Seminar 1

1. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Aratati ca

$$\max\{x, y\} = \frac{|x - y| + (x + y)}{2}$$

Formulati si demonstrati o relatie analoaga pentru $\min\{x, y\}$.

2. Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Demonstrati urmatoarele proprietati ale functiei modul
   a) $|x + y| \leq |x| + |y|$
   b) $|x - y| \geq |x| - |y|$

3. Determinati $\inf A$, $\sup A$, $\min A$ si $\max A$ pentru multimile
   a) $A = [0, 7) \cup [8, +\infty)$
   b) $A = [-1, 2] \setminus \mathbb{Q}$
   c) $A = \left\{ \frac{1}{n} \middle| \, n \in \mathbb{N}^{\star} \right\}$
   d) $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| \, |x^2 - x| \leq 1 \right\}$

4. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Aratati ca
   a) Daca exista $\min A$ atunci $\min A = \inf A$
   b) Daca exista $\max A$ atunci $\max A = \sup A$

5. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ multimi nevide si marginite. Daca $A \subseteq B$ atunci $\inf A \geq \inf B$ si $\sup A \leq \sup B$.

6. Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$ multimi nevide si marginite. Aratati ca $A \cup B$ este multime marginita si are loc

$$\min\{\inf A, \inf B\} = \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

7. Demonstrati ca intre oricare doua numere reale distincte exista cel putin un numar rational (respectiv irational).

8. Demonstrati ca orice numar real este limita unui sir de numere rationale (respectiv irationale). Dati exemple pentru numerele $x = 2$ si $y = \sqrt{2}$.

9. Justificati ca $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} \notin \mathbb{Q}$.