SEMIARUL 1
Mulţimi şi funcţii

1. Fie $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$f(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 0 \\ x-1, x < 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x-1, x \geq 0 \\ x+1, x < 0 \end{cases}$ $h(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 0 \\ 2x+1, x < 0 \end{cases}$
Să se verifice dacă aceste funcţii sunt injective, surjective, bijective şi in caz afirmativ să se determine inversa.

2. Acelaşi enunţ pentru:

   a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
$$f(n) = \begin{cases} n+1, n - par \\ n-1, n - impar \end{cases}$$

   b) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{x+1}{2x-2}$$

3. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 2$
$$g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 0 \\ x-1, x < 0 \end{cases}$$

   a) Să se verifice dacă f este injectivă respectiv surjectivă.
   b) Să se calculeze $f \circ g$ şi $g \circ f$.

4. Să se determine imaginea funcţiei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x+3}$.

5. Să se găsească un exemplu de funcţie $f\colon A \to B$, A, B finite, care să fie:

   a) injectivă dar nesurjectivă
   b) surjectivă dar neinjectivă
   c) bijectivă

6. Fie A o mulţime finită, $f\colon A \to A$. Demonstraţi că f este injectivă $\Leftrightarrow$ f este surjectivă.

7. Fie $f\colon A \to B$. Arătaţi că:

   a) Dacă $X, Y \subseteq A$ atunci
$$f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$$
$$f(X \cap Y) \subsetneq f(X) \cap f(Y)$$

   b) f injectivă $\Leftrightarrow$ $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$

8. Fie $f\colon A \to B$ o funcţie. Definim $f_*\colon \mathrm{P}(A) \to \mathrm{P}(B)$, $f_*(X) = f(X)$, $X \subseteq A$.
Atunci dacă f injectivă $\Rightarrow$ f_* injectivă.

9. Stabiliţi dacă urmatoarele funcţii sunt injective, surjective respectiv bijective:

   a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$
   b) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x, y) = 3x + 5y$

10. Să se verifice dacă urmatoarele funcţii sunt bine definite:

   a) $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(\frac{m}{n}) = m + n$
   b) $f\colon \mathbb{Q} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbb{Q}$, $f(\frac{m}{n}) = \frac{2n}{2m-n}$