SEMINARUL 7

Baze. Lema substituţiei

1. Arătaţi că $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi determinaţi o bază şi dimensiunea acestui spaţiu.

2. Fie p un număr prim şi $M = \{a + b\sqrt[3]{p} + c\sqrt[3]{p^2} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$. Arătaţi că M este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi determinaţi o bază.

3. Determinaţi câte o bază şi dimensiunea spaţiilor vectoriale ${}_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ şi ${}_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$.

4. Fie $v_1 = (1, -2, 0)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, \alpha, 1)$ vectori din $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$. Folosind lema schimbului să se discute în funcţie de $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă sistemul $v = (v_1, v_2, v_3)$ este o bază a lui $\mathbb{R}^3$.

5. Fie spaţiul vectorial real $P_n = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad} f \leqslant n\}$. Arătaţi că:

   a) $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$ este o bază al lui P_4.

   b) $B' = \{1, \frac{X-a}{1!}, \frac{(X-a)^2}{2!}, \frac{(X-a)^3}{3!}, \frac{(X-a)^4}{4!}\}$, $a \in \mathbb{R}$ este o bază a lui P_4.
   Aplicaţie: dezvoltaţi polinomul $f = -4 + 3X - 5X^2 + 2X^3$ după $X - 2$.

6. În $\mathbb{R}$-spaţiul vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideră subspaţiile:

$$U = \langle (2, 0, 1, -1), (0, 1, 3, 2), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 5, 2) \rangle$$

$$S = \langle (1, 0, 2, 0), (2, 1, -1, 2), (-1, -1, 3, -2) \rangle$$

   Determinaţi dimensiunile spaţilor U, S, $U + S$, $U \cap S$ şi câte o bază.

7. Fie $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x + 2y, y + z, x - 2z)$. Arătaţi că $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ şi determinaţi o bază şi dimensiunea subspaţilor $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$.