Subiecte MATLAB

Problema 1. Rezolvaţi problema:

$$y' = 1 - y^2, \qquad y(0) = 0.$$

folosind `ode23` şi `ode45`. Calculaţi eroarea globală, ştiind că soluţia exactă este

$$y(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

şi verificaţi că este $O(h^p)$.

Problema 2. Ecuaţia atractorului Lorenz

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} &= -ax + ay, \\ \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} &= bx - y - xz, \\ \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} &= -cz + xy \end{aligned}$$

are soluţii haotice care sunt sensibil dependente de condiţiile iniţiale. Rezolvaţi numeric pentru $a = 5$, $b = 15$, $c = 1$ cu condiţiile iniţiale

$$x(0) = 2, \quad y(0) = 6, \quad z(0) = 4, \quad t \in [0, 20],$$

cu toleranţa $T = 10^{-4}$. Repetaţi pentru

(a) $T = 10^{-5}$;

(b) $x(0) = 2.1$.

Comparaţi rezultatele cu cele obţinute anterior. În fiecare caz reprezentaţi grafic.

Problema 3. Găsiţi primele 10 valori pozitive pentru care $x = \mathrm{tg} x$.

Problema 4. Sa se aproximeze $\ln 2$ pornind de la o integrală convenabilă. Comparaţi cu aproximanta furnizată de MATLAB.

Problema 5. Să se aproximeze

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\, x.$$

Ce probleme pot să apară?

Problema 6. Pornind de la o integrală convenabilă, să se aproximeze π cu 8 zecimale exacte.

Problema 7. Funcţia eroare, erf, se defineşte prin

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \mathrm{d}\, t.$$

Tabelaţi valorile acestei funcţii pentru $x = 0.1, 0.2, \dots, 1$, utilizând funcţia `quad`. Să se compare rezultatele cu cele furnizate de funcţia MATLAB `erf`.

Problema 8. (a) Utilizaţi funcţia `quad` din MATLAB pentru a aproxima

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sin \sqrt{|t|}} \mathrm{d}\, t.$$

(b) De ce nu apar probleme de tip împărţire la zero în $t = 0$?

Problema 9. Să se reprezinte pe acelaşi grafic pentru $[a, b] = [0, 1]$, $n = 11$, funcţia şi interpolantul Lagrange în cazurile:

(a) $x_i = \frac{i-1}{n-1}$, $i = \overline{1, n}$, $f(x) = e^{-x}$ şi $f(x) = x^{5/2}$;

(b) $x_i = \left(\frac{i-1}{n-1}\right)^2$, $i = \overline{1, n}$, $f(x) = x^{5/2}$.

Problema 10. Fie punctele $P_i \in \mathbb{R}^2$, $i = \overline{0, n}$. Să se scrie o funcţie MATLAB care determină o curbă parametrică polinomială de grad n ce trece prin punctele date. Testaţi funcţia citind interactiv punctele cu `ginput` şi reprezentând apoi grafic punctele curba astfel determinată.

Problema 11. Fie punctele $P_i \in \mathbb{R}^2$, $i = 0, n$. Să se scrie o funcţie MATLAB care determină o curbă parametrică spline cubic ce trece prin punctele date. Testaţi funcţia citind interactiv punctele cu `ginput` şi reprezentând apoi grafic punctele curba astfel determinată.

Problema 12. Considerăm datele `x = -5:5; y = [0,0,0,1,1,1,0,0,0,0,0];` Să se determine coeficienţii aproximantei polinomiale de grad 7 în sensul celor mai mici pătrate corespunzătoare şi să se reprezinte pe acelaşi grafic aproximanta şi polinomul de interpolare Lagrange.

Problema 13. Densitatea sodiului sodiului (în kg/m^3) pentru trei temperaturi (în $^\circ C$) este dată în tabela

Temperatura T_i	94	205	371
Densitatea ρ_i	929	902	860

Determinaţi densitatea pentru $T = 251^\circ$ prin interpolare Lagrange.

Problema 14. Aproximaţi

$$y = \frac{1+x}{1+2x+3x^2}$$

pentru $x \in [0, 5]$ folosind interpolarea Lagrange şi spline. Alegeţi cinci noduri şi reprezentaţi pe acelaşi grafic funcţia şi interpolanţii. Reprezentaţi apoi erorile de aproximare.

Problema 15. Determinaţi o aproximare discretă în sensul celor mai mici pătrate de forma

$$y = \alpha \exp(\beta x)$$

pentru datele

x	y
0.0129	9.5600
0.0247	8.1845
0.0530	5.2616
0.1550	2.7917
0.3010	2.2611
0.4710	1.7340
0.8020	1.2370
1.2700	1.0674
1.4300	1.1171
2.4600	0.7620

Reprezentaţi grafic punctele şi aproximanta.
Indicaţie: logaritmaţi.

Problema 16. Determinaţi o aproximare discretă în sensul celor mai mici pătrate de forma

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin(\pi x) + c_4 \sin(2\pi x)$$

pentru datele

i	x_i	y_i
1	0.1	0.0000
2	0.2	2.1220
3	0.3	3.0244
4	0.4	3.2568
5	0.5	3.1399
6	0.6	2.8579
7	0.7	2.5140
8	0.8	2.1639
9	0.9	1.8358

Reprezentaţi grafic datele şi aproximanta.

Problema 17. Se consideră sistemul

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1 \\ -x_{j-1} + 2x_j - x_{j+1} &= j, \qquad j = \overline{2, n-1} \\ -x_{n-1} + 2x_n &= n \end{aligned}$$

(a) Să se genereze matricea sistemului folosind `diag`.

(b) Să se rezolve folosind descompunerea `lu`.

(c) Să se genereze matricea cu `spdiags`, să se rezolve cu \, comparând timpul de rezolvare cu timpul necesar pentru rezolvarea aceluiaşi sistem cu matrice densă.

(d) Să se estimeze numărul de condiţionare al matricei coeficienţilor folosind `condest`.

Problema 18. O analiză de tip element finit a sarcinii pe o structură ne conduce la următorul sistem

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & \beta & -\beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \beta & 0 \\ 0 & -\beta & \beta & \gamma & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \beta & 0 & \gamma & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix},$$

unde $\alpha = 482317$, $\beta = 2196.05$ şi $\gamma = 6708.43$. Aici x_1, x_2, x_3 reprezintă deplasări laterale, iar x_4, x_5, x_6 reprezintă deplasări rotaţionale (tridimensionale) corespunzând forţei aplicate (membrul drept).

(a) Determinaţi x.

(b) Cât de precise sunt calculele? Presupunem întâi date exacte, apoi $\|\Delta A\|/\|A\| = 5 \times 10^{-7}$.

Problema 19. Să se genereze

- Matrice simetrice si pozitiv definite cu intrări aleatoare (folosiţi ideea de la descompunerea Cholesky).
- Matrice ortogonale cu intrări aleatoare (folosiţi descompunerea QR).

Problema 20. Calculaţi eficient suma

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2},$$

pentru $n = \overline{20, 200}$. Cât de bine aproximează S_n suma seriei

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}?$$

Problema 21. Scrieţi un fişier M de tip funcţie care evaluează dezvoltarea MacLaurin a funcţiei $\ln(x+1)$:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots$$

Convergenţa are loc pentru $x \in [-1, 1]$. Testaţi funcţia MATLAB pentru valori ale lui x din $[-0.5, 0.5]$ şi verificaţi ce se întâmplă când x se apropie de -1 sau 1.

Problema 22. Care este cea mai mare valoare a lui n cu proprietatea că

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 < L,$$

unde L este dat? Rezolvaţi prin însumare şi utilizând formula care dă pe S_n.

Problema 23. Să se genereze matricea triunghiulară a coeficienţilor binomiali, pentru puteri mergând de la 1 la un $n \in \mathbb{N}$ dat.

Problema 24. Scrieţi un script MATLAB care citeşte un întreg şi determină scrierea sa cu cifre romane.

Problema 25. Scrieţi o funcţie sau un script care rezolvă sistemul liniar $A^k x = b$ pentru o matrice pătratică A şi un întreg pozitiv k, utilizând descompunerea LU a lui of A şi fără a calcula explicit matricea A^k. (Indicaţie: Interpretaţi problema ca o rezolvare secvenţială de k sisteme liniare.)

(a) Realizaţi un grafic de tip contur al funcţiei

$$f(x,y) = e^{-\left(4x^2+2y^2\right)} \cos 8x + e^{-3\left((2x+1/2)^2+2y^2\right)}.$$

pentru $-1.5 < x < 1.5$, $-2.5 < y < 2.5$, arătând numai contururile la nivelul $f(x,y) = 0.001$. Veţi obţine un mesaj prietenos.

(b) Reprezentaţi suprafaţa parametrică dată de

$$x = u(3 + \cos v)\cos 2u, \;\; y = u(3+\cos v)\sin 2u, \;\; z = u \sin v - 3u$$

pentru $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 2\pi$.

Problema 26. Polinoamele Cebîşev de grad n se definesc prin

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \qquad -1 \le x \le 1.$$

Ele satisfac $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, şi relaţia de recurenţă

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \ge 1.$$

Scrieţi o funcţie `chebeval(x,N)` care evaluează toate polinoamele Cebîşev de grad cel mult `N` în toate punctele vectorului coloană `x`. Rezultatul va fi un tablou de dimensiune `length(x)` pe `N+1`.

Problema 27. Un mod de a calcula funcţia exponenţială e^x este de a considera dezvoltarea Taylor trunchiată în jurul lui $x = 0$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Din nefericire pentru $|x|$ mare, pentru a atinge o precizie dată este nevoie de un număr mare de termeni. O proprietate specială a exponenţialei este $e^{2x} = (e^x)^2$. Aceasta conduce la o metodă numită scalare şi ridicare la pătrat (scaling and squaring method): se împarte x la 2 repetat până când $|x| < 1/2$, şi se utilizează dezvoltarea Taylor (16 termeni sunt mai mult decât este necesar), şi se ridică la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie `expss(x)` care realizează aceşti trei paşi. (Funcţiile `cumprod` şi `polyval` pot ajuta la implementarea dezvoltării Taylor.) Testaţi funcţia dumneavoastră pentru $x = -30, -3, 3, 30$.

Problema 28. Fie x şi y vectori coloană ce descriu vârfurile unui poligon, date în ordine. Scrieţi funcţiile `polyperim(x,y)` şi `polyarea(x,y)` care calculează perimetrul şi aria unui polygon. Pentru arie, utilizaţi o formulă bazată pe teorema lui Green:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)\right|.$$

Aici n este numărul de vârfuri şi prin definiţie, $x_{n+1} = x_1$ şi $y_{n+1} = y_1$. Testaţi funcţia pentru un pătrat şi pentru un triunghi echilateral.

Problema 29. Găsiţi o expresie MATLAB de o linie care creează matricea A de tip $n \times n$ ce satisface

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i - j \text{ este prim} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Problema 30. Presupunem că o sursă de date produce o serie de caractere extrase dintr-o mulţime de M simboluri distincte. Dacă simbolul k este produs cu probabilitatea p_k, entropia de ordinul întâi a sursei se defineşte prin

$$H_1 = -\sum_{k=1}^{M} p_k \log_2 p_k.$$

H_1 este numărul de biţi pe simbol necesari pentru a codifica un mesaj lung, adică, ea măsoară cantitatea de informaţie şi deci succesul potenţial al oricărei strategii de compresie. Valoarea $H_1 = 0$ corespunde cazului unui singur simbol —nici o informaţie— când toate cele M simboluri au probabilităţi egale, atunci $H_1 = \log_2 M$. Scrieţi o funcţie `[H,M] = entropy(v)` care calculează entropia unui vector `v`. Probabilităţile se vor calcula empiric determinând intrarile unice (folosind unique), şi apoi numărând apariţiile fiecărui simbol şi împărţind la lungimea lui `v`. Testaţi funcţia folosind o imagine existentă în MATLAB, tastând `load clown`, `v = X(:);`.

Problema 31. Multe instrumente financiare simple care au plăţi regulate egale (cum ar fi împrumuturi sau anuităţi ale investţiilor) se pot modele prin ecuaţia

$$F = P\left(\frac{(1+r)^t - 1}{r}\right),$$

unde P este plata regulată, r este rata fixă a dobânzii (de exemplu, $r = 0.05$ pentru o dobândă de 5%), t este numărul de intervale de plată scurse, iar $F(t)$ este valoarea acumulată a instrumentului la momentul t. r este uşor de obţinut prin rezolvarea ecuaţiei. Găsiţi r când $P = 200$, $t = 30$ şi F ia valorile 10000,15000,... ,40000.

Problema 32. Reamintim identitatea

$$e = \lim_{n\to\infty} r_n, \qquad r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Realizaţi un grafic standard şi un grafic log-log al lui $e - r_n$ pentru $n = 5, 10, 15, \ldots, 500$. Ce ne arată graficul log-log despre comportarea asimptotica a lui $e - r_n$ când $n \to \infty$?

Problema 33. Jucaţi următorul "joc haotic" . Fie P_1, P_2, şi P_3 vârfurile unui triunghi echilateral. Începeţi cu un punct oarecare în interiorul triunghiului. Alegeţi aleator unul din cele trei vârfuri (cu aceeaşi probabilitate) şi deplasaţi-vă spre el până la jumătatea distanţei dintre punct şi vârf. Repetaţi nedefinit. Dacă reprezentaţi grafic toate punctele obţinute se va vedea foarte clar un anumit şablon. (Indicaţie: Este mai uşor dacă utilizaţi numere complexe. Dacă `z` este complex, atunci `plot(z)` este echivalent cu `plot(real(z),imag(z))`.)

Problema 34. (a) Generaţi 100 de matrice aleatoare cu `randn(100)`, şi reprezentaţi grafic (pe acelaşi grafic) valorile lor proprii prin puncte din planul complex. (Vor fi 10000 de puncte.) Utilizaţi `axis equal` pentru a face unităţile pe axă egale. Rezultatul este interesant.

(b) Reptaţi exprimentul pentru 100 de matrice aleatoare complexe de forma `complex(randn(100),randn(100))`. Observaţi vreo diferenţă calitativă între acest caz şi cel precedent?

Problema 35. Presupunem că x este un vector coloană. Calculaţi, fără a utiliza cicluri sau ramificaţii, matricea A dată de

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{(x_i - x_j)^2}, & \text{dacă } i \neq j \\ 1, & \text{altfel} \end{cases}$$

(Un mod de a face aceasta este atribuirea directă la elementele diagonale ale lui A. Utilizând stilul cu indexare linie/coloană, aceasta necesită trucuri, dar vezi problema 29.)

Problema 36. Scrieţi o funcţie care rezolvă sistemul liniar $A^k x = b$ pentru o matrice pătrată A un întreg pozitiv k şi un vector b dat, utilizând factorizarea LU a lui A şi fără a calcula explici matricea A^k. (Indicaţie: Interpretaţi problema ca o rezolvarea secvenţială a k sisteme liniare.)

Problema 37. Examinaţi valorile proprii ale familiei de matrice

$$D_N = -N^2 \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

unde D_N este $N \times N$, pentru valori crescătoare ale lui N, de exemplu, $N = 32, 64, 128$. Cea mai mică valoare proprie converge către un multiplu întreg al unui număr simplu.

Problema 38. O problemă clasică de matematică aplicată este determinarea zerourilor funcţiei Bessel $J_\nu(x)$ pentru o valoare fixată a indicelui ν. Găsiţi toate zerourile lui $J_{1/2}(x)$ pentru $x \in [0, 10]$.

Problema 39. Funcţia W a lui Lambert este inversa funcţiei $f(x) = xe^x$. Ea nu are o expresie analitică simplă. Scrieţi o funcţie `W = lambert(x)` care evaluează funcţie lui Lambert W în orice $x > 0$. (Indicaţie: Rezolvaţi ecuaţie $x = ye^y$ în funcţie de y pentru x dat, utilizând `fzero`.)

Problema 40. Găsiţi valoarea $x \in [0, 1]$ ce minimizează cea mai mare valoare proprie a matricei $A(x) = xM + (1-x)P$, unde M este un pătrat magic 5×5 iar P este matricea Pascal 5×5.

Problema 41. Scrieţi o rutină care calculează polinomul de interpolare Lagrange pentru o funcţie dată f şi un set de noduri dat $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Aplicaţie pentru $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ şi nodurile $x_k = \cos\frac{j\pi}{n}$, unde n este dat: să se reprezinte pe acelaşi grafic f şi $L_n f$ pentru $n = 21$.