

Tema de control 1 - IAC

Rezolvați problemele următoare în Maple:

Problema 1 (a) Aproximați secțiunea de aur $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ cu 30 de zecimale exacte.

(b) Calculați descompunerea în factori primi a lui

$$5^{5^5}.$$

(c) Găsiți numărul prim cel mai apropiat de 9876543210123456789.

(d) Verificați dacă $2^{19} - 1$ este prim.

Problema 2 Găsiți derivatele până la ordinul 5 ale funcției $f(x) = \log_2 x$. Găsiți formula generală și demonstrați-o prin inducție.

Problema 3 (a) Descompuneți în factori expresia $x^{52} + x^{26} + 1$.

(b) Dezvoltați $(x + 2)^{10}$ cu binomul lui Newton.

Problema 4 Calculați suma și produsul primelor 32 de numere prime.

Problema 5 Calculați limitele următoare:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{e^x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad a, b, c > 0$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$

Problema 6 Calculați sumele

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k - 1}{(k + 2)!}$

$$(b) \sum_{k=0}^n (-3)^k \binom{2n}{2k}$$

$$(c) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k-1)^2 (k+1)^2}$$

Problema 7 Calculați integralele nedefinite următoare și verificați răspunsul prin derivare și simplificare.

$$(a) \int \sqrt{e^x - 1} dx$$

$$(b) \int \frac{x}{(2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$(c) \int \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$(d) \int \sec^3 x dx$$

Problema 8 Calculați $\int x^n e^x dx$ pentru un întreg general n și verificați rezultatul pentru valori distincte ale lui n .

Problema 9 Calculați integralele definite următoare

$$(a) \int_0^1 x \arctan x dx$$

$$(b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$(c) \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$(d) \int_0^{\pi/2} x^4 \sin x \cos x dx$$

Problema 10 Rezolvați ecuația următoare în x cu *solve* și *fsolve*.

$$48x^5 + 8x^4 - 6x^3 + 114x^2 - 37x + 18 = 0$$

Problema 11 Rezolvați sistemul

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ xy &= y^2 + 2 \end{aligned}$$

cu *solve* și *fsolve*.

Problema 12 Reprezentați grafic funcția $x \mapsto \frac{\sin 2x}{\sin x}$ pe intervalul $(0, 4\pi)$.

Problema 13 Sinusul integral Si este definit prin

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Reprezentați grafic funcția sinus integral pe intervalul $(0, 100)$, calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} Si(x)$ și comparați acest rezultat cu ceea ce vedeți pe grafic.

Problema 14 Reprezentați grafic funcția $(x, y) \rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2}$ pentru $x, y \in [-1, 1]$.