CAPITOLUL 5

CUADRICE PE ECUAȚII REDUSE

Se consideră în spațiu un sistem de coordonate de axe Ox, Oy, Oz raportat la versorii $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

CUADRICE NEDEGENERATE

ELIPSOIDUL

Definiția 5.1. *Elipsoidul* (*real*) este mulțimea punctelor din spațiu care satisfac ecuația carteziană, numită ecuația canonică (redusă) a elipsoidului:

$$(E): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \text{ unde } a, b, c>0. \qquad \textbf{(1)}$$

Pentru elipsoidul (E) avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 1):

- a, b, c sunt *semiaxele* elipsoidului.
- $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$, $C'(0, 0, -c)$ sunt *vârfurile* elipsoidului.
- $O(0,0,0)$ este *centru de simetrie* numit *centrul* elipsoidului; *Ox, Oy, Oz* sunt *axe de simetrie* numite *axele* elipsoidului; Oxy, Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* numite *planele principale* pentru elipsoid.

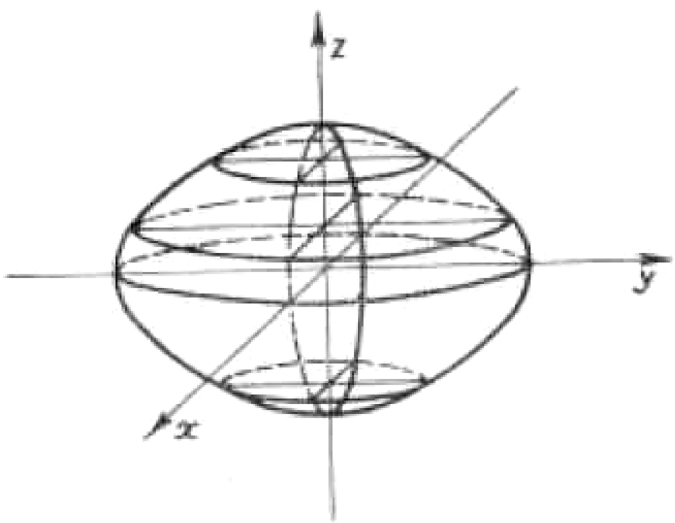


Figura 1: Elipsoidul real

Remarca 5.2. Cuadrica descrisă prin ecuația $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ a,\ b,\ c>0$ se numeşte *elipsoid imaginar*.

Remarca 5.3. Elipsoidul (E) este o mulțime mărginită şi închisă, deci compactă, conținută în interiorul paralelipipedului $|x|\le a,\ |y|\le b,\ |z|\le c$.

Dacă două dintre semiaxele elipsoidului sunt egale, de exemplu $a=b$, atunci elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ se numeşte *de rotație în jurul axei Oz* şi se obține prin rotația în jurul axei *Oz* a elipsei $\begin{cases}\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\\ x=0\end{cases}$.

Dacă semiaxele sunt egale, $a=b=c$, atunci elipsoidul este o sferă de rază a.

Ecuațiile parametrice ale elipsoidului:

$$\begin{cases}x=a\cdot\cos u\sin v\\ y=b\cdot\sin u\ \sin v, \quad u\in[0,\ 2\pi],\ v\in[0,\ \pi].\\ z=c\cdot\cos v\end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Intersecția unui elipsoid cu o dreaptă

O dreaptă intersectează elipsoidul în cel mult două puncte, ale căror coordonate se găsesc rezolvând sistemul format din ecuația elipsoidului şi ecuațiile dreptei.

Observația 5.4. O dreaptă cu vectorul director $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ este tangentă într-un punct $M(x_0,\ y_0,\ z_0)\in(E)$ la elipsoid dacă $\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}+\frac{nz_0}{c^2}=0$.

Intersecția unei elipsoid cu un plan

1. Planele de simetrie *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* intersectează elipsoidul după elipse reale.

Intersecția elipsoidului cu planul *Oxy* este o elipsă situată în planul *Oxy* de ecuații:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0\\ z=0\end{cases}.$$

Analog se arată că intersecția elipsoidului cu planul *Oxz* este elipsa $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\\ y=0\end{cases}$, iar intersecția cu planul *Oyz* este elipsa $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$.

2. Planele paralele cu planele de coordonate intersectează elipsoidul după elipse.

Intersecția elipsoidului cu planul $z=\lambda$ este o elipsă de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{\lambda^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{\lambda^2}{c^2}\right)}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Observația 5.5. Dacă $|\lambda|<c$, atunci elipsa este o elipsă reală situată în planul $z=\lambda$, cu semiaxele $a_1=a\sqrt{1-\dfrac{\lambda^2}{c^2}}$ şi $b_1=b\sqrt{1-\dfrac{\lambda^2}{c^2}}$ (cea mai mare elipsă este cea din planul *Oxy*, elipsele devenind din ce în ce mai mici pe măsură ce $|\lambda|$ creşte); dacă $\lambda=\pm c$, atunci elipsa se reduce la vârfurile $C(0,\,0,\,c)$, $C'(0,\,0,\,-c)$; dacă $|\lambda|>c$, atunci elipsa este imaginară (adică planul nu intersectează elipsoidul).

Intersecțiile cu plane paralele cu celelalte două plane de simetrie sunt tot elipse reale sau imaginare şi se studiază în mod analog.

Plan tangent la elipsoid

Ecuația planului tangent la elipsoid într-un punct $M(x_0,\,y_0,\,z_0)$ de pe elipsoidul (E) (adică $\dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}+\dfrac{z_0{}^2}{c^2}-1=0$):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0\,. \tag{3}$$

Observația 5.6. Ecuația planului tangent într-un punct al elipsoidului se obține prin dedublarea ecuației acestuia.

Ecuațiile planelor tangente la elipsoidul (E) paralele cu un plan dat de ecuație $(\pi): Ax+By+Cz+D=0$:

$$Ax+By+Cz\pm\sqrt{a^2A^2+b^2B^2+c^2C^2}=0\,. \tag{4}$$

Plan polar. Pol

Ecuația planului polar al unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparține elipsoidului (E) (adică $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\neq 0$) în raport cu elipsoidul:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}-1=0. \qquad \textbf{(5)}$$

Punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte *polul* planului (5) în raport cu elipsoidul.

Observația 5.7. Dacă punctul $M(x_0, y_0, z_0)\in(E)$ (adică $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0$), atunci planul polar al punctului M în raport cu elipsoidul este planul tangent în punctul M la elipsoid (planul tangent este planul polar al punctului de contact cu elipsoidul).

HIPERBOLOIZI

Definiția 5.8. *Hiperboloidul cu o pânză cu axa netransversală Oz* este mulțimea punctelor din spațiu care satisfac ecuația, numită ecuația canonică (redusă):

$$(H_1): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0, \text{ unde } a, b, c>0\,.. \qquad \textbf{(6)}$$

Pentru hiperboloidul (H_1) avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 2) :

- a, b, c sunt *semiaxele* hiperboloidului.
- $A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ sunt *vârfurile* hiperboloidului.
- $O(0,0,0)$ este *centru de simetrie*, *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt *axe de simetrie* şi planele de coordonate Oxy, Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* pentru hiperboloid.
- Axa *Oz* nu intersectează suprafața hiperboloidului.

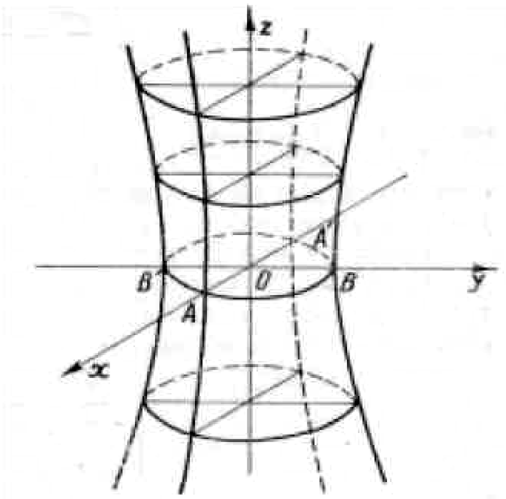


Figura 2: Hiperboloidul cu o pânză

Remarca 5.9. Cuadricele descrise prin ecuațiile $\left(H_1'\right): -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, respectiv $\left(H_1''\right): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ definesc tot un hiperboloid cu o pânză cu axă netransversală *Ox*, respectiv *Oy*.

Remarca 5.10. Hiperboloidul cu o pânză $\left(H_1\right)$ este o mulțime nemărginită şi închisă.

Dacă două dintre semiaxe sunt egale, de exemplu $a=b$, atunci hiperboliodul cu o pânză se numeşte *de rotație în jurul axei Oz.*

Ecuațiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos u \operatorname{ch} v \\ y = b\cdot\sin u \operatorname{ch} v, \quad u\in[0, 2\pi], v\in\mathbb{R} \\ z = c\cdot\operatorname{sh} v \end{cases} . \tag{7}$$

Intersecția unui hiperboloid cu o pânză cu o dreaptă

O dreaptă intersectează hiperboloidul cu o pânză în cel mult două puncte, ale căror coordonate se găsesc rezolvând sistemul format din ecuația hiperboloidului şi ecuațiile dreptei.

Dacă o dreaptă are în comun cu hiperboloidul cu o pânză mai mult de două puncte, atunci dreapta aparține în întregime hiperboloidului.

Observația 5.11. O dreaptă cu vectorul director $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ este tangentă într-un punct $M\left(x_0, y_0, z_0\right)\in\left(H_1\right)$ la hiperboloidul cu o pânză $\left(H_1\right)$ dacă $\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0$.

Intersecția unei hiperboloid cu o pânză cu un plan

1. Planele de simetrie *Oxy*, *Oxz*, *Oyz* intersectează hiperboloidul cu o pânză după o elipsă reală şi două hiperbole.

Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu planul *Oxy* este o elipsă reală, numită *elipsa colier*, de ecuații $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Hiperbolele $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ reprezintă intersecțiile hiperboloidului cu o pânză cu planele *Oxz*, respectiv *Oyz*.

2. Planele $z=\lambda$ paralele cu planul de coordonate *Oxy* intersectează hiperboloidul cu o pânză după elipse reale situate în planul $z=\lambda$, de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1+\dfrac{\lambda^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1+\dfrac{\lambda^2}{c^2}\right)}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases},\ (\forall)\lambda\in\mathbb{R}.$$

Cea mai mică elipsă este situată în planul *Oxy* (elipsa colier), elipsele devenind din ce în ce mai mari pe măsură ce $|\lambda|$ creşte.

3. Planele $x=\alpha$ paralele cu planul de coordonate *Oyz* intersectează hiperboloidul cu o pânză după hiperbole nedegenerate sau degenerate de ecuații: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=\alpha \end{cases}$.

Observația 5.12. Dacă $|\alpha|<a$, atunci hiperbola este $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{\alpha^2}{a^2}\right)}-\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{\alpha^2}{a^2}\right)}-1=0 \\ x=\alpha \end{cases}$, cu axa transversă *Oy*, situată în planul $x=\alpha$; dacă $\alpha=\pm\, a$, atunci intersecția se reduce la două drepte concurente în punctul $(\alpha,\ 0,\ 0)$, de ecuații $\begin{cases} \dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=0 \\ x=\alpha \end{cases}$ şi $\begin{cases} \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=0 \\ x=\alpha \end{cases}$, situate în planul $x=\alpha$; dacă $|\alpha|>a$, atunci intersecția este hiperbola $\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}-1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}-1\right)}-1=0 \\ x=\alpha \end{cases}$, cu axa transversă *Oz*, situată în planul $x=\alpha$.

Intersecțiile cu planele $y=\beta,\ \beta\in\mathbb{R}$ paralele cu planul de coordonate *Oxz* sunt tot hiperbole nedegenerate sau degenerate şi se tratează în mod analog.

Plan tangent la hiperboloidul cu o pânză

Ecuația planului tangent la hiperboloidul cu o pânză într-un punct $M(x_0,\ y_0,\ z_0)$ de pe hiperboloidul (H_1) (adică $\dfrac{x_0{}^2}{a^2}+\dfrac{y_0{}^2}{b^2}-\dfrac{z_0{}^2}{c^2}-1=0$):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}-1=0\,. \qquad \textbf{(8)}$$

Ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul cu o pânză (H_1) paralele cu un plan de ecuație $(\pi): Ax+By+Cz+D=0$:

$$Ax+By+Cz\pm\sqrt{a^2A^2+b^2B^2-c^2C^2}=0\,. \qquad \textbf{(9)}$$

Plan polar. Pol

Ecuația planului polar al unui punct $M(x_0,\, y_0,\, z_0)$ care nu aparține hiperboloidului (H_1) (adică $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}-1\neq 0$) în raport cu hiperboloidul:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}-1=0\,. \qquad \textbf{(10)}$$

Punctul $M(x_0,\, y_0,\, z_0)$ se numeşte *polul* planului (10) în raport cu hiperboloidul (H_1).

Observația 5.13. Planul polar al unui punct de pe hiperboloidul cu o pânză în raport cu hiperboloidul este chiar planul tangent la hiperboloid în punctul respectv.

Con asimptotic

Definiția 5.14. Suprafața $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $a,\, b,\, c>0$ este un *con* numit *conul asimptotic* al hiperboloidului cu o pânză (H_1) (se află în interiorul hiperboloidului (H_1)).

Definiția 5.15. *Hiperboloidul cu două pânze cu axa transversală Oz* este mulțimea punctelor din spațiu care satisfac ecuația, numită ecuația canonică (redusă):

$$(H_2): -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0, \text{ unde } a,\, b,\, c>0\,. \qquad \textbf{(11)}$$

Pentru hiperboloidul (H_2) avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 3) :

- $a,\, b,\, c$ sunt *semiaxele* hiperboliodului.
- $C(0,\, 0,\, c)$, $C'(0,\, 0,\, -c)$ sunt *vârfurile* hiperboloidului.
- $O(0,0,0)$ este *centru de simetrie*, axele *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt *axe de simetrie* şi planele de coordonate Oxy, Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* pentru hiperboloid.
- Axa *Oz* intersectează suprafața hiperboloidului, axele *Ox* şi *Oy* nu intersectează hiperboloidul.

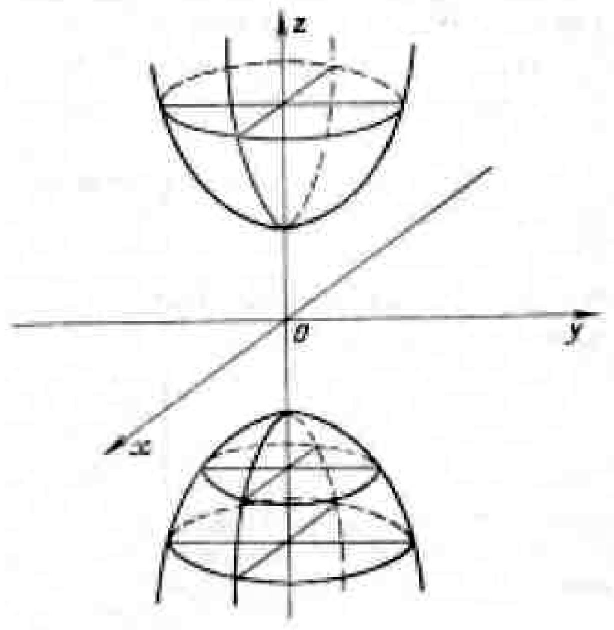


Figura 3: Hiperboloidul cu două pânze

Remarca 5.16. Ecuațiile

$$\left(H_2'\right): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0 \text{ şi } \left(H_2''\right): -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

definesc tot câte un hiperboloid cu două pânze cu axele transversale *Ox*, respectiv *Oy*.

Remarca 5.17. Hiperboloidul cu două pânze $\left(H_2\right)$ este o mulțime nemărginită şi închisă.

Dacă două dintre semiaxe sunt egale, de exemplu $a=b$, atunci hiperboliodul cu două pânze se numeşte *de rotație în jurul axei Oz*.

Ecuațiile parametrice ale hiperboloidului cu două pânze:

$$\begin{cases} x = & a\cdot\cos u \operatorname{sh} v \\ y = & b\cdot\sin u \operatorname{sh} v\,, \quad u\in[0,\, 2\pi], v\in\mathbb{R}\,. \\ z = \pm & c\cdot\operatorname{ch} v \end{cases} \qquad \textbf{(12)}$$

Intersecția unui hiperboloid cu două pânze cu o dreaptă

O dreaptă intersectează hiperboloidul cu două pânze în cel mult două puncte, ale căror coordonate sunt soluțiile sistemul format din ecuația hiperboloidului şi ecuațiile dreptei.

Observația 5.18. O dreaptă cu vectorul director $\vec{v}=l\vec{i}+m\vec{j}+n\vec{k}$ este tangentă într-un punct $M\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)\in\left(H_2\right)$ la hiperboloidul cu două pânze $\left(H_2\right)$ dacă $\frac{lx_0}{a^2}+\frac{my_0}{b^2}-\frac{nz_0}{c^2}=0$.

Intersecția unei hiperboloid cu două pânze cu un plan

1. Planele de simetrie *Oxy, Oxz, Oyz* intersectează hiperboloidul cu două pânze după o elipsă imaginară şi două hiperbole.

Intersecția hiperboloidului cu două pânze cu planul *Oxy* este o elipsă imaginară de ecuații $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+1=0 \\ z=0 \end{cases}$, deci nu se intersectează.

Ecuațiile $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ reprezintă hiperbolele de intersecție dintre hiperboloidul cu două pânze şi planele *Oxz*, respectiv *Oyz*.

2 Planele $z=\lambda$ paralele cu planul de coordonate *Oxy* intersectează hiperboloidul cu două pânze după curba de ecuații:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{\lambda^2}{c^2}-1\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{\lambda^2}{c^2}-1\right)}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases}, (\forall)\lambda\in\mathbb{R}.$$

Observația 5.19. Dacă $|\lambda|>c$, atunci intersecția este elipsa reală de semiaxe $a_1 = =a\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{c^2}-1}$ şi $b_1=b\sqrt{\dfrac{\lambda^2}{c^2}-1}$ situată în planul $z=\lambda$; dacă $\lambda=\pm\, c$, atunci intersecția se reduce la vârfurile $C(0,\ 0,\ c), C'(0,\ 0,\ -c)$; dacă $|\lambda|<c$, planul $z=\lambda$ nu intersectează hiperboloidul.

3. Planele $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$ paralele cu planul de coordonate *Oyz* intersectează hiperboloidul cu două pânze după hiperbole cu axa transversă *Oz* de ecuații:

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0 \\ x=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{y^2}{b^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{\alpha^2}{a^2}+1\right)}-1=0 \\ x=\alpha \end{cases}, (\forall)\alpha\in\mathbb{R}.$$

Intersecțiile hiperboloidului cu planele $y=\beta, \beta\in\mathbb{R}$, paralele cu planul de coordonate *Oxz*, sunt hiperbole cu axa transversă *Oz* de ecuații $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{a^2\left(\dfrac{\beta^2}{b^2}+1\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(\dfrac{\beta^2}{b^2}+1\right)}-1=0 \\ y=\beta \end{cases}, (\forall)\beta\in\mathbb{R}.$

Plan tangent la hiperboloidul cu două pânze

Ecuația planului tangent la hiperboloidul cu două pânze într-un punct $M\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ de pe hiperboloidul $\left(H_2\right)$ (adică $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}+1=0$):

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}+1=0\,. \qquad \textbf{(13)}$$

Ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul cu două pânze $\left(H_2\right)$ paralele cu un plan de ecuație $(\pi): Ax+By+Cz+D=0$:

$$Ax+By+Cz\pm\sqrt{-a^2A^2-b^2B^2+c^2C^2}=0\,. \qquad \textbf{(14)}$$

Plan polar. Pol

Ecuația planului polar al unui punct $M\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ care nu aparține hiperboloidului $\left(H_2\right)$ (adică $\frac{x_0{}^2}{a^2}+\frac{y_0{}^2}{b^2}-\frac{z_0{}^2}{c^2}+1\neq 0$) în raport cu hiperboloidul:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-\frac{zz_0}{c^2}+1=0\,. \qquad \textbf{(15)}$$

Punctul $M\left(x_0,\, y_0,\, z_0\right)$ se numeşte *polul* planului (15) în raport cu hiperboloidul $\left(H_2\right)$.

Con asimptotic

Definiția 5.20. Conul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, $a,\, b,\, c>0$ este *conul asimptotic* al hiperboloidului cu două pânze $\left(H_2\right)$ (hiperboloidul $\left(H_2\right)$se află în interiorul conului).

Observația 5.21. Hiperboloidul cu o pânză $\left(H_1\right)$şi hiperboloidul cu două pânze $\left(H_2\right)$ au acelaşi con asimptotic.

Hiperboloidul cu două pânze nu are generatoare rectilinii.

PARABOLOIZI

Definiția 5.22. *Paraboloidul eliptic cu axa de simetrie Oz* este mulțimea punctelor din spațiu care satisfac ecuația canonică (redusă):

$$(PE): \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \text{ unde } a,\, b>0\,. \qquad \textbf{(16)}$$

Pentru paraboloidul eliptic (PE) avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 4) :

- a, b sunt *semiaxele* paraboloidului.
- $O(0,0,0)$ este *vârful* paraboloidului.
- *Oz* este *axă de simetrie*; planele de coordonate Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* pentru paraboloid; paraboloidul nu are puncte sub planul Oxy.

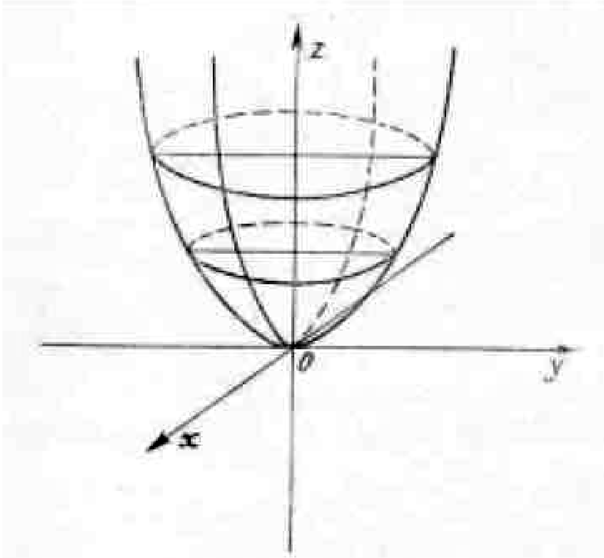


Figura 4: Parabolidul eliptic

Remarca 5.23. Cuadricele

$$\left(PE'\right): \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2x \text{ și } \left(PE''\right): \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=2y,\ a,\ b,\ c>0$$

sunt tot paraboloizi eliptici cu axele de simetrie *Ox*, respectiv *Oy*.

Remarca 5.24. Paraboloidul eliptic este o mulțime nemărginită şi închisă.

Dacă $a=b$, atunci paraboloidul eliptic se numeşte *de rotație în jurul axei Oz*.

Ecuațiile parametrice ale paraboloidului eliptic:

$$\begin{cases} x = av\cdot\cos u \\ y = bv\cdot\sin u \\ z = \dfrac{v^2}{2} \end{cases},\quad u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(17)}$$

Intersecția unui paraboloid eliptic cu o dreaptă

O dreaptă intersectează paraboloidul eliptic în cel mult două puncte, ale căror coordonate sunt soluțiile sistemul format din ecuația paraboloidului şi ecuațiile dreptei.

Intersecția unei paraboloidul eliptic cu un plan

1. Planul de coordonate *Oxy* intersectează paraboloidul eliptic în vârful $O(0,0,0)$.

2. Planele de simetrie *Oxz*, *Oyz* intersectează paraboloidul eliptic după parabole:

$$\begin{cases} x^2 = 2a^2 z \\ y = 0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} y^2 = 2b^2 z \\ x = 0 \end{cases}.$$

3. Planele $z=\lambda$ paralele cu planul de coordonate *Oxy* intersectează paraboloidul eliptic după curbe de ecuații: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{2a^2\lambda} + \dfrac{y^2}{2b^2\lambda} - 1 = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$, $(\forall)\,\lambda \in \mathbb{R}$.

Observația 5.25. Dacă $\lambda > 0$, atunci intersecția este elipsa reală de semiaxe $a_1 = = a\sqrt{2\lambda}$ şi $b_1 = b\sqrt{2\lambda}$ situată în planul $z=\lambda$; dacă $\lambda=0$, atunci intersecția este vârful $O(0, 0, 0)$; dacă $\lambda < 0$, planul $z = \lambda$ nu intersectează paraboloidul (intersecția este o elipsă imaginară).

4. Planele $x = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ paralele cu planul de simetrie *Oyz* intersectează paraboloidul eliptic după parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa *Oz* de ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z \\ x = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 2b^2\left(z - \dfrac{\alpha^2}{2a^2}\right), \alpha \in \mathbb{R}. \\ x = \alpha \end{cases}$$

Parabolele au acelaşi parametru b^2 şi vârfurile de coordonate $V\left(\alpha,\ 0,\ \dfrac{\alpha^2}{2a^2}\right)$.

Intersecțiile paraboloidului eliptic cu planele $y=\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ paralele cu planul de simetrie *Oxz* sunt parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa *Oz* şi se determină în mod analog.

Plan tangent la paraboloidul eliptic

Ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic într-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ aparținând paraboloidulului (PE) (adică $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - 2z_0 = 0$):

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0. \qquad \textbf{(18)}$$

Ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic (PE) paralel cu un plan de ecuație $(\pi): Ax + By + Cz + D = 0$:

$$2C(Ax + By + Cz) + a^2A^2 + b^2B^2 = 0. \qquad \textbf{(19)}$$

Plan polar. Pol

Ecuația planului polar al unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparține paraboloidului (PE) (adică $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} - 2z_0 \neq 0$) în raport cu paraboloidul:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = z + z_0 . \qquad \textbf{(20)}$$

Punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte *polul* planului (20) în raport cu paraboloidul (PE).

Definiția 5.26. *Paraboloidul hiperbolic cu axa de simetrie Oz* este mulțimea punctelor din spațiu care satisfac ecuația canonică (redusă):

$$(PH): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \text{ unde } a, b > 0 . \qquad \textbf{(21)}$$

Pentru paraboloidul hiperbolic (PH) avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 5) :

- a, b sunt *semiaxele* paraboloidului.
- $O(0,0,0)$ este *vârful* paraboloidului.
- *Oz* este *axă de simetrie* şi planele de coordonate Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* pentru paraboloid.

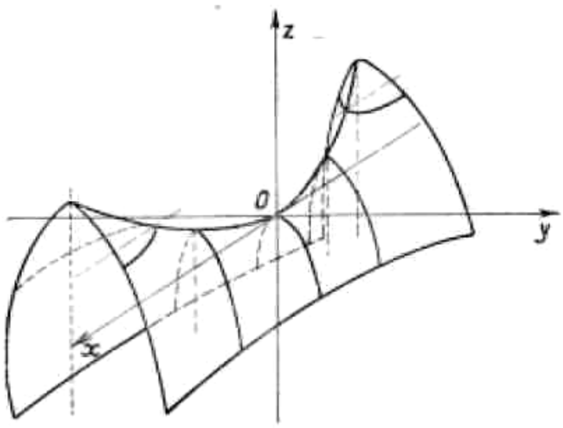


Figura 5: Paraboloidul hiperbolic

Remarca 5.27. Ecuațiile

$$(PH'): \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2x \text{ şi } (PH''): \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2y,\ a, b, c > 0 \text{ (sau schimbând semnul)}$$

definesc tot paraboloizi hiperbolici cu axele de simetrie *Ox*, respectiv *Oy*.

Remarca 5.28. Paraboloidul hiperbolic este o mulțime nemărginită şi închisă.

Ecuațiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic:

$$\begin{cases} x = av \cdot \operatorname{ch} u \\ y = bv \cdot \operatorname{sh} u \\ z = \dfrac{v^2}{2} \end{cases}, \quad u, v \in \mathbb{R} . \qquad \textbf{(22)}$$

Intersecția unui paraboloid hiperbolic cu o dreaptă

O dreaptă intersectează paraboloidul hiperbolic în cel mult două puncte, ale căror coordonate sunt soluțiile sistemul format din ecuația paraboloidului şi ecuațiile dreptei.

Dacă o dreaptă are în comun cu paraboloidul hiperbolic mai mult de două puncte, atunci dreapta aparține în întregime paraboloidului.

Intersecția unei paraboloidul hiperbolic cu un plan

1. Planul de coordonate *Oxy* intersectează paraboloidul hiperbolic după două drepte concurente în punctul $O(0,0,0)$, de ecuații $\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}$.

2. Planele de simetrie *Oxz, Oyz* intersectează paraboloidul hiperbolic după parabole:

$$\begin{cases} x^2=2a^2z \\ y=0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} y^2=-2b^2z \\ x=0 \end{cases},$$

cu axa de simetrie *Oz*, prima în sensul pozitiv al axei, iar a doua în sensul negativ al axei.

4. Planele $z=\lambda$ paralele cu planul de coordonate *Oxy* intersectează paraboloidul hiperbolic după hiperbole de ecuații: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \\ z=\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2a^2\lambda}-\frac{y^2}{2b^2\lambda}-1=0 \\ z=\lambda \end{cases}$, $(\forall)\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,

cu axa transversă paralelă cu *Ox* sau cu *Oy*, după cum $\lambda>0$ sau $\lambda<0$.

Observația 5.29. Dacă $\lambda=0$, atunci intersecția sunt dreptele concurente descrise la punctul 1.

5. Planele $x=\alpha$ paralele cu planul de coordonate *Oyz* intersectează paraboloidul hiperbolic după parabole cu axa de simetrie paralelă cu axa *Oz* de ecuații:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \\ x=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=2b^2\left(-z+\frac{\alpha^2}{2a^2}\right) \\ x=\alpha \end{cases}.$$

Parabolele au acelaşi parametru b^2 şi vârfurile de coordonate $V\left(\alpha,\, 0,\, \frac{\alpha^2}{2a^2}\right)$.

Intersecțiile paraboloidului hiperbolic cu planele $y=\beta$ paralele cu planul de coordonate *Oxz* sunt parabole cu axa de simetrie paralelă cu *Oz* ce se determină în mod analog.

Plan tangent la paraboloidul hiperbolic

Ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic într-un punct $M(x_0, y_0, z_0)$ de pe paraboloidul (PH) (adică $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-2z_0=0$):

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=z+z_0. \tag{23}$$

Ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic (PH) paralel cu un plan de ecuație $(\pi): Ax+By+Cz+D=0$:

$$2C(Ax+By+Cz)+a^2A^2-b^2B^2=0. \tag{24}$$

Plan polar. Pol

Ecuația planului polar al unui punct $M(x_0, y_0, z_0)$ care nu aparține paraboloidului (PH) (adică $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}-2z_0\neq 0$) în raport cu paraboloidul:

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=z+z_0. \tag{25}$$

Punctul $M(x_0, y_0, z_0)$ se numeşte *polul* planului (25) în raport cu paraboloidul (PH).

CUADRICE DEGENERATE

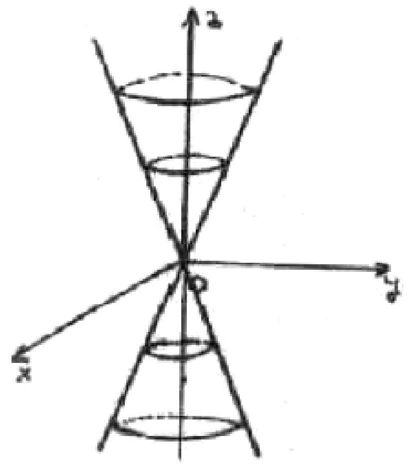
Definiția 5.30.

a) *Conul cu vârful în origine* este cuadrica dată prin ecuația canonică:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \text{ unde } a, b, c>0 \text{ sunt semiaxele conului.} \tag{26}$$

Pentru conul cu vârful în origine avem următoarele noțiuni uzuale (Figura 6) :

- a, b, c sunt *semiaxele* conului.
- $O(0, 0, 0)$ este *vârful* conului.
- $O(0, 0, 0)$ este *centru de simetrie*, *Ox*, *Oy*, *Oz* sunt *axe de simetrie* şi planele de coordonate Oxy, Oxz, Oyz sunt *plane de simetrie* pentru con.



Remarcă 5.31. Punctul $O(0, 0, 0)$ este intersecția conului cu axele de coordonate şi cu planul de coordonate *Oxy*; intersecțiile cu planele de coordonate *Oxz* şi *Oyz* sunt perechi de drepte concurente în origine; intersecțiile cu plane paralele cu *Oxy* sunt elipse; intersecțiile cu plane paralele cu *Oxz*, *Oyz* sunt hiperbole.

Ecuațiile parametrice ale conului:

$$\begin{cases} x = av\cdot\cos u \\ y = bv\cdot\sin u \\ z = cv \end{cases}, \quad u\in[0, 2\pi], v\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(27)}$$

b) *Cilindrul circular cu generatoarele paralele cu Oz* este cuadrica dată prin ecuația canonică:

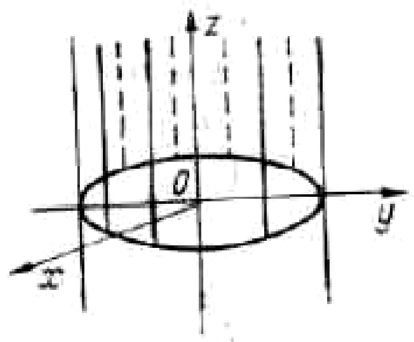
$$x^2 + y^2 = a^2, \text{ unde } a > 0 \text{ este raza cilindrului.} \qquad \textbf{(28)}$$

Ecuațiile parametrice ale cilindrului circular:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos u \\ y = a\cdot\sin u \\ z = v \end{cases}, \quad u\in[0, 2\pi], v\in\mathbb{R}. \qquad \textbf{(29)}$$

c) *Cilindrul eliptic real cu generatoarele paralele cu Oz* este cuadrica dată prin ecuația canonică:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \text{ unde } a, b > 0 \text{ sunt semiaxele cilindrului.} \qquad \textbf{(30)}$$



Observația 5.32. Cuadrica degenerată descrisă prin ecuația $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0,\ a,\ b>0$ reprezintă un *cilindru eliptic imaginar*.

Ecuațiile parametrice ale cilindrului eliptic:

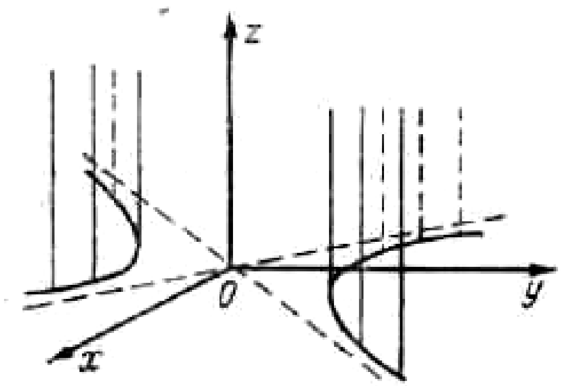
$$\begin{cases} x = a\cdot\cos u \\ y = b\cdot\sin u \quad , \quad u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R}\,. \\ z = v \end{cases} \qquad \textbf{(31)}$$

d) *Cilindrul hiperbolic cu generatoarele paralele cu Oz* este cuadrica dată prin ecuația canonică:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0\text{, unde } a,\ b>0 \text{ sunt semiaxele cilindrului.} \qquad \textbf{(32)}$$

Ecuațiile parametrice ale cilindrului hiperbolic:

$$\begin{cases} x = \pm a\cdot\mathrm{ch}\,u \\ y = \ \ b\cdot\mathrm{sh}\,u \quad , \quad u,\ v\in\mathbb{R}\,. \\ z = \ \ v \end{cases} \qquad \textbf{(33)}$$

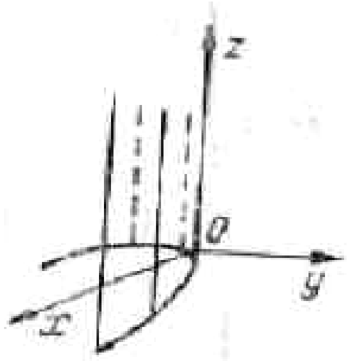


e) *Cilindrul parabolic cu generatoarele paralele cu Oz* este cuadrica dată prin ecuația canonică:

$$y^2=2px\text{, unde } p\in\mathbb{R}^*. \qquad \textbf{(34)}$$

Ecuațiile parametrice ale cilindrului parabolic:

$$\begin{cases} x = 2pu^2 \\ y = 2pu \quad , \quad u,v\in\mathbb{R}\,. \\ z = v \end{cases} \qquad \textbf{(35)}$$



Observația 5.33. Ecuațiile $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $z^2=2px$, etc. (adică pentru care lipsește o variabilă) reprezintă tot cilindrii cu generatoarele paralele cu axele de coordonate date de variabila care lipsește.

Alte tipuri de cuadrice (majoritatea degenerate) sunt:

- Pereche de plane concurente: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
- Pereche de plane paralele: $\frac{x^2}{a^2}-1=0$
- Pereche de plane confundate: $\frac{x^2}{a^2}=0$
- Pereche de plane imaginare: $\frac{x^2}{a^2}+1=0$
- Dreaptă dublă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
- Punct dublu: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, adică $O(0, 0, 0)$.

CUADRICE RIGLATE

Există cuadrice al căror plan tangent într-un punct al acestora conține cel puțin o dreaptă inclusă în cuadrică. Exemple remarcabile sunt: hiperboloidul cu o pânză, paraboloidul hiperbolic, conul, cilindrii (circular, eliptic, hiperbolic, parabolic).

Definiția 5.33. O suprafață care poate fi generată prin mișcarea unei drepte, numită *generatoare rectilinie*, care se sprijină pe o curbă dată în spațiu, numită *curbă directoare*, se numeşte *suprafață riglată*. Dacă prin orice punct al unei suprafețe riglate trec două drepte distincte conținute în suprafață, atunci suprafața se numeşte *dublu riglată*.

Hiperboloidul cu o pânză şi paraboloidul hiperbolic sunt suprafețe dublu riglate generate de câte două familii de drepte numite *generatoare rectilinii*.

Ecuația hiperboloidului cu o pânză (H_1) se scrie şi sub forma:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Familiile de drepte $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup(G_\infty)$ şi $\left(G_\mu\right)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup(G'_\infty)$, unde

$$\begin{aligned}
&(G_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \ (G_\infty):\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1-\frac{y}{b}=0 \ \text{şi}\\
&\left(G_\mu\right):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\mu\left(1+\dfrac{y}{b}\right)\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{y}{b}\right)\end{cases},\mu\in\mathbb{R},\ \ (G'_\infty):\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1+\frac{y}{b}=0
\end{aligned}\qquad \mathbf{(36)}$$

definesc generatoarele rectilinii pe suprafața (H_1).

Ecuația paraboloidului hiperbolic (PH) se scrie şi sub forma:

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2z\,.$$

şi se obțin familiile de generatoare rectilinii $(G_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}\cup(G_\infty)$ şi $\left(G_\mu\right)_{\mu\in\mathbb{R}}\cup(G'_\infty)$, unde

$$\begin{aligned}
&(G_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{2}{\lambda}z\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R},\ \ (G_\infty):\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=z=0 \ \text{şi}\\
&\left(G_\mu\right):\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\mu\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2}{\mu}z\end{cases},\mu\in\mathbb{R},\ \ (G'_\infty):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=z=0\,.
\end{aligned}\qquad \mathbf{(37)}$$

Observația 5.34.

1) Translatând în origine oricare din cele două familii de generatoare ale hiperboloidu-

lui cu o pânză se obține o singură familie de generatoare rectilinii ale conului asimptotic al acestuia (adică paralelele duse prin origine la generatoarele din oricare din cele două familii sunt situate pe conul asimptotic), deci conul este o suprafață simplu riglată.

2) Orice dreaptă aşezată pe hiperboloidul cu o pânză sau pe paraboloidul hiperbolic face parte din una din cele două familii de generatoare rectilinii.

3) Prin fiecare punct al hiperboloidului cu o pânză şi al paraboloidului hiperbolic trece o unică generatoare rectilinie din fiecare din familiile $\left(G_{\lambda}\right)$ şi $\left(G_{\mu}\right)$.

4) Oricare două generatoare rectilinii din aceeaşi familie nu se intersectează (sunt chiar necoplanare), dar oricare două generatoare rectilinii ce aparțin la familii diferite sunt coplanare (în cazul hiperboloidului cu o pânză sunt concurente, excceptând cazul când trec prin puncte simetrice ale elipsei colier; în cazul paraboloidului hiperbolic sunt întotdeauna concurente).

5) Două generatoare rectilinii concurente din familii diferite determină planul tangent la hiperboloidul cu o pânză sau paraboloidul hiperbolic în punctul lor de intersecție.

6) În cazul hiperboloidului cu o pânză, trei generatoare din aceeaşi familie nu pot fi paralele cu un acelaşi plan; în cazul paraboloidului hiperbolic, toate generatoarele din aceeaşi familie sunt paralele cu un acelaşi plan fix (numit plan director).

7) În cazul hiperboloidului cu o pânză, trei generatoare nu pot fi coplanare.

EXERCIȚII ŞI PROBLEME REZOLVATE

5.1. Să se determine curbele de intersecție ale următoarelor cuadrice cu planele de coordonate:

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{100}-1=0$

b) $x^2+4y^2-25z^2-100=0$

c) $4x^2+y^2-25z^2+100=0$

d) $4x^2+25y^2-200z=0$

e) $25x^2-4y^2-200z=0$

f) $25x^2+4y^2-z^2=0$.

Pentru fiecare cuadrică, să se determine ecuațiile parametrice şi să se reprezinte grafic.

Soluție. a) Cuadrica $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{100}-1=0$ este un elipsoid real de semiaxe $a=5,\ b=2,\ c=10$ şi vârfuri $A(5,\ 0,\ 0), A'(-5,\ 0,\ 0), B(0,\ 2,\ 0), B'(0,\ -2,\ 0), C(0,\ 0,\ 10), C'(0,\ 0,\ -10)$.

Planul de coordonate *Oxy*, de ecuație $z=0$, intersectează elipsoidul după elipsa reală $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}-1=0\\ z=0\end{cases}$. Similar, planele *Oxz*, de ecuație $y=0$, respectiv *Oyz*, de ecuație $x=0$ taie cuadrica după elipsele reale $\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{100}-1=0\\ y=0\end{cases}$, respectiv $\begin{cases}\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{100}-1=0\\ x=0\end{cases}$.

Ecuțiile parametrice ale elipsoidului sunt:

$$\begin{cases}x = 5\cdot\cos u\sin v\\ y = 2\cdot\sin u\sin v\\ z = 10\cdot\cos v\end{cases},\ u\in[0,\ 2\pi],\ v\in[0,\ \pi]$$ (conform formulei (2)).

b) Cuadrica $x^2+4y^2-25z^2-100=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{4}-1=0$ este un hiperboloid cu o pânză cu axa netransversală *Oz* de semiaxe $a=10,\ b=5,\ c=2$ şi vârfuri $A(10,\ 0,\ 0), A'(-10,\ 0,\ 0)$,

$B(0,\ 5,\ 0), B'(0,\ -5,\ 0)$.

Planul de coordonate *Oxy*, de ecuație $z=0$, intersectează hiperboloidul cu o pânză după elipsa reală $\begin{cases} \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ (elipsa colier).

Planele de coordonate *Oxz*, respectiv *Oyz* intersectează hiperboloidul cu o pânză după hiperbola cu axa transversă *Ox*: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{100}-\dfrac{z^2}{4}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$, respectiv hiperbola cu axa transversă *Oy*: $\begin{cases} \dfrac{y^2}{25}-\dfrac{z^2}{4}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$.

Ecuațiile parametrice ale hiperboloidului cu o pânză sunt:

$$\begin{cases} x = 10\cdot\cos u \operatorname{ch} v \\ y = 5\cdot\sin u \operatorname{ch} v \\ z = 2\cdot\operatorname{sh} v \end{cases},\ u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R} \text{ (conform formulei (7)).}$$

c) Cuadrica $4x^2+y^2-25z^2+100=0 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{100}+\dfrac{z^2}{4}-1=0$ este un hiperboloid cu două pânze cu axa transversală *Oz* de semiaxe $a=5, b=10, c=2$ şi vârfuri $C(0,\ 0,\ 2), C'(0,\ 0,\ -2)$.

Planul de coordonate *Oxy*, de ecuație $z=0$, intersectează hiperboloidul cu două pânze după elipsa imaginară $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{100}+1=0 \\ z=0 \end{cases}$ (deci planul şi hiperboloidul nu se intersectează).

Ecuațiile $\begin{cases} -\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{z^2}{4}-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} -\dfrac{y^2}{100}+\dfrac{z^2}{4}-1=0 \\ x=0 \end{cases}$ reprezintă hiperbolele cu axa transversă *Oz* de intersecție dintre hiperboloidul cu două pânze şi planele *Oxz*, respectiv *Oyz*.

Ecuațiile parametrice ale hiperboloidului cu două pânze sunt:

$$\begin{cases} x = 5\cdot\cos u \operatorname{sh} v \\ y = 10\cdot\sin u \operatorname{sh} v \\ z = \pm 2\cdot\operatorname{ch} v \end{cases},\ u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R} \text{ (conform formulei (12)).}$$

d) Cuadrica $4x^2+25y^2-200z=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=2z$ este un paraboloid eliptic cu axa de simetrie *Oz* de semiaxe $a=5, b=2$ şi vârful $O(0,0,0)$.

Planul de coordonate *Oxy* intersectează paraboloidul eliptic în vârful $O(0,0,0)$.

Planele de coordonate *Oxz*, respectiv *Oyz* intersectează paraboloidul eliptic după parabolele $\begin{cases} x^2=50z \\ y=0 \end{cases}$, respectiv $\begin{cases} y^2=8z \\ x=0 \end{cases}$, cu axa de simetrie *Oz*, în sensul pozitiv al axei.

Ecuațiile parametrice ale paraboloidului eliptic sunt:

$$\begin{cases} x = 5v\cdot\cos u \\ y = 2v\cdot\sin u \\ z = \dfrac{v^2}{2} \end{cases},\ u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R} \text{ (conform formulei (17))}.$$

e) Cuadrica $25x^2-4y^2-200z=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=2z$ este un paraboloid hiperbolic cu axa de simetrie *Oz* de semiaxe $a=2, b=5$ şi vârful $O(0,\ 0,\ 0)$.

Planul de coordonate *Oxy*, de ecuație $z=0$, intersectează paraboloidul hiperbolic după două drepte concurente în punctul $O(0,0,0)$, de ecuații $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{5}=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Planele de coordonate *Oxz*, *Oyz* intersectează paraboloidul hiperbolic după parabolele $\begin{cases} x^2=8z \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} y^2=-50z \\ x=0 \end{cases}$, cu axa de simetrie *Oz*, prima în sensul pozitiv al axei, iar a doua în sensul negativ al axei.

Ecuațiile parametrice ale paraboloidului hiperbolic sunt:

$$\begin{cases} x = 2v\cdot\operatorname{ch} u \\ y = 5v\cdot\operatorname{sh} u \\ z = \dfrac{v^2}{2} \end{cases},\ u,\ v\in\mathbb{R} \text{ (conform formulei (22))}.$$

f) Cuadrica $25x^2+4y^2-z^2=0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}-\frac{z^2}{100}=0$ este un con de semiaxe $a=2, b=5$, $c=10$ şi vârful $O(0,0,0)$.

Planul de coordonate *Oxy*, de ecuație $z=0$, intersectează conul în vârful $O(0,0,0)$.

Planul de coordonate *Oxz* intersectează conul după două drepte concurente în punctul $O(0,0,0)$, de ecuații $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{z}{10}=0 \\ y=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{z}{10}=0 \\ y=0 \end{cases}$.

Planul de coordonate *Oyz* intersectează conul după două drepte concurente în punctul $O(0,0,0)$, de ecuații $\begin{cases} 2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

Ecuațiile parametrice ale conului sunt:

$$\begin{cases} x = 2v\cdot\cos u \\ y = 5v\cdot\sin u \\ z = 10v \end{cases},\ u\in[0,\ 2\pi], v\in\mathbb{R}\ \text{(conform formulei (27)).}$$

5.2. a) Să se determine semiaxele şi coordonatele vârfurilor elipsei obținută prin intersecția planului $x-6=0$ cu elipsoidul $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}+\frac{z^2}{5}-1=0$.

b) Să se determine semiaxele şi coordonatele vârfurilor hiperbolei obținută prin intersecția planului $y-2=0$ cu hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{48}-1=0$.

c) Să se determine coordonatele centrului şi raza cercului spațial obținut prin intersecția planului $z-3=0$ cu hiperboloidul cu două pânze $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}+1=0$.

d) Să se determine parametrul şi coordonatele vârfului parabolei obținută prin intersecția planului $y+12=0$ cu paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{8}=6z$.

Soluție. a) Planul $x-6=0$ intersectează elipsoidul $\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}+\frac{z^2}{5}-1=0$ după o elipsă reală de ecuații: $\begin{cases} \frac{y^2}{20}+\frac{z^2}{5}-\frac{1}{5}=0 \\ x=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{1}-1=0 \\ x=6 \end{cases}$ (situată în planul $x=6$, cu axele de simetrie *Oy* şi *Oz*). Semiaxele elipsei sunt $b=2$ şi $c=1$, iar vârfurile sunt punctele $B(6,\ 2,\ 0), B'(6,\ -2,\ 0)$, $C(6,\ 0,\ 1)$, $C'(6,\ 0,\ -1)$.

b) Planul $y=2$ intersectează hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{27}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{48}-1=0$ după o hiperbolă nedegenerată de ecuații: $\begin{cases}\frac{x^2}{27}-\frac{z^2}{48}-\frac{1}{3}=0\\ y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{16}-1=0\\ y=2\end{cases}$ (situată în planul $y=2$, cu axa transversală Ox). Semiaxele hiperbolei sunt $a=3$ și $c=4$, iar vârfurile sunt punctele $A(3,\ 2,\ 0)$ și $A'(-3,\ 2,\ 0)$.

c) Planul $z=3$ intersectează hiperboloidul cu două pânze $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{3}+1=0$ după un cerc spațial de ecuații: $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-2=0\\ z=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2-4=0\\ z=3\end{cases}$ (situat în planul $z=3$). Centrul cercului este punctul $C(0,\ 0,\ 3)$, iar raza este $R=2$.

d) Planul $y=-12$ intersectează paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{8}=6z$ după o parabolă de ecuații $\begin{cases}\frac{x^2}{3}-18=6z\\ y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=18z+54\\ y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=18(z+3)\\ y=-12\end{cases}$ (situată în planul $y=-12$, cu axa de simetrie $z=-3$, paralelă cu Oz). Parametrul parabolei este $p=9$ și vârful este $V(0,-12,-3)$.

5.3. Se dau elipsoidul $4x^2+9y^2+36z^2-324=0$, dreapta $(d): \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4}$, planele $(\pi): 2x-3y+3z+1=0$ și $(\alpha): x-3y-6z+27=0$ și punctul $M(6,\ -4,\ 2)$. Se cere:

a) ecuațiile planelor tangente la elipsoid în punctele de intersecție cu dreapta (d)

b) ecuațiile normalelor la elipsoid în punctele de intersecție cu dreapta (d)

c) coordonatele punctelor de pe elipsoid în care normalele la suprafață sunt paralele cu dreapta (d)

d) ecuațiile planelor tangente la elipsoid paralele cu planul (π) și coordonatele punctelor de tangență, precum și distanța dintre aceste plane tangente

e) să se arate că elipsoidul și planul (α) au un punct comun și să se determine coordonatele acestuia

f) coordonatele punctelor de pe elipsoid în care normalele la suprafață sunt perpendiculare pe planul (α) şi ecuațiile normalelor în aceste puncte

g) ecuația planului polar al punctului M în raport cu elipsoidul.

Soluție. a) Ecuația echivalentă a elipsoidului este $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}-1=0$, deci $a=9, b=6, c=3$.

Coordonatele punctelor de intersecție dintre elipsoid şi dreaptă sunt soluțiile sistemului format din ecuația elipsoidului şi ecuațiile dreptei: $\begin{cases} \frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{9}-1=0 \\ \frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z+2}{4} \end{cases}$. Folosind ecuațiile parametrice ale dreptei $(d):\begin{cases} x=\ \ 3t+3 \\ y=-6t+4, t\in\mathbb{R} \\ z=\ \ 4t-2 \end{cases}$ şi înlocuind în ecuația elipsoidului se obține ecuația $t^2-t=0$, cu soluțiile $t_1=0, t_2=1$. Pentru $t_1=0$ se găsesc $x_1=3, y_2=4, z_1=-2$, iar pentru $t_2=1$ se găsesc $x_2=6, y_2=-2, z_2=2$.

Aşadar $M_1(3, 4, -2)$ şi $M_2(6, -2, 2)$ sunt punctele de intersecție dintre elipsoid şi dreapta (d).

Ecuația planului tangent la elipsoid în punctul $M_1(3, 4, -2)$, conform formulei (3), este: $(PT_1):\frac{3x}{81}+\frac{4y}{36}+\frac{-2z}{9}-1=0 \Leftrightarrow (PT_1): x+3y-6z-27=0$.

Ecuația planului tangent la elipsoid în punctul $M_2(6, -2, 2)$, conform formulei (3), este: $(PT_2):\frac{6x}{81}+\frac{-2y}{36}+\frac{2z}{9}-1=0 \Leftrightarrow (PT_2): 4x-3y+12z-54=0$.

b) Normala la elipsoid în punctul $M_1(3, 4, -2)$ este dreapta perpendiculară pe planul tangent (PT_1) în punctul M_1. Vectorul normal $\overrightarrow{n_1}=\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k}$ al planului tangent (PT_1) reprezintă vectorul director al normalei la elipsoid în punctul M_1.

Ecuațiile normalei la elipsoid în punctul $M_1(3, 4, -2)$ sunt: $(d_1):\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{-6}$.

Analog se arată că ecuațiile normalei la elipsoid în punctul $M_2(6, -2, 2)$ sunt:

$(d_2):\frac{x-6}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{12}$.

c) ***Obsevație.*** Dacă $F(x,y,z)=0$ este ecuația unei cuadrice şi punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ este pe cuadrică, atunci ecuațiile normalei la cuadrică în punctul M_0 sunt:

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

Notăm cu $F(x,y,z)=4x^2+9y^2+36z^2-324=0$ ecuația elipsoidului.

Prin derivare parțială se obține $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=8x,\ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=18y,\ \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=72z$.

Dacă $M_i(x_i,y_i,z_i), i=3,4$ sunt punctele căutate de pe elipsoid, atunci normala la suprafață în M_i are ecuațiile

$$\frac{x-x_i}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_i,y_i,z_i)}=\frac{y-y_i}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_i,y_i,z_i)}=\frac{z-z_i}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_i,y_i,z_i)}\Leftrightarrow\frac{x-x_i}{8x_i}=\frac{y-y_i}{18y_i}=\frac{z-z_i}{72z_i}$$

şi vectorul său director este $\vec{v_i}=8x_i\,\vec{i}+18y_i\,\vec{j}+72z_i\,\vec{k},\ i=3,4$.

Condiția de paralelism a normalei cu dreapta (d), deci a vectorului director $\vec{v_i}$ al normalei cu vectorul director $\vec{v}=3\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$ al dreptei (d) implică, conform formulei (18), Capitolul 1, egalitatea $\frac{8x_i}{3}=\frac{18y_i}{-6}=\frac{72z_i}{4}$, adică $x_i=\frac{27}{4}z_i$ şi $y_i=-6z_i$.

Deoarece punctele $M_i(x_i,y_i,z_i), i=3,4$ aparțin elipsoidului, atunci coordonatele lor verifică ecuația elipsoidului: $\frac{x_i^2}{81}+\frac{y_i^2}{36}+\frac{z_i^2}{9}-1=0\Leftrightarrow 241z_i^2-144=0$, deci $z_i=\pm\frac{12}{\sqrt{241}}$.

Rezultă $x_i=\frac{27}{4}\cdot\left(\pm\frac{12}{\sqrt{241}}\right)=\pm\frac{81}{\sqrt{241}}$ şi $y_i=-6\cdot\left(\pm\frac{12}{\sqrt{241}}\right)=\mp\frac{72}{\sqrt{241}}$, $i=3,4$, deci se găsesc punctele $M_3\left(-\frac{81}{\sqrt{241}},\frac{72}{\sqrt{241}},-\frac{12}{\sqrt{241}}\right)$ şi $M_4\left(\frac{81}{\sqrt{241}},-\frac{72}{\sqrt{241}},\frac{12}{\sqrt{241}}\right)$.

d) ***Metoda* 1.** Ecuațiile planelor tangente la elipsoid paralele cu planul $(\pi):2x-3y+3z+1=0$, conform formulei (4), sunt:

$$\begin{cases}(\pi_1):2x-3y+3z-\sqrt{81\cdot 2^2+36\cdot(-3)^2+9\cdot 3^2}=0\\(\pi_2):2x-3y+3z+\sqrt{81\cdot 2^2+36\cdot(-3)^2+9\cdot 3^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\pi_1):2x-3y+3z-27=0\\(\pi_2):2x-3y+3z+27=0\end{cases}.$$

***Metoda* 2.** Orice plan paralel cu planul $(\pi): 2x-3y+3z+1=0$ are ecuația $2x-3y+3z+\lambda=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, deci şi planele tangente la elipsoid paralele cu (π) au ecuațiile de această formă.

Notăm cu x_0, y_0, z_0 coordonatele punctului de contact M_0 dintre elipsoid şi planul tangent paralel cu planul (π). Conform formulei (3), ecuația planului tangent la elipsoid în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este $\frac{xx_0}{81}+\frac{yy_0}{36}+\frac{zz_0}{9}-1=0 \Leftrightarrow 4x_0x+9y_0y+36z_0z-324=0$.

Identificând cele două ecuații ale planului tangent la elipsoid în punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ rezultă (conform formulei (23), Capitolul 1) egalitatea de rapoarte:

$$\frac{4x_0}{2}=\frac{9y_0}{-3}=\frac{36z_0}{3}=\frac{-324}{\lambda}, \text{ deci } x_0=-\frac{162}{\lambda},\ y_0=\frac{108}{\lambda},\ z_0=-\frac{27}{\lambda}.$$

Întrucât punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ aparține elipsoidului, atunci se verifică ecuația acestuia:

$$\frac{x_0^{\,2}}{81}+\frac{y_0^{\,2}}{36}+\frac{z_0^{\,2}}{9}-1=0 \Leftrightarrow \frac{1}{81}\cdot\left(-\frac{162}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{108}{\lambda}\right)^2+\frac{1}{9}\cdot\left(-\frac{27}{\lambda}\right)^2-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{324}{\lambda^2}+\frac{324}{\lambda^2}+\frac{81}{\lambda^2}-1=0 \Leftrightarrow \lambda^2=729,$$

deci $\lambda=\pm 27$.

Planele tangente la elipsoid paralele cu planul (π) au ecuațiile:

$(\pi_1): 2x-3y+3z-27=0$ şi $(\pi_2): 2x-3y+3z+27=0$.

Pentru $\lambda=-27$, rezultă $x_{01}=6,\ y_{01}=-4,\ z_{01}=1$, deci $M_{01}(6,-4,1)$ este punctul de tangență dintre elipsoid şi planul tangent (π_1).

Pentru $\lambda=27$, se obțin $x_{02}=-6,\ y_{02}=4,\ z_{02}=-1$, deci $M_{02}(-6,4,-1)$ este punctul de tangență dintre elipsoid şi planul tangent (π_2).

Planele tangente (π_1) şi (π_2) sunt paralele, deci distanța dintre ele reprezintă distanța de la un punct arbitrar al unuia dintre cele două plane la celălalt plan.

Fie $E(\lambda, \mu, \varepsilon)$ un punct arbitrar al planului (π_1), deci coordonatele sale verifică ecuația planului (π_1): $2\lambda-3\mu+3\varepsilon-27=0 \Rightarrow 2\lambda-3\mu+3\varepsilon=27$.

Folosind această relație şi formula (28), Capitolul 1 rezultă:

$$\operatorname{dist}((\pi_1),(\pi_2))=\operatorname{dist}(E,(\pi_2))=\frac{|2\lambda-3\mu+3\varepsilon+27|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}}=\frac{|27+27|}{\sqrt{22}}=\frac{54}{\sqrt{22}}.$$

e) ***Metoda* 1.** Pentru aflarea coordonatelor punctului de intersecție dintre planul (α) şi elipsoid se determină proiecția curbei de intersecție a celor două suprafețe pe planul *Oxy*.

Ecuațiile proiecției pe planul *Oxy* a curbei de intersecție a elipsoidului cu planul (α) se obțin intersectând curba $(\Gamma):\begin{cases}4x^2+9y^2+36z^2-324=0\\ x-3y-6z+27=0\end{cases}$ cu planul *Oxy*:

$$\begin{cases}4x^2+9y^2+36z^2-324=0\\ x-3y-6z+27=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2+9y^2+36z^2-324=0\\ z=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y+\frac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4x^2+9y^2+36\left(\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y+\frac{9}{2}\right)^2-324=0\\ z=0\end{cases}.$$

Aşadar proiecția curbei de intersecție (Γ) pe planul *Oxy* este o conică de ecuații:

$$\begin{cases}f(x,y)=5x^2-6xz+18z^2+54x-162z+405=0\\ z=0\end{cases}$$

ai cărei invarianții sunt:

$\delta=\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 18\end{vmatrix}=81>0,\ I=23,\ \Delta=\begin{vmatrix}5 & -3 & 27\\ -3 & 18 & -81\\ 27 & -81 & 405\end{vmatrix}=0$, deci este o elipsă degenerată, care reprezintă două drepte concurente imaginare, adică conica se reduce la un punct, şi anume, centrul său.

Coordonatele x, y ale centrului elipsei degenerate sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x-3y+27=0\\ -3x+18y-81=0\end{cases},$$

deci $x=-3,\ y=4$ şi punctul $P'(-3,\ 4,\ 0)$ este proiecția pe planul *Oxy* a curbei de intersecție (Γ) a celor două suprafețe.

În concluzie, planul (α) intersectează elipsoidul după două drepte concurente imaginare, care se taie în punctul $P(-3,\ 4,\ 2)$, a cărui proiecție pe planul *Oxy* este punctul

$P'(-3,\ 4,\ 0)$ (coordonata z a punctului *P* s-a determinat înlocuind $x=-3$ şi $y=4$ în relația $z=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y+\frac{9}{2}$).

Planul (α) şi elipsoidul sunt tangente în punctul $P(-3,\ 4,\ 2)$.

Observație. Coordonatele punctului de intersecție *P* dintre elipsoid şi planul (α) se pot găsi şi dacă se determină proiecția curbei de intersecție a celor două suprafețe pe planul *Oxz* sau pe planul *Oyz*.

***Metoda* 2.** Deoarece planul tangent la o cuadrică are ca pol în raport cu cuadrica punctul de contact (conform Observația 5.7.), atunci se determină coordonatele polului planului (α) în raport cu elipsoidul.

Fie $P(x_P, y_P, z_P)$ punctul de contact al planului (α) cu elipsoidul. Atunci *P* este polul planului $(\alpha): x-3y-6z+27=0$ în raport cu elipsoidul.

Conform formulei (5), planul polar al punctului *P* în raport cu elipsoidul are ecuația:

$$\frac{x_P x}{81}+\frac{y_P y}{36}+\frac{z_P z}{9}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x_P}{3}\cdot x+\frac{3y_P}{4}\cdot y+3z_P\cdot z-27=0.$$

Identificând ecuația planului polar şi ecuația planului (α), rezultă egalitățile:

$$\frac{\frac{x_P}{3}}{1}=\frac{\frac{3y_P}{4}}{-3}=\frac{3z_P}{-6}=\frac{-27}{27}\text{, deci } x_P=-3, y_P=4, z_P=2.$$

Punctul $P(-3,\ 4,\ 2)$ este polul planului (α) în raport cu elipsoidul, deci planul (α) şi elipsoidul sunt tangente în punctul $P(-3,\ 4,\ 2)$.

f) Notăm cu $F(x,y,z)=4x^2+9y^2+36z^2-324=0$ ecuația elipsoidului.

Prin derivare parțială se găseşte $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=8x$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=18y$, $\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=72z$.

Dacă $M_i(x_i, y_i, z_i), i=5,6$ sunt punctele căutate de pe elipsoid, atunci normala la suprafață în M_i are ecuațiile

$$\frac{x-x_i}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_i,y_i,z_i)}=\frac{y-y_i}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_i,y_i,z_i)}=\frac{z-z_i}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_i,y_i,z_i)} \Leftrightarrow \frac{x-x_i}{8x_i}=\frac{y-y_i}{18y_i}=\frac{z-z_i}{72z_i}$$

şi vectorul director $\overrightarrow{v_i}=8x_i\vec{i}+18y_i\vec{j}+72z_i\vec{k},\ i=5,6$.

Condiția de perpendicularitate a normalei cu planul (α), deci a vectorului director $\overrightarrow{v_i}$ al normalei cu vectorul normal $\vec{n}=\vec{i}-3\vec{j}-6\vec{k}$ al planului (α) implică, conform formulei (26), Capitolul 1, egalitățile:

$$\frac{8x_i}{1}=\frac{18y_i}{-3}=\frac{72z_i}{-6} \Leftrightarrow 8x_i=-6y_i=-12z_i \Leftrightarrow 4x_i=-3y_i=-6z_i, \quad \text{adică} \quad x_i=-\frac{3}{2}z_i \quad \text{şi}$$

$y_i=2z_i$.

Deoarece punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i=5,6$ aparțin elipsoidului, atunci se verifică ecuația acestuia: $\frac{x_i^2}{81}+\frac{y_i^2}{36}+\frac{z_i^2}{9}-1=0 \Leftrightarrow 81z_i^2-324=0$, deci $z_i=\pm 2,\ i=5,6$.

Rezultă $x_i=\mp 3$ şi $y_i=\pm 4$, deci se găsesc punctele $M_5(-3,4,2)$ şi $M_6(3,-4,-2)$.

Ecuațiile normalei la elipsoid în punctul $M_5(-3,4,2)$ sunt

$$(d_5): \frac{x+3}{-24}=\frac{y-4}{72}=\frac{z-2}{288} \Leftrightarrow \frac{x+3}{-1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{12}.$$

Ecuațiile normalei la elipsoid în punctul $M_6(3,-4,-2)$ sunt

$$(d_6): \frac{x-3}{24}=\frac{y+4}{-72}=\frac{z+2}{-288} \Leftrightarrow \frac{x-3}{-1}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+2}{12}.$$

g) Ecuația planului polar al punctului $M(6,\ -4,\ 2)$ în raport cu elipsoidul, conform formulei (5) este: $\frac{6x}{81}+\frac{-4y}{36}+\frac{2z}{9}-1=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z-27=0$.

5.4. Se consideră paraboloidul eliptic $y^2+z^2=2x$ şi planul $(\pi): x-2y+z=0$. Se cere:

a) ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic în punctul $A(4,-2,-2)$

b) ecuațiile normalei la paraboloidul eliptic în punctul $A(4,-2,-2)$

c) polul planului (π) în raport cu paraboloidul eliptic

d) ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic paralel cu planul (π)

e) ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic perpendicular pe vectorul $\vec{n}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

f) ecuațiile proiecțiilor pe planele de coordonate a curbelor de intersecție dintre paraboloid şi planul (π) şi centrele lor de simetrie.

Soluție. a) Ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic în punctul $A(4,-2,-2)$, conform formulei (18), este: $(\alpha): y\cdot(-2)+z\cdot(-2)=x+4 \Leftrightarrow (\alpha): x+2y+2z+4=0$.

b) Normala la paraboloidul eliptic în punctul $A(4,-2,-2)$ este dreapta perpendiculară pe planul tangent (α) în punctul A. Vectorul normal $\vec{n}_\alpha=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ al planului tangent (α) reprezintă vectorul director al normalei la paraboloidul eliptic în punctul A.

Ecuațiile normalei la paraboloidul eliptic în punctul $A(4,-2,-2)$ sunt

$$(d): \frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{2}.$$

c) Notăm cu $M(x_0, y_0, z_0)$ polul planului (π) în raport cu paraboloidul eliptic.

Conform formulei (20), planul polar al punctului M în raport cu paraboloidul eliptic are ecuația: $yy_0+zz_0=x+x_0 \Leftrightarrow x-y_0y-z_0z+x_0=0$.

Identificând ecuația planului polar cu ecuația planului (π), rezultă relațiile: $x_0=0$ şi $\frac{1}{1}=\frac{-y_0}{-2}=\frac{-z_0}{1}$, deci $x_0=0,\ y_0=2,\ z_0=-1$.

Punctul $M(0,\ 2,\ -1)$ este polul planului (π) în raport cu paraboloidul eliptic.

d) ***Metoda* 1.** Ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic paralel cu planul $(\pi): x-2y+z=0$, conform formulei (19), este:

$$2\cdot1(x-2y+z)+1\cdot1^2+1\cdot(-2)^2=0 \Leftrightarrow 2x-4y+2z+5=0.$$

***Metoda* 2.** Orice plan paralel cu planul $(\pi): x-2y+z=0$ are ecuația $x-2y+z+\lambda=0, \lambda\in\mathbb{R}$, deci şi ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic este de această formă.

Notăm cu $x_0,\ y_0,\ z_0$ coordonatele punctului de contact dintre paraboloidul eliptic şi planul tangent paralel cu planul (π).

Folosind formula (18), ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic în punctul $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ este $yy_0+zz_0=x+x_0 \Leftrightarrow x-y_0y-z_0z+x_0=0$.

Identificând ecuațiile planelor tangente de mai sus rezultă $\frac{1}{1}=\frac{-y_0}{-2}=\frac{-z_0}{1}=\frac{x_0}{\lambda}$, deci $x_0=\lambda,\ y_0=2,\ z_0=-1$.

Deoarece punctul $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ aparține paraboloidului eliptic, atunci ecuația acestuia se verifică: ${y_0}^2 + {z_0}^2 = 2x_0 \Leftrightarrow 4+1=2\lambda$, deci $\lambda = \frac{5}{2}$.

Planul tangent la paraboloidul eliptic paralel cu planul (π) are ecuația:

$$x-2y+z+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow 2x-4y+2z+5=0.$$

e) Ecuația unui plan arbitrar care are vectorul normal $\vec{n} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ este de forma $2x+y-3z+\mu=0, \mu \in \mathbb{R}$. Acest plan este tangent paraboloidului eliptic dacă intersecția celor două suprafețe este o conică degenerată formată din două drepte concurente imaginare (adică intersecția este un punct).

Pentru aflarea ecuației planului tangent la paraboloidul eliptic perpendicular pe vectorul $\vec{n}$ se determină proiecția curbei de intersecție a celor două suprafețe pe planul *Oxz*.

Ecuațiile proiecției pe planul *Oxz* a curbei de intersecție a paraboloidului cu planul dat se obțin intersectând curba $\begin{cases} y^2+z^2=2x \\ 2x+y-3z+\mu=0 \end{cases}$ cu planul *Oxz*:

$$\begin{cases} y^2+z^2=2x \\ 2x+y-3z+\mu=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2=2x \\ y=-2x+3z-\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2x+3z-\mu)^2+z^2-2x=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

Aşadar proiecția curbei de intersecție pe planul *Oxz* este o conică de ecuații:

$$\begin{cases} 4x^2-12xz+10z^2+2x(2\mu-1)-6\mu z+\mu^2=0, \\ y=0 \end{cases}$$

ai cărei invarianții sunt:

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = 4>0,\ I=14,\ \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -6 & 2\mu-1 \\ -6 & 10 & -3\mu \\ 2\mu-1 & -3\mu & \mu^2 \end{vmatrix} = 4\mu-10.$$

Această conică este de gen eliptic şi va reprezenta două drepte concurente imaginare dacă $\Delta=0 \Leftrightarrow 4\mu-10=0$, deci dacă $\mu=\frac{5}{2}$.

Ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic perpendicular pe vectorul $\vec{n}$ se găseşte înlocuind $\mu=\frac{5}{2}$, adică de obține: $2x+y-3z+\frac{5}{2}=0 \Leftrightarrow 4x+2y-6z+5=0$.

Observație. În mod similar se găseşte ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic perpendicular pe vectorul $\vec{n}$ dacă se face proiecția curbei de intersecție a celor două suprafețe pe planul *Oxy* sau pe planul *Oyz*.

f) Ecuațiile proiecției pe planul *Oxy* a curbei de intersecție a paraboloidului cu planul (π) se obțin intersectând curba $(\Gamma):\begin{cases} y^2+z^2=2x \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ cu planul *Oxy*:

$$\begin{cases} y^2+z^2=2x \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2=2x \\ z=-x+2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+(-x+2y)^2-2x=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Ecuațiile proiecției curbei de intersecție (Γ) pe planul *Oxy* sunt:

$$\begin{cases} f(x,y)=x^2-4xy+5y^2-2x=0, \\ z=0 \end{cases}$$

deci curba proiectată este o conică cu invarianții:

$$\delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0,\ I_1=6,\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-5\neq 0,\ \Delta_1 I_1<0 \text{, adicăo elipsă reală.}$$

Coordonatele $x,\ y$ ale centrului elipsei sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-1=0 \\ -2x+5y=0 \end{cases},$$

deci $x=5,\ y=2$ şi $C_1'(5,\ 2,\ 0)$ este centrul elipsei din planul *Oxy*.

Curba (Γ) din planul de secțiune este o elipsă cu centrul în $C_1(5,\ 2,\ -1)$ (deoarece centrul elipsei din spațiu se proiectează în centrul C_1' al proiecției sale pe planul *Oxy*).

Similar, pentru a determina ecuațiile proiecției pe planul *Oxz* a curbei de intersecție dintre paraboloid şi planul (π) se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} y^2+z^2=2x \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2+z^2=2x \\ y=\frac{x+z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x+z}{2}\right)^2+z^2-2x=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} g(x,z) = x^2 + 2xz + 5z^2 - 8x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Curba de intersecție proiectată în planul *Oxz* este o conică cu invarianții:

$\delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ I_2 = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -80 \neq 0,\ \Delta_2 I_2 < 0$, deci este o elipsă reală.

Coordonatele $x,\ z$ ale centrului elipsei sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,z) = 0 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial g}{\partial z}(x,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \ \ z - 4 = 0 \\ x + 5z \qquad = 0 \end{cases},$$

deci $x = 5,\ z = -1$ şi $C_2'(5,\ 0,\ -1)$ este centrul elipsei din planul *Oxz*.

Curba din planul de secțiune este o elipsă cu centrul în $C_2(5,\ 2,\ -1)$ (deoarece centrul secțiunii se proiectează în centrul C_2' al proiecției sale pe planul *Oxz*).

Proiecția pe planul *Oyz* a curbei de intersecție dintre paraboloid şi planul (π) are ecuațiile: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 2x \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 = 2x \\ x = 2y - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + z^2 - 2(2y - z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} h(y,z) = y^2 + z^2 - 4y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Curba de intersecție proiectată în planul *Oyz* este o conică cu invarianții:

$\delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ I_3 = 2,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0,\ \Delta_3 I_3 < 0$, deci este o elipsă reală.

Coordonatele $y,\ z$ ale centrului elipsei sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial h}{\partial y}(y,z) = 0 \\ \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial z}(y,z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \qquad - 2 = 0 \\ \qquad z + 1 = 0 \end{cases},$$

deci $y = 2,\ z = -1$ şi $C_3'(0,\ 2,\ -1)$ este centrul elipsei din planul *yOz*.

Curba din planul de secțiune este o elipsă cu centrul în $C_3(5,\ 2,\ -1)$ (deoarece centrul secțiunii se proiectează în centrul C_3' al proiecției sale pe planul *Oyz*).

5.5. Ce curbă rezultă din intersecția hiperboloidului cu două pânze $4x^2+16y^2-z^2+144=0$ cu planul $(\pi): 3x-2y-z-6=0$? Să se determine centrul său de simetrie.

Soluție. Se cercetează proiecțiile curbei de intersecției a hiperboloidul cu două pânze cu planul (π) pe planele de coordonate.

Ecuațiile proiecției curbei de intersecție a hiperboloidului cu două pânze cu planul dat, pe planul *Oxy*, se găsesc intersectând curba $\begin{cases}4x^2+16y^2-z^2+144=0\\ 3x-2y-z-6=0\end{cases}$ cu planul *Oxy*:

$$\begin{cases}4x^2+16y^2-z^2+144=0\\ 3x-2y-z-6=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x^2+16y^2-z^2+144=0\\ z=3x-2y-6\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}4x^2+16y^2-(3x-2y-6)^2+144=0\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x^2-12xy-12y^2-36x+24y-108=0\\ z=0\end{cases}.$$

Aşadar proiecția curbei de intersecție pe planul *Oxy* este o conică de ecuații:

$$\begin{cases}f(x,y)=5x^2-12xy-12y^2-36x+24y-108=0\\ z=0\end{cases}$$

ai cărei invarianții sunt: $\delta=\begin{vmatrix}5 & -6\\ -6 & -12\end{vmatrix}=-96<0,\ I=-7,\ \Delta=\begin{vmatrix}5 & -6 & -18\\ -6 & -12 & 12\\ -18 & 12 & -108\end{vmatrix}=16128$, deci este o hiperbolă.

Coordonatele x_0, y_0 ale centrului hiperbolei sunt soluțiile sistemului:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0\\ \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x-16y-18=0\\ -6x-12y+12=0\end{cases},$$

deci $x_0=3,\ y_0=-\frac{1}{2}$ şi $C'\left(3,\ -\frac{1}{2},\ 0\right)$ este centrul hiperbolei din planul *Oxy*.

Curba din planul de secțiune este o hiperbolă cu centrul în punctul $C\left(3, -\frac{1}{2}, 4\right)$ (deoarece centrul hiperbolei din spațiu se proiectează în centrul C' al proiecției sale pe planul *Oxy* şi coordonata *z* a centrului se determină din relația $z = 3x - 2y - 6$).

Observație. În mod analog se procedează dacă se determină proiecțiile curbei de interesecție pe planul *Oxz* sau pe planul *Oyz*.

5.6. Se dau paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 8z$ şi punctul $A(-6, 5, -2)$.

a) Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul *A* şi se află pe paraboloidul hiperbolic.

b) Să se calculeze unghiul ascuțit dintre generatoarele rectilinii determinate la punctul a).

c) Să se determine ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic în punctul *A*.

d) Să se determine ecuațiile normalei în punctul *A* la paraboloidul hiperbolic.

Soluție. a) Ecuația paraboloidul hiperbolic se scrie şi sub forma $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{1}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{1}\right) = 8z$.

Familiile de generatoare rectilinii ale paraboloidului hiperbolic au ecuațiile:

$$(G_\lambda): \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{1} = \lambda \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = \frac{8}{\lambda} z \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y - 2\lambda = 0 \\ \lambda(x + 2y) - 16z = 0 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{şi}$$

$$(G_\mu): \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{1} = \mu \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{1} = \frac{8}{\mu} z \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - 2\mu = 0 \\ \mu(x - 2y) - 16z = 0 \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}.$$

Se determină parametrii reali λ şi μ impunând condiția ca generatoarele rectilinii să treacă prin punctul $A(-6, 5, -2)$, adică coordonatele punctului *A* să verifice ecuațiile celor două familii de generatoare. Astfel rezultă:

$$\begin{cases} -6 - 2\cdot 5 - 2\lambda = 0 \\ \lambda(-6 + 2\cdot 5) - 16\cdot(-2) = 0 \end{cases} \text{şi} \begin{cases} -6 + 2\cdot 5 - 2\mu = 0 \\ \mu(-6 - 2\cdot 5) - 16\cdot(-2) = 0 \end{cases}$$

şi se găsesc $\lambda = -8$ şi $\mu = 2$.

Ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul $A(-6, 5, -2)$ sunt:

$$(G_1):\begin{cases} x-2y \quad +16=0 \\ x+2y+2z \quad =0 \end{cases} \text{ şi } (G_2):\begin{cases} x+2y \quad -4=0 \\ x-2y-8z \quad =0 \end{cases}.$$

Calculăm vectorii directori ai dreptelor (G_1) şi (G_2):

$$\overrightarrow{v_1}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k} \text{ şi } \overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -8 \end{vmatrix}=-16\vec{i}+8\vec{j}-4\vec{k}.$$

Ecuațiile dreptelor (G_1) şi (G_2) se mai pot scrie sub formele:

$$(G_1):\frac{x+6}{-4}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+2}{4} \Leftrightarrow \frac{x+6}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z+2}{-2} \text{ şi}$$

$$(G_2):\frac{x+6}{-16}=\frac{y-5}{8}=\frac{z+2}{-4} \Leftrightarrow \frac{x+6}{4}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+2}{1}.$$

b) Unghiul dintre generatoarele rectilinii (G_1) şi (G_2) este unghiul determinat de vectorii directori $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ ai celor două drepte.

Conform formulei (15), Capitolul 1, unghiul ascuțit dintre dreptele (G_1) şi (G_2) este:

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}\right|}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|}=\frac{\left|(-4)\cdot(-16)+(-2)\cdot 8+4\cdot(-4)\right|}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+4^2}\cdot\sqrt{(-16)^2+8^2+(-4)^2}}=\frac{32}{6\cdot 4\sqrt{21}}=\frac{4}{3\sqrt{21}}.$$

c) ***Metoda* 1.** Planul tangent la paraboloidul hiperbolic în punctul $A(-6,5,-2)$, conform formulei (23), este:

$$\frac{x\cdot(-6)}{4}-\frac{y\cdot 5}{1}=4(z-2) \Leftrightarrow 3x+10y+8z-16=0.$$

***Metoda* 2.** Planul tangent la paraboloidul hiperbolic în punctul A este planul determinat de generatoarele rectilinii concurente (G_1) şi (G_2) (conform Observației 5.34., punctul 5).

Planul determinat de dreptele concurente (G_1) şi (G_2) este planul ce trece prin punctul de concurență $A(-6,5,-2)$ şi este paralel cu direcțiile neparalele determinate de vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$.

Conform formulei (4), Capitolul 1, ecuația planului tangent în punctul A este:

$$\begin{vmatrix} x+6 & y-5 & z+2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -16 & 8 & -4 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 3x+10y+8z-16=0.$$

d) Normala în punctul A la paraboloidul hiperbolic este dreapta perpendiculară pe planul tangent în A la paraboloid. Atunci vectorul normal $\vec{n} = 3\vec{i} + 10\vec{j} + 8\vec{k}$ al planului tangent (determinat la punctul c)) este vectorul director al normalei.

Ecuațiile normalei în $A(-6, 5, -2)$ la paraboloidul hiperbolic sunt: $\dfrac{x+6}{3} = \dfrac{y-5}{10} = \dfrac{z+2}{8}$.

5.7. Se dau hiperboloidul cu o pânză $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} - \dfrac{z^2}{4} - 1 = 0$, planul $(\pi): 2x - y + 3z - 5 = 0$ şi punctul $A(-3, 3, -1)$.

a) Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză ce trec prin punctul A.

b) Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză care sunt paralele cu planul (π).

Soluție. a) Ecuația hiperboloidului cu o pânză se scrie şi sub forma:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{36} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3} - \frac{z}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{z}{2}\right) = \left(1 - \frac{y}{6}\right)\left(1 + \frac{y}{6}\right).$$

Ecuațiile celor două familii de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză sunt:

$$(G_\lambda): \begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{z}{2} = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{6}\right) \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + \dfrac{y}{6}\right) \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \lambda y - 3z - 6\lambda = 0 \\ 2\lambda x - y + 3\lambda z - 6 = 0 \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R} \text{ şi}$$

$$(G_\mu): \begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{z}{2} = \mu\left(1 + \dfrac{y}{6}\right) \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{z}{2} = \dfrac{1}{\mu}\left(1 - \dfrac{y}{6}\right) \end{cases}, \mu \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \mu y - 3z - 6\mu = 0 \\ 2\mu x + y + 3\mu z - 6 = 0 \end{cases}, \ \mu \in \mathbb{R}.$$

Se determină parametrii reali λ şi μ impunând condiția ca generatoarele rectilinii să treacă prin punctul $A(-3, 3, -1)$, adică coordonatele punctului A să verifice ecuațiile celor două familii de generatoare. Astfel rezultă:

$$\begin{cases} 2\cdot(-3) + 3\lambda - 3\cdot(-1) - 6\lambda = 0 \\ 2\lambda\cdot(-3) - 3 + 3\lambda\cdot(-1) - 6 = 0 \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} 2\cdot(-3) - 3\mu - 3\cdot(-1) - 6\mu = 0 \\ 2\mu\cdot(-3) + 3 + 3\mu\cdot(-1) - 6 = 0 \end{cases}$$

şi se găsesc $\lambda = -1$ şi $\mu = -\frac{1}{3}$.

Ecuațiile generatoarelor rectilinii ce trec prin punctul $A(-3, 3, -1)$ sunt:

$$(G_1): \begin{cases} 2x - y - 3z + 6 = 0 \\ 2x + y + 3z + 6 = 0 \end{cases} \text{ şi } (G_2): \begin{cases} 6x + \ \ y - 9z + \ \ 6 = 0 \\ 2x - 3y + 3z + 18 = 0 \end{cases}.$$

Calculăm vectorii directori ai dreptelor (G_1) şi (G_2):

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -12\vec{j} + 4\vec{k} \text{ şi } \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 1 & -9 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -24\vec{i} - 36\vec{j} - 20\vec{k}.$$

Ecuațiile dreptelor (G_1) şi (G_2) se mai pot scrie sub formele:

$$(G_1): \frac{x+3}{0} = \frac{y-3}{-12} = \frac{z+1}{4} \Leftrightarrow \frac{x+3}{0} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{1} \text{ şi}$$

$$(G_2): \frac{x+3}{-24} = \frac{y-3}{-36} = \frac{z+1}{-20} \Leftrightarrow \frac{x+3}{6} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{5}.$$

b) Cele două familii de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză sunt (G_λ) şi (G_μ).

Vectorii directori ai familiilor de generatoare (G_λ) şi (G_μ) sunt:

$$\overrightarrow{v_\lambda} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \lambda & -3 \\ 2\lambda & -1 & 3\lambda \end{vmatrix} = \left(3\lambda^2 - 3\right)\vec{i} - 12\lambda\vec{j} + \left(-2 - 2\lambda^2\right)\vec{k} \text{ şi}$$

$$\overrightarrow{v_\mu} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -\mu & -3 \\ 2\mu & 1 & 3\mu \end{vmatrix} = \left(-3\mu^2 + 3\right)\vec{i} - 12\mu\vec{j} + \left(2 + 2\mu^2\right)\vec{k}.$$

Vectorul normal al planului $(\pi): 2x - y + 3z - 5 = 0$ este $\vec{n} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

Planul (π) este paralel cu dreptele familiei (G_λ), respectiv cu dreptele familiei (G_μ) dacă vectorii $\vec{n}$ şi $\overrightarrow{v_\lambda}$, respectiv vectorii $\vec{n}$ şi $\overrightarrow{v_\mu}$ sunt ortogonali, deci, conform formulei (27), Capitolul 1, dacă au locrelațiile:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_\lambda} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(3\lambda^2 - 3\right) - 1 \cdot (-12\lambda) + 3 \cdot \left(-2 - 2\lambda^2\right) = 0 \Leftrightarrow 12\lambda - 12 = 0$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{v_\mu}=0 \Leftrightarrow 2\cdot\left(-3\mu^2+3\right)-1\cdot(-12\mu)+3\cdot\left(2+2\mu^2\right)=0 \Leftrightarrow 12\mu+12=0,$$

de unde rezultă $\lambda=1$ şi $\mu=-1$.

Înlocuind aceste valori în ecuațiile familiilor de generatoare (G_λ) şi (G_μ) se găsesc ecuațiile generatoarelor paralele cu planul (π):

$$(G_3):\begin{cases}2x+y-3z-6=0\\2x-y+3z-6=0\end{cases} \text{ şi } (G_4):\begin{cases}2x+y-3z+6=0\\2x-y+3z+6=0\end{cases}.$$

Vectorii directori ai dreptelor (G_3) şi (G_4) sunt $\overrightarrow{v_3}=-12\vec{j}-4\vec{k}$ şi $\overrightarrow{v_4}=-12\vec{j}-4\vec{k}$.

Ecuațiile dreptelor (G_3) şi (G_4) se mai pot scrie sub formele:

$$(G_3):\frac{x-3}{0}=\frac{y}{-12}=\frac{z}{-4} \Leftrightarrow \frac{x-3}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \text{ şi}$$

$$(G_4):\frac{x+3}{0}=\frac{y}{-12}=\frac{z}{-4} \Leftrightarrow \frac{x+3}{0}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}.$$

Observație. Dreptele generatoare (G_3) şi (G_4) sunt paralele, având acelaşi vector director.

5.8. Se dau hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{4}-y^2+\frac{z^2}{9}-1=0$, dreapta $(d):\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{12}=\frac{z+1}{-4}$ şi planul $(\pi): 2x+5y+z=0$.

a) Să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză conținute în planul (π).

b) Să se determine punctele de pe hiperboloidul cu o pânză în care normalele la suprafață sunt paralele cu dreapta (d) şi să se găsească ecuațiile acestor normale.

c) Să se determine ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul cu o pânză care conțin dreapta (d).

Soluție. a) Ecuația hiperboloidului cu o pânză se scrie şi sub forma:

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1-\frac{z^2}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}-y\right)\left(\frac{x}{2}+y\right)=\left(1-\frac{z}{3}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right).$$

Ecuațiile celor două familii de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză sunt:

$$(G_\lambda):\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=\lambda\left(1-\dfrac{z}{3}\right)\\ \dfrac{x}{2}+y=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{z}{3}\right)\end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-y+\dfrac{\lambda}{3}z-\lambda=0\\ \dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{3\lambda}z-\dfrac{1}{\lambda}=0\end{cases},\lambda\in\mathbb{R}\ \text{şi}$$

$$(G_\mu):\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=\mu\left(1+\dfrac{z}{3}\right)\\ \dfrac{x}{2}+y=\dfrac{1}{\mu}\left(1-\dfrac{z}{3}\right)\end{cases},\mu\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-y-\dfrac{\mu}{3}z-\mu=0\\ \dfrac{1}{2}x+y+\dfrac{1}{3\mu}z-\dfrac{1}{\mu}=0\end{cases},\ \mu\in\mathbb{R}.$$

Dreptele din familia de generatoare (G_λ) sunt conținute în planul (π) dacă, din punct de vedere algebric, sistemul format din ecuațiile familiei (G_λ)şi ecuația planului (π) are o infinitate de soluții. Se formează un sistem liniar neomogen, de trei ecuații cu trei necunoscute
$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y+\dfrac{\lambda}{3}z-\lambda=0\\ \dfrac{x}{2}+y-\dfrac{1}{3\lambda}z-\dfrac{1}{\lambda}=0\\ 2x+5y+z=0\end{cases}$, care trebuie să fie compatibil nedeterminat, adică determinantul său trebuie să fie nul.

Din condiția $\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & -1 & \dfrac{\lambda}{3}\\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{3\lambda}\\ 2 & 5 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 1+\dfrac{\lambda}{6}+\dfrac{9}{6\lambda}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{6\lambda}(\lambda+3)^2=0$, rezultă $\lambda=-3$.

Se înlocuieşte $\lambda=-3$ în ecuațiile familiei de generatoare (G_λ) şi se găsesc ecuațiile generatoarei conținută în planul (π): $(G_1):\begin{cases}\dfrac{1}{2}x-y-z+3=0\\ \dfrac{1}{2}x+y+\dfrac{1}{9}z+\dfrac{1}{3}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y-2z+6=0\\ 9x+18y+2z+6=0\end{cases}$.

Analog, dreptele din familia de generatoare (G_μ) sunt conținute în planul (π) dacă ecuațiile familiei (G_μ) împreună cu ecuația planului (π) formează un sistem liniar neomogen, de trei ecuații cu trei necunoscute, compatibil nedeterminat.

Determinantul sistemului trebuie să fie nul şi avem

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -1 & -\frac{\mu}{3} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3\mu} \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{6}\mu-\frac{9}{6\mu}=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6\mu}(\mu-3)^2=0$$, de unde rezultă $\mu=3$.

Substituind $\mu=3$ în ecuațiile familiei de generatoare $\left(G_\mu\right)$ şi se găsesc ecuațiile generatoarei conținută în planul (π): $(G_2):\begin{cases} \frac{1}{2}x-y-z-3=0 \\ \frac{1}{2}x+y+\frac{1}{9}z-\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2z-6=0 \\ 9x+18y+2z-6=0 \end{cases}$.

Observație. Dreptele (G_1) şi (G_2) sunt paralele, având vectorul director $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -2 \\ 9 & 18 & 2 \end{vmatrix}=$

$=32\vec{i}-20\vec{j}+36\vec{k}=4\left(8\vec{i}-5\vec{j}+9\vec{k}\right)$.

b) Notăm cu $x_0,\ y_0,\ z_0$ coordonatele unui punct de pe hiperboloidul cu o pânză.

Pentru a determina ecuațiile normalei la hiperboloidul cu o pânză duse în punctul de mai sus, trebuie determinată ecuația planului tangent la hiperboloidul cu o pânză în acest punct: $\frac{xx_0}{4}-yy_0+\frac{zz_0}{9}-1=0 \Leftrightarrow 9x_0x-36y_0y+4z_0z-36=0$.

Normala la hiperboloidul cu o pânză ce trece prin punctul de coordonate $x_0,\ y_0,\ z_0$ are ecuațiile: $\frac{x-x_0}{9x_0}=\frac{y-y_0}{-36y_0}=\frac{z-z_0}{4z_0}$.

Normala la hiperboloidul cu o pânză este paralelă cu dreapta (d) dacă vectorii lor directori sunt coliniari, deci conform formulei (18), Capitolul 1, dacă avem egalitatea:

$\frac{9x_0}{3}=\frac{-36y_0}{12}=\frac{4z_0}{-4} \Leftrightarrow 3x_0=-3y_0=-z_0$, deci $x_0=-y_0$ şi $z_0=3y_0$.

Deoarece punctul $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ aparține hiperboloidului cu o pânză, atunci se verifică ecuația acestuia: $\frac{x_0^2}{4}-y_0^2+\frac{z_0^2}{9}-1=0 \Leftrightarrow \frac{y_0^2}{4}-y_0^2+\frac{9y_0^2}{9}-1=0 \Leftrightarrow y_0^2=4$, deci $y_0=\pm 2$.

Atunci rezultă $x_0=\mp 2$ şi $z_0=\pm 6$.

Așadar există două puncte $M_1(-2, 2, 6)$ și $M_2(2, -2, -6)$ pe hiperboloidul cu o pânză în care normalele la suprafață sunt paralele cu dreapta (d).

Ecuațiile normalei în punctul $M_1(-2, 2, 6)$ la hiperboloid sunt: $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{12}=\frac{z-6}{-4}$.

Ecuațiile normalei în punctul $M_2(2, -2, -6)$ la hiperboloid sunt: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{12}=\frac{z+6}{-4}$.

c) Planele care conțin dreapta $(d): \frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{12}=\frac{z+1}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-y-8=0 \\ 4x+3z-1=0 \end{cases}$ fac parte din fasciculul de plane determinat de dreapta (d), cu ecuația de forma:

$$(F_\lambda): 4x-y-8+\lambda(4x+3z-1)=0, \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$(F_\lambda): (4+4\lambda)x-y+3\lambda z-8-\lambda=0, \lambda\in\mathbb{R},$$

deci ecuațiile planelor tangente la hiperboloid care conțin dreapta (d) sunt de această formă.

Fie x_1, y_1, z_1 coordonatele unui punct de pe hiperboloidul cu o pânză. Ecuația planului tangent la hiperboloid în acest punct, conform formulei (8), este:

$$\frac{xx_1}{4}-yy_1+\frac{zz_1}{9}-1=0 \Leftrightarrow 9x_1x-36y_1y+4z_1z-36=0.$$

Se identifică cele două forme de ecuații ale planului tangent și rezultă egalitățile:

$$\frac{9x_1}{4+4\lambda}=\frac{-36y_1}{-1}=\frac{4z_1}{3\lambda}=\frac{-36}{-8-\lambda} \Leftrightarrow \frac{9x_1}{4+4\lambda}=36y_1=\frac{4z_1}{3\lambda}=\frac{36}{8+\lambda},$$

deci $x_1=\frac{16(1+\lambda)}{8+\lambda}$, $y_0=\frac{1}{8+\lambda}$, $z_0=\frac{27\lambda}{8+\lambda}$.

Deoarece punctul (x_1, y_1, z_1) aparține hiperboloidului, atunci se verifică ecuația acestuia:

$$\frac{x_1^2}{4}-y_1^2+\frac{z_1^2}{9}-1=0 \Leftrightarrow 9\cdot\left(\frac{16(1+\lambda)}{8+\lambda}\right)^2-36\cdot\left(\frac{1}{8+\lambda}\right)^2+4\cdot\left(\frac{27\lambda}{8+\lambda}\right)^2-36=0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2304\cdot(1+\lambda)^2-36+2916\cdot\lambda^2-36\cdot(8+\lambda)^2}{(8+\lambda)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{36\left(144\lambda^2+112\lambda-1\right)}{(8+\lambda)^2}=0,$$

deci $\lambda=\frac{-14\pm\sqrt{205}}{36}$.

Se înlocuiesc $\lambda=\frac{-14-\sqrt{205}}{36}$, respectiv $\lambda=\frac{-14+\sqrt{205}}{36}$ în ecuația fasciculului de plane (F_λ) şi se obțin ecuațiile planelor tangente la hiperboloid care conțin dreapta (d):

$$(\pi_1): 4\left(22-\sqrt{205}\right)x-36y-3\left(14+\sqrt{205}\right)z-274+\sqrt{205}=0 \text{ şi}$$

$$(\pi_2): 4\left(22+\sqrt{205}\right)x-36y-3\left(14-\sqrt{205}\right)z-274-\sqrt{205}=0.$$

5.9. Să se arate că planul $(\pi): 2x-12y-z+16=0$ intersectează paraboloidul hiperbolic de ecuație $x^2-4y^2=2z$ după două generatoare rectilinii ale căror ecuații se cer.

Soluție. ***Metoda*** **1.** Se determină ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic incluse în planul (π).

Ecuația paraboloidului hiperbolic se poate scrie şi sub forma: $(x-2y)(x+2y)=2z$.

Ecuațiile familiilor de generatoarerectilinii sunt:

$$(G_\lambda): \begin{cases} x-2y=2\lambda \\ x+2y=\dfrac{1}{\lambda}z \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-2\lambda=0 \\ x+2y-\dfrac{1}{\lambda}z=0 \end{cases}, \lambda\in\mathbb{R} \text{ şi}$$

$$(G_\mu): \begin{cases} x+2y=2\mu \\ x-2y=\dfrac{1}{\mu}z \end{cases}, \mu\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-2\mu=0 \\ x-2y-\dfrac{1}{\mu}z=0 \end{cases}, \mu\in\mathbb{R}.$$

Planul (π) intersectează paraboloidul hiperbolic după o generatoare din familia (G_λ) şi după o generatoare din familia (G_μ).

Dreptele din familia de generatoare (G_λ) sunt conținute în planul (π) dacă sistemul liniar neomogen, de trei ecuații cu trei necunoscute format din ecuațiile familiei (G_λ) şi ecuația planului (π) este compatibil nedeterminat, adică determinantul asociat este nul:

$$\begin{cases} x-2y-2\lambda=0 \\ x+2y-\dfrac{1}{\lambda}z=0 \\ 2x-12y-z+16=0 \end{cases}. \text{ Din condiția } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -\dfrac{1}{\lambda} \\ 2 & -12 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{-4(\lambda+2)}{\lambda}=0, \text{ rezultă } \lambda=-2.$$

Se înlocuieşte $\lambda=-2$ în ecuațiile familiei de generatoare (G_λ) şi se găsesc ecuațiile primei generatoare după care planul (π) intersectează paraboloidul hiperbolic:

$$\left(G_1\right):\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+8}{-8}.$$

Dreptele din familia de generatoare $\left(G_\mu\right)$ sunt conținute în planul $\left(\pi\right)$ dacă ecuațiile familiei $\left(G_\mu\right)$ împreună cu ecuația planului $\left(\pi\right)$ formează un sistem liniar neomogen, de trei ecuații cu trei necunoscute, compatibil nedeterminat.

Determinantul sistemului trebuie să fie nul și avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -\frac{1}{\mu} \\ 2 & -12 & -1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{4(\mu-4)}{\mu}=0$, de unde rezultă $\mu=4$.

Se înlocuiește $\mu=4$ în ecuațiile familiei de generatoare $\left(G_\mu\right)$ și se găsesc ecuațiile celei de-a doua generatoare după care planul $\left(\pi\right)$ intersectează paraboloidul hiperbolic:

$$\left(G_2\right):\begin{cases} x+2y-8=0 \\ 4x-8y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-4}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{16}.$$

***Metoda* 2.** Se determină ecuațiile proiecției pe planul *Oxy* a curbei de intersecție dintre paraboloidul hiperbolic și planul $\left(\pi\right)$.

Se rezolvă sistemul format din ecuația paraboloidului hiperbolic și ecuația planului.

Înlocuind $z=2x-12y+16$ în ecuația paraboloidului, prin calcul se obține ecuația $\begin{cases} x^2-4y^2-4x+24y-32=0 \\ z=0 \end{cases}$.

Curba de intersecție proiectată în planul *Oxy* este o conică cu invarianții:

$$\delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=-4<0,\ I=-3,\ \Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 12 \\ -2 & 12 & -32 \end{vmatrix}=0,$$

deci este o conică de gen hiperbolic degenerată în două drepte concurente reale.

Ecuațiile conicei degenerate se mai scriu sub forma:

$$\begin{cases} x^2-4x+4-4y^2+24y-36=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-2\right)^2-\left(2y-6\right)^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(x-2y+4\right)\left(x+2y-8\right)=0 \\ z=0 \end{cases},$$

deci ecuațiile dreptelor în care degenerează această conică sunt

$$\begin{cases} x-2y+4=0 \\ z=0 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x+2y-8=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Ecuațiile $x-2y+4=0$ și $x+2y-8=0$ descriu fiecare câte un plan care proiectează dreptele generatoare căutate pe planul *Oxy*.

Așadar intersecția paraboloidului hiperbolic cu planul (π) se compune din dreptele generatoare date prin ecuațiile:

$$(G_1):\begin{cases} x-\ 2y \quad +\ 4=0 \\ 2x-12y-z+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+16}{-8} \text{ și}$$

$$(G_2):\begin{cases} x+\ 2y \quad -\ 8=0 \\ 2x-12y-z+16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+16}{16}.$$

5.10. Să se determine valorile parametrului real *m* pentru care planul $(\pi):9x+2y-6z+m=0$ este tangent hiperboloidului cu o pânză $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{17}-1=0$ și să se găsească coordonatele punctelor de tangență.

Soluție. Notăm cu $x_0,\ y_0,\ z_0$ coordonatele punctului de contact dintre hiperboloidul cu o pânză și planul (π).

Conform formulei (8), ecuația planului tangent la hiperboloidul cu o pânză în punctul $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ este $-\frac{xx_0}{4}+\frac{yy_0}{9}+\frac{zz_0}{17}-1=0 \Leftrightarrow -153x_0x+68y_0y+36z_0z-612=0$.

Identificând ecuația planului (π) și ecuația planului tangent la hiperboloid rezultă egalitatea $\frac{-153x_0}{9}=\frac{68y_0}{2}=\frac{36z_0}{-6}=\frac{-612}{m} \Leftrightarrow -17x_0=34y_0=-6z_0=\frac{-612}{m}$, deci $x_0=\frac{36}{m}$, $y_0=-\frac{18}{m}$, $z_0=\frac{102}{m}$.

Cum punctul $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ aparține planului (π), atunci se verifică ecuația acestuia: $9x_0+2y_0-6z_0+m=0 \Leftrightarrow \frac{324}{m}-\frac{36}{m}-\frac{612}{m}+m=0 \Leftrightarrow m^2=324$, deci $m_1=-18$ și $m_2=18$.

Planele tangente la hiperboloidul cu o pânză au ecuațiile $9x+2y-6z\pm 18=0$.

Planul $9x+2y-6z-18=0$ este tangent hiperboloidului cu o pânză în punctul M_1 de coordonate: $x_1=\frac{36}{m_1}=-2,\ y_1=-\frac{18}{m_1}=1,\ z_1=\frac{102}{m_1}=-\frac{17}{3}$.

Planul $9x+2y-6z+18=0$ este tangent hiperboloidului cu o pânză în punctul M_2 de coordonate: $x_2=\frac{36}{m_2}=2, y_2=\frac{18}{m_2}=-1,\ z_2=\frac{102}{m_2}=\frac{17}{3}$.

5.11. Să se determine ecuația planului paralel cu planul de coordonate *Oxy* care intersectează paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=z$ după o elipsă cu distanța focală egală cu 4.

Soluție. Semiaxele paraboloidului eliptic sunt $a=2$ şi $b=\sqrt{3}$, iar planele paralele cu planul *Oxy* au ecuațiile $z=\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Conform Observației 5.25., planele $z=\lambda$ intersectează paraboloidul eliptic după elipse reale de ecuații $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=z\\ z=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{4\lambda}+\frac{y^2}{3\lambda}-1=0\\ z=\lambda\end{cases}$, dacă $\lambda>0$.

Semiaxele elipsei căutate sunt $a_1=2\sqrt{\lambda}$ şi $b_1=\sqrt{3\lambda}$ şi distanța focală este $2c_1$, unde $c_1{}^2=a_1{}^2-b_1{}^2=4\lambda-3\lambda=\lambda$. Din ipoteză avem $2c_1=4$, deci $c_1=2$, adică $\lambda=4$.

Aşadar, planul $z=4$ intersectează paraboloidul eliptic dat după o elipsă cu distanța focală 4.

5.12. Să se determine ecuația canonică a hiperboloidului cu o pânză cu axa netransversală paralelă cu *Oz*, cu vârfurile $A(7,0,0)$ şi $A'(-1,\ 0,\ 0)$ situate pe aceeaşi axă de simetrie, ştiind că planul de coordonate *Oyz* îl intersectează după o hiperbolă echilateră de semiaxă $\sqrt{14}$.

Soluție. Deoarece $A(7,\ 0,\ 0)$ şi $A'(-1,\ 0,\ 0)$ sunt vârfurile hiperboloidului situate pe axa *Ox*, atunci $C(3,\ 0,\ 0)$ este centrul de simetrie al hiperboloidului cu o pânză şi $a=4$ este semiaxa corespunzătoare axei de simetrie *Ox*.

Ecuația canonică a hiperboloidului cu o pânză cu axa netransversală paralelă cu *Oz* şi centrul de simetrie $C(3,\ 0,\ 0)$ este $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$, cu $b,\ c>0$.

Intersecția hiperboloidului cu planul *Oyz* este o hiperbolă de ecuații:

$$\begin{cases}\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{7}{16}=0\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y^2}{\frac{7b^2}{16}}-\frac{z^2}{\frac{7c^2}{16}}-1=0\\ x=0\end{cases}.$$

Deoarece hiperbola este echilateră de semiaxă $\sqrt{14}$, rezultă că $\frac{7b^2}{16} = \frac{7c^2}{16} = \left(\sqrt{14}\right)^2$, deci $b^2 = c^2 = 32$.

Ecuația canonică a hiperboloidului cu o pânză este:

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{32} - \frac{z^2}{32} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 + y^2 - z^2 - 32 = 0.$$

5.13. Să se determine locul geometric generat de familia de drepte:

$$\begin{cases} 6x - \ \ 3y - 4\alpha z - 12\alpha = 0 \\ 6\alpha x + 3\alpha y + \ \ 4z - \ \ 12 = 0 \end{cases}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soluție. Se elimină parametrul α dintre ecuațiile familiei de drepte.

Din prima ecuație rezultă $\alpha = \frac{6x-3y}{4z+12}$. Folosind această relație în ecuația a doua rezultă:

$$6 \cdot \frac{6x-3y}{4z+12} x + 3 \cdot \frac{6x-3y}{4z+12} y + 4z - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$36x^2 - 9y^2 + 16z^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0,$$

deci locul geometric al familiei de drepte este un hiperboloid cu o pânză cu axa netransversală Oy şi semiaxe $a = 2,\ b = 4,\ c = 3$.

PROBLEME PROPUSE

1. Să se determine curbele de intersecție ale următoarelor cuadrice cu planele de coordonate:

a) $9x^2+16y^2+36z^2-144=0$

b) $16x^2+4y^2-z^2-144=0$

c) $9x^2+y^2-4z^2+36=0$

d) $4x^2+y^2-8z=0$

e) $36x^2-9y^2-288z=0$

f) $16x^2+36y^2-9z^2=0$.

Pentru fiecare cuadrică, să se scrie ecuațiile parametrice şi să se reprezinte grafic.

2. a) Să se arate că planul $z=3$ intersectează elipsoidul $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{20}+\frac{z^2}{12}-1=0$ după o elipsă reală şi să se găsească semiaxele şi coordonatele vârfurilor acesteia.

b) Să se arate că planul $y=1$ intersectează hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}-1=0$ după un cerc spațial şi să se găsească coordonatele centrului şi raza acestuia.

c) Să se determine semiaxele şi coordonatele vârfurilor elipsei reale obținută prin intersecția planului $y=3$ cu hiperboloidul cu două pânze $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}+\frac{z^2}{14}+1=0$.

d) Să se arate că planul $z=\lambda^2,\ \lambda>0$ intersectează paraboloidul eliptic $x^2+y^2=4z$ după un cerc spațial şi să se găsească coordonatele centrului şi raza acestuia.

e) Să se arate că planul $x=\frac{1}{2}$ intersectează paraboloidul hiperbolic $\frac{y^2}{3}-\frac{z^2}{4}=6x$ după o hiperbolă şi să se găsească semiaxele şi coordonatele vârfurilor acesteia.

f) Să se arate că planul $x=-1$ intersectează paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=3z$ după o parabolă şi să se găsească parametrul şi coordonatele vârfului acesteia.

Răspuns: a) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}-1=0 \\ z=3 \end{cases}$; $a=2, b=\sqrt{5}$; $A(2,\ 0,\ 3), A'(-2,\ 0,\ 3), B(0,\ \sqrt{5},\ 3), B'(0,\ -\sqrt{5},\ 3)$;

b) $\begin{cases} x^2+z^2=\dfrac{25}{4} \\ y=1 \end{cases}$; $C(0,\ 1,\ 0)$, $R=\dfrac{5}{2}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{z^2}{7}-1=0 \\ y=3 \end{cases}$; $a=2, c=\sqrt{7}$; $A(2,\ 3,\ 0), A'(-2,\ 3,\ 0)$,

$C(0,\ 3,\ \sqrt{7}), C'(0,\ 3, -\sqrt{7})$; d) $\begin{cases} x^2+y^2=4\lambda^2 \\ z=\lambda^2,\ \lambda>0 \end{cases}$; $C(0,\ 0,\ \lambda^2)$, $R=2\lambda$; e) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{12}-1=0 \\ x=\dfrac{1}{2} \end{cases}$; $b=3$,

$c=2\sqrt{3}$; $B\left(\dfrac{1}{2},\ 3,\ 0\right), B'\left(\dfrac{1}{2},\ -3,\ 0\right), C\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 2\sqrt{3}\right), C'\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ -2\sqrt{3}\right)$;

f) $\begin{cases} y^2=6\left(z-\dfrac{3}{4}\right) \\ x=-1 \end{cases}$; $p=3$; $V\left(-1,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$.

3. Să se precizeze natura următoarelor curbe:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ z=3 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x^2-y^2+z^2=7 \\ y=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{z^2}{9}=y \\ y=0 \end{cases}$.

Răspuns: a) $\begin{cases} x^2+y^2+4=0 \\ z=3 \end{cases}$ elipsă imaginară; b) $\begin{cases} x^2+z^2-16=0 \\ y=3 \end{cases}$ cerc spațial;

c) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=0 \\ z=0 \end{cases}$ drepte concurente în origine.

4. Să se determine punctele de intersecție ale cuadricelor următoare cu dreptele date:

a) $(E): \dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{5}+\dfrac{z^2}{20}-1=0$ şi $(d): \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+6}{-4}$

b) $(H_1): -\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{21}+\dfrac{z^2}{14}-1=0$ şi $(d): \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z+4}{8}$

c) $(H_2): \dfrac{x^2}{4}+y^2-\dfrac{z^2}{9}+1=0$ şi $(d): \begin{cases} x=\ t+3 \\ y=\ t+1,\ t\in\mathbb{R} \\ z=3t+6 \end{cases}$

d) $(PE): \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ şi $(d): \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$

e) $(PH): \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ şi $(d): \begin{cases} x+2y-2z \quad =0 \\ x-2y \quad -8=0 \end{cases}$.

Răspuns: a) Dreapta este secantă elipsoidului în $M_1(-3, 1, 2), M_2(0, 2, -2)$; c) Dreapta este secantă hiperboloidului cu o pânză în $M_1(1, 0, 4), M_2(2, -3, -4)$; c) Dreapta este tangentă hiperboloidului cu două pânze în $M(4, 2, 9)$; d) Dreapta este exterioară paraboloidului eliptic; e) Dreapta este inclusă în paraboloidul hiperbolic.

5. Se dau elipsoidul $36x^2+16y^2+9z^2-144=0$ şi punctele $M\left(2, \frac{1}{2}, 1\right), N(2, 3, 6)$. Să se arate că dreapta *MN* este tangentă la elipsoid şi să se determine coordonatele punctului de tangență.

Răspuns: Punctul de tangență este vârful $A(2, 0, 0)$.

6. Să se găsească ecuațiile proiecțiilor pe planele de coordonate a curbelor de intersecție dintre hiperboloidul cu două pânze $(H_2): \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}+z^2+1=0$ şi planul $(\pi): x+2y-z+3=0$ şi centrele lor de simetrie.

Răspuns: Pe *Oxy*: $\begin{cases} 5x^2+16xy+14y^2+24x+48y+40=0 \\ z=0 \end{cases}$ elipsă reală cu centrul $C_1(4, -4, 0)$;

Pe *Oxz*: $\begin{cases} x^2+2xz+7z^2-6x+6z-1=0 \\ y=0 \end{cases}$ hiperbolă cu centrul $C_2(4, 0, -1)$;

Pe *Oyz*: $\begin{cases} 2y^2-4yz+5z^2+12y-6z+13=0 \\ x=0 \end{cases}$ elipsă reală cu centrul $C_3(0, -4, -1)$.

Conica din planul de secțiune are centrul în punctul $C(4, -4, -1)$.

7. Să se determine ecuațiile proiecției pe planul *Oyz* a curbei de intersecție a paraboloidului hiperbolic $\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=x$ cu planul $(\pi): 3x-4y-3z+9=0$.

Răspuns: $\begin{cases} 4y^2-9z^2-48y-36z+108=0 \\ x=0 \end{cases}$ hiperbolă degenerată în două drepte secante reale de ecuații $\begin{cases} 2y-3z-18=0 \\ x=0 \end{cases}$ şi $\begin{cases} 2y+3z-6=0 \\ x=0 \end{cases}$.

8. Să se determine curba de intersecție a elipsoidului $(E): 3x^2+2y^2+z^2-6=0$ cu planul $3x-2y+z+2=0$. Să se determine centrul său de simetrie.

Răspuns: Proiecția curbei de intersecție pe planul *Oxy* este o elipsă reală de ecuații:

$\begin{cases} 6x^2-6xy+3y^2+6x-4y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$ şi cu centrul în $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

Curba din planul de secțiune este o elipsă cu centrul în punctul $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ (deoarece centrul elipsei din spațiu se proiectează în centrul elipsei proiecție).

9. Să se determine ecuațiile planelor tangente la cuadricele:

a) $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}-1=0$

b) $(H_1): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}-1=0$

c) $(H_2): \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}+1=0$

d) $(PE): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=2z$

e) $(PH): \frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=2x$

în punctele lor de intersecție cu axele de coordonate.

Răspuns: a) (E) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârfurile $A(3,0,0), A'(-3,0,0), B(0,2,0)$, $B'(0,-2,0), C(0,0,5), C'(0,0,-5)$. Planele tangente sunt $x\mp 3=0,\ y\mp 2=0,\ z\mp 5=0$;

b) (H_1) intersectează axele *Ox* şi *Oz* în vârfurile A, A', C, C'. Planele tangente sunt $x\mp 3=0$ şi $z\mp 5=0$;

c) (H_2) intersectează axa *Oy* în vârfurile B, B'. Planele tangente sunt $y\mp 2=0$;

d) (PE) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârful $O(0,0,0)$. Planul tangent este $z=0$;

e) (PH) intersectează axele *Ox*, *Oy*, *Oz* în vârful $O(0,0,0)$. Planul tangent este $x=0$.

10. Să se determine ecuațiile planelor tangente la elipsoidul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{16}-1=0$ în punctele de intersecție cu dreapta de ecuații parametrice $(d):\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -6t - 9,\ t \in \mathbb{R} \\ z = 2t + 4 \end{cases}$ şi ecuația planului polar al punctului $M(2, -1, 6)$ în raport cu elipsoidul dat.

Răspuns: Planul tangent în $M_1(0, -3, 2): 2y - z + 8 = 0$; Planul tangent în $M_2(-1, 3, 0)$: $x - y + 4 = 0$; Planul polar al punctului $M(2, -1, 6): 12x - 2y + 9z - 24 = 0$.

11. Să se determine ecuația planului polar al punctului $M(1, -1, 1)$ în raport cu hiperboloidul cu două pânze $2x^2 + y^2 - 3z^2 + 1 = 0$ şi polul planului $(\pi): x + y + z - 1 = 0$ în raport cu acelaşi hiperboloid.

Răspuns: Planul polar al punctului $M(1, -1, 1): 2x - y - 3z + 1 = 0$; Polul planului: $M_0\left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}\right)$.

12. Să se arate că hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ şi planul $10x - 6y - 15z - 30 = 0$ sunt tangente şi să se determine coordonatele punctului de tangență.

Răspuns: $(3, -5, 2)$.

13. Să se arate că hiperboloidul cu două pânze $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{25} + 1 = 0$ şi planul $5x + 2z + 5 = 0$ au un singur punct comun şi să se determine coordonatele acestui punct.

Răspuns: $(3, 0, -10)$.

14. Să se găsească ecuațiile planelor tangente la elipsoidul $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$ paralele cu planul $(\pi): 2x - 2y + 5z + 7 = 0$ şi apoi să se determine distanțele de la planul (π) la fiecare din planele tangente determinate.

Răspuns: $(\pi_{1,2}): 2x - 2y + 5z \mp 12 = 0$; $\operatorname{dist}((\pi), (\pi_1)) = \frac{19}{\sqrt{33}}$; $\operatorname{dist}((\pi), (\pi_2)) = \frac{5}{\sqrt{33}}$.

15. Să se determine ecuația planului tangent la paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{7} + \frac{z^2}{3} = y$ paralel cu planul $(\pi): 2x + y + 2z - 5 = 0$ şi polul planului (π) în raport cu acest paraboloid.

Răspuns: $2x + y + 2z + 10 = 0$; $M(-7, 5, -3)$.

16. Se dau hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{3}-1=0$, planul $(\pi): 2x+3y-z+11=0$ şi punctele $M_1\left(3,\ -2,\ -\sqrt{3}\right)$ şi $M_2(1, -4,\ 3)$. Se cere:

a) ecuațiile planelor tangente la hiperboloidul cu o pânză paralele cu planul (π) şi distanța dintre aceste plane tangente

b) ecuația planului tangent la hiperboloidul cu o pânză în punctul M_1

c) ecuațiile normalei la hiperboloidul cu o pânză în punctul M_1

d) ecuația planului polar al punctului M_2 în raport cu hiperboloidul cu o pânză.

Răspuns: a) $(\pi_{1,2}): 2x+3y-z\pm\sqrt{3}=0$; $\operatorname{dist}((\pi_1),(\pi_2))=\sqrt{\frac{6}{7}}$; b) $2x+3y-2\sqrt{3}z-6=0$; c) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$; d) $x+9y+9z-9=0$.

17. Să se găsească ecuațiile planelor care conțin dreapta $(d): x=y=z-1$ şi sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze $x^2-2y^2-z^2-1=0$.

Răspuns: $\begin{cases}\left(6+\sqrt{6}\right)x-2\left(3+\sqrt{6}\right)y+\sqrt{6}z-\sqrt{6}=0\\ \left(6-\sqrt{6}\right)x-2\left(3-\sqrt{6}\right)y-\sqrt{6}z+\sqrt{6}=0\end{cases}$.

18. Să se găsească coordonatele punctelor de pe elipsoidul $3x^2+2y^2+z^2-9=0$ ale căror normale la suprafață sunt perpendiculare pe planul $(\pi): 3x-2y-2z+7=0$, precum şi ecuațiile normalelor în aceste puncte.

Răspuns: Punctele sunt $M_1(-1,1,2), M_2(1,-1,-2)$;

Normala în $M_1: \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-2}$; Normala în $M_2: \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+2}{-2}$.

19. Se dau paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=2z$ şi dreapta $(d): \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$.

a) Să se găsească punctele de intersecție dintre paraboloidul hiperbolic şi dreapta (d).

b) Să se determine ecuațiile planelor tangente la paraboloidul hiperbolic în punctele de intersecție cu dreapta (d).

c) Să se determine ecuațiile normalelor la paraboloidul hiperbolic paralele cu dreapta (d).

d) Să se determine ecuațiile planelor tangente la paraboloidul hiperbolic care trec prin dreapta (d).

Răspuns: a) $M(-2,\,-3,\,0)$; b) $3x-2y+6z=0$; c) $\dfrac{x+8}{2}=\dfrac{y-27}{3}=\dfrac{z+\frac{65}{2}}{1}$; d) $3x-2y=0$ şi $x-2y+4z-4=0$.

20. Să se determine valoarea parametrului real λ pentru care planul $x-z+\lambda=0$ este tangent paraboloidului eliptic $\dfrac{x^2}{9}+y^2=2z$ şi să se găsească coordonatele punctului de tangență.

Răspuns: $\lambda=-\dfrac{9}{2}$; $M\left(9,0,\dfrac{9}{2}\right)$.

21. Să se determine valorile parametrului real λ pentru care planul $4x-y+5z+\lambda=0$ este tangent hiperboloidul cu două pânze $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{20}-\dfrac{z^2}{8}+1=0$ şi să se găsească coordonatele punctelor de tangență.

Răspuns: $\lambda=\pm 10$; $M_1(2,\,-2,\,-4)$, $M_2(-2,\,2,\,4)$.

22. Să se determine locul geometric generat de familiile de drepte:

a) $\begin{cases} 2x-3\alpha y+6z-6\alpha=0 \\ 2\alpha x+3y-6\alpha z-6=0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x-3z-9\alpha=0 \\ \alpha x-3y+3\alpha z=0 \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Răspuns: a) Hiperboloidul cu o pânză $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2-1=0$;

b) Paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{9}-z^2=3y$.

23. Să se arate că punctul $M(2,-1,-2)$ aparține hiperboloidului cu o pânză $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}-1=0$ şi să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului ce trec prin acest punct.

Răspuns: $\begin{cases} x-2y+z-2=0 \\ x+2y-9z-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-10}{8}=\dfrac{y-4}{5}=\dfrac{z}{2}$, $\begin{cases} x-2y=0 \\ z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$.

24. Să se determine generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\dfrac{x^2}{4}-y^2+\dfrac{z^2}{9}-1=0$ conținute în planul $(\pi): x+6y-2z-2=0$.

Răspuns: $\begin{cases}3x-6y+2z-6=0\\3x+6y-2z-6=0\end{cases}$, $\begin{cases}3x-6y+4z-12=0\\3x+6y-z-3=0\end{cases}$, $\begin{cases}3x-6y+4z+12=0\\3x+6y-z+3=0\end{cases}$ şi

$\begin{cases}3x-6y+2z+6=0\\3x+6y-2z+6=0\end{cases}$.

25. Se dau paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{9}-\frac{z^2}{4}=y$ şi punctul $M(3,1,0)$. Se cere:

a) ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic ce trec prin punctul *M*

b) unghiul ascuțit format de generatoarele rectilinii determinate la punctul a)

c) ecuația planului tangent la paraboloidul hiperbolic ce trece prin punctul *M*.

Răspuns: a) $\begin{cases}2x-3z-6=0\\2x-6y+3z=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$; $\begin{cases}2x-6y-3z=0\\2x+3z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-2}$

b) $\arccos\left(\frac{9}{17}\right)$; c) $2x-3y-3=0$.

26. Se dau hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{4}+y^2-z^2-1=0$ şi punctul $M(2,1,1)$. Se cere:

a) ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză ce trec prin punctul *M*

b) unghiul ascuțit format de generatoarele rectilinii determinate la punctul a)

c) ecuațiile normalei la hiperboloidul cu o pânză în punctul *M*.

Răspuns: a) $\begin{cases}x+2y-2z-2=0\\x-2y+2z-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$; $\begin{cases}x-2z=0\\y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$;

b) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; c) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

27. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-z^2-1=0$ ce trec prin punctul $M(6,-2,2)$ şi unghiul ascuțit format de aceste generatoare.

Răspuns: $\begin{cases}x-3z=0\\y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-6}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{1}$; $\begin{cases}4x-3y-13z-6=0\\x+3y+3z-6=0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x-6}{9}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{5}$;

$\arccos\left(\frac{16}{5\sqrt{17}}\right)$.

28. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ care sunt paralele cu planul $3x+2y-4z+3=0$.

Răspuns: $\begin{cases} x-2y-8 =0 \\ x+2y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z+4}{2}$, $\begin{cases} x+2y-4 =0 \\ x-2y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{1}$.

29. Să se determine ecuațiile celor două drepte de intersecție dintre paraboloidul hiperbolic $x^2-y^2=3z$ cu planul tangent în punctul $M(2,1,1)$ la suprafață.

Răspuns: $\begin{cases} x-y-1 =0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{2}$ și $\begin{cases} x+y-3=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$.

30. Să se arate că planul $(\pi):4x-5y-10z-20=0$ intersectează hiperboloidul cu o pânză $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}-1=0$ după două generatoare rectilinii ale căror ecuații se cer.

Răspuns: $\begin{cases} 2x-5z=0 \\ y+4 =0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-5}{5}=\frac{y+4}{0}=\frac{z-2}{2}$ și $\begin{cases} y+2z=0 \\ x-5 =0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-5}{0}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$.

31. Să se determine ecuațiile generatoarelor rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}+1=0$ care sunt paralele cu planul $4x+12y+3z-2=0$.

Răspuns: $\begin{cases} 4x-3y-3z+6=0 \\ 4x+12y+3z+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+6}{9}=\frac{y-2}{-8}=\frac{z+8}{20}$,

$\begin{cases} 4x-3y-3z-6=0 \\ 4x+12y+3z-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x-6}{9}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-8}{20}$.

32. Să se determine ecuațiile planelor paralele cu planul de coordonate *Oxy* care intersectează elipsoidul $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}-1=0$ după o elipsă cu distanța focală egală cu 6.

Răspuns: $z=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$.

33. Pe elipsoidul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ a,b,c>0$ se iau două puncte arbitrare $M_1(x_1,y_1,z_1)$ și $M_2(x_2,y_2,z_2)$, iar planele tangente la elipsoid în aceste puncte se intersectează după o dreaptă (d). Să se arate că planul determinat de dreapta (d) și de mijlocul *N* al segmentului M_1M_2 trece prin centrul elipsoidului.

Indicație: Planele tangente la elipsoid în punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$, respectiv $M_2(x_2,y_2,z_2)$ au ecuațiile:

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0 \text{ şi } \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}+\frac{z_2z}{c^2}-1=0,$$

iar dreapta lor de intersecție (d) are ecuațiile $\begin{cases}\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0\\ \frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}+\frac{z_2z}{c^2}-1=0\end{cases}$.

Planul căutat face parte din fasciculul de plane determinat de dreapta (d), a cărui ecuație este: $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1+\lambda\left(\frac{x_2x}{a^2}+\frac{y_2y}{b^2}+\frac{z_2z}{c^2}-1\right)=0, \lambda\in\mathbb{R}$.

Punem condiția ca acest plan să treacă prin punctul $N\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$, mijlocul segmentului M_1M_2, şi ținând seama şi de relațiile $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}=1$ (deoarece punctele M_1 şi M_2 aparțin elipsoidului) se găseşte $\lambda=-1$.

Ecuația planului ce trece prin dreapta (d) şi prin punctul N este:

$$\frac{x_1-x_2}{a^2}\cdot x+\frac{y_1-y_2}{b^2}\cdot y+\frac{z_1-z_2}{c^2}\cdot z=0,$$

iar acest plan trece prin centrul de simetrie $O(0,0,0)$.