

Laborator 7

Metoda inversei

Fie X o variabilă aleatoare ce are următoarea distribuție discretă:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Fie U o variabilă aleatoare ce urmează legea uniformă pe intervalul $(0, 1]$, adică densitatea sa este:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}.$$

Observație: funcția de repartiție a lui U este $F_U(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$.

Notăm $q_i = q_{i-1} + p_i$, $i = \overline{1, n}$, iar $q_0 = 0$. Funcția de repartiție a lui X este de forma:

$$F_X(x) = \begin{cases} q_0 = 0, & x \leq x_1 \\ q_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ q_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \\ q_{n-1}, & x_{n-1} < x \leq x_n \\ q_n = 1, & x > x_n \end{cases}.$$

Dacă definim $F_X^{-1}(u) := \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq u\}$, $u \in (0, 1]$, atunci

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} x_1, & 0 = q_0 < u \leq q_1 \\ x_2, & q_1 < u \leq q_2 \\ x_3, & q_2 < u \leq q_3 \\ \dots & \\ x_n, & q_{n-1} < u \leq q_n = 1 \end{cases}.$$

F_X^{-1} se numește inversa funcției de repartiție F_X .

Propoziție: $F_X^{-1}(U) = X$. Așadar, variabila aleatoare $F_X^{-1}(U)$ urmează legea lui X .

Demonstrație:

$$P(F_X^{-1}(U) = x_i) = P(q_{i-1} < U \leq q_i) = \int_{q_{i-1}}^{q_i} f(t) dt = \int_{q_{i-1}}^{q_i} 1 dt = q_i - q_{i-1} = p_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

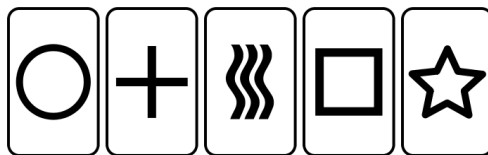
Generarea de numere aleatoare ce urmează o distribuție dată:

- Se generează, după legea uniformă, un număr aleator $u \in (0, 1]$.
- Se caută $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $q_{i-1} < u \leq q_i$.
- $F_X^{-1}(u) = x_i$ reprezintă numărul ales aleator cu probabilitatea p_i .

I. `>> doc hist/ mean/ var;`

Să se scrie un program care generează N numere aleatoare ce urmează distribuția X (vectorii $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$ vor fi parametrii procedurii). Să se reprezinte aceste numere într-o histogramă și să se calculeze media lor aritmetică. Să se calculeze valoarea medie(expectată) și varianța variabilei aleatoare X .

II. În anii '30, la Universitatea Duke din Carolina de Nord, J.B. Rhine (1895-1980, psiholog) a pus bazele unei noi ramuri a psihologiei: parapsihologia. El dorea să demonstreze existența percepției extrasenzoriale(ESP), numită și al șaselea simț(toți acești termeni pretențioși erau meniți să înlăture conotațiile legate de spiritism), printr-o serie de experimente cu un set simplu de cărți:



Cărți Zener sau ESP

Considerăm următorul test de clarviziune: persoana testată trebuie să ghicească cartea ce urmează să fie extrasă din pachetul de cărți, până la epuizarea pachetului.

Să presupunem că sunteți supuși unui astfel de test. Pentru a simplifica situația presupunem că în pachet sunt doar două simboluri: S cărți cu stea și C cărți cu cerc.

a) Dacă încercați doar să ghiciți de fiecare dată cartea aleasă, cât este valoarea medie(expectantă) a succeselor? Realizați o simulare, repetând experimentul de 1000 de ori. Realizați o histogramă a succeselor obținute, calculați valoarea medie(media aritmetică) a succeselor și comparați-o cu valoarea medie teoretică.

b) Dacă rețineți cărțile extrase anterior, care este cea mai bună strategie de a ghici următoarea carte? Realizați o simulare, repetând experimentul de 1000 de ori, folosind această strategie. Realizați o histogramă a succeselor obținute, calculați valoarea medie(media aritmetică) a succeselor.

c) Fie $h(s, c)$ valoarea medie(expectantă) dacă în pachet mai sunt s cărți cu stea și c cărți cu cerc și este folosită strategia de la **b)** (strategia "ghicitului optimal"). Arătați că:

$$h(s, c) = \frac{\max(s, c)}{s + c} + \frac{s}{s + c} h(s - 1, c) + \frac{c}{s + c} h(s, c - 1),$$

unde $h(0, 0) = h(k, -1) = h(-1, k) = 0, k \in \mathbb{N}$.

Cu ajutorul acestei formule, calculați valoarea medie(expectată) a succeselor, folosind strategia “ghicitului optimal”, și comparați-o cu valoarea medie obținută la **b**).

d) Dacă rețineți cărțile extrase anterior, dar sunteți obligat(ă) să faceți o alegere bazată pe aleatoriu, care este cea mai bună strategie de a ghici următoarea carte? Calculați valoarea medie(expectantă). Realizați o histogramă a succeselor obținute, calculați valoarea medie(media aritmetică) a succeselor și comparați-o cu valoarea medie teoretică.

d)(pentru 10) Rezolvați aceleași cerințe pentru un pachet de cărți Zener cu 5 simboluri sau realizați o simulare grafică.

Observații:

- Folosiți procedura de generare de numere aleatoare cu probabilități date, realizată la **I**.
- Strategia “ghicitului optimal” este similară cu modul în care jucătorii “profesioniști” de blackjack fac jocul favorabil lor, observând cărțile jucate anterior.
- În realitate, experimentul de mai sus se desfășura altfel: persoana testată trebuia să precizeze ordinea simbolurilor întregului pachet de cărți, înainte de a se întoarce vreo carte.