Ecuatii cu variabile separabile

1. $y' = \frac{2\sqrt{y-1}}{x}$,

$y(e) = 17.$

Rezolvare

Se separa variabilele y si x in membri diferiti in asa fel incat y' sa ramana sus.

$$\frac{y'}{2\sqrt{y-1}} = \frac{1}{x}.$$

Se integreaza, de la x_0 (in cazul acesta $x_0 = e$) la x, functiile din cei doi membri privite ca functii de variabila s.

$$\int_e^x \frac{y(s)'}{2\sqrt{y(s)-1}}ds = \int_e^x \frac{1}{s}ds.$$

Se face schimbarea de variabila $y(s) = y$ in prima integrala. Avem $y'(s)ds = dy$ si noile capete sunt $y(e) = 17$ si $y(x)$. Se calculeaza a doua integrala.

$$\int_{17}^{y(x)} \frac{1}{2\sqrt{y-1}}dy = \ln(x) - \ln(e).$$

Mai departe avem

$$\sqrt{y(x)-1}-\sqrt{17-1}=\ln(x)-1,$$

$$\sqrt{y(x)-1}=\ln(x)+3,$$

$$y(x)=(\ln(x)+3)^2+1.$$

2. $(x^2-1)y'+2xy^2=0,$

$y(\sqrt{2})=\frac{1}{2}.$

Rezolvare

Se separa variabilele y si x in membri diferiti in asa fel incat y' sa ramana sus.

$$(x^2-1)y'=-2xy^2,$$

$$-\frac{y'}{y^2}=\frac{2x}{x^2-1}.$$

Se integreaza, de la x_0 (in acest caz x_0 este $\sqrt{2}$) la x, functiile din cei doi membri privite ca functii de variabila s.

$$\int_{\sqrt{2}}^{x}-\frac{y'(s)}{y^2(s)}ds=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{2s}{s^2-1}ds.$$

Se face schimbarea de variabila $y(s)=y$. Avem $y'(s)ds=dy$ si capetele sunt $y(\sqrt{2})=1/2$ si $y(x)$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)}-\frac{1}{y^2}dy=\int_{\sqrt{2}}^{x}\frac{2s}{s^2-1}ds.$$

Se calculeaza a doua integrala facand schimbarea de variabila $s^2 = t$, pentru care avem noile capete 2 si x^2 si elementul diferential $2sds = dt$.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{y(x)} -\frac{1}{y^2}dy = \int_2^{x^2} \frac{1}{t-1}dt = \ln(t-1)\Big|_2^{x^2}.$$

Mai departe avem

$$\frac{1}{y}\Big|_{1/2}^{y(x)} = \ln(x^2-1),$$

$$\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{1/2} = \ln(x^2-1),$$

$$y(x) = \frac{1}{\ln(x^2-1)+2}.$$

3. $y' = 3yx^2$.

Rezolvare

Se separa variabilele y si x in membri diferiti in asa fel incat y' sa ramana sus.

$$\frac{y'}{y} = 3x^2.$$

Se integreaza, de la x_0 (in cazul acesta nu este o conditie initiala) la x, functiile din cei doi membri.

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y(s)'}{y(s)}ds = \int_{x_0}^{x} 3s^2ds.$$

Se face schimbarea de variabila $y(s) = y$ in prima integrala. Avem $y'(s)ds = dy$ si noile capete sunt $y(x_0)$ si $y(x)$. Se calculeaza a doua integrala.

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{y} dy = x^3 - x_0^3.$$

Mai departe obtinem

$$\ln(y(x)) - \ln(y(x_0)) = x^3 - x_0^3,$$

$$y(x) = y(x_0)e^{x^3 - x_0^3},$$

si daca notam constanta

$$y(x_0)e^{-x_0^3} = c,$$

atunci avem

$$y(x) = ce^{x^3}.$$

Ecuatii liniare de ordinul I

1. $y' + \frac{1}{x}y = 5,$

$y(1) = 3.$

Rezolvare

Cautam functia y de variabila x. Aplicam formula pentru ecuatiile liniare de ordinul I

$$y' + Py = Q.$$

Avem

$$y(x) = ce^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds} + \int_{x_0}^{x} Q(u)e^{\int_{x_0}^{u} P(s)ds}du \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} P(s)ds},$$

$$x_0 = 1, \qquad c = y(x_0) = 3,$$

$$P(s) = \frac{1}{s}, \qquad Q(u) = 5.$$

Mai departe obtinem

$$y(x) = 3e^{-\ln x + \ln 1} + \int_{1}^{x} 5e^{\ln u - \ln 1}du \cdot e^{-\ln x + \ln 1},$$

$$y(x) = 3e^{-\ln x} + 5\int_1^x e^{\ln u} du \cdot e^{-\ln x},$$

$$y(x) = 3\frac{1}{x} + 5\int_1^x u du \cdot \frac{1}{x},$$

$$y(x) = \frac{3}{x} + 5\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{x},$$

$$y(x) = \frac{5x}{2} + \frac{1}{2x}.$$

2. $y' + 3y = 6x,$

$y(0) = 5.$

Rezolvare

Cautam functia y de variabila x. Aplicam formula pentru ecuatiile liniare de ordinul I

$$y' + Py = Q.$$

Avem

$$y(x) = ce^{-\int_{x_0}^x P(s)ds} + \int_{x_0}^x Q(u)e^{\int_{x_0}^u P(s)ds} du \cdot e^{-\int_{x_0}^x P(s)ds},$$

$$x_0 = 0, \qquad c = y(x_0) = 5,$$

$$P(s) = 3, \qquad Q(u) = 6u.$$

Mai departe obtinem

$$y(x) = 5e^{-3x} + \int_0^x 6ue^{3u} du \cdot e^{-3x},$$

$$y(x) = 5e^{-3x} + \left(2ue^{3u} \Big|_0^x - \int_0^x 2e^{3u} du \right) \cdot e^{-3x},$$
$$y(x) = 5e^{-3x} + \left(2xe^{3x} - \frac{2}{3}e^{3x} + \frac{2}{3} \right) \cdot e^{-3x},$$
$$y(x) = \frac{17}{3}e^{-3x} + 2x - \frac{2}{3}.$$

Ecuatii omogene in sens Euler

1. $2x^2y' = x^2 + y^2$,

$y(e) = \frac{e}{2}$.

Rezolvare

Impartind ecuatia la x^2, se obtine ecuatia diferentiala

$$2y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Facem notatia

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \left(\text{sau} \quad z = \frac{y}{x}\right),$$

ceea ce va conduce la o ecuatie cu functia necunoscuta z de variabila x. Din notatia facuta avem $y = xz$, de unde obtinem

$$y' = xz' + z.$$

Inlocuind in ecuatia diferentiala, aceasta devine

$$2(xz' + z) = 1 + z^2,$$

si dupa ce z' este izolat in membrul stang avem

$$z' = \frac{(z-1)^2}{2x}.$$

Ecuatia aceasta se rezolva prin metoda separarii variabilelor. Se separa z si x in membri diferiti si se integreaza functiile privite ca functii de variabila s

$$\int_e^x \frac{z'}{(z-1)^2} ds = \int_e^x \frac{1}{2s} ds.$$

Din conditia initiala avem

$$z(e) = \frac{y(e)}{e} = \frac{e/2}{e} = \frac{1}{2}.$$

Dupa ce se face schimbarea de variabila $z(s) = s$, $z' ds = dz$ si $z(e) = 1/2$, se obtine

$$\int_{1/2}^{z(x)} \frac{1}{(z-1)^2} dz = \frac{1}{2}(\ln x - 1),$$

$$-\frac{1}{z(x)-1} - 2 = \frac{1}{2}(\ln x - 1),$$

$$z(x) = -\frac{2}{\ln x + 3} + 1,$$

si functia $y(x) = xz(x)$ este

$$y(x) = x\left(-\frac{2}{\ln x + 3} + 1\right).$$

2. $y' = -\frac{x+2y}{y}$,

$y(e) = 0$.

Rezolvare

Ecuatia diferentiala este echivalenta cu

$$y' = -\frac{x}{y} - 2,$$

$$y' = -\frac{1}{\frac{y}{x}} - 2.$$

Facem notatia

$$z(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \left(\text{sau} \quad z = \frac{y}{x}\right),$$

ceea ce va conduce la o ecuatie cu functia necunoscuta z de variabila x. Din notatia facuta avem $y = xz$, de unde obtinem

$$y' = xz' + z \quad \text{si} \quad z(e) = y(e)/e = 0.$$

Inlocuind in ecuatia diferentiala, aceasta devine

$$xz' + z = -\frac{1}{z} - 2,$$

si dupa ce z' este izolat in membrul stang avem

$$z' = \frac{-\frac{1}{z} - 2 - z}{x},$$

sau

$$z' = -\frac{z^2 + 2z + 1}{zx}.$$

Ecuatia aceasta se rezolva prin metoda separarii variabilelor

$$\frac{z'z}{z^2+2z+1} = -\frac{1}{x},$$

$$\frac{z'z}{(z+1)^2} = -\frac{1}{x},$$

$$\int_e^x \frac{z'z}{(z+1)^2} ds = \int_e^x -\frac{1}{s} ds,$$

$$\int_0^{z(x)} \frac{z}{(z+1)^2} dz = -\ln x + 1,$$

$$\int_0^{z(x)} \left(\frac{z+1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^2} \right) dz = -\ln x + 1,$$

si asa mai departe.