Logică computațională
Curs 8

Lector dr. Mihiș Andreea-Diana

Sistemul axiomatic al logicii predicatelor de ordinul I - Alfabetul

- P=(Σ_{Pr} , F_{Pr} , A_{Pr} , R_{Pr})
  - $\Sigma_{\text{Pr}} = Var \cup Const \cup (\cup^n_{j=1} \mathcal{F}_j) \cup (\cup^n_{j=1} \mathcal{P}_j) \cup \mathcal{P}_0 \cup Conective \cup Cuantif$
    - $Var = \{ x, y, z, \ldots\}$ – mulţimea *simbolurilor de variabile*
    - $Const = \{ a, b, c, \ldots\}$ – mulţimea *constantelor*
    - $\mathcal{F}_j = \{ f \mid f : D^j \rightarrow D\}$ – mulţimea *simbolurilor de funcţii* de aritate "j"
    - $\mathcal{P}_j = \{ P \mid P: D^j \rightarrow \{T, F\}\}$ – mulţimea *simbolurilor de predicate* de aritate "j"
    - $\mathcal{P}_0 = \{ p, q, r, \ldots\} \cup \{T, F\}$ – mulţimea *variabilelor propoziționale* și a *valorilor de adevăr*
    - $Conective = \{ \neg , \wedge , \vee , \rightarrow , \leftrightarrow \}$
    - $Cuantif = \{ \forall$ (cuantificatorul universal), $\exists$ (cuantificatorul existențial)$\}$

TERM, ATOM, Literal

- ***TERM*** = mulţimea *termenilor*:
  - $Var \subset TERM$
  - $Const \subset TERM$
  - dacă $f \in \mathcal{F}_k$ și $t_1, \ldots, t_k \in TERM$ atunci $f(t_1, \ldots, t_k) \in TERM$
- ***ATOM*** = mulţimea *formulelor atomice* (*atomilor*):
  - $T, F \in ATOM$
  - dacă $P \in \mathcal{P}_k$ și $t_1, \ldots, t_k \in TERM$ atunci $P(t_1, \ldots, t_k) \in ATOM$
- ***Literal*** = un atom sau negația sa

Formule corect construite

- F_{Pr} = mulţimea formulelor predicative bine formate
  - $ATOM \subset F_{\mathrm{Pr}}$
  - dacă $U \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ și $x \in Var$ astfel încât x nu se află deja sub incidența unui cuantificator (nu este legat), atunci:

    $(\forall x)\ U(x) \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ și $(\exists x)\ U(x) \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$
  - dacă $U, V \in \mathrm{F}_{\mathrm{Pr}}$ astfel încât U și V nu conțin aceeași variabilă atât liberă cât și legată, atunci:

    $\neg U \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \wedge V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \vee V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \rightarrow V \in F_{\mathrm{Pr}}$, $U \leftrightarrow V \in F_{\mathrm{Pr}}$

Axiome

- $A_{\mathrm{Pr}} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ scheme axiomatice
  - A_1: $U \rightarrow (V \rightarrow U)$
  - A_2: $(U \rightarrow (V \rightarrow Z)) \rightarrow ((U \rightarrow V) \rightarrow (U \rightarrow Z))$
  - A_3: $(U \rightarrow V) \rightarrow (\neg V \rightarrow \neg U)$
  - A_4: $(\forall x)\, U(x) \rightarrow U(t)$, unde t este un termen arbitrar
  - A_5: $(U \rightarrow V(y)) \rightarrow (U \rightarrow (\forall x)\, V(x))$, unde y este o variabilă liberă în V care nu apare în U, iar x nu este variabilă liberă nici în U, nici în V

Reguli de inferență

- $R_{\mathrm{Pr}} = \{mp, gen\}$
  - *modus ponens*: $U\,,\,U \to V \vdash_{mp} V$
  - *regula generalizării*: $U\,(x) \vdash_{gen} (\forall x)\; U\,(x)$

(*x* era o variabilă liberă în *U*)

Definiții

- Variabilele din formulele predicative care se află sub incidenţa unui cuantificator se numesc *variabile legate*, în caz contrar ele se numesc *variabile libere.*

- O *formulă* predicativă se numeşte *închisă*, dacă toate variabilele sale sunt legate, iar în caz contrar se numeşte *deschisă*.

Definiția deducției

- Fie formulele $U_1, U_2, \ldots, U_n$ numite ipoteze şi V formulă propoziţională. Spunem că ***V* este deductibilă din *$U_1, U_2, \ldots, U_n$*** şi notăm $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n \vdash V$, dacă există o secvenţă de formule $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ astfel încât $f_m = V$ şi $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$ avem:
  - $f_i \in A_{\mathrm{Pr}}$;
  - $f_i \in \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$;
  - $f_j, f_k \vdash_{mp} f_i$, $j < i$ și $k < I$
  - $f_j \vdash_{gen} f_i$, $j < i$
- Secvenţa $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$ se numeşte *deducţia* lui V din $U_1, U_2, \ldots, U_n$.

Definiția teoremei

- O formulă $U \in F_{\text{Pr}}$, astfel încât $\varnothing \vdash U$ (sau $\vdash U$) se numeşte ***teoremă***.

Semantica logicii predicatelor de ordinul I

- realizează legătura dintre
  - constantele,
  - simbolurile de funcţii,
  - simbolurile de predicate respectiv

  constantele, funcţiile şi predicatele din conceptualizarea universului modelat

- este furnizat un înţeles în termenii universului modelat pentru orice formulă din limbaj

Definiția interpretării

- O *interpretare* pentru un limbaj L al calculului predicatelor este o pereche I=<D, m>, unde :
  - D este o mulţime nevidă numită *domeniu al interpretării*.
  - m este o funcţie care asociază:
    - o valoare fixă $m(c)$ din domeniul D unei constante c.
    - o funcţie $m(f)$: $D^n \to D$ fiecărui simbol de funcţie f de aritate n;
    - un predicat $m(P)$: $D^n \to \{T, F\}$ fiecărui simbol de predicat P de aritate n.

Notații

pentru interpretarea $I = \langle D, m \rangle$:

- $|I| = D$ este domeniul interpretării I
- $I|x| = m(x)$ unde x este constantă, simbol de funcţie sau simbol de predicat.
- As(I) mulţimea funcţiilor de asignare de variabile peste domeniul interpretării I.

  O funcţie $a \in$ As(I) este definită astfel $a{:}Var \rightarrow |I|$.
- $[a]_x = \{a' \mid a' \in \mathrm{As}(I)$ şi $a'(y) = a(x)$, pentru orice $y \neq x\}$.

Definiția funcției de evaluare

Fie o interpretare I şi $a \in \mathrm{As}(I)$. Se defineşte inductiv ***funcţia de evaluare*** $\nu^I{}_a$:

- $\nu^I{}_a(x) = a(x)$, $x \in Var$;
- $\nu^I{}_a(c) = \mathrm{I}|c|$, $c \in Const$;
- $\nu^I{}_a(f(t_1, \ldots, t_n)) = I|f|(\nu^I{}_a(t_1),\ldots, \nu^I{}_a(t_n))$, $f \in \mathcal{F}_k$, $n>0$;
- $\nu^I{}_a(P(t_1, \ldots, t_n)) = I|P|(\nu^I{}_a(t_1),\ldots, \nu^I{}_a(t_n))$, $P \in \mathcal{P}_k$, $n>0$;
- $\nu^I{}_a(\neg A) = \neg\, \nu^I{}_a(A)$; $\nu^I{}_a(A \wedge B) = \nu^I{}_a(A) \wedge \nu^I{}_a(B)$
- $\nu^I{}_a(A \vee B) = \nu^I{}_a(A) \vee \nu^I{}_a(B)$; $\nu^I{}_a(A \rightarrow B) = \nu^I{}_a(A) \rightarrow \nu^I{}_a(B)$
- $\nu^I{}_a((\exists x)A(x)) = T$ dacă şi numai dacă $\nu^I{}_{a'}(A(x)) = T$ pentru o funcţie $a' \in [a]_x$
- $\nu^I{}_a((\forall x)A(x)) = T$ dacă şi numai dacă $\nu^I{}_{a'}(A(x)) = T$ pentru orice funcţie $a' \in [a]_x$

Concepte semantice

- *O formulă A* este *realizabilă (consistentă)* dacă şi numai dacă există o interpretare I şi o funcţie $a \in \mathrm{As}(I)$ astfel încât $\nu^I_a(A)=T$. În caz contrar formula se numeşte *nerealizabilă (inconsistentă)*.
- Formula A este *adevărată în interpretarea I* dacă şi numai dacă pentru orice funcţie $a \in \mathrm{As}(I)$ de asignare avem $\nu^I_a(A)=\mathrm{T}$ şi notăm $\models_I A$, iar I se numeşte *model* al lui A.
- Interpretarea I se numește *anti-model* al formulei predicative A dacă A este evaluată ca falsă în I, adică: $\forall\ a \in \mathrm{As}(I)$ are loc $\nu^I_a(A)=F$.
- *Formula* A este *validă (tautologie)* dacă şi numai dacă A este adevărată în orice interpretare şi se notează: $\models A$.
- Două *formule A* şi *B* sunt *logic echivalente* dacă $\nu^I_a(A)= \nu^I_a(B)$ pentru orice interpretare I şi funcţie a de asignare. Notaţie $A \equiv B$.
- O mulţime S de formule *implică logic* o formulă A dacă toate modelele mulţimii (adică modelele conjuncţiei formulelor din S) sunt modele ale formulei. Spunem că A este o *consecinţă logică* a mulţimii de formule S şi notăm $S \models A$.
- O *mulţime de formule* predicative este *consistentă* dacă formula obținută prin conjuncţia elementelor sale este consistentă, adică are cel puţin un model.
- O *mulţime de formule* este *inconsistentă* dacă nu există nici un model pentru formula obținută prin conjuncţia elementelor sale.

Observații

- Evaluarea unei formule *A* închise depinde doar de interpretarea în care se evaluează formula, notându-se ν^{I} (A).
- Dacă interpretarea are domeniu finit:
  - o formulă cuantificată *universal* este înlocuită cu *conjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare
  - o formulă cuantificată *existențial* este înlocuită cu *disjuncția* instanțelor acesteia folosind toate elementele domeniului de interpretare

Echivalențe logice în calculul predicatelor

- Legile de expansiune

$(\forall x)\ A(x) \equiv (\forall x)\ A(x) \wedge A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

$(\exists x)\ A(x) \equiv (\exists x)\ A(x) \vee A(t)$, t – termen oarecare $t \neq x$

- Legile infinite ale lui DeMorgan

$\neg\ (\exists x)\ A(x) \equiv (\forall x) \neg\ A(x)$

$\neg\ (\forall x)\ A(x) \equiv (\exists x) \neg\ A(x)$

- Legile de interschimbare a cuantificatorilor

$(\exists x)\ (\exists y)\ A(x, y) \equiv (\exists y)\ (\exists x)\ A(x , y)$

$(\forall x)\ (\forall y)\ A(x, y) \equiv (\forall y)\ (\forall x)\ A(x , y)$

Legi de extragere

- Legile de extragere a cuantificatorilor în faţa formulei

  $A \vee (\exists x)\, B(x) \equiv (\exists x)\, (A \vee B(x))$

  $A \vee (\forall x)\, B(x) \equiv (\forall x)\, (A \vee B(x))$

  $A \wedge (\exists x)\, B(x) \equiv (\exists x)\, (A \wedge B(x))$

  $A \wedge (\forall x)\, B(x) \equiv (\forall x)\, (A \wedge B(x))$

  unde formula A nu conţine pe x ca variabilă liberă sau legată

  $(\exists x)\, A(x) \vee B \equiv (\exists x)\, (A(x) \vee B)$

  $(\forall x)\, A(x) \vee B \equiv (\forall x)\, (A(x) \vee B)$

  $(\exists x)\, A(x) \wedge B \equiv (\exists x)\, (A(x) \wedge B)$

  $(\forall x)\, A(x) \wedge B \equiv (\forall x)\, (A(x) \wedge B)$

  unde formula B nu conţine pe x ca variabilă liberă sau legată

Legile distributivității

- $\exists$ față de $\vee$:

  $(\exists x)\ (A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)\ A(x) \vee (\exists x)\ B(x)$

- $\forall$ față de $\wedge$:

  $(\forall x)\ (A(x) \wedge B(x)) \equiv (\forall x)\ A(x) \wedge (\forall x)\ B(x)$

Semidistributivități

- $\exists$ față de $\wedge$:

  $\models (\exists x)\,(A(x) \wedge B(x)) \rightarrow (\exists x)\,A(x) \wedge (\exists x)\,B(x)$

- $\forall$ față de $\vee$:

  $\models (\forall x)\,A(x) \vee (\forall x)\,B(x) \rightarrow (\forall x)\,(A(x) \vee B(x))$

Forme normale ale formulelor predicative

- O formulă U predicativă este în ***forma normală prenexă*** dacă ea este de forma $(Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\ M$, unde $Q_i, i=1,\ldots,n$ sunt cuantificatori logici, iar M nu conţine cuantificatori. Secvenţa se numeşte *prefixul formulei U*, iar M este *matricea formulei U*.
- O formulă U predicativă este în *forma normală prenexă conjunctivă* dacă ea este în formă normală prenexă, iar matricea este în FNC.

- **Teoremă:**

Orice formulă din calculul predicatelor poate fi transformată într-o forma normală prenexă logic echivalentă cu ea.

Algoritmul de aducere la forma normală prenexă

Pas 1: Se înlocuiesc conectivele $\rightarrow$ şi $\leftrightarrow$ folosind $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Pas 2: Se aplică legile finite şi infinite ale lui DeMorgan astfel încât cuantificatorii să nu fie precedaţi de negaţie.

Pas 3: Se redenumesc variabilele legate astfel încât ele să fie distincte.

Pas 4: Se utilizează echivalenţele logice care reprezintă *legile de extragere a cuantificatorilor în faţa formulei.*

!!! Ordinea de extragere a cuantificatorilor este arbitrară.

Forma normală Skolem

- Fie U o formulă predicativă, iar $U^P = (Q_1x_1)\ldots(Q_nx_n)\ M$ una dintre formele sale normale prenexe.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem* notată U^S care se obţine astfel: pentru fiecare cuantificator existenţial Q_r din prefix se aplică următoarea transformare:
  - dacă înaintea simbolului Q_r nu apare niciun cuantificator universal, atunci se alege o constantă notată **a,** diferită de toate constantele care apar în M şi se înlocuiesc toate apariţiile variabilei x_r în M cu **a**. Se şterge (Q_rx_r) din prefixul formulei.
  - dacă înaintea simbolului Q_r apar cuantificatorii universali $Q_{s_1},\ldots,Q_{s_m}$, unde $1\leq s_1<\ldots< s_m<r$, atunci alegem un simbol f de funcţie de m variabile, diferit de celelalte simboluri de funcţii şi se înlocuieşte fiecare apariţie a variabilei în M cu $f(x_{s_1},\ldots, x_{s_m})$. Se şterge (Q_rx_r) din prefixul formulei.
- Constantele şi funcţiile folosite pentru a înlocui variabilele existenţiale se numesc *constante Skolem* şi *funcţii Skolem*.

Forma normală clauzală

- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală Skolem fără cuantificatori* notată U^{Sq} care se obţine prin eliminarea cuantificatorilor universali din U^{S}.
- Formulei U îi corespunde o formulă în *forma normală clauzală* notată U^{C} care se obţine din U^{Sq} prin aducerea la FNC.
- Obs.: Transformările utilizate în procesul de Skolemizare nu păstrează echivalenţa logică, dar păstrează inconsistenţa

Teoremă

Fie $U_1, U_2, .., U_n, V$ formule predicative.

- V inconsistentă **ddacă** V^P inconsistentă **ddacă** V^S inconsistentă **ddacă** V^{Sq} inconsistentă **ddacă** V^C inconsistentă.
- $\{U_1, U_2, .., U_n\}$ inconsistentă **ddacă** $\{U_1^C, U_2^C, .., U_n^C\}$ inconsistentă.

Proprietățile logicii predicatelor de ordinul I

- **Teorema de completitudine și corectitudine**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă.

  - **completitudinea**: dacă $S \models A$ atunci $S \vdash A$.
  - **corectitudinea**: dacă $S \vdash A$ atunci $S \models A$.

- **Teorema respingerii**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{\neg A\}$ este inconsistentă atunci $S \vdash A$.

- **Teorema de deducţie**

  Fie S o mulţime de formule predicative, iar A o formulă predicativă. Dacă $S \cup \{A\} \vdash B$ atunci $S \vdash A \to B$.

Teorema lui Church 1936

- Problema validităţii unei formule în calculul predicatelor de ordinul I este *nedecidabilă*. Mulţimea formulelor valide din acest sistem logic este recursiv numărabilă, adică există o procedură P care, având ca intrare o formulă A din limbaj, are următorul comportament:
  - dacă formula A este validă, P se termină şi furnizează răspunsul corespunzător;
  - dacă formula A nu este validă, P se termină cu răspunsul corespunzător *sau* execuţia procedurii nu se încheie niciodată.

- Calculul predicatelor este **semi-decidabil**.