În cele ce urmează vom studia ecuaţia (42) pe torul 2-dimensional, în cazul general. Vom presupune că $f_1 \neq 0$. Aceasta înseamnă că orice traiectorie a sistemului face o infinitate de turaţii în plan longitudinal. Aceasta ne spune că putem defini aplicaţia Poincaré care asociază unui punct de pe un meridian, de exemplu $\{0\} \times S^1$, punctul următor de intersecţie al traiectoriei care trece prin punct, cu meridianul respectiv. Mai precis, ţinând seama că ecuaţia (42) este echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}, \tag{49}$$

definim

$$P(y_0) = y(2\pi, 0, (0, y_0)).$$

Se observă că P are proprietatea că $P(y + 2\pi) = P(y) + 2\pi$, deci putem privi pe P şi ca aplicaţie de la S^1 la S^1. Evident, P este un difeomorfism care păstrează orientarea pe cerc şi putem scrie:

$$P(y) = y + p(y),$$

unde p este o funcţie 2π periodică cu $p'(y) > -1$. Funcţia p se numeşte *funcţie unghiulară.*

Observaţia 4.3.3. Studiul proprietăţilor sistemului dinamic pe tor se reduce astfel la studiul proprietăţilor unui difeomorfism al cercului. Astfel, de exemplu, punctele periodice ale lui P corespund orbitelor închise.

Definiţia 4.3.1. *Numărul de rotaţie* se defineşte ca fiind limita (dacă aceasta există)

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{p(y) + p(Py) + ... + p(P^{n-1}y)}{n}. \tag{50}$$

Teorema 4.3.2. *Numărul de rotaţie există şi definiţia nu depinde de y. Acesta este raţional dacă şi numai dacă există traiectorii închise (sau, echivalent, există puncte periodice ale difeomorfismului P pe S^1).*

Demonstraţie Fie

$$p_n(y) = p(y) + p(Py) + ... + p(P^{n-1}y) = P^n y - y \quad .$$

Să arătăm mai întâi că pentru orice y_1, y_2,

$$|p_n(y_1) - p_n(y_2)| < 2\pi.$$

Aceasta implică în particular că, dacă limita în (50) există pentru un y_1, atunci aceasta există pentru orice y şi acestea sunt egale.

Într-adevăr, cum P^n duce intervale de lungime 2π în intervale de lungime 2π şi este o funcţie crescătoare, dacă $0 \leq y_1 < y_2 < 2\pi$,

$$|p_n(y_1) - p_n(y_2)| = |(P^n y_2 - P^n y_1) - (y_2 - y_1)| < 2\pi.$$

Dacă $|y_1 - y_2| \geq 2\pi$ ţinem seama de faptul că p_n este o funcţie 2π periodică şi ne putem raporta la cazul precedent.

Pe de altă parte,

$$\frac{p_{nm}(0)}{mn} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\frac{1}{n} p_n(P^{kn} 0)}{m}$$

şi, întrucât $|p_n(y) - p_n(0)| < 2\pi$ pentru orice y, rezultă că

$$|\frac{p_{nm}(0)}{mn} - \frac{p_n(0)}{n}| < \frac{2\pi}{n},$$

deci

$$|\frac{p_m(0)}{m} - \frac{p_n(0)}{n}| < \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m} \underset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Rezultă că limita în (50) există şi este finită, deci numărul de rotaţie este bine definit şi nu depinde de y.

Să arătăm acum ca $\mu \in \mathbf{Q}$ dacă şi numai dacă există traiectorii închise. Să presupunem mai întâi că există traiectorii închise, deci există $y \in S^1$ şi $n \in \mathbf{N}_+$ astfel încât $P^n y = y \bmod 2\pi$ deci $p_n(y) = 2m\pi$ cu $m \in \mathbf{Z}$. Un calcul simplu arată că $\mu = \dfrac{m}{n}$.

Reciproc, să presupunem că $\mu = \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$. Dacă pentru orice y, $p_n(y) > 2\pi m$, atunci $p_n(y) > 2\pi m + \delta$ cu $\delta > 0$ suficient de mic. Deci ar trebui ca $\mu > \dfrac{m}{n}$, absurd. La fel, nu putem avea $p_n(y) < 2\pi m$ pentru orice y. Rezultă existenţa unui y, $p_n(y) = 2\pi m$. Evident, traiectoria ce trece prin y este închisă. ■

4.4. Indexul punctelor staţionare izolate

Vom defini indexul unei curbe în raport cu un câmp vectorial şi, ţinând seama de proprietăţile acestuia, vom defini indexul unui punct staţionar izolat al unui câmp vectorial.

Fie $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, continuă şi Γ o curbă Jordan în Ω, orientată, ce nu conţine puncte staţionare ale lui $\mathbf{f}$ ($\mathbf{x}$ este staţionar dacă $f(\mathbf{x}) = 0$).

Definiţia 4.4.1. *Indexul* $I_{\mathbf{f}}(\Gamma)$ al *curbei* Γ *în raport cu câmpul vectorial* $\mathbf{f}$ este dat de variaţia unghiului Θ făcut de $\mathbf{f}$ cu axa Ox_1, când curba Γ este parcursă o dată în sens pozitiv în raport cu orientarea dată:

$$I_f(\Gamma) = \frac{\Delta\Theta}{2\pi}.$$

Observaţia 4.4.1. Indexul depinde numai de restricţia lui $\mathbf{f}$ la Γ. Dacă pe Γ are loc $\mathbf{f}(x) = \lambda(x)\mathbf{g}(x)$, atunci $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = I_{\mathbf{g}}(\Gamma)$.

Observaţia 4.4.2. Se observă că indexul este un număr întreg şi depinde continuu de $\mathbf{f}$. Dacă $\mathbf{F}(s,\cdot)$ este o familie de câmpuri vectoriale astfel încât, pentru orice $0 \leq s \leq 1$, $\mathbf{F}(s,\cdot)$ nu are puncte staţionare pe Γ, atunci $I_{\mathbf{F}(0,\cdot)}(\Gamma) = I_{\mathbf{F}(1,\cdot)}(\Gamma)$. Indexul are deci proprietatea de *invarianţă la omotopie.*

Observaţia 4.4.3. Dacă $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = 0$, atunci, privind pe $\mathbf{f}$ ca pe o funcţie cu valori complexe, pentru $\mathbf{x} \in \Gamma$, $\mathbf{f} = \rho(\mathbf{x})e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ unde $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă iar $\rho(\mathbf{x}) = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$.
Γ este o curbă Jordan deci este imaginea homeomorfă a unui cerc. Fie $h : S^1 \to \Gamma$ acest homeomorfism. Fie $g(\mathbf{x}) = e^{id\theta(h^{-1}(\mathbf{x}))}$ câmp vectorial pe Γ. Se observă atunci că $I_{\mathbf{g}}(\Gamma) = d$. Reciproc, dacă $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = d$, întrucât $\mathbf{f}e^{id\theta(h^{-1}(\mathbf{x}))}$ are index nul, rezultă că $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})e^{i(\varphi(\mathbf{x})+d\theta(h^{-1}(\mathbf{x})))}$.

Propoziţia următoare dă două formule de calcul pentru index :

Propoziţia 4.4.1. *Să presupunem că Γ este o curbă C^1 şi, de asemenea, $\mathbf{f} \in C^1(\Gamma)$ cu $|\mathbf{f}| = 1$. Atunci*

$$I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_{\tau} ds, \tag{51}$$

unde $\mathbf{f}_{\tau}$ este derivata lui $\mathbf{f}$ de-a lungul lui Γ, $\mathbf{f}_{\tau} = \nabla\mathbf{f} \cdot \tau$, τ fiind câmpul vectorial unitar tangent la Γ, orientat pozitiv.

Dacă, în plus, interiorul curbei $\operatorname{int}\Gamma = D \subset \Omega$ *şi* $\mathbf{u} \in C^1(\overline{D}, \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{u} = \mathbf{f}$ *pe ∂D atunci*

$$I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{D} \mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u}_{x_2} dx_1 dx_2, \tag{52}$$

unde, pentru două câmpuri vectoriale $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T, \mathbf{v} = (v^1, v^2)^T$ produsul exterior $\wedge$ este definit prin $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u^1 v^2 - u^2 v^1$.

Demonstraţie Câmpul vectorial $\mathbf{f}$ se scrie $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = e^{i\Theta(\mathbf{x})}$ unde Θ este definită pe Γ şi este continuă cu excepţia unui punct unde are un salt $\Delta\Theta$. întrucât $\mathbf{f}_{\tau} = i\Theta_{\tau}e^{i\Theta}$ rezultă că $\mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_{\tau} = \Theta_{\tau}$ şi prima expresie a indexului rezultă din formula lui Leibniz.

Fie acum $\mathbf{u}$ cu proprietăţile din enunţ. Se observă că

$$\mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u}_{x_2} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u})).$$

Folosind formula lui Stokes şi, ţinând seama că pe Γ $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_{x_2} = \Theta_{x_2}$, $\mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u} = -\Theta_{x_1}$, $\nu_1 = \tau_2$, $\nu_2 = -\tau_1$, obţinem

$$\begin{aligned}\int_D \mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u}_{x_2} dx_1 dx_2 &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma} (\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}_{x_2})\nu_1 + (\mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u})\nu_2 ds = \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Gamma} \Theta_{\tau} ds = \pi I_{\mathbf{f}}(\Gamma).\end{aligned}$$

■

COROLAR 4.4.1. *Dacă* $\mathbf{f}(x) = \lambda(x)\tau(x)$ *pe* Γ, *cu* $\lambda(x) \neq 0$ *atunci* $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = +1$. *Dacă* Γ *este orbită periodică corespunzătoare lui* f, *atunci* $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = \pm 1$.

TEOREMA 4.4.1. *Dacă* Γ *este o curbă Jordan astfel încât nu există puncte staţionare ale lui* $\mathbf{f}$ *pe* Γ *sau în interiorul său* D, *atunci* $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = 0$.

Demonstraţie Vom face demonstraţia în cazul în care atât Γ cât şi $\mathbf{f}$ sunt de clasă C^1. Fie $\mathbf{u} = \mathbf{f}/|\mathbf{f}|$. Ţinând seama de Remarca 4.4.1, $I_{\mathbf{u}}(\Gamma) = I_{\mathbf{f}}(\Gamma)$. Folosim formula de calcul dedusă mai sus şi obţinem că

$$I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = \frac{1}{\pi}\int_D \mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u}_{x_2} dx_1 dx_2.$$

Dar, întrucât $|\mathbf{u}|^2 = 1$, rezultă prin derivare $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{x_1} = 0$ şi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{x_2} = 0$ deci $\mathbf{u}_{x_1} \wedge \mathbf{u}_{x_2} = 0$ şi $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = 0$. ■

COROLAR 4.4.2. *O orbită periodică* Γ *conţine cel puţin un punct staţionar al lui* $\mathbf{f}$ *în interiorul său.*

OBSERVAŢIA 4.4.4. În acelaşi mod rezultă că, dacă Γ_1, Γ_2 sunt două curbe Jordan orientate pozitiv, cu Γ_1 inclusă în interiorul lui Γ_2, astfel încât câmpul vectorial $\mathbf{f}$ să nu aibă puncte staţionare în domeniul ce are drept frontieră $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, atunci $I_{\mathbf{f}}(\Gamma_1) = I_{\mathbf{f}}(\Gamma_2)$. Având în vedere acest lucru putem da următoarea definiţie:

DEFINIŢIA 4.4.2. *Indexul unui punct staţionar izolat* $\mathbf{x}_0$ *al câmpului vectorial* $\mathbf{f}$ *este*

$$I_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = I_{\mathbf{f}}(\Gamma),$$

unde Γ *este o curbă Jordan orientată pozitiv ce conţine în interiorul său numai un punct staţionar al lui* $\mathbf{f}$ *şi anume* $\mathbf{x}_0$.

OBSERVAŢIA 4.4.5. Dacă interiorul curbei Γ, care este orientată pozitiv, conţine un număr finit de puncte staţionare ale lui $\mathbf{f}$, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$, atunci $I_{\mathbf{f}}(\Gamma) = \sum_i I_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_i)$. Aceasta rezultă imediat folosind a doua formulă de calcul pentru index.

Să calculăm acum indexul unui punct staţionar izolat nedegenerat $\mathbf{x}_0$ al lui $\mathbf{f}$. În jurul lui $\mathbf{x}_0$ are loc

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|),$$

cu $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det \mathbf{A} \neq 0$. Rezultă că, pentru $r > 0$ suficient de mic, $s\mathbf{f}(\mathbf{x}) + (1 - s)\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \neq 0$ pentru $0 \leq s \leq 1$. Rezultă că, pe ∂B_r , câmpurile vectoriale $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ şi $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ sunt omotope şi deci $I_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) = I_{\mathbf{f}}(\partial B_r) = I_{\mathbf{g}}(\partial B_r) = I_{\mathbf{g}}(\partial B_1)$. Folosind (51) obţinem

$$I_{\mathbf{g}}(\partial B_1) = \frac{(ad - bc)}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (c\cos\theta + d\sin\theta)^2}.$$

Membrul drept în formula de mai sus este continuu ca funcţie de (a, b, c, d) cu $ad - bc \neq 0$. Să presupunem că $ad - bc > 0$. Distingem două situaţii şi anume $ad > 0$ sau $ad \leq 0$. Dacă $ad > 0$ facem $b, c \to 0$ şi $d \to a$ iar dacă $ad \leq 0$ facem $a, d \to 0$ şi $b \to c$ şi obţinem:

$$I_{\mathbf{g}}(\partial B_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = +1.$$

În acelaşi fel se obţine $I_{\mathbf{g}}(\partial B_1) = -1$ dacă $\det \mathbf{A} < 0$. ■

Am obţinut aşadar următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 4.4.2. *Indexul punctului staţionar nedegenerat $\mathbf{x}_0$ al lui $\mathbf{f}$ este egal cu semnul determinantului Jacobian al lui $\mathbf{f}$ în $\mathbf{x}_0$.*

4.5. Exerciţii şi probleme

4.1. Fie sistemul

$$\begin{cases} x' = -y + x(1 - r^2) \\ y' = x + y(1 - r^2) \end{cases}.$$

Să se arate ca $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$ este orbită periodică şi să se calculeze aplicaţia Poincaré. Studiaţi stabilitatea acestei orbite.

4.2. Să se scrie în coordonate polare sistemul

$$\begin{cases} x' = \mu x + y - x\sqrt{x^2 + y^2} \\ y' = -x + \mu y - y\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}.$$

Să se arate că acesta are o orbită periodică şi să se determine aplicaţia Poincaré pentru aceasta. Ce se poate spune despre stabilitatea acesteia?

4.3. Să se determine aplicaţia perioadă pentru ecuaţia

$$x'' + 3x' + 2x = \cos t.$$

Să se găsească punctele periodice pentru aceasta şi să se studieze stabilitatea.

4.4. Să se arate că $\gamma(t) = (2\cos 2t, \sin 2t)^T$ este orbită periodică pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = -4y + x(1 - \frac{x^2}{4} - y^2) \\ \\ y' = x + y(1 - \dfrac{x^2}{4} - y^2) \end{cases}$$

şi să se studieze stabilitatea acesteia.

4.5. Să se arate că sistemele

$$(1) \begin{cases} x' = x - y - (x^2 + 3y^2/2)x \\ y' = x + y - (x^2 + y^2/2)y \end{cases},$$

$$(2) \begin{cases} x' = 2x + 2y - x(2x^2 + y^2) \\ y' = -2x + y - y(2x^2 + y^2) \end{cases},$$

$$(3) \begin{cases} x' = -y - x^3 + x \\ y' = x - y^3 + y \end{cases},$$

(4) $\begin{cases} x' = x + y - x^3 - 6xy^2 \\ y' = 2y - 8y^3 - x^2y - x/2 \end{cases}$

au cicluri limită.

4.6. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă, simplu conexa şi $\mathbf{f} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$ un câmp vectorial astfel încât $\nabla \cdot \mathbf{f}$ păstrează semn constant în D şi are un număr finit de zerouri. Să se arate că în D nu există orbite periodice corespunzătoare lui $\mathbf{f}$ (Criteriul lui Bendixson)

4.7. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x' = x - y - x^3 \\ y' = x + y - y^3 \end{cases}$$

are o unică orbită periodică în mulţimea $A = \{\mathbf{x}, 1 < |\mathbf{x}| < \sqrt{2}\}$

4.8. Fie sistemul

$$\begin{cases} x' = -y + x(r^4 - 3r^2 + 1) \\ y' = x + y(r^4 - 3r^2 + 1). \end{cases}$$

Să se arate că există exact două orbite periodice, una în discul $\{\mathbf{x}, |\mathbf{x}| < 1\}$ şi una în mulţimea $A = \{\mathbf{x}, 1 < |\mathbf{x}| < 3\}$.

4.9. Să se arate că ecuaţia

$$x'' + \varepsilon\left(x^2 + x'^2 - 1\right)x' + x^3 = 0$$

are cel puţin o soluţie periodică.

4.10. Considerăm ecuaţia lui Lienard în ipotezele precizate în exemplul 1.2.3. Să se arate că ecuaţia are un ciclu limită care este stabil.

4.11. Să se determine indexul punctelor staţionare pentru sistemele:

(1) $\begin{cases} x' = -x^2 + 3y^2 \\ y' = 2xy \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} x' = xy^3 \\ y' = x^2 - y^4 \end{cases}$.

4.12. Să se determine indexul punctelor staţionare ale ecuaţiei pendulului cu frecare

$$x'' = -kx' - A\sin x,$$

unde $A, k > 0$.

CAPITOLUL 5

Stabilitate structurală

În acest capitol introducem noţiunea de *stabilitate stucturală*. Demonstrăm teorema lui Hartman-Grobman de stabilitate a punctelor hiperbolice şi studiem cazul difeomorfismelor cercului, în strânsă legătură cu sistemele dinamice pe tor, precum şi câmpurile vectoriale pe varietăţi 2-dimensionale. În dimensiune 1 sau 2 proprietatea de stabilitate structurală este generică, în sensul că este caracteristică unei mulţimi deschise şi dense de sisteme dinamice. Unul din modurile de apariţie a haosului poate fi gândit ca fiind instabilitatea structurală. Există exemple de sisteme dinamice pe varietăţi 3 -dimensionale ce sunt structural instabile, iar în vecinătatea acestora nu există sisteme dinamice structural stabile.

Clasificarea modurilor în care un sistem dinamic, depinzând de un parametru, îşi schimbă structura topologică atunci când parametrul variază, face obiectul teoriei bifurcaţiilor. Nu ne propunem să facem o introducere în această teorie, ci numai să prezentăm elementele ce influenţează stabilitatea structurală, deci, prezenţa punctelor de bifurcaţie. Bifurcaţiile pot fi locale, cele datorate schimbării stabilităţii punctelor staţionare sau orbitelor periodice ale sistemului, sau globale, atunci când schimbarea stabilităţii se datorează aspectelor globale ale fluxului. Aspecte privind bifurcaţiile locale au fost deja întâlnite în capitolul 2. Aspectele globale ale unui sistem dinamic, ce pot influenţa stabilitatea structurală a acestuia, pot fi numărul de rotaţie, orbitele homoclince sau heteroclinice etc.

5.1. Noţiuni introductive

Definiţia 5.1.1. Fie două sisteme dinamice (M_1, Φ_t) şi (M_2, Ψ_t) două sisteme dinamice. Vom spune că acestea sunt *topologic echivalente* dacă există un homeomorfism $h : M_1 \to M_2$ care transformă traiectoriile primului sistem dinamic în traiectoriile celui de-al doilea păstrând sensul, dar nu neapărat parametrizarea.

Observaţia 5.1.1. Dacă este vorba de sisteme dinamice discrete, atunci acestea sunt definite prin funcţii continue $F_i : M_i \to M_i$. În această situaţie vom spune că F_1 şi F_2 sunt topologic echivalente şi aceasta se întâmplă dacă există h, ca mai sus ,astfel încât $F_2 \circ h = h \circ F_1$.

Fie acum M o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ (sau o varietate diferenţiabilă privită ca subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$) şi fie $\mathbf{f}$ un câmp vectorial pe M. Definim $\| \mathbf{f} \|_1 = \sup_M \{|\mathbf{f}(\mathbf{x})| + |D\mathbf{f}(\mathbf{x})|\}$.

DEFINIŢIA 5.1.2. Dat câmpul vectorial $\mathbf{f}$ (sau sistemul dinamic generat de acesta), vom spune că acesta este *structural stabil* dacă există $\varepsilon > 0$, astfel încât pentru orice câmp vectorial $\mathbf{g}$, $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ pe CK unde $K \subset M$ este un compact şi $\| \mathbf{f} - \mathbf{g} \|_1 < \varepsilon$, atunci sistemele dinamice generate de $\mathbf{f}, \mathbf{g}$ sunt topologic echivalente.

DEFINIŢIA 5.1.3. O aplicaţie continuă $F : M \to M$ este *structural stabilă* dacă există $\varepsilon > 0$ astfel încât, dacă $F = G$ pe CK unde $K \subset M$ compact şi $\| F - G \|_0 = \sup_M |F(x) - G(x)| < \varepsilon$, atunci F şi G sunt topologic echivalente.

OBSERVAŢIA 5.1.2. Între punctele staţionare şi orbitele periodice ale unor sisteme dinamice topologic echivalente există o corespondenţă biunivocă. Remarcăm totuşi că echivalenţa topologică nu face distincţie între noduri proprii, improprii şi puncte spirale. De exemplu, câmpurile vectoriale liniare din $\mathbb{R}^2$ date de aplicaţiile liniare cu matricile

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

sunt topologic echivalente deşi $\mathbf{0}$ este în fiecare situaţie punct staţionar de alt tip. În mod evident, însă, echivalenţa topologică face distincţie între puncte şa şi atractori stabili sau instabili.

Fie un sistem dinamic (M_1, Φ_t^{μ}) depinzând de un parametru $\mu \in \mathbb{R}^m$.

DEFINIŢIA 5.1.4. Se spune că μ_0 este un *punct de bifurcaţie* pentru sistem dacă acesta, pentru $\mu = \mu_0$, este structural instabil şi în orice vecinătate a lui μ_0 există $\mu_1, \mu_2 \neq \mu_0$, astfel încât sistemele corespunzătoare nu sunt topologic echivalente.

Menţionăm că, în general, în teoria bifurcaţiilor se consideră sisteme diferenţiale depinzând de un parametru :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x},\mu).$$

În continuare prezentăm, fără demonstraţie, *teorema lui Sard*, foarte utilă pentru a arăta genericitatea anumitor proprietăţi. Fie M o varietate diferenţiabilă de dimensiune n. Fie $A \subset M$ o submulţime. Spunem că A este de măsură (n-dimensională) nulă dacă pentru orice hartă locală (D, φ), $\varphi^{-1}(A)$ este de măsură nulă.

Fie acum M_1, M_2 două varietăţi de dimensiuni finite şi fie o aplicaţie netedă $F : M_1 \to M_2$. Un punct $\mathbf{x} \in M_1$ se numeşte *punct critic* pentru F dacă $\operatorname{rang} DF(\mathbf{x}) < \dim M_2$. Un punct $\mathbf{c} \in M_2$ se numeşte *valoare critică* a lui F dacă $F^{-1}(\mathbf{c})$ conţine măcar un punct critic.

TEOREMA 5.1.1. *(Sard) Mulţimea valorilor critice ale lui F este de măsură nulă.*

Pentru demonstraţie se poate consulta de exemplu [**1**], p.94.

5.2. Teorema Hartman-Grobman

Pentru aplicaţiile diferenţiabile, deci pentru sistemele dinamice cu timp discret definite de aplicaţii diferenţiabile, *teorema Hartman-Grobman* are următorul enunţ:

TEOREMA 5.2.1. *Fie* $\mathbf{P} : B_\delta(\mathbf{0}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *difeomorfism local astfel încât* $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *şi* $D\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{A}$ *este o matrice făra valori proprii de modul* 1. *Atunci* $\mathbf{P}$ *este topologic echivalent, în vecinătatea lui* $\mathbf{0}$, *cu aplicaţia liniară cu matricea* $\mathbf{A}$.

Demonstraţie Să observăm mai întâi că există un difeomorfism $\mathbf{F}$ al lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\mathbf{F} = \mathbf{P}$ într-o vecinătate suficient de mică a lui $\mathbf{0}$. Pentru aceasta fie $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ pe $B_1(\mathbf{0})$, $\varphi = 0$ pe $CB_2(\mathbf{0})$. Atunci, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic un astfel de difeomorfism este $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi_\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{x})$ unde $\varphi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Pentru a demonstra teorema e suficient să arătăm că există un homeomorfism $\mathbf{H}$ al lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $\mathbf{F}(\mathbf{H}(\mathbf{x})) = \mathbf{H}(\mathbf{A}\mathbf{x})$ pentru orice $\mathbf{x}$. Dacă scriem $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$ şi $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$, rezultă că trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională

$$\mathbf{h}(\mathbf{A}\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})) \tag{53}$$

în $C^0(\mathbb{R}^n)$. Notând cu

$$\mathbf{L}\mathbf{h}(\mathbf{x}) := \mathbf{h}(\mathbf{A}\mathbf{x}) - \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{T}\mathbf{h}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

avem de rezolvat ecuaţia

$$\mathbf{L}\mathbf{h} = \mathbf{T}\mathbf{h} + \mathbf{f}. \tag{54}$$

Să studiem pentru început ecuaţia liniară

$$\mathbf{L}\mathbf{h} = \mathbf{f}. \tag{55}$$

Ţinând seama că $\mathbf{A}$ nu are valori proprii de modul 1, rezultă că $\mathbb{R}^n$ se descompune în sumă directă de subspaţii invariante ale lui $\mathbf{A}$, corespunzătoare valorilor proprii de modul mai mare, respectiv mai mic decât 1. Făcând o schimbare de bază în $\mathbb{R}^n$, putem presupune că $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}$ cu $|\lambda_i(\mathbf{A}_1)| > 1$, $|\lambda_i(\mathbf{A}_2)| < 1$. Fie, de asemenea, $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ şi $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ componentele lui $\mathbf{f}$ şi $\mathbf{h}$ în cele două subspaţii şi

$$\mathbf{K}\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Evident,

$$\| \mathbf{K} \| = \| \mathbf{K}^{-1} \| = 1,$$

unde $\| \cdot \|$ este norma uzuală din $L(C^0(\mathbb{R}^n), C^0(\mathbb{R}^n))$, spaţiul operatorilor liniari continui din $C^0(\mathbb{R}^n)$. Ecuaţia (55) se rescrie în forma

$$\begin{cases} (\mathbf{K} - \mathbf{A}_1)\mathbf{h}_1 &= \mathbf{f}_1 \\ (\mathbf{K} - \mathbf{A}_2)\mathbf{h}_2 &= \mathbf{f}_2. \end{cases}$$

Este suficient să demonstrăm că cei doi operatori $K - A_i$ sunt inversabili. Pentru aceasta să observăm că $\| \mathbf{A}_1^{-1} \| < 1$, $\| \mathbf{A}_2 \| < 1$ şi deci seriile următoare sunt convergente şi definesc operatorii inverşi :

$$-\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{I} + (\mathbf{K}\mathbf{A}_1^{-1}) + (\mathbf{K}\mathbf{A}_1^{-1})^2 + ...) = (\mathbf{K} - \mathbf{A}_1)^{-1}$$
$$\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{I} + (\mathbf{A}_2\mathbf{K}^{-1}) + (\mathbf{A}_2\mathbf{K}^{-1})^2 + ...) = (\mathbf{K} - \mathbf{A}_2)^{-1}.$$

Există deci operatorul $\mathbf{L}^{-1} \in L(C^0(\mathbb{R}^n), C^0(\mathbb{R}^n))$. Să studiem acum ecuaţia neliniară (54), care este echivalentă cu

$$\mathbf{h} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{h} + \mathbf{L}^{-1}\mathbf{f} =: \mathbf{\Theta}\mathbf{h}.$$

Să arătam că membrul drept este o contracţie pentru $\| f \|_{C^1}$ suficient de mică:

$$\| \mathbf{\Theta}\mathbf{h}_1 - \mathbf{\Theta}\mathbf{h}_2 \| = \| \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{h}_1 - \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{h}_2 \| \leq C \| \mathbf{T}\mathbf{h}_1 - \mathbf{T}\mathbf{h}_2 \| =$$
$$= C \sup_{\mathbf{x}} |\mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_1(\mathbf{x})) - \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_2(\mathbf{x})| \leq C \| \mathbf{f} \|_{C^1} \| \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 \| .$$

Într-adevăr, pentru $\| \mathbf{f} \|_{C^1} < 1/C$ operatorul neliniar $\mathbf{\Theta}$ este o contracţie într-un spaţiu Banach şi are deci un unic punct fix $\mathbf{h}$, $\| \mathbf{h} \|_{C^0}$ mică dacă $\| \mathbf{f} \|_{C^1}$ este mică.

Rămâne de arătat că $\mathbf{H} = \mathbf{I} + \mathbf{h}$ este homeomorfism. Cum H este continuă, este suficient de aratat săraătăm că H este bijecţie.

Surjectivitatea rezultă printr-un argument topologic şi anume din faptul ca pentru orice $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\deg(\mathbf{I} + \mathbf{h}, \mathbf{y}, \partial B_R) = \deg(\mathbf{I}, \mathbf{y}, \partial B_R)$ pentru R suficient de mare.

Pentru a demonstra injectivitatea, să observăm că dacă $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{y})$, atunci $\mathbf{H}(\mathbf{A}^n\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{A}^n\mathbf{y})$ deci $\mathbf{A}^n\mathbf{x} - \mathbf{A}^n\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{y})$. Dar dacă $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, $|\mathbf{A}^n\mathbf{x} - \mathbf{A}^n\mathbf{y}| \to \infty$ pentru $n \to \infty$ sau pentru $n \to -\infty$. Însă $|\mathbf{h}(\mathbf{x}) - \mathbf{h}(\mathbf{y})| \leq 2 \| \mathbf{h} \|_{C^0}$, deci $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. ■

Să considerăm acum sistemul diferenţial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

$\mathbf{f} : B_\delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,$\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ şi fie $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{0})$. În cazul sistemului dinamic cu timp continuu definit de sistemul diferenţial, teorema Hartman-Grobman are următorul enunţ :

TEOREMA 5.2.2. *Dacă* $\mathbf{A}$ *nu are valori proprii cu partea reală* 0 *atunci sistemul dinamic definit de* $\mathbf{f}$ *este topologic echivalent cu sistemul dinamic determinat de câmpul vectorial liniar* $\mathbf{Ax}$. *Mai mult, homeomorfismul ce determină echivalenţa topologică poate fi ales să păstreze şi parametrizarea traiectoriilor.*

Demonstraţia acestei teoreme, ceva mai tehnică, o vom omite. Aceasta se bazează pe teorema precedentă şi pe teorema 3.2.3 (asupra stabilităţii condiţionale, existenţa varietăţilor stabilă şi instabilă).

Menţionăm în continuare două rezultate de persistenţă la perturbaţii a punctelor staţionare şi a orbitelor periodice hiperbolice la mici perturbaţii. Fie $\mathbf{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

TEOREMA 5.2.3. *Dacă* $\mathbf{x}_0$ *este un punct staţionar hiperbolic al lui* $\mathbf{f}$*, atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $\delta > 0$ *astfel încât dacă* $\| \mathbf{f} - \mathbf{g} \|_{C^1} < \delta$*, atunci* $\mathbf{g}$ *are un punct staţionar hiperbolic* $\mathbf{y}_0$ *într-o* $\varepsilon-$*vecinătate a lui* $\mathbf{x}_0$*. Mai mult,* $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ *şi* $D\mathbf{g}(\mathbf{y}_0)$ *au acelaşi număr de valori proprii cu partea reală negativă, respectiv pozitivă.*

TEOREMA 5.2.4. *Dacă* Γ *este o orbită periodică hiperbolică pentru câmpul vectorial* $\mathbf{f}$*, atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $\delta > 0$ *astfel încât, dacă* $\| \mathbf{f} - \mathbf{g} \|_{C^1} < \delta$*, atunci* $\mathbf{g}$ *are într-o* $\varepsilon-$*vecinătate a lui* Γ *o orbită periodică hiperbolică. Varietăţile stabile, respectiv instabile, corespunzătoare celor două orbite periodice, au aceeaşi dimensiune.*

5.3. Sisteme dinamice în dimensiune 1 şi 2.

În acest paragraf se prezintă câteva rezultate privind stabilitatea structurală a sistemelor dinamice pe cerc şi a sistemelor dinamice pe torul bidimensional, cu referire la cazul general al varietăţilor diferenţiabile de dimensiune 2.

Pentru început să considerăm un câmp vectorial $\mathbf{f}$ pe S^1 . Acest câmp vectorial poate fi privit ca o funcţie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de perioadă 2π. Are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 5.3.1. *Câmpul vectorial* f *defineşte un sistem dinamic structural stabil dacă şi numai dacă are numai puncte staţionare nedegenerate.*

Două câmpuri vectoriale structural stabile sunt topologic echivalente dacă şi numai dacă au acelaşi număr de puncte staţionare.

Câmpurile vectoriale structural stabile formează o mulţime deschisă şi densă în mulţimea câmpurilor vectoriale pe cerc.

Demonstraţie Fie câmpul vectorial f care are numai puncte staţionare nedegenerate. Atunci acestea sunt în număr finit şi punctele stabile alternează cu cele instabile. Mai precis, orice traiectorie converge pentru $t \to \infty$ la un punct staţionar stabil şi pentru $t \to -\infty$ la un punct staţionar instabil. Stabilitatea structurală în această situaţie este evidentă, iar echivalenţa topologică a două câmpuri vectoriale ce au acelaşi număr de puncte staţionare nedegenerate şi numai pe acestea, rezultă imediat.

Rămâne de arătat că un câmp vectorial f ce are şi puncte staţionare degenerate poate fi perturbat oricât de puţin astfel încât să obţinem un câmp vectorial numai cu puncte staţionare nedegenerate. Pentru aceasta, ţinând seama de lema lui Sard, mulţimea acelor ε care sunt valori critice pentru f este de măsură 0. Deci există $\varepsilon > 0$ oricât de mic astfel încât $f_\varepsilon = f - \varepsilon$ nu are puncte staţionare degenerate şi $f_\varepsilon \to f$ când $\varepsilon \to 0$. ■

Pentru sistemele dinamice cu timp discret, mai exact în cazul difeomorfismelor cercului ce păstrează orientarea menţionăm următorul rezultat:

TEOREMA 5.3.2. *Un difeomorfism $T : S^1 \to S^1$ al cercului ce păstrează orientarea este structural stabil dacă şi numai dacă numărul său de rotaţie este raţional şi toate ciclurile sunt nedegenerate. Mulţimea difeomorfismelor structural stabile formează o mulţime deschisă şi densă în mulţimea C^2 difeomorfismelor ce păstrează orientarea.*

OBSERVAŢIA 5.3.1. Amintim că un difeomorfism al cercului $T : S^1 \to S^1$, ce păstrează orientarea, poate fi privit ca un difeomorfism $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că $T(y + 2\pi) = T(y) + 2\pi$. Putem deci scrie $T(y) = y + t(y)$ cu t funcţie 2π periodică şi $t'(y) > -1$. Numărul de rotaţie al difeomorfismului este

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} \frac{t(y) + t(Ty) + ... + t(T^{n-1}y)}{n}.$$

Un ciclu de ordin q , $(y, Ty, ..., T^{q-1}y, T^q y = y)$ se numeşte nedegenerat dacă 1 nu este valoare proprie pentru $DT^q(y)$.

Această teoremă este o consecinţa a următorului rezultat al lui Denjoy (v.[**1**] p. 107):

TEOREMA 5.3.3. *(Denjoy) Un difeomorfism al cercului, ce păstrează orientarea şi are număr de rotaţie iraţional μ, este topologic echivalent cu rotaţia cercului de unghi $2\pi\mu$.*

În ce priveşte stabilitatea câmpurilor vectoriale pe varietăţi 2-dimensionale generale, următoarea teoremă a lui Peixoto dă o caracterizare completă:

TEOREMA 5.3.4. *Fie f un C^1 câmp vectorial pe o varietate 2-dimensională compactă. Atunci f este structural stabil dacă şi numai dacă sistemul dinamic corespunzător are următoarele proprietăţi :*

(1) *are un număr finit de puncte staţionare şi de cicluri care sunt hiperbolice,*
(2) *nu are orbite heteroclinice sau homoclinice,*
(3) *mulţimea "nonwandering" conţine numai puncte staţionare şi cicluri limită.*

În plus, dacă varietatea M este orientabilă, atunci mulţimea câmpurilor vectoriale structural stabile este deschisă şi densă în mulţimea câmpurilor vectoriale pe M.

Tinând cont de rezultatul asupra stabilităţii structurale a difeomorfismelor cercului rezultă imediat următoarea teoremă în cazul câmpurilor vectoriale $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^T : T^2 \to T^2$, $f_1 \neq 0$:

TEOREMA 5.3.5. *Câmpul vectorial $\mathbf{f}$ pe tor este structural stabil dacă şi numai dacă numărul de rotaţie (al aplicaţiei Poincaré) este raţional şi toate orbitele periodice sunt nedegenerate.*

OBSERVAŢIA 5.3.2. Existenţa sistemelor dinamice structural instabile, în vecinătatea cărora nu există alte sisteme dinamice structural stabile, este un mod de a justifica apariţia haosului. Astfel, în 1965, Smale a construit un difeomorfism $f : T^3 \to T^3$:

$$f(x, y, z) \stackrel{def}{=} \left(2x + y, x + y, \frac{z}{2}\right) (\operatorname{mod} 2\pi)$$

şi a arătat că în vecinătatea acestuia nu există difeomorfisme structural stabile (v.[**1**], p.142). În consecinţă, pe o varietate 4-dimensională, de exemplu T^4, există un câmp vectorial ce nu poate fi transformat într-un câmp vectorial structural stabil prin mici prturbaţii.

5.4. Exerciţii şi probleme

5.1. Să se studieze stabilitatea structurală a sistemelor dinamice date de următoarele ecuaţii şi sisteme

(1) $x' = \cos x$;
(2) $x' = x^4$;
(3) $x' = \mu - x^2$;
(4) $x' = \mu x - x^2$;
(5) $x' = \mu x - x^3$;
(6) $x'' + 4x' + x = 0$;
(7) $x'' + \mu(x^2 - 1) + x = 0$;
(8) $x' = 2 - \cos x$, $y' = 1$, $(x, y) \in T^2$;
(9) $x' = 1 - 3\cos x$, $y' = 1$, $(x, y) \in T^2$.

5.2. Să se găsească punctele de bifurcaţie pentru sistemele liniare cu următoarele matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & \mu - 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Să se arate că următoarele sisteme

(1) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y^2 - \mu \end{cases}$,

(2) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = \mu y - y^2 \end{cases}$,

(3) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = \mu y - y^3 \end{cases}$,

sunt structural instabile pentru $\mu = 0$ şi să se schiţeze portretul fazelor pentru $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$. Menţionăm că cele 3 exemple corespund la trei tipuri genrice de bifurcaţii în puncte staţionare nehiperbolice : *şea-nod*, *transcritic*, respectiv *furcă*.

5.4. Să se arate că $\mu = 1/2$ este punct de bifurcaţie pentru sistemul

$$\begin{cases} x' = x - \mu y - x(x^2 + y^2) \\ y' = \mu x + y - y(x^2 + y^2) - \mu \end{cases}.$$

5.5. Să se discute stabilitatea punctelor de echilibru şi să se determine bifurcaţiile pentru ecuaţia

$$x'' = -x^3 + \mu(x^2 - 1).$$

5.6. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x' = \mu x + y - x(x^2 + y^2) \\ y' = -x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{cases}.$$

Să se arate că $\mu = 0$ este punct de bifurcaţie. Vezi şi problema 3.8. O astfel de bifurcaţie, în care apar cicluri limită, se numeşte *bifurcaţie Hopf.*

5.7. Să se arate că ecuaţia

$$x'' + (x^2 + x'^2 - \mu)x' + x = 0$$

are în $\mu = 0$ o bifurcaţie de tip Hopf.

5.8. Să se arate că sistemul

$$\begin{cases} x' = y - y^2 \\ y' = x + \mu y \end{cases}$$

este structural instabil pentru $\mu = 0$. Mai precis, să se arate că acesta are o orbită homoclinică pentru $\mu = 0$, care dispare când $\mu \neq 0$. În această situaţie este vorba de o bifurcaţie homoclinică. Să se arate de asemenea că sistemul

$$\begin{cases} x' = 1 - x^2 \\ y' = xy + \mu \end{cases}$$

are o orbită heteroclinică pentru $\mu = 0$ care dispare când $\mu \neq 0$. Să se schiţeze portretul fazelor pentru cele două sisteme.

CAPITOLUL 6

Sisteme hamiltoniene

În acest capitol deducem ecuaţiile lui Lagrange, folosind principiul minimei acţiuni, şi apoi ecuaţiile lui Hamilton, folosind transformata Legendre. Aceste ecuaţii sunt fundamentale în studiul fenomenelor mecanice. Scopul final al acestui capitol este introducerea noţiunii de sistem integrabil şi prezentarea teoremei de caracterizare a lui Liouville. În acest context se introduc coordonatele acţiune-unghi, în care mişcarea într-un sistem hamiltonian integrabil se descompune într-o mişcare de translaţie uniformă şi o miscare condiţional periodică pe torul T^n.

6.1. Ecuaţiile Euler-Lagrange şi sisteme hamiltoniene

Calculul variaţiilor. Fie $L : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^1. În mecanica clasică, *principiul minimei acţiuni al lui Maupertuis*se exprimă matematic prin problema de calculul variaţiilor:

$$\inf_{x \in M} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))dt, \tag{56}$$

unde $M = \{\mathbf{q} : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0,\ \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1, \mathbf{q}$ continuă şi C^1 pe porţiuni$\}$. Să presupunem că $\mathbf{q}$ realizează infimul în (56). Atunci, dacă $\varphi \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ cu $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$, rezultă $\mathbf{x} + s\varphi \in M$ şi

$$\frac{d}{ds} \int_{t_0}^{t_1} L(t, \mathbf{q}(t) + s\varphi(t), \mathbf{q}'(t) + s\varphi'(t))dt \mid_{s=0} = 0.$$

Obţinem

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))\varphi(t) + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}'}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))\varphi'(t)dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} [\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) - \frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}'}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))]]\varphi(t)dt.$$

Întrucât φ este ales arbitrar cu proprietăţile menţionate, rezultă că

$$\frac{d}{dt}[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}'}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t))] - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t, \mathbf{q}(t), \mathbf{q}'(t)) = 0. \tag{57}$$

Acestea sunt *ecuaţiile Euler-Lagrange* care formează un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea. Studiul fenomenelor mecanice cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange formează mecanica lagrangeană. O curbă care verifică ecuaţiile Euler-Lagrange se numeşte *extremală*. Aceasta nu realizează în mod necesar infimul funcţionalei respective.

Sisteme hamiltoniene. Menţionăm pentru început, fără demonstraţie, câteva rezultate de analiză convexă, de care avem nevoie. Demonstraţiile acestora, precum şi cadrul cel mai general în care noţiunile prezentate se definesc, pot fi găsite de exemplu în [**4**].

Fie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie convexă. Aceasta, fiind definită pe un spaţiu finit dimensional, este şi continuă. *Subdiferenţiala* sa în punctul $\mathbf{x}$ se defineşte prin

$$\partial f(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{u} - \mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n\}.$$

Subdiferenţiala există în orice punct şi este mulţime închisă şi convexă. Legătura dintre subdiferenţială şi derivata Gâteaux este următoarea:

PROPOZIŢIA 6.1.1. *Dacă funcţia convexă f este Gâteaux diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$, atunci $\partial f(\mathbf{x}_0)$ conţine un singur element şi anume $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.*

Reciproc, dacă $\partial f(\mathbf{x}_0)$ conţine un singur element, atunci f este Gâteaux diferenţiabilă în $\mathbf{x}_0$ şi $\partial f(\mathbf{x}_0) = \{\nabla f(\mathbf{x}_0)\}$.

Transformata Legendre, sau *conjugata* funcţiei f, este funcţia

$$f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) - f(\mathbf{x})\}.$$

Are loc inegalitatea lui Young, care rezultă imediat din definiţia conjugatei:

$$f^*(\mathbf{x}^*) + f(\mathbf{x}) \geq (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}).$$

Proprietăţile fundamentale ale funcţiei conjugate sunt date de următoarea propoziţie:

PROPOZIŢIA 6.1.2. *f^* este convexă, continuă şi $f^{**} = f$. Următoarele condiţii sunt echivalente:*

(1) $\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x})$,
(2) $\mathbf{x} \in \partial f(\mathbf{x}^*)$,
(3) $f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}^*)$.

Cu aceste elemente de analiză convexă, deducem în continuare ecuaţiile lui Hamilton din ecuaţiile Euler-Lagrange şi arătăm apoi echivalenţa acestora. Scopul este de a transforma sistemul diferenţial de ordinul al doilea format de ecuaţiile Euler-Lagrange într-un sistem diferenţial de ordinul întâi. Sistemul obţinut este canonic, în sensul următor: ecuaţiile Euler-Lagrange sunt bine formulate în fibratul tangent al unei varietăţi diferenţiabile TM (M este varietatea pe care coordonate locale sunt notate generic cu $\mathbf{q}$ iar lagrangeanul L este o funcţie netedă pe TM). Transformarea descrisămai jos duce sistemul Euler-Lagrange într-un sistem diferenţial de ordinul întâi definit pe fibratul cotangent T^*M, care are o structură naturală de varietate simplectică. Acest nou sistem, sistemul hamiltonian, este invariant la schimbări canonice de coordonate în T^*M.

Să presupunem în plus că $\mathbf{q}^* \to L(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^*)$ este funcţie strict convexă. Fie transformata sa Legendre în raport cu $\mathbf{q}^*$:

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) := \sup_{\mathbf{q}^*\in\mathbb{R}^n} (\mathbf{p},\mathbf{q}^*) - L(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^*)$$

numită *hamiltonian*. Din stricta convexitate a lui L şi faptul că $L \in C^1$, rezultă că hamiltonianul este o funcţie de clasă C^1. Aceste ipoteze de regularitate pe care le impunem sunt mai tari decât necesar, însă ne permit o prezentare simplă şi rapidă a ideilor principale.

Se notează cu

$$\mathbf{p}(t) := \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}'}(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{q}'(t)),$$

şi se numeşte *vectorul impulsurilor generalizate*. Din propoziţia 6.1.2 rezultă că

$$\mathbf{q}'(t) = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}). \tag{58}$$

Din ecuaţiile Euler-Lagrange rezultă că:

$$\mathbf{p}'(t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q}(t),\mathbf{q}'(t)). \tag{59}$$

Pe de altă parte,

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = (\mathbf{p},\mathbf{q}^*) - L(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^*) \tag{60}$$

unde $\dfrac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^*}(t,\mathbf{q},\mathbf{q}^*) = \mathbf{p}$ deci, din propoziţia 6.1.2, obţinem că

$$\mathbf{q}^* = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}). \tag{61}$$

Derivând în raport cu $\mathbf{q}$ egalitatea (60) şi ţinând seama de (61), obţinem

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p})).$$

Introducând în (59) obţinem, împreună cu (58),

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{q}'(t) & = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) \\ & \\ \mathbf{p}'(t) & = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) \end{array} \right. . \tag{62}$$

Acestea sunt *ecuaţiile lui Hamilton* sau *sistemul hamiltonian*.

Dacă notăm cu $\mathbf{x} = (\mathbf{q},\mathbf{p})^T$ şi cu $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}$, unde $\mathbf{0}_n, \mathbf{I}_n$ sunt matricile nulă, respectiv identitate din $\mathcal{M}_{n\times n}$, atunci sistemul hamiltonian se poate rescrie în forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{J}\nabla H(t,\mathbf{x}). \tag{63}$$

Observaţia 6.1.1. Ecuaţiile lui Hamilton nu apar în mecanică numai aplicând transformata Legendre ecuaţiilor lui Lagrange. Aceasta motivează şi considerarea hamiltonienilor neconvecşi în $\mathbf{p}$. Pentru o deducere a ecuaţiilor lui Hamilton, independentă de transformata Legendre, se poate consulta [**3**], Ch.1,§3.4.

Fie acum doi hamiltonieni $F(t,\mathbf{q},\mathbf{p}), G(t,\mathbf{q},\mathbf{p})$. *Paranteza Poisson* a acestora se defineşte ca fiind

$$\{F,G\} := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \mathbf{q}}.$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\{\{F,G\},H\} + \{\{G,H\},F\} + \{\{H,F\},G\} = 0. \tag{64}$$

Aceasta se numeşte *identitatea lui Jacobi.*

Evoluţia lui F de-a lungul fluxului hamiltonian generat de H este

$$\frac{d}{dt}F = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{q}' + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \mathbf{p}' + \frac{\partial F}{\partial t} = \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{65}$$

Aceasta este *forma Lax* a unui sistem hamiltonian.

Rezultă, în cazul autonom (H nu depinde explicit de timp), că H este integrală primă. Din acest motiv este important să observăm că un sistem hamiltonan se poate transforma într-un sistem hamiltonian echivalent care, în plus, este autonom. Pentru a realiza acest lucru introducem pentru început, ca necunoscută suplimentară, $q_0 = t$ şi ecuaţia care apare în plus este $q_0' = 1$. Pentru a păstra formularea canonică, hamiltoniană, trebuie introdusă coordonata conjugată p_0 şi un nou hamiltonian

$$\widetilde{H}(\mathbf{q},q_0,\mathbf{p},p_0) := H(q_0,\mathbf{q},\mathbf{p}) + p_0.$$

Se verifică uşor că cele două sisteme hamiltoniene sunt echivalente ţinând seama că

$$p_0' = -\frac{\partial \widetilde{H}}{\partial q_0} = -\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{d}{dt}H(\mathbf{q},\mathbf{p},t),$$

şi considerând

$$p_0 = -H(\mathbf{q},\mathbf{p},t).$$

Exemple. Studiu local al sistemelor hamiltoniene.

Exemplul 6.1.1. Fie un sistem de n puncte materiale cu vectorii de poziţie $\mathbf{r}_i$, ce se mişcă într-un câmp de forţe potenţial conform ecuaţiilor de miscare ale lui Newton:

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}_i') + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \tag{66}$$

unde $U = U(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_n)$ este potenţialul. Considerăm lagrangeanul

$$L(\mathbf{r},\mathbf{r}') = T - U,$$

unde

$$T=\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{|\mathbf{r}_i'|^2}{2}$$

reprezintă energia cinetică a sistemului. Se observă că

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i'}=\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i'}=m_i\mathbf{r}_i', \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i}=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i},$$

deci evoluţia în sistemul (66) coincide cu mişcarea dată de ecuaţiile lui Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}'}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}=0$$

deci curbele integrale sunt extremale pentru funcţionala $\int L dt$.

Exemplul 6.1.2. Considerăm cazul, ceva mai general, al unui sistem mecanic pentru care lagrangianul asociat este

$$L(\mathbf{q},\mathbf{q}')=T(\mathbf{q}')-U(\mathbf{q})$$

, energia cinetică fiind dată de o formă pătratică:

$$T(\mathbf{q}')=\frac{1}{2}\sum a_{ij}q_i'q_j'=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{q}',\mathbf{q}').$$

Se observă că hamiltonianul corespunzător este

$$H(\mathbf{q},\mathbf{p})=\mathbf{L}^*(\mathbf{q},\mathbf{p})=T(\mathbf{q}')+U(\mathbf{q}), \quad \mathbf{p}=\mathbf{A}\mathbf{q}'.$$

Aşadar, în cazul sistemelor mecanice, hamiltonianul este dat de energia totală. Lăsăm ca exerciţiu faptul că, dacă T este o formă pătratică pozitiv definită, atunci un punct staţionar al sistemului hamiltonian, de forma $(\mathbf{q},\mathbf{0})$ cu $\mathbf{q}$ punct de minim local al energiei potenţiale, este stabil.

În cele ce urmează, vom considera sistemul hamiltonian autonom:

$$\mathbf{x}'=\begin{pmatrix}\mathbf{q}'\\ \mathbf{p}'\end{pmatrix}=\mathbf{J}\nabla H(\mathbf{x})=\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{q},\mathbf{p})\\[2ex] -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p})\end{cases}, \tag{67}$$

cu hamiltonian de clasă C^2, şi vom caracteriza pentru început punctele staţionare nedegenerate.

Fie $\overline{\mathbf{x}}$ un punct staţionar. Sistemul liniarizat în jurul acestuia este

$$\mathbf{y}'=\mathbf{J}\nabla^2 H(\overline{x})\mathbf{y},$$

unde $\nabla^2 H$ reprezintă matricea hessiană a lui H. Un sistem liniar de forma

$$\mathbf{x}'=\mathbf{J}\mathbf{S}\mathbf{x},$$

unde $\mathbf{S}$ este o matrice simetrică, este un sistem hamiltonian cu hamiltonian $\frac{1}{2}(\mathbf{S}\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Fie $\mathbf{A} = \mathbf{J}\nabla^2 H(\overline{x})$. Arătăm că dacă λ este valoare proprie pentru $\mathbf{A}$, atunci şi $-\lambda, \pm\overline{\lambda}$ sunt valori proprii. Întrucât matricea este reală, rezultă imediat că, dacă λ este valoare proprie, atunci $\overline{\lambda}$ este de asemenea valoare proprie. Pe de altă parte, $-\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}^T\mathbf{J} = \mathbf{I}$ şi

$$\mathbf{J}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\mathbf{J} = \mathbf{0}.$$

Deci dacă $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ rezultă că $\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{v} = -\lambda\mathbf{J}\mathbf{v}$, deci $-\lambda$ este valoare proprie pentru $\mathbf{A}^T$ şi pentru $\mathbf{A}$. ■

Obţinem aşadar următorul rezultat:

PROPOZIŢIA 6.1.3. *Punctele staţionare hiperbolice ale sistemelor hamiltoniene nu pot fi decât puncte şa. În cazul sistemelor hamiltoniene liniare în dimensiune* 2*, punctele staţionare nedegenerate pot fi centri sau puncte şa.*

Motivul pentru care punctele staţionare hiperbolice ale unui sistem hamiltonian nu pot fi decât puncte şa rezultă şi din faptul că fluxul hamiltonian păstrează volumele. Aceasta este o consecinţă a următorului rezultat:

TEOREMA 6.1.1. *Fluxul generat de sistemul diferenţial*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

cu $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$*, păstrează volumele.*

Demonstraţie Fie Φ_t fluxul generat şi fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime mărginită şi măsurabilă. Notăm volumul la momentul t cu $v(t) = v(\Phi_t(D))$ şi are loc

$$v(t) = \int_D \det \frac{\partial \Phi_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dx$$

Pe de altă parte, din teorema de derivabilitate în raport cu datele iniţiale,

$$\mathbf{X}(t) := \frac{\partial \Phi_t(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$$

este matrice fundamentală pentru sistemul differenţial liniar

$$\mathbf{y}' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\Phi_t(\mathbf{x}))\mathbf{y},$$

cu $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Rezultă, din teorema lui Liouville (v.[**5**]), că

$$\det \mathbf{X}(t) = e^{\int_0^t \mathrm{Tr}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\Phi_s(\mathbf{x}))\mathbf{ds}} = e^{\int_0^t \nabla\cdot\mathbf{f}(\Phi_s(\mathbf{x}))\mathbf{ds}} = 1,$$

deci $v(t) = v(0)$. ■

Fluxul hamiltonian păstrează volumele deoarece $\nabla \cdot \mathbf{J}\nabla H = 0$.

6.2. Integrabilitate

Invarianţi. Transformări canonice.

Considerăm sistemul hamiltonian (67). Să notăm cu Φ_t^H fluxul hamiltonian generat de H. Notăm $\mathbf{X}_H := \mathbf{J}\nabla H$. Am văzut că F este integrală primă pentru sistem dacă şi numai dacă $\{F,H\}=0$. În cele ce urmează vom pune în evidenţă o semnificaţie mai profundă a parantezelor Poisson, mai exact, vom vedea că $\{F,H\}=0$ dacă şi numai dacă fluxurile hamiltoniene corespunzătoare celor doi hamiltonieni comută.

Fie $\mathbf{X}$ un câmp vectorial pe $\mathbb{R}^m$ şi fie $\Phi_t^{\mathbf{X}}$ fluxul generat de acesta ($\Phi_t^H = \Phi_t^{\mathbf{J}\nabla H}$). Fie $\mathcal{F}$ mulţimea funcţiilor derivabile. *Derivata Lie* este operatorul $L_{\mathbf{X}}:\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ definit prin:

$$(L_{\mathbf{X}}F)(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\Phi_t^{\mathbf{X}}(\mathbf{x})),$$

adică derivata funcţiilor de-a lungul curbelor integrale ale lui $\mathbf{X}$. Pentru un câmp vectorial hamiltonian $\mathbf{X}_G$ are loc

$$(L_{\mathbf{X}_G}F)(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \{F,G\}(\mathbf{q},\mathbf{p})$$

şi, ţinând seama de identitatea lui Jacobi (64), obţinem

$$L_{\mathbf{X}_{\{G,H\}}}F = (L_{\mathbf{X}_H}L_{\mathbf{X}_G} - L_{\mathbf{X}_G}L_{\mathbf{X}_H})F$$

deci, dacă $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ este un câmp vectorial astfel încât

$$L_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]} = L_{\mathbf{Y}}L_{\mathbf{X}} - L_{\mathbf{X}}L_{\mathbf{Y}}, \tag{68}$$

rezultă că

$$L_{\mathbf{X}_{\{G,H\}}} = L_{[\mathbf{X}_G,\mathbf{X}_H]}.$$

Câmpul vectorial $[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ se numeşte *comutatorul* câmpurilor vectoriale $\mathbf{X},\mathbf{Y}$. Acesta există şi este unic determinat. Într-adevăr, dacă ţinem seama că

$$L_{\mathbf{X}}F = \sum_i \mathbf{X}_i F_{,i},$$

(am notat cu $F_{,i} = \dfrac{\partial F}{\partial x_i}$) obţinem:

$$L_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]}F = (L_{\mathbf{Y}}L_{\mathbf{X}} - L_{\mathbf{X}}L_{\mathbf{Y}})F = \sum_{i,j}(\mathbf{Y}_i\mathbf{X}_{j,i} - \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_{j,i})F_{,j}\,,$$

deci comutatorul este câmpul vectorial cu componentele

$$[\mathbf{X},\mathbf{Y}]_j = \sum_i \mathbf{Y}_i\mathbf{X}_{j,i} - \mathbf{X}_i\mathbf{Y}_{j,i}.$$

Să studiem acum comutativitatea fluxurilor generate de câmpurile vectoriale $\mathbf{X}$ şi $\mathbf{Y}$, mai exact să vedem când $\Phi_t^{\mathbf{X}}\circ\Phi_s^{\mathbf{Y}} = \Phi_s^{\mathbf{Y}}\circ\Phi_t^{\mathbf{X}}$ pentru t,s suficient de mici. Pentru aceasta estimăm diferenţa $F(\Phi_t^{\mathbf{X}} \circ \Phi_s^{\mathbf{Y}}(x)) - F(\Phi_s^{\mathbf{Y}} \circ \Phi_t^{\mathbf{X}})$:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} |_{s=t=0} [F(\Phi_t^{\mathbf{X}} \circ \Phi_s^{\mathbf{Y}}(x)) - F(\Phi_s^{\mathbf{Y}} \circ \Phi_t^{\mathbf{X}}(x))] =$$
$$= (L_{\mathbf{Y}} L_{\mathbf{X}} F - L_{\mathbf{X}} L_{\mathbf{Y}} F)(x) = L_{[\mathbf{X},\mathbf{Y}]} F(x).$$

Dacă fluxurile comută, are loc $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$.

Reciproc, dacă $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = 0$, rezultă că

$$F(\Phi_t^{\mathbf{X}} \Phi_s^{\mathbf{Y}}(x)) - F(\Phi_s^{\mathbf{Y}} \Phi_t^{\mathbf{X}}(x)) = o(t^2 + s^2) \quad , \quad t, s \to 0$$

pentru orice funcţie F şi în orice punct x. Se poate arăta (v. [**2**], p. 212), că aceasta implică comutativitatea fluxurilor.

În continuare studiem schimbările de coordonate care transformă sistemul hamiltonian (67) în alt sistem hamiltonian, posibil mai simplu, echivalent cu acesta. Fie deci schimbarea de coordonate

$$\begin{cases} \mathbf{q} &= \mathbf{q}(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}) \end{cases} .$$

Pentru o funcţie $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ notăm $\overline{F}(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}))$. Sistemul hamiltonian asociat lui $\overline{H}$ se scrie, ţinând seama de (65),

$$\overline{F}' = \{\overline{F}, \overline{H}\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}}.$$

Pentru ca fluxul hamiltonian generat de $\overline{H}$ să coincidă cu cel generat de H trebuie ca

$$\{\overline{F}, \overline{H}\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} = \{F, H\}_{q,p}.$$

Calculând parantezele Poisson, relaţia de mai sus se rescrie

$$\{\overline{F}, \overline{H}\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} = \sum_{j,k} (\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial q_k} \{q_j, .q_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} + \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} \{p_j, p_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}}) +$$
$$+ \sum_{j,k} (\frac{\partial F}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_j}) \{q_j, p_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}}.$$

Întrucât funcţia F este arbitrar aleasă (se ia de exemplu $F = q_i$ sau $F = p_i$), rezultă că egalitatea are loc dacă şi numai dacă pentru orice j, k are loc

$$(69) \qquad \{q_j, q_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} = \{p_j, p_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} \equiv 0 \quad , \quad \{q_j, p_k\}_{\overline{\mathbf{q}}, \overline{\mathbf{p}}} \equiv \delta_{jk}.$$

Astfel de schimbări de coordonate se numesc *transformări canonice.*

Teorema lui Liouville. Sisteme integrabile.

Să considerăm sistemul hamiltonian (67). După cum se ştie, integrarea unui sistem autonom de $2n$ ecuaţii diferenţiale este echivalentă cu cunoaşterea a $2n-1$ integrale prime funcţional independente (v. [**5**]). În cazul sistemelor hamiltoniene, ţinând seama de structura simplectică existentă, vom vedea în cele ce urmează că este suficient să cunoaştem n integrale prime independente, care în plus să fie în involuţie două câte două. După cum am văzut, F este integrală primă pentru sistem dacă şi numai dacă

$$\{F, H\} = 0.$$

În această situaţie spunem că cele două funcţii sunt în *involuţie.* Teorema lui Liouville afirmă următoarele:

TEOREMA 6.2.1. *Să presupunem că există n integrale prime în involuţie, $F_1 = H, F_2, ..., F_n$ ($\{F_i, F_j\} = 0, \forall i, j$) şi fie mulţimea de nivel*

$$M_{\mathbf{f}} = \{\mathbf{x}, F_i(\mathbf{x}) = f_i, i = 1, ..., n\}$$

Să presupunem în plus că F_i sunt funcţional independente pe $M_{\mathbf{f}}$. Atunci:

(1) *$M_{\mathbf{f}}$ este varietate diferenţiabilă netedă de dimensiune n, invariantă la fluxul hamiltonian generat de H (deci şi la fluxurile hamiltoniene generate de oricare dintre F_i).*
(2) *Dacă varietatea $M_{\mathbf{f}}$ este compactă şi conexă, atunci ea este difeomorfă cu torul n dimensional $T^n = \{(\varphi_1, ..., \varphi_n) \bmod 2\pi\}$. În această situaţie, fluxul hamiltonian determină o miscare condiţional periodică pe $M_{\mathbf{f}}$:*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{f})$$

(3) *Ecuaţiile lui Hamilton pot fi integrate prin cuadraturi.*

Demonstraţie Faptul că $M_{\mathbf{f}}$ este varietate netedă de dimensiune n rezultă din teorema funcţiilor implicite, ţinând cont că $F_1, ..., F_n$ sunt funcţional independente. O bază în spaţiul tangent este formată de $\mathbf{X}_{F_i} := \mathbf{J}\nabla F_i$. Pe de altă parte, deoarece $\{F_i, F_j\} = 0$, $M_{\mathbf{f}}$ este mulţime invariantă la fluxurile generate de $\mathbf{X}_{F_i}$ care în plus comută:

$$\Phi_t^{\mathbf{X}_{F_i}} \circ \Phi_s^{\mathbf{X}_{F_j}} = \Phi_s^{\mathbf{X}_{F_j}} \circ \Phi_t^{\mathbf{X}_{F_i}}.$$

Să presupunem acum că $M_{\mathbf{f}}$ este conexă şi fie $\mathbf{z} \in M_{\mathbf{f}}$ un punct fixat. Considerăm aplicaţia $T_{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^n \to M_{\mathbf{f}}$ definită prin:

$$T_{\mathbf{z}}(t_1, ...t_n) = \Phi_{t_1}^{\mathbf{X}_{F_1}} \circ ... \circ \Phi_{t_n}^{\mathbf{X}_{F_n}}(\mathbf{z}) =: \Phi_{\mathbf{t}}(\mathbf{z}).$$

Comutativitatea fluxurilor implică faptul că matricea derivatelor parţiale ale lui $T_{\mathbf{z}}$ în $\mathbf{0}$ are drept coloane vectorii $\mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{z})$, deci rangul acesteia este n. Rezultă că $T_{\mathbf{z}}$ este un difeomorfism local, de la o vecinătate a lui $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ într-o vecinătate a lui $\mathbf{z} \in M_{\mathbf{f}}$.

Întrucât $M_{\mathbf{f}}$ este conexă, rezultă că oricare două puncte din $M_{\mathbf{f}}$ pot fi unite printr-o curbă, care poate fi la rândul său acoperită cu mulţimi deschise, difeomorfe prin aplicaţii de tipul $T_{\mathbf{z}}$ cu o vecinătate a lui $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$. Aceasta, împreună cu proprietatea semigrupală a fluxului, implică faptul că, pentru un z fixat, aplicaţia $T_{\mathbf{z}}$ este surjectivă şi este difeomorfism local.

Scriind fluxul hamiltonian generat de H în noile coordonate $\Phi_t^H(\mathbf{z}) = \mathbf{T_z}(\mathbf{t})$ şi derivând în raport cu t, obţinem:

$$\mathbf{X}_H(\mathbf{T_z}(\mathbf{t})) = \sum_i \mathbf{X}_{F_i}(\mathbf{T_z}(\mathbf{t}))\frac{dt_i}{dt},$$

deci

$$\frac{d\mathbf{t}}{dt} = (1, 0, ..., 0)^T. \tag{70}$$

Să presupunem în continuare că $M_\mathbf{f}$ este şi compactă. $T_\mathbf{z}$ nu poate fi bijecţie deoarece $\mathbb{R}^n$ nu este un spaţiu compact. Fie

$$\Gamma := \{\mathbf{t} \in \mathbf{R}^n | \Phi_\mathbf{t}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\}.$$

$0 \in \Gamma$ deoarece $T_\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}$ şi Γ este subgrup discret al lui $\mathbb{R}^n$. Prima teoremă de izomorfism ne spune că $\mathbb{R}^n/\Gamma$ este difeomorfă cu $M_\mathbf{f}$.

Pe de altă parte, grupurile discrete ale lui $\mathbb{R}^n$ au următoarea structură: există $k \leq n$ vectori liniar independenţi în $\mathbb{R}^n, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_k$, astfel încât orice element din Γ se scrie ca o combinaţie liniară cu coeficienţi întregi a acestora (v. [**2**] p. 276), deci $\Gamma \simeq \mathbf{Z}^k$.

Ţinând cont de faptul că $\mathbb{R}^n/\Gamma$ este compactă, obţinem că $n = k$ şi $\mathbb{R}^n/\Gamma \simeq T^n$, deci $M_\mathbf{f} \simeq T^n$. Dacă $\mathbf{A}$ este matricea schimbării de baze de la baza canonică din $\mathbb{R}^n$ la noua bază $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n$, atunci izomorfismul cu T^n este stabilit cu ajutorul coordonatelor unghiulare

$$T^n \ni \varphi = 2\pi \mathbf{A}\mathbf{t} \bmod 2\pi\mathbf{Z}^n.$$

Ţinând seama de (70), obţinem că fluxul hamiltonian generat de H verifică în noile coordonate ecuaţia

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{f}),$$

unde $\omega(\mathbf{f})$ este prima coloană a matricii $\mathbf{A}$.

Aşadar, sistemul hamiltonian (67) capătă în noile coordonate $(\mathbf{F}, \varphi)$ forma simplă

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{F}}{dt} & = 0 \\[2ex] \dfrac{d\varphi}{dt} & = \omega(\mathbf{F}) \end{cases}.$$

Sistemul în această formă poate fi integrat imediat:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(0), \varphi(t) = \varphi(0) + \omega(\mathbf{F}(0))t.$$

■

Observaţia 6.2.1. Transformarea $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{F}, \varphi)$ nu este în general canonică. Există însă funcţiile $\mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbf{F}), \mathbf{I} = (I_1, ... I_n)$ astfel încât transformarea $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\mathbf{I}, \varphi)$ să fie canonică iar sistemul hamiltonian (67) este echivalent cu

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \omega(\mathbf{I}) = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{I}}(\mathbf{I}) \\ \\ \dfrac{d\mathbf{I}}{dt} = 0 \end{cases}$$

(v.[**2**] p.271). $(\mathbf{I}, \varphi)$ se numesc *coordonate acţiune-unghi.* În cazul în care sunt satisfăcute ipotezele teoremei lui Liouville se spune că *sistemul hamiltonian este integrabil.*

Exemplul 6.2.1. Considerăm ecuaţia oscilatorului liniar

$$mx'' + kx = 0.$$

Aceasta se scrie ca sistem hamiltonian, cu hamiltonianul dat de energia totală:

$$H(q,p) = T + U = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2},$$

unde

$$q = x \quad , \quad p = mx'.$$

Vom trece de la variabilele (q,p) la variabilele (I,φ) folosind transformarea canonică (se verifică uşor, v. exerciţiul 6.3)

$$q = (1/\lambda)\sqrt{2I}\sin\varphi, \;\; p = \lambda\sqrt{2I}\cos\varphi.$$

Hamiltonianul în noile coordonate este

$$\overline{H}(I,\varphi) = H(q,p) = \frac{\lambda^2 I}{m}\cos^2\varphi + \frac{kI}{\lambda^2}\sin^2\varphi.$$

Alegem λ astfel încât $\lambda^2 I/m = kI/\lambda^2$ adică $\lambda^2 = \sqrt{km}$. În acest fel

$$\overline{H}(I,\varphi) = I\omega$$

unde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

deci (I,φ) reprezintă în acest caz coordonatele acţiune-unghi.

Observaţia 6.2.2. În cazul sistemelor hamiltoniene cu două grade de libertate cunoaşterea unei a doua integrale prime, care comută cu hamiltonianul şi este independentă de acesta, implică integrabilitatea.

Observaţia 6.2.3. O coordonată q_i se numeşte *ciclică* dacă $\partial H/\partial q_i = 0$. Rezultă că p_i este integrală primă şi sistemul hamiltonian iniţial este echivalent cu un sistem hamiltonian cu un grad de libertate mai puţin, cu hamiltonian $H(q_2, ..., q_n, p_2, ..., p_n, c)$, depinzând de parametrul $c = p_1$.

Metoda lui Jacobi.

Ca metodă de integrare a sistemelor integrabile descriem în continuare metoda lui Jacobi sau metoda separării variabilelor. Ideea acestei metode este de a găsi transformări canonice care să simplifice forma sistemului. Funcţiile generatoare ale acestor transformări verifică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul întâi, numită *ecuaţia Hamilton-Jacobi*:

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, \mathbf{q}) + H(t, \mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}})(t, \mathbf{q}) = 0. \tag{71}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii permite în cele din urmă integrarea prin cuadraturi a sistemului hamiltonian (v. [**2**],[**3**]). Sistemul hamiltonian (67) este sistemul caracteristic pentru această ecuaţie cu derivate parţiale. Curbele integrale ale sistemului hamiltonian sunt caracteristicile ecuaţiei Hamilton-Jacobi (vezi [**5**],[**18**]). Metoda caracteristicilor se aplică pentru integrarea ecuaţiei cu derivate parţiale folosind sistemul caracteristicilor. Metoda lui Jacobi, care va fi prezentată în continuare, se foloseşte pentru a găsi curbele integrale pentru sistemul hamiltonian (67) folosind o soluţie generală a ecuaţiei Hamilton-Jacobi (71), soluţie care trebuie să depindă de exact n parametri. Acest lucru se întâmplă, după cum se va vedea, în cazul în care variabilele se pot separa.

TEOREMA 6.2.2. (*Jacobi*) . *Presupunem că* $S = S(t, \mathbf{q}, C_1, \ldots, C_m)$ *este o soluţie a ecuaţiei* (71)*, soluţie ce depinde neted de* m *parametri* $C_1, \ldots, C_m$ *Atunci* $D_j = \dfrac{\partial S}{\partial C_j}, j = \overline{1, m}$ *sunt integrale prime pentru sistemul hamiltonian* (67)*. Dacă soluţia depinde de* n *parametri* $C_1, \ldots, C_n$ *astfel încât*

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial C_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = n, \tag{72}$$

atunci o soluţie generală a sistemului hamiltonian (67)*, depinzând de* $2n$ *constante de integrare* $C_i, D_i, i = \overline{1, n}$*, este dată, prin intermediul teoremei funcţiilor implicite, de*

$$\begin{cases} D_i = \dfrac{\partial S}{\partial C_i}(t, \mathbf{q}, C) \\ \\ p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}(t, \mathbf{q}, C) \end{cases}. \tag{73}$$

Demonstraţie Derivăm ecuaţia (71) în raport cu C_j şi obţinem:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t \partial C_j} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial C_j} = 0.$$

Obţinem că

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_j}(t,\mathbf{q}(t),C)\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial C_j}(t,\mathbf{q}(t),C) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial C_j}(t,\mathbf{q}(t),C) q_i' =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial C_j}(t,\mathbf{q}(t),C)\left(q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) = 0$$

şi prima parte a teoremei este demonstrată.

Cnsiderăm acum sistemul (73). Teorema funcţiilor implicite aplicată în (73), folosind condiţia de nedegenerare (72), ne asigură existenţa locală a funcţiilor $\mathbf{q}(t,C,D), \mathbf{p}(t,C,D)$. Ceea ce rămâne de demonstrat este că funcţiile q, p verifică sistemul hamiltonian (67). Derivând prima ecuaţie în raport cu t, cu un calcul similar cu cel anterior şi folosind ecuaţia (71), obţinem:

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial C_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial C_j}\left(q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right).$$

Folosind din nou condiţia de nedegenerare (72), avem că $q_i' = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, adică primul grup de ecuaţii din (67).

Derivăm acum a doua ecuaţie din (73) şi, folosind si ecuaţia (71), obţinem

$$\begin{aligned} p_i' &= \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial q_i}(t,\mathbf{q},C) = \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial t}(t,\mathbf{q},C) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}(t,\mathbf{q},C) q_j' = \\ &= -\frac{\partial}{\partial q_i} H(t,\mathbf{q},\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(t,\mathbf{q},C)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j}(t,\mathbf{q},C)\frac{\partial H}{\partial p_j} = \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) + \sum_{j=1}^{n}\left(q_i' - \frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial q_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t,\mathbf{q},\mathbf{p}). \end{aligned}$$

■

Observaţia 6.2.4. Putem privi pe S ca funcţie generatoare, $P_i = C_i$ noile impulsuri generalizate, $Q_i = D_i$ noile coordonate generalizate (pentru mai multe informaţii despre funcţiile generatoare v. [**2**]). Schimbarea canonică de coordonate este dată de:

$$\left\{\begin{array}{l} H^* = H + \dfrac{\partial S}{\partial t}(\mathbf{q},\mathbf{P}) \\[2ex] \mathbf{p} = \dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{P}) \\[2ex] \mathbf{Q} = \dfrac{\partial S}{\partial \mathbf{P}}(\mathbf{q},\mathbf{P}) \end{array}\right. . \tag{74}$$

În noul sistem de coordonate $(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, hamiltonianul este $H^* = 0$ iar curbele integrale sunt $Q_i = cst, P_i = cst$, adică exact (73).

OBSERVAŢIA 6.2.5. Presupunem că în hamiltonianul H una din variabile se separă, mai precis

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_1(q_1, p_1) + \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}),$$

unde $\tilde{\mathbf{q}} = (q_2, \ldots, q_n)$, $\tilde{\mathbf{p}} = (p_2, \ldots, p_n)$. Atunci putem căuta soluţia ecuaţiei Hamilton-Jacobi (71) de forma $S(t, \mathbf{q}) = S_1(q_1) + \tilde{S}(t, \tilde{\mathbf{q}})$, unde S_1, S_2 verifică ecuaţiile de tipul (71):

$$H_1(q_1, S_1'(q_1)) = C_1$$

$$\tilde{S}_t + \tilde{H}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{S}_{\tilde{\mathbf{q}}}) = -C_1.$$

Prima este de fapt o ecuaţie diferenţială care, dacă poate fi adusă la formă normală prin teorema funcţiilor implicite, devine o ecuaţie cu variabile separabile care poate fi integrată. Unei ecuaţii Hamilton-Jacobi i se poate găsi o soluţie generală depinzând de n constante dacă toate variabilele se separă.

6.3. Exerciţii şi probleme

6.1. Se consideră următorii lagrangieni

(1) $L(q, q') = q^2 + 2q'^2$;
(2) $L(q, q') = \sin q + q'^4$;
(3) $L(t, q, q') = q \sin t + t^2 q'^3$.

Să se scrie, în fiecare dintre aceste cazuri, ecuaţiile lui Lagrange şi să se determine sistemele hamiltoniene corespunzătoare. Determinaţi apoi punctele staţionare şi tipul acestora.

6.2. Se consideră următorii hamiltonieni

(1) $H(q, p) = p \sin q$;
(2) $H(q, p) = 2q^2 - 2qp + 5p^2 + 4q + 4p + 4$;
(3) $H(q, p) = p^3 - q^2$.

Să se gasească punctele staţionare, tipul lor şi să se deseneze portretul fazelor.

6.3. Să se verifice dacă următoarele transformări sunt canonice:

(1) $q = \overline{p} \sin \overline{q}$, $p = \overline{p} \cos \overline{q}$;
(2) $q = (1/\lambda)\sqrt{2\overline{p}} \sin \overline{q}$, $p = \lambda\sqrt{2\overline{p}} \cos \overline{q}$.

CAPITOLUL 7

Elemente de teoria perturbaţiilor

Am studiat în capitolul precedent sistemele hamiltoniene şi, în mod special, condiţiile în care un sistem este integrabil. Integrabilitatea nu este însă o situaţie tipică ci una excepţională. O primă abordare a studiului sistemelor neintegrabile este studiul sistemelor apropiate de cele integrabile. Acesta este obiectul de studiu al teoriei perturbaţiilor. Teoria constă dintr-o colecţie de metode, deosebit de utile, aplicabile şi în cazul altor tipuri de sisteme, nu neapărat hamiltoniene.

Prezentăm mai întâi metoda medierii, care înlocuieşte studiul unui sistem neautonom periodic cu studiul unui sistem autonom, sistemul mediat. În final este prezentată metoda lui Melnikov de stabilire a existenţei punctelor homoclinice transversale ale aplicaţiei Poincaré (aplicaţia perioadă) pentru o orbită periodică. Existenţa unor astfel de orbite homoclinice transversale indică existenţa unei dinamici haotice de tip *shift Bernoulli.*

7.1. Metoda medierii

Perturbarea sistemelor hamiltoniene integrabile.

Să considerăm un sistem hamiltonian integrabil, scris în coordonate acţiune unghi :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\mathbf{I}) = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}}(\mathbf{I}) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{75}$$

şi sistemul perturbat

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon \mathbf{f}(\varphi, \mathbf{I}) \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \varepsilon \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{I}) \end{aligned} \tag{76}$$

unde $\mathbf{g}, \mathbf{f} : T^n \times D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Principiul medierii constă în înlocuirea sistemului de mai sus cu sistemul:

$$\mathbf{J}' = \varepsilon \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{J}), \tag{77}$$

unde

$$\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} ... \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{J}) d\varphi_1 ... d\varphi_n.$$

Faptul că sistemul (77) aproximează bine sistemul (76) în timp îndelungat (de ordinul lui $1/\varepsilon$) nu este în general adevărat. Cazul sistemelor cu o frecvenţă îl studiem în continuare şi precizăm rezultatul în această situaţie.

Metoda medierii. Sisteme cu o frecvenţă.

Fie sistemul de $n+1$ ecuaţii

$$\begin{cases} \varphi' = \omega(\mathbf{I}) + \varepsilon f(\varphi, \mathbf{I}) \\ \mathbf{I}' = \varepsilon \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{I}) \end{cases} , \tag{78}$$

cu $f : S^1 \times D \to \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : S^1 \times D \to \mathbb{R}^n$ funcţii netede. Fie, de asemenea, sistemul mediat

$$\mathbf{J}' = \varepsilon \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{J}), \tag{79}$$

unde

$$\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{J}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{I}) d\varphi.$$

Fie $(\varphi(t), \mathbf{I}(t))$, respectiv $\mathbf{J}(t)$, soluţii pentru sistemul (78), respectiv (79), cu condiţiile iniţiale $\varphi(0) = \varphi_0$, $\mathbf{I}(0) = \mathbf{J}(0) = \mathbf{I}_0$. Are loc următorul rezultat:

Teorema 7.1.1. *Presupunem că sunt verificate ipotezele:*

(1) *Funcţiile* $\omega, f, \mathbf{g}$ *sunt mărginite împreună cu derivatele lor până la ordinul al doilea.*

$$\| \omega, f, \mathbf{g} \|_{C^2(S^1 \times D)} \le C_1.$$

(2) *În* D *are loc* $\omega > C_2 > 0$.

(3) $\mathbf{J}(t)$ *este definită pentru* $0 \le t \le 1/\varepsilon$ *şi o* δ *vecinătate a traiectoriei este conţinută în* D.

Atunci există $\varepsilon_0 > 0$ *şi* $K = K(C_1, C_2)$ *astfel încât dacă* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *şi* $0 \le t \le 1/\varepsilon$,

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{J}(t)| < K\varepsilon.$$

Demonstraţie Constantele ce apar în continuare depind numai de datele problemei şi vor fi notate, pentru simplitate, cu C. Ideea de demonstraţie este de a face o schimbare de variabile convenabilă care să aducă sistemul perturbat la o formă mai simplă. Fie

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + \varepsilon \mathbf{l}(\varphi, \mathbf{I}). \tag{80}$$

Sistemul satisfăcut de $\mathbf{L}$ este

$$\mathbf{L}' = \mathbf{I}' + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \varphi} \varphi' + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{I}' = \varepsilon \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \varphi} \omega(\mathbf{I}) + \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{I}) \right] + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \varphi} f(\varphi, \mathbf{I}) + \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{I}} \mathbf{g}(\varphi, \mathbf{I}) \right].$$

Să presupunem că transformarea (80) ar fi inversabilă:

$$\mathbf{I} = \mathbf{L} + \varepsilon \mathbf{k}(\varphi, \mathbf{L}, \varepsilon). \tag{81}$$

Dacă

$$\| \mathbf{l} \|_{C^2(S^1 \times D)}, \| \mathbf{k} \|_{C^2(S^1 \times D)} < \infty, \tag{82}$$

rezultă

$$\mathbf{L}' = \varepsilon\left[\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \varphi}\omega(\mathbf{L}) + \mathbf{g}(\varphi,\mathbf{L})\right] + \mathbf{R} \tag{83}$$

cu $\mathbf{R} = O(\varepsilon^2)$. Vom alege $\mathbf{l}$ astfel încât cantitatea dintre paranteze să aibă o contribuţie cât mai mică. Nu putem alege $\mathbf{l}$ astfel încât $\frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \varphi}\omega(\mathbf{I}) + \mathbf{g}(\varphi,\mathbf{I}) = 0$ decât dacă $\overline{\mathbf{g}} = 0$. Vom alege $\mathbf{l}$ astfel încât partea "oscilatorie" a parantezei să se anuleze, mai precis

$$\mathbf{l}(\varphi,\mathbf{I}) = -\frac{1}{\omega(\mathbf{I})}\int_0^{\varphi}(\mathbf{g}(\tau,\mathbf{I}) - \overline{\mathbf{g}}(\mathbf{I}))d\tau.$$

Sistemul se rescrie

$$\mathbf{L}' = \varepsilon\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{L}) + \mathbf{R}. \tag{84}$$

Rămâne de demonstrat existenţa pentru (81), precum şi estimările (82). Faptul că $\| \mathbf{l} \|_{C^2(S^1\times D)} < \infty$ rezultă imediat din definiţie.

Să notăm cu $D_\delta = \{\mathbf{x} \in D,\ d(\mathbf{x},\partial D) > \delta\}$. Arătăm că inversa transformării (80) există pe D_δ pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic. Local, transformarea este un difeomorfism şi aceasta rezultă din teorema funcţiilor implicite. întrucât $\mathbf{l}$ este Lipschitz continuă pe D_δ cu o constantă L rezultă că pentru ε ales astfel ca $\varepsilon L < 1$ transformarea (80) este şi injectivă deci inversa există. Estimarea $\| \mathbf{k} \|_{C^2(S^1\times D_\delta)} < \infty$ rezultă tot din teorema funcţiilor implicite.

Comparăm acum soluţia problemei Cauchy pentru sistemul (84) cu $\mathbf{J}(t)$, soluţia sistemului (79). Dacă notăm cu $\mathbf{z}(t) = \mathbf{L}(t) - \mathbf{J}(t)$ şi ţinem seama de faptul că $\overline{\mathbf{g}}$ este funcţie Lipschitz iar $\mathbf{R} = O(\varepsilon^2)$ obţinem, după ce folosim aceste estimări,

$$\mathbf{z}' = \varepsilon\mathbf{A}(t)\mathbf{z} + \mathbf{R},$$

unde $\| \mathbf{A}(t) \| \leq C$ şi $|\mathbb{R}| < C\varepsilon^2$. Notăm $w = |\mathbf{z}|^2$ şi obţinem din ecuaţia de mai sus înmulţită scalar cu $\mathbf{z}$

$$w' \leq C\varepsilon w + C\varepsilon^2 w^{\frac{1}{2}} \leq C\varepsilon w + C\varepsilon^3,$$

inegalitate care, integrată de la 0 la t cu $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$, ne dă

$$w(t) \leq C\varepsilon^3 t + C\varepsilon\int_0^t w dt \leq C\varepsilon^2 + C\varepsilon\int_0^t w dt.$$

Aplicând inegalitatea lui Gronwall obţinem pentru $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$

$$|\mathbf{J}(t) - \mathbf{L}(t)|^2 = w(t) \leq C\varepsilon^2.$$

Întrucât

$$|\mathbf{I}(t) - \mathbf{L}(t)| = \varepsilon|\mathbf{l}(\varphi(t),\mathbf{I}(t))| \leq C\varepsilon,$$

concluzia teoremei rezultă imediat. ∎

Observaţia 7.1.1. Facem observaţia că există şi alte informaţii ce pot fi obţinute prin studiul sistemului mediat. Să menţionăm unul din rezultatele suplimentare care pot fi obţinute astfel. Presupunem că în (78) $f \equiv 0, \omega(\mathbf{I}) \equiv 1$ deci sistemul se rescrie

$$\mathbf{I}' = \varepsilon \mathbf{g}(t, \mathbf{I}) \tag{85}$$

cu $\mathbf{g}$ funcţie 2π periodică în t. Se poate atunci demonstra că, dacă sistemul mediat (79) are o soluţie staţionară hiperbolică $\mathbf{I}_0$, atunci există un $\varepsilon_0 > 0$ şi o constantă $C > 0$ astfel încât, dacă $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, sistemul (85) are o unică soluţie periodică hiperbolică $\mathbf{I}_\varepsilon(t)$ care verifică $|\mathbf{I}_\varepsilon(t) - \mathbf{I}_0| \leq C\varepsilon$. În plus, $\mathbf{I}_\varepsilon$ are acelaşi tip de stabilitate ca şi $\mathbf{I}_0$ (adică are aceleaşi dimensiuni ale varietăţilor stabilă şi instabilă). Demonstraţia acestui fapt se bazează pe studiul aplicaţiei perioadă pentru sistemul (85) şi sistemul (79) şi compararea acestora folosind teorema funcţiilor implicite (v.[**10**] Th. 4.1.1).

Exemplul 7.1.1. Considerăm ecuaţia oscilatorului armonic cu perturbare $f(t, x, x')$ periodică în t:

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon f(t, x, x').$$

Această ecuaţie este echivalentă cu sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

unde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}$. Pentru a reduce sistemul la forma (85) facem schimbarea $\mathbf{y}(t) = e^{-t\mathbf{A}}\mathbf{x}(t)$ şi obţinem sistemul:

$$\mathbf{y}' = \varepsilon \mathbf{f}_1(t, \mathbf{y}),$$

unde $\mathbf{f}_1(t, \mathbf{y}) = e^{-t\mathbf{A}} \mathbf{f}(t, e^{t\mathbf{A}}\mathbf{y})$. Scris în această formă, sistemul poate fi studiat cu ajutorul metodei medierii. De aceast tip este şi ecuaţia lui Duffing

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon(\gamma \cos \omega_0 t - \delta x' - \alpha x^3).$$

7.2. Orbite homoclinice. Metoda lui Melnikov

Orbite homoclinice transversale. Dinamici haotice asociate.

Considerăm în acest paragraf sistemul diferenţial neautonom:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{86}$$

unde $\mathbf{f}$ este periodică în t de perioadă T. Presupunem că acest sistem admite o soluţie periodica $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$ de perioadă T, pentru care exponenţii caracteristici ai sistemului liniarizat în jurul lui $\mathbf{p}$ nu au partea reală 0 iar varietăţile stabilă şi instabilă ale lui $\mathbf{p}$ se intersectează transversal. Fie $\gamma(t)$ orbită homoclinică la aceasta, $\gamma(t) - \mathbf{p}(t) \to 0$ pentru $t \to \pm\infty$.

Vom descrie în cele ce urmează modul în care în dinamica acestui sistem se poate scufunda o dinamică de tip *shift Bernoulli*. Mai precis, fie P_T aplicaţia perioadă. Vom arăta că există $m > 0$ şi $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mulţime compactă şi invariantă faţă de P_T^m ($P_T^m(\Omega) \subset \Omega$) astfel încât sistemul dinamic discret (Ω, P_T^m) este topologic echivalent cu *shiftul Bernoulli*. Construcţia pe care o prezentăm se bazează pe noţiunea de dihotomie exponenţială şi rezultatele demonstrate în §2.3,§2.4. Demonstraţia acestui fapt o vom schiţa, fără a insista pe detaliile tehnice. Pentru detalii se poate consulta articolul în care această construcţie a fost introdusă [**14**](v. şi [**9**]). Menţionăm că existenţa unei dinamici de tip shift Bernoulli, în cazul orbitelor homoclinice transversale, a fost pusă în evidenţă de S. Smale [**17**]. Construcţia sa, geometrică, se bazează pe aşa numita aplicaţie potcoavă. O prezentare a acestor idei poate fi găsită în [**10**], [**12**].

Faptul că $\mathbf{p}(t)$ este orbită periodică hiperbolică implică existenţa unei dihotomii exponenţiale pe $\mathbb{R}$ pentru sistemul în variaţie în jurul lui $\mathbf{p}(t)$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \mathbf{p}(t))\mathbf{x}.$$

Fie $\mathbf{P}(t)$ proiecţia dată de dihotomie. Întrucât intersecţia varietăţilor stabilă şi instabilă este transversală rezultă că şi sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \gamma(t))\mathbf{x}$$

admite dihotomie exponenţială pe $\mathbb{R}$.

Fie acum $\mathbf{a} \in \Sigma_A$. Rezultă atunci că, pentru $\gamma_k(t) := \gamma(t + a_k)$, sistemul

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(t, \gamma_k(t))\mathbf{x}$$

admite dihotomie exponenţială pe $\mathbf{R}$, cu proiecţie $\mathbf{P}_k(t)$, astfel încât $\| \mathbf{P}_k(t) - \mathbf{P}(t) \| \to 0$ uniform în k pentru $|t| \to \infty$.

Împărţim acum dreapta reală în intervale $I_k := [t_{k-1}, t_k]$ cu $t_k = 2kmT$, m întreg ce va fi precizat. Fie $\overline{\gamma}_k(t) := \gamma_k(t - t_{k-1}) : I_k \to \mathbb{R}^n$ şi şirul de proiecţii corespunzător $\overline{\mathbf{P}}_k(t) = \mathbf{P}_k(t - t_{k-1})$. Se obţin imediat estimările

$$|\overline{\gamma}_k(t_{k-1}) - \overline{\gamma}_{k-1}(t_{k-1})| \leq$$

$$\leq |\gamma_k(-mT) - \mathbf{p}(-mT)| + |\mathbf{p}(mT) - \gamma_{k-1}(mT)| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

$$\| \overline{\mathbf{P}}_k(t_{k-1}) - \overline{\mathbf{P}}_{k-1}(t_{k-1}) \| \leq$$

$$\leq \| \mathbf{P}_k(-mT) - \mathbf{P}(-mT) \| + \| \mathbf{P}(mT) - \mathbf{P}_{k-1}(mT) \| \underset{m\to\infty}{\to} 0,$$

limitele având loc uniform în raport cu k. Rezultă că ipotezele teoremei 2.4.2 sunt satisfăcute, deci există o unică soluţie $\gamma_{\mathbf{a}}(t)$ pentru sistemul (86), care este β-orbită umbră pentru α-pseudoorbita $\{\overline{\gamma}_k(t)\}$:

$$\sup_{t\in I_k} |\gamma_{\mathbf{a}}(t) - \overline{\gamma}_k(t)| = \sup_{t\in(-mT,mT)} |\gamma_{\mathbf{a}}(t + t_{k-1}) - \gamma(t + a_kT)| \leq \beta \quad , \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Precizăm că β este ales suficient de mic astfel încât

$$2\beta < \sup_{t\in(-mT,mT)} |\gamma(t+T) - \gamma(t)|. \tag{87}$$

Fie acum $h : \Sigma_A \to \mathbb{R}^n$ definită prin

$$h(\mathbf{a}) = \gamma_{\mathbf{a}}(0).$$

Deoarece

$$\sup_{t\in(-mT,mT)} |\gamma_{\mathbf{a}}(t+2mT+t_{k-1})-\gamma(t+a_{k+1}T)| \leq \beta,$$

rezultă din unicitatea β-orbitei umbră că $\gamma_{\mathbf{a}}(t+2mT)=\gamma_{\sigma(\mathbf{a})}(t)$, deci

$$h\circ\sigma = \mathbf{P}_T^{2m}\circ h. \tag{88}$$

Rămâne de arătat continuitatea şi injectivitatea lui h.

Pentru continuitate să considerăm un şir $\mathbf{a}^m \to \mathbf{a}$ şi să observăm că $h(\Sigma_A)$ este mulţime mărginită. Într-adevăr,

$$|h(\mathbf{a})| = |\gamma_{\mathbf{a}}(0)| \leq |\gamma_{\mathbf{a}}(0)-\gamma(mT+a_kT)|+|\gamma(mT+a_kT)| \leq \beta+\sup_t|\gamma(t)| < \infty.$$

Rezultă că pentru un subşir, notat tot cu $\mathbf{a}^l$, $h(\mathbf{a}^l)=\gamma_{\mathbf{a}^l}(0)\to\mathbf{x}(0)$ deci, din teorema de continuitate în raport cu datele iniţiale, rezultă că $\gamma_{\mathbf{a}^l}(t)\to\mathbf{x}(t)$ uniform pe compacte. Pe de altă parte,

$$|\mathbf{x}(t+t_{k-1})-\gamma(t+a_kT)| \leq$$

$$\leq \{|\mathbf{x}(t+t_{k-1})-\gamma_{\mathbf{a}^l}(t+t_{k-1})|+|\gamma_{\mathbf{a}^l}(t+t_{k-1})-\gamma(t+a_kT)|\}.$$

Trecând la limită pentru $l\to\infty$ obţinem

$$\sup_{t\in(-mT,mT)} |\mathbf{x}(t+t_{k-1})-\gamma(t+a_kT)| \leq \beta.$$

Ţinând seama de unicitatea $\beta-$orbitei umbră deducem că $\mathbf{x}(t)=\gamma_{\mathbf{a}}(t)$ deci h este continuă.

Pentru a arăta injectivitatea, fie $\mathbf{a}^1,\mathbf{a}^2\in\Sigma_A$ astfel încât $h(\mathbf{a}^1)=h(\mathbf{a}^2)$. Rezultă $\gamma_{\mathbf{a}^1}(t)=\gamma_{\mathbf{a}^2}(t)$ deci

$$\begin{aligned}&\sup\nolimits_{t\in(-mT,mT)}|\gamma(t+a_k^1T)-\gamma(t+a_k^2T)| \leq\\ &\leq \sup\nolimits_{t\in(-mT,mT)}\{|\gamma(t+a_k^1T)-\gamma_{\mathbf{a}^1}(t+t_{k-1}T)|+\\ &+|\gamma_{\mathbf{a}^2}(t+t_{k-1}T)|-\gamma(t+a_k^2T)|\} \leq 2\beta.\end{aligned}$$

Ţinând cont de (87) obţinem $\mathbf{a}^1=\mathbf{a}^2$ deci h este injectivă. ■

Am arătat deci următoarea teoremă:

TEOREMA 7.2.1. *Există o mulţime compactă $\Omega = h(\Sigma_A)\subset \mathbb{R}^n$ invariantă faţă de o iteraţie a aplicaţiei perioadă, $\mathbf{P}_T^{2m}$, astfel încât sistemele dinamice $(\Omega,\mathbf{P}_T^{2m})$ şi (Σ_A,σ) sunt topologic echivalente.*

Ca o consecinţă imediată rezultă că există în vecinătatea unei orbite homoclinice transversale orbite periodice de orice perioadă minimală care este multiplu întreg de $2mT$.

Sisteme dinamice în plan. Metoda lui Melnikov de determinare a orbitelor homoclinice transversale.

În paragraful precedent am văzut că existenţa unei orbite homoclinice la o orbită periodică hiperbolică, pentru care varietăţile stabilă şi instabilă ale aplicaţiei perioadă se intersectează transversal, implică existenţa unei dinamici haotice de tip shift Bernoulli. În acest paragraf prezentăm o metodă analitică de determinare a existenţei punctelor homoclinice transversale pentru aplicaţia Poincaré a unei orbite periodice pentru sistemul planar de forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \varepsilon\mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \tag{89}$$

unde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{C}^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2)$ este $T-$ periodică în t. Pentru sistemul neperturbat:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{90}$$

presupunem verificate următoarele ipoteze:

(1) Există o orbită homoclinică $\gamma_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$ la un punct staţionar hiperbolic $\mathbf{x}_0$.
(2) Interiorul lui $\Gamma_0 := \gamma_0(\mathbf{R}) \cup \{\mathbf{x}_0\}$ este acoperit de o familie de orbite periodice $\gamma_s(t), s > 0$ de perioadă T_s şi în plus $\dfrac{d}{ds}\gamma_s(0) \neq 0$.

Se defineşte *funcţia lui Melnikov* $M : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\int_u^t \nabla\cdot\mathbf{f}(\gamma_0(s))ds}\mathbf{f}(\gamma_0(t)) \wedge \mathbf{g}(t+u,\gamma_0(t))dt.$$

Amintim că pentru $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = u_1v_2 - u_2v_1$. Facem observaţia aici că M este o funcţie periodică de perioadă T.

Dacă sistemul (90) este hamiltonian, $\mathbf{f} = \mathbf{J}\nabla H$ şi cum $\nabla\cdot\mathbf{f} = 0$, funcţia lui Melnikov capătă formă

$$M(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(\gamma_0(t)) \wedge \mathbf{g}(t+u,\gamma_0(t))dt.$$

Rezultatul principal este:

TEOREMA 7.2.2. *Pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, sistemul (89) are o unică orbită periodică hiperbolică de perioadă T, $\mathbf{p}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0 + O(\varepsilon)$ iar aplicaţia Poincaré (aplicaţia perioadă) corespunzătoare are un unic punct fix hiperbolic $\mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{x}_0 + O(\varepsilon)$.*

Dacă funcţia lui Melnikov M are un zerou simplu în $[0, T]$, atunci, pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, varietăţile stabilă şi instabilă $W_s(x_\varepsilon)$ şi $W_u(x_\varepsilon)$ ale aplicaţiei Poincaré (aplicaţia perioadă) $\mathbf{P}_\varepsilon$ se intersectează transversal.

Dacă M păstrează semn constant pe $[0, T]$, atunci $W_s(x_\varepsilon) \cap W_u(x_\varepsilon) = \phi$.

Ideea de demonstraţie este de a estima distanţa $d(t_0)$ dintre punctele de intersecţie ale lui $W_s(x_\varepsilon)$, $W_u(x_\varepsilon)$ cu o transversală la γ_0 la momentul t_0. Se obţine o expresie de forma

$$d(t_0) = \frac{\varepsilon M(t_0)}{|\mathbf{f}(\gamma_0(0))|} + O(\varepsilon^2),$$

de unde rezultă că dacă M schimbă semnul atunci cele doua varietăţi, stabilă şi instabilă, se intersectează iar dacă zeroul respectiv este simplu atunci intersecţia este transversală (v. [**10**], Th. 4.5.3).

EXEMPLUL 7.2.1. Considerăm *ecuaţia lui Duffing* scrisă în formă de sistem

$$\begin{cases} x' = y \\ \\ y' = x - x^3 + \varepsilon(\gamma \cos \omega t - \delta y). \end{cases}$$

Pentru $\varepsilon = 0$ acesta este un sistem hamiltonian cu hamiltonianul

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

Acest sistem are doi centri $(\pm 1, 0)$ şi un punct şa $(0, 0)$. Mulţimea $H = 0$ este formată din două orbite homoclinice în 0 :

$$\gamma_{\pm}^0(t) = (\pm\sqrt{2}/\cosh t, \mp\sqrt{2}\sinh t/\cosh^2 t).$$

Interiorul acestor orbite homoclinice este umplut cu orbitele periodice $H = c$, cu $-1/4 \leq c \leq 0$. Funcţia lui Melnikov este

$$\begin{aligned} M(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} y^0(t)[\gamma \cos \omega(t + u) - \delta y^0(t)]dt = \\ &= -\sqrt{2}\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega(t + u) \sinh t/\cosh^2 t dt - \\ &-2\delta \int_{-\infty}^{\infty} \sinh^2 t/\cosh^4 t dt. \end{aligned}$$

Calculând cele două integrale se obţine

$$M(u) = -\frac{4\delta}{3} + \sqrt{2}\frac{\gamma\pi\omega \sin \omega u}{\cosh(\pi\omega/2)}.$$

Rezultă că, pentru ω suficient de mare, $\omega > \omega_0$, M are numai zerouri simple pe $[0, 2\pi/\omega]$, deci există pentru orice $\varepsilon > 0$, suficient de mic, orbite homoclinice ale căror varietăţi stabilă şi instabilă se intersectază transversal. Aşadar o dinamică haotică de tip shift Bernoulli poate fi pusă în evidenţă.

7.3. Exerciţii şi probleme

7.1. Să se studieze prin metoda medierii următoarele ecuaţii scalare:
(1) $x' = \varepsilon x \sin^2 t$;
(2) $x' = \varepsilon(-x + \cos^2 t)$;
(3) $x' = \varepsilon(x \sin^2 t - x^2/2)$.

7.2. Să se studieze prin metoda medierii oscilatorul armonic cu perturbare neliniara:

$$x'' + x = \varepsilon(-x' + x^2).$$

7.3. Să se studieze prin metoda medierii ecuaţia lui van der Pol:

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = \beta \cos \omega t.$$

7.4. Considerăm ecuaţia lui Duffing cu perturbare polinomială scrisă sub formă de sistem:

$$\begin{cases} x' = y \\ \\ y' = \varepsilon(ay + bx^2 y) + x - x^3 \end{cases}.$$

Să se calculeze funcţia lui Melnikov corespunzătoare orbitei homoclinice a sistemului neperturbat, $\gamma_0 = (\sqrt{2}\,\mathrm{sech}\ t, \sqrt{2}\,\mathrm{sech}\ t \tanh t)^T$ şi să se discute existenţa orbitelor homoclinice transversale.

ANEXA A

Forma Jordan a unei matrici

Fie $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$. Fie λ o autovaloare a lui $\mathbf{A}$ de multiplicitate algebrică $m \leq n$: există $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ şi λ este rădăcină de multiplicitate m a polinomului caracteristic $P(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$. Pentru $k = 1, ..., m$ orice $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ care verifică

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^k\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

se numeşte *vector propriu generalizat* al lui $\mathbf{A}$. Are loc următorul rezultat de structură pentru matricea (operatorul) $\mathbf{A}$ (v. [**11**]):

TEOREMA A.0.1. *Există o bază a lui $\mathbb{R}^n$ formată din vectori proprii generalizaţi pentru operatorul $\mathbf{A}$. Operatorul liniar $\mathbf{A}$ admite descompunerea*

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N},$$

unde $\mathbf{D}$ este operator diagonalizabil iar operatorul $\mathbf{N}$ este nilpotent. În plus

$$\mathbf{DN} = \mathbf{ND}.$$

Demonstraţia acestui rezultat conduce practic la un algoritm de aducere la formă canonică a unei matrici. Ideea este de a construi baza respectivă pornind de la obsevaţia că, pentru λ valoare proprie,

$$\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \subset \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k+1}.$$

Dacă m este dimensiunea maximă a subspaţiilor de forma $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k \neq \{0\}$, atunci baza în subspaţiul invariant corespunzător valorii proprii λ se construieşte iterativ, de la 1 către m în felul următor: odată construită baza în $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$, atunci aceasta se completează la o bază în $\ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{k+1}$ cu vectori de forma $w = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})v$, cu $v \in \ker(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$.

Acest algoritm conduce la următorul rezultat privind *forma canonică Jordan*(v. [**15**]) :

TEOREMA A.0.2. *Dacă $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ are valori proprii reale λ_j, $j = 1, ..., l$ şi valori proprii complexe $\lambda_j = a_j + ib_j$, $\overline{\lambda_j} = a_j - ib_j$, $j = l + 1, ..., \frac{n-l}{2}$, atunci există o bază $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_{l+1}, \mathbf{u}_{l+1}, ..., \mathbf{w}_n, \mathbf{u}_n\}$ a lui $\mathbb{R}^n$ unde $\mathbf{v}_j$ sunt vectori proprii generalizaţi corespunzători valorilor proprii λ_j, $j = 1, ..., l$ iar $\mathbf{v}_j := \mathbf{u}_j + i\mathbf{w}_j$ sunt vectori proprii generalizaţi corespunzând la valorile proprii $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = l + 1, ..., \frac{n+l}{2}$. Matricea*

$\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_l, \mathbf{w}_{l+1}, \mathbf{u}_{l+1}, ..., \mathbf{w}_n, \mathbf{u}_n]$ *este inversabilă şi*

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \tag{91}$$

unde $\mathbf{B} = \mathbf{B}_j$, $j = 1, ..., r$ *este bloc Jordan elementar ce poate avea una din formele:*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & ... & & \lambda & 1 \\ 0 & ... & & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{92}$$

$$\mathbf{B} = diag(\lambda),$$

dacă λ *este autovaloare reală, sau*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{I}_2 & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & & & \\ ... & & & & \\ \mathbf{0} & ... & & \mathbf{P} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & ... & & \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} & ... & \mathbf{0} \\ ... & ... & & ... \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & ... & \mathbf{P} \end{bmatrix},$$

cu $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *dacă* $\lambda = a + ib$ *este valoare proprie complexă. Aceasta este forma canonică reală.*

În cazul în care $\mathbf{A} \in M_{n\times n}(\mathbf{C})$, *există o bază formată din vectori proprii generalizaţi* $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n\}$ *corespunzând valorilor proprii* $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *astfel încât, cu* $\mathbf{S} = [\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n]$ *are loc (91) unde* $\mathbf{B}$ *poate fi de forma (92) sau* $diag(\lambda)$ *cu* λ *valoare proprie.*

ANEXA B

Stabilitatea în sens Liapunov

În această anexă prezentăm, pe scurt, definiţiile şi rezultatele de bază privind stabilitaea în sens Liapunov. Pentru demonstraţii şi detalii se pot consulta, de exemplu, [**5**],[**16**],[**18**].

Considerăm sistemul diferenţial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

unde $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie pentru care avem existenţa şi unicitatea soluţiei locale a problemei Cauchy asociate (de exemplu $\mathbf{f}$ să fie local lipschitziană). Vom presupune că $\Omega \supset \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \| \mathbf{x} \| < \alpha\}$ şi fie de asemenea o soluţie $\varphi(t)$ definită pe semiaxă. Spunem că soluţia φ este *stabilă* dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi pentru orice t_0, există $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, astfel încât, dacă $\| \mathbf{x}_0 \| < \alpha$ şi

$$\| \mathbf{x}_0 - \varphi(t_0) \| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

atunci $\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)$ este definită pe $[t_0, +\infty)$ şi

$$\| \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t) \| < \varepsilon \quad , \quad t > t_0.$$

Soluţia φ este *asimptotic stabilă* dacă este stabilă şi există $\mu(t_0) > 0$ astfel încât, dacă

$$\| \mathbf{x}_0 - \varphi(t_0) \| < \mu(t_0), \tag{93}$$

atunci

$$\lim_{t \to \infty} \| \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t) \| = 0.$$

Dacă în definiţia stabilităţii $\delta(\varepsilon, t_0)$ poate fi ales independent de t_0, atunci soluţia se numeşte *uniform stabilă.* Dacă, în plus, $\mu(t_0)$ în 93 poate fi ales independent de t_0 astfel încât

$$\lim_{t - t_0 \to \infty} \| \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0) - \varphi(t) \| = 0,$$

atunci soluţia se numeşte *uniform asimptotic stabilă.*

Făcând substituţia $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \varphi$, studiul stabilităţii se reduce la studiul stabilităţii solutiei nule pentru sistemul

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \varphi) - \varphi'.$$

De aceea, în general, rezultatele privind stabilitatea se formulează pentru soluţiile staţionare ale sistemelor.

Stabilitatea este o proprietate a soluţiei şi nu a sistemului. Există sisteme care au deopotrivă soluţii stabile şi soluţii instabile. În ceea ce priveşte sistemele liniare

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}+\mathbf{b}(t),$$

substituţia de mai sus conduce la studiul stabilităţii soluţiei banale pentru sistemul liniar omogen asociat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

deci stabilitatea este o proprietate a sistemului. Caracterizarea stabilităţii sistemelor liniare a fost studiată în §2.2. Amintim că, dacă sistemul este cu coeficienţi constanţi , $\mathbf{A}(t) \equiv \mathbf{A}$, atunci soluţia banală a sistemului omogen este asimptotic stabilă dacă şi numai dacă $\mathbf{A}$ este matrice Hurwitz adică valorile proprii ale sale satisfac $\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{A}) < 0$. Dacă măcar o valoare proprie are partea reală pozitivă sistemul este instabil.

Considerăm acum sistemul liniar perturbat

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{94}$$

unde $\mathbf{F} : \mathbb{R}_+ \times \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \| \mathbf{x} \| < \alpha\} \to \mathbb{R}^n$ este continuă, local lipschitziană în $\mathbf{x}$ şi $\mathbf{F}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Are loc următoarea teoremă :

Teorema B.0.3. *(Liapunov-Poincaré) Dacă* $\mathbf{A}$ *este matrice Hurwitz şi pentru orice* $(t, \mathbf{x})$

$$\| \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \| \leq K \| \mathbf{x} \|,$$

cu K *o constantă suficient de mică, atunci soluţia banală a sistemului (94) este asimptotic stabilă.*

Această teoremă stă la baza studiului stabilităţii prin metoda primei aproximaţii. Mai precis, considerând sistemul neliniar

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

cu $\mathbf{f} \in C^1, \mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, atunci, dacă $\mathbf{A} = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})$ este matrice Hurwitz, rezultă că soluţia banală a sistemului neliniar este asimptotic stabilă. Aceasta rezultă imediat rescriind sistemul sub forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{0})\mathbf{x} + o(\| \mathbf{x} \|).$$

ANEXA C

Ecuaţii diferenţiale pe varietăţi diferenţiabile

Fie M un spaţiu topologic considerat, pentru simplitate, ca o submulţime a unui spaţiu euclidian $\mathbb{R}^N$ cu topologia indusă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente şi definesc o structură de *varietate diferenţiabilă (*mai exact de subvarietate diferenţiabilă a spaţiului euclidian) de clasă C^1 şi de dimensiune n pe M:

(1) Pentru orice $\mathbf{x} \in M$ există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}$ în $\mathbb{R}^N$ şi o funcţie $F : U \to \mathbb{R}^{N-n}$ de clasă C^1 astfel încât $U \cap M = F^{-1}(0)$ şi $\operatorname{rang} DF(\mathbf{x}) = N - n$ pentru $\mathbf{x} \in U \cap M$.

(2) Pentru orice $\mathbf{x} \in M$ există o vecinătate U a lui $\mathbf{x}$ în $\mathbb{R}^N$, o mulţime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$ şi o funcţie de clasă C^1, $\varphi : D \to U$, $\varphi(D) = U \cap M$, $\operatorname{rang} D\varphi = n$.

Echivalenţa celor două afirmaţii rezultă uşor din teorema funcţiilor implicite. Se observă de asemenea că, dacă $\psi : D_1 \to U_1$, $\psi(D_1) = U_1 \cap M$, $\operatorname{rang} D\psi = n$, atunci $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap U_1) \to \psi^{-1}(U \cap U_1)$ este un C^1-difeomorfism. Perechile de tipul (D, φ) se numesc *hărţi locale* iar o mulţime de hărti locale ce acoperă M formează un *atlas.* În general, pentru a defini o varietate diferenţiabilă fară a face apel la structura metrică indusă de spaţiul euclidian in care aceasta se scufundă, se definesc hărţile locale iar condiţia de rang din a doua afirmaţie de mai sus se înlocuieşte cu condiţia ca pe intersecţia a două hărţi locale, $\psi^{-1} \circ \varphi$ să fie difeomorfism. În orice caz, o varietate diferenţiabilă de dimensiune n se scufundă întotdeauna într-un spaţiu euclidian de dimensiune $2n + 1$ (teorema lui Witney).

Tinând seama de cele două condiţii ce definesc o subvarietate diferenţiabilă a lui $\mathbb{R}^N$ şi păstrând notaţiile de mai sus, definim prin următoarele doua afirmaţii echivalente un *vector tangent* $\mathbf{v}$ la M în $\mathbf{x}$:

(1) $\mathbf{v}$ este în nucleul operatorului liniar $DF(\mathbf{x}) : DF(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{v}$ este în subspaţiul liniar generat de vectorii $\{\frac{\partial \varphi}{\partial z^j}(\varphi^{-1}(\mathbf{x}))\}_{j=\overline{1,n}}$.

(3) Există o curbă de clasă C^1 $\gamma : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^N$, $\gamma(t) \in M$, $\gamma(0) = \mathbf{x}$ astfel încât $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\gamma(t) \mid_{t=0}$.

Numim *spaţiu tangent* la M în $\mathbf{x}$ şi notăm $T_{\mathbf{x}}M$ mulţimea vectorilor tangenţi la M în $\mathbf{x}$. Se observă că $T_{\mathbf{x}}M$ este un subspaţiu liniar de dimensiune n. Notăm, de asemenea, cu $TM = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}M\}$ şi îl numim *fibratul tangent*. TM are o structură naturală de varietate diferenţială de dimensiune $2n$. Unui atlas pe M, $\mathcal{A} = \{(D_i, \varphi_i)\}_{i\in I}$ îi corespunde în mod natural un atlas pe TM : $\widetilde{\mathcal{A}} = \{(\widetilde{D}_i, \widetilde{\varphi}_i)\}_{i\in I}$, $\widetilde{D}_i = D_i \times \mathbb{R}^n$, $\widetilde{\varphi}_i(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = (\varphi_i(\mathbf{z}), \sum_{j=1}^n w^j \dfrac{\partial \varphi_i}{\partial z^j}(\mathbf{z}))$.

Fie acum două varietăţi de clasă C^k, M_1, M_2, de dimensiuni n_1, n_2. Fie $F : M_1 \to M_2$. Spunem că F este de clasă C^k dacă, date hărţile locale (D_1, φ_1), (D_2, φ_2) pe M_1 respectiv pe M_2, atunci $\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1$ este de clasă C^k de la D_1 la D_2.

O astfel de aplicaţie induce o aplicaţie de clasă C^{k-1}, $F_* : TM_1 \to TM_2$ astfel : dacă $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) \in TM_1$, cu $(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) = \widetilde{\varphi}_1(\mathbf{z}_1, \mathbf{w}_1)$, $\mathbf{w}_1 = \dfrac{d}{dt}\gamma_1(t) \mid_{t=0}$, ($\gamma_1$: $(-\delta, \delta) \to D_1$ de clasă C^1, $\gamma_1(0) = \mathbf{z}_1$), atunci $F_*(\mathbf{x}_1, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2)$ unde $\mathbf{x}_2 = F(\mathbf{x}_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{v}_2) = \widetilde{\varphi}_2(\mathbf{z}_2, \mathbf{w}_2)$, $\mathbf{w}_2 = \dfrac{d}{dt}[\varphi_2^{-1} \circ F \circ \varphi_1 \circ \gamma_1(t)] \mid_{t=0}$. Se verifică uşor că definiţia nu depinde de hărţile locale alese. F_* este o aplicaţie liniară de la $TM_{1,\mathbf{x}} \to TM_{2,F(\mathbf{x})}$. Dacă $F : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$, atunci $F_*(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = (F(\mathbf{x}), DF(\mathbf{x})\mathbf{v})$. Din acest motiv notăm în general cu $DF(\mathbf{x}) := F_* \mid_{TM_{1,\mathbf{x}}}$.

Fie o secţiune de clasă C^1 în fibratul tangent, adică o C^1-aplicaţie $\mathbf{v} : M \to TM$, astfel încât $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in TM_{\mathbf{x}}$ pentru orice $\mathbf{x}$. În cele ce urmează dăm o semnificaţie problemei Cauchy

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Astfel, dacă (D, φ) este o hartă locală şi $(\mathbf{x}, \mathbf{v}(\mathbf{x})) = \widetilde{\varphi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}(\mathbf{z}))$, $\mathbf{x}_0 = \varphi(\mathbf{z}_0)$, rezolvăm problema Cauchy în această hartă locală :

$$\begin{cases} \mathbf{z}' = \mathbf{w}(\mathbf{z}) \\ \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \end{cases}$$

şi definim

$$\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{z}(t)).$$

Se verifică uşor că definiţia soluţiei problemei Cauchy nu depinde de harta locală aleasă. Întrucât definiţia este locală, existenţa şi unicitatea soluţiei problemei Cauchy rezultă imediat. De asemenea rămâne valabilă teorema de existenţă a soluţiei saturate. Dacă varietatea M este compactă, atunci soluţia saturată este definită pe $\mathbf{R}$.

Index

Bibliografie

[1] V. I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] V. I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics.* Springer-Verlag, New York, 1978

[3] V. I. Arnold, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt. *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[4] V. Barbu, Th. Precupanu. *Convexity and optimization in Banach spaces.* D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, romanian edition, 1986.

[5] Viorel Barbu. *Ecuaţii diferenţiale.* Editura Junimea, 1985.

[6] Earl A. Coddington, Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[7] W. A. Coppel. *Dichotomies in stability theory.* Springer-Verlag, Berlin, 1978. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 629.

[8] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai. *Ergodic theory.* Springer-Verlag, New York, 1982.

[9] Harry Dankowicz. *Chaotic dynamics in Hamiltonian systems.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1997. With applications to celestial mechanics.

[10] John Guckenheimer, Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields.* Springer-Verlag, New York, 1990.

[11] Morris W. Hirsch, Stephen Smale. *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra.* Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. Pure and Applied Mathematics, Vol. 60.

[12] Jürgen Moser. *Stable and random motions in dynamical systems.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1973.

[13] Igor Nikolaev, Evgeny Zhuzhoma. *Flows on 2-dimensional manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1999. An overview.

[14] Kenneth J. Palmer. Exponential dichotomies and transversal homoclinic points. *J. Differential Equations*, 55(2):225–256, 1984.

[15] Lawrence Perko. *Differential equations and dynamical systems.* Springer-Verlag, New York, third edition, 2001.

[16] L. S. Pontryagin. *Ordinary differential equations.* Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.-Palo Alto, Calif.-London, 1962.

[17] Stephen Smale. Diffeomorphisms with many periodic points. In *Differential and Combinatorial Topology (A Symposium in Honor of Marston Morse)*, pages 63–80. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1965.

[18] Ioan I. Vrabie. *Ecuaţii diferenţiale.* Editura MATRIXROM, Bucureşti, 2000.