Serii de numere

1. Stabiliti convergenta urmatoarelor serii

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$;

Rezolvare. Aplicam criteriul raportului (D'Alembert). Avem

$$\frac{\frac{n^2+1}{n!}}{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n+1)^2+1} \to \infty, \ n \to \infty.$$

Limita raportului termenilor consecutivi este strict mai mare decat 1. Conform criteriului raportului, concluzia este ca seria este convergenta.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$;

Rezolvare. Raportul termenilor consecutivi este

$$\frac{\frac{(an)^n}{n!}}{\frac{(a(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)n^n}{a(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{ae}.$$

Daca $a < 1/e$ avem

$$\frac{1}{ae} > 1,$$

deci seria este convergenta.

Daca $a > 1/e$ avem

$$\frac{1}{ae} < 1,$$

deci seria este divergenta.

c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha n)!}{(n!)^{\beta}}$;

Rezolvare. Avem

$$\frac{\frac{(\alpha n)!}{(n!)^{\beta}}}{\frac{(\alpha(n+1))!}{((n+1)!)^{\beta}}} = \frac{(n+1)^{\beta}}{(\alpha n+1)(\alpha n+2)(\alpha n+3)...(\alpha n+\alpha)}.$$

In acest caz limita raportului termenilor consecutivi este limita unei functii rationale (fractie in care numaratorul si numitorul sunt functii polinomiale).

Daca $\beta > \alpha$ atunci limita este ∞ si seria este convergenta.

Daca $\beta < \alpha$ atunci limita este 0 si seria este divergenta.

Daca $\beta = \alpha$ atunci limita este egala cu raportul coeficientilor termenilor dominanti $\frac{1}{\alpha^{\alpha}}$. Daca $\beta = \alpha > 1$ atunci limita este mai mica decat 1 si seria este divergenta.

Serii Taylor

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$

2. Scrieti seriile Taylor asociate urmatoarelor functii in punctul $x_0 = a = 0$. Gasiti multimile de convergenta.

a) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$;

Rezolvare. Derivatele de ordin superior sunt

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (k+1)! \frac{1}{(x-1)^{k+2}}.$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k (k+1)! \frac{1}{(-1)^{k+2}} = (k+1)!.$$

Seria Taylor asociata functiei f in punctul $x_0 = a = 0$ este

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k.$$

Pentru a determina multimea de convergenta se aplica criteriul raportului, pentru un numar x oarecare, seriei valorilor absolute $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|x|^k$.

Avem

$$\frac{(k+1)|x|^k}{(k+1+1)|x|^{k+1}} \to \frac{1}{|x|},\ k \to \infty.$$

Daca $|x| < 1$ seria valorilor absolute este convergenta, deci seria initiala este convergenta. Daca $|x| \geq 1$ se deduce imediat (scriind seria) ca seria este divergenta. In consecinta, multimea de convergenta este intervalul $(-1; 1)$.

b)$f(x) = \frac{x^2-10x}{(x-5)^2}$;

Rezolvare. Prelucram expresia functiei pentru a obtine o expresie mai convenabila cu numarator constant.

$$\frac{x^2-10x}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+25-25}{(x-5)^2} = 1 - \frac{25}{(x-5)^2}.$$

Derivatele de ordin superior sunt

$$f^{(k)}(x) = 25(-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{(x-5)^{k+2}}.$$

$$f^{(k)}(0) = 25(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(-5)^{k+2}} = -\frac{(k+1)!}{5^k}.$$

Seria Taylor asociata functiei f in punctul $x_0 = a = 0$ este

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)!}{5^k k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)}{5^k} x^k.$$

Se aplica criteriul raportului, pentru un x oarecare, seriei valorilor absolute $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{5^k} |x|^k$.

Avem

$$\frac{\frac{k+1}{5^k}|x|^k}{\frac{k+1+1}{5^{k+1}}|x|^{k+1}} \to \frac{5}{|x|},\ k \to \infty.$$

Daca $|x| < 5$ seria valorilor absolute este convergenta, deci seria initiala este convergenta. Daca $|x| \geq 5$ se deduce imediat (scriind seria) ca seria este divergenta. In consecinta, multimea de convergenta este intervalul $(-5; 5)$.

Integrale duble

3. Sa se calculeze integralele duble

a)$I = \int\int_A (x^2 + 3y^2) dxdy$,

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$;

Rezolvare. Se stabileste ordinea integralelor iterate. Din formula definitiei domeniului A se deduce ca integralei de variabila x ii corespunde un interval constant, iar integralei de variabila y ii corespunde un interval variabil in functie de x, deci se integreaza in ordinea

$$\int\int_A (x^2 + 3y^2) dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + 3y^2) dy \right) dx.$$

Se calculeaza integrala in raport cu y, trecand la primitiva functiei de variabila y

$$\int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + 3y^2) dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(\left(x^2 y + y^3 \right) \Big|_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$$

Avem mai departe

$$I = \int_{-1}^{1} \left(2x^2\sqrt{1-x^2} + 2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \right) dx,$$

$$I = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx.$$

Primitiva functiei $\sqrt{1-x^2}$ este

$$\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

In consecinta avem

$$I = (x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)\Big|_{x=-1}^{x=1} = \pi.$$

b)$I = \int\int_A (5+y+2x)dxdy,$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq 1/2, -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \leq x \leq 1-y\}.$

Rezolvare. Se stabileste ordinea integralelor iterate. Din formula definitiei domeniului A se deduce ca integralei de variabila y ii corespunde un interval constant, iar integralei de variabila x ii corespunde un interval variabil in functie de y, deci se integreaza in ordinea

$$\int\int_A (5+y+2x)dxdy = \int_0^{1/2} \left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}^{1-y} (5+y+2x)dx \right) dy.$$

Se calculeaza integrala in raport cu x, trecand la primitiva functiei de variabila x

$$I = \int_0^{1/2} \left(\left(5x + yx + x^2\right) \Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}^{x=1-y} \right) dy.$$

Avem mai departe

$$\int_0^{1/2} \left(\left(5x + yx + x^2\right) \Big|_{x=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}^{x=1-y} \right) dy =$$

$$= \int_0^{1/2} \left(5(1-y) + y(1-y) + (1-y)^2\right) dy -$$

$$- \int_0^{1/2} \left(5\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} + y\frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{1-y^2} \right) dy.$$

Se continua trecand la primitive. Determinand primitivele functiilor

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{1-y^2}},\ \frac{1}{1-y^2},$$

se obtine in final valoarea integralei I din cerinta.