Curs 12 – Technici de programare

- Divide-et-impera (divide and conquer)
- Backtracking

Curs 11: Sortări

- **Algoritmi de sortare: metoda bulelor, quick-sort, tree sort, merge sort**
- **Sortare in Python: sort, sorted, parametrii list comprehension, funcții lambda**

Technici de programare

- strategii de rezolvare a problemelor mai dificile
- algoritmi generali pentru rezolvarea unor tipuri de probleme
- de multe ori o problemă se poate rezolva cu mai multe technici – se alege metoda mai eficientă
- problema trebuie să satisfacă anumite criterii pentru a putea aplica technica
- descriem algoritmul general pentru fiecare technică

Divide and conquer – Metoda divizării - pași

- Pas 1 **Divide -** se împarte problema în probleme mai mici (de același structură)
  - împărțirea problemei în două sau mai multe probleme disjuncte care se poate rezolva folosind același algoritm
- Pas 2 **Conquer –** se rezolvă subproblemele recursiv
- Step3 **Combine –** combinarea rezultatelor

Divide and conquer – algoritm general

```
def divideAndConquer(data):
    if size(data)<a:
        #solve the problem directly
        #base case
        return rez
    #decompose data into d1,d2,..,dk
    rez_1 = divideAndConquer(d1)
    rez_2 = divideAndConquer(d2)
    ...
    rez_k = divideAndConquer(dk)
    #combine the results
    return combine(rez_1,rez_2,...,rez_k)
```

Putem aplica divide and conquer dacă:

O promblemă *P* pe un set de date *D* poate fi rezolvat prin rezolvarea aceleiaşi probleme P pe un alt set de date D"= d_1, d_2, ..., d_k, de dimensiune mai mică decât dimensiunea lui *D*

Complexitatea ca timp de execuție pentru o problemă rezolvată folosind divide and conquer poate fi descrisă de recurența:

$$T(n) = \begin{cases} solving\ trivial\ \ problem, & if\ \ n\ is\ small\ enough \\ k \cdot T(n/k) + time\ \ for\ dividing + time\ \ for\ combining, & otherwise \end{cases}$$

Divide and conquer – 1 / n-1

Putem divide datele în: date de dimensiune 1 și date de dimensiune n-1

Exemplu: Caută maximul

```
def findMax(l):
    """
      find the greatest element in the list
      l list of elements
      return max
    """
    if len(l)==1:
        #base case
        return l[0]
    #divide into list of 1 elements and a list of n-1 elements
    max = findMax(l[1:])
    #combine the results
    if max>l[0]:
        return max
    return l[0]
```

Complexitate timp

Recurența: $T(n)=\begin{cases} 1 \; for \; n=1 \\ T(n-1)+1 \; otherwise \end{cases}$

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n-1)+1 \\ T(n-1) &= T(n-2)+1 \\ T(n-2) &= T(n-3)+1 \\ \ldots &= \ldots \\ T(2) &= T(1)+1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad T(n)=1+1+\ldots+1=n\in\theta(n)$$

Divizare în date de dimensiune n/k

```
def findMax(l):
    """
      find the greatest element in the list
      l list of elements
      return max
    """
    if len(l)==1:
        #base case
        return l[0]
    #divide into 2 of size n/2
    mid = len(l) /2
    max1 = findMax(l[:mid])
    max2 = findMax(l[mid:])
    #combine the results
    if max1<max2:
        return max2
    return max1
```

Complexitate ca timp:

Recurența: $T(n)=\begin{cases} 1 \; for \; n=1 \\ 2T(n/2)+1 \; otherwise \end{cases}$

Notăm: $n=2^k$ **=>** $k=\log_2 n$

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^{(k-1)})+1 \\ 2T(2^{(k-1)}) &= 2^2 T(2^{(k-2)})+2 \\ 2^2 T(2^{(k-2)}) &= 2^3 T(2^{(k-3)})+2^2 \\ \ldots &= \ldots \\ 2^{(k-1)} T(2) &= 2^k T(1)+2^{(k-1)} \end{aligned}$$ **=>**

$$T(n)=1+2^1+2^{2.}..+2^k=(2^{(k+1)}-1)/(2-1)=2^k 2-1=2n-1\in\theta(n)$$

Divide and conquer - Exemplu

Calculați x^k **unde** $k \geq 1$ **număr întreg**

Aborare simplă: $x^k = k * k * \ldots * k$ **- k-1 înmulțiri (se poate folosi un for)** $T(n) \in \theta(n)$

Rezolvare cu metoda divizării:

$$x^k = \begin{cases} x^{(k/2)} x^{(k/2)} \; for\, k\, even \\ x^{(k/2)} x^{(k/2)} x \;\; for\, k\, odd \end{cases}$$

<table>
<tr>
<td>

```
def power(x, k):
    """
      compute x^k
      x real number
      k integer number
      return x^k
    """
    if k==1:
        #base case
        return x
    #divide
    half = k/2
    aux =  power(x, half)
    #conquer
    if k%2==0:
        return aux*aux
    else:
        return aux*aux*x
```

</td>
<td>

Divide: calculează k/2

Conquer: un apel recursiv pentru a calcul $x^{(k/2)}$

Combine: una sau doua înmulțiri

Complexitate: $T(n) \in \theta(\log_2 n)$

</td>
</tr>
</table>

Divide and conquer

- **Căutare binară ($T(n) \in \theta(\log_2 n)$)**
  - **Divide – impărțim lista în două liste egale**
  - **Conquer – căutăm în stânga sau în dreapta**
  - **Combine – nu e nevoie**
- **Quick-Sort ($T(n) \in \theta(n \log_2 n)$ mediu)**
- **Merge-Sort**
  - **Divide – impărțim lista în două liste egale**
  - **Conquer – sortare recursivă pentru cele două liste**
  - **Combine – interclasare liste sortate**

Backtracking

- **se aplică la probleme de căutare unde se caută mai multe soluții**
- **generează toate soluțiile (dacă sunt mai multe) pentru problemă**
- **caută sistematic prin toate variantele de soluții posibile**
- **este o metodă sistematică de a itera toate posibilele configurații în spațiu de căutare**
- **este o technică generală – trebuie adaptat pentru fiecare problemă în parte.**
- **Dezavantaj – are timp de execuție exponențial**

Algoritm general de descoperire a tuturor soluțiilor unei probleme de calcul
Se bazează pe construirea incrementală de soluții-candidat, abandonând fiecare candidat parțial imediat ce devine clar că acesta nu are șanse să devină o soluție validă

Metoda generării și testării (Generate and test)

Problemă – Fie *n* un număr natural. Tipăriți toate permutările numerelor 1, 2, ..., *n*.

Pentru n=3

<table>
<tr>
<td>

```
def perm3():
    for i in range(0,3):
        for j in range(0,3):
            for k in range(0,3):
                #a possible solution
                possibleSol = [i,j,k]
                if i!=j and j!=k and i!=k:
                    #is a solution
                    print possibleSol
```

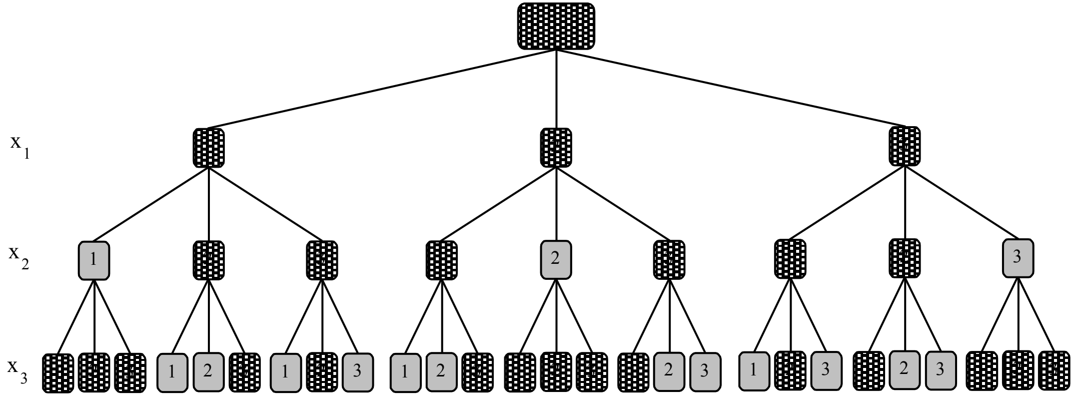
</td>
<td>

```
[0, 1, 2]
[0, 2, 1]
[1, 0, 2]
[1, 2, 0]
[2, 0, 1]
[2, 1, 0]
```

</td>
</tr>
</table>

- **Metoda generării și testării -** ***Generate and Test***
  - **Generare: se generează toate variantele posibile de liste de lungime 3 care conțin doar numerele 0,1,2**
  - **Testare: se testează fiecare variantă pentru a verifica dacă este soluție.**

Generare și testare – toate combinațiile posibile



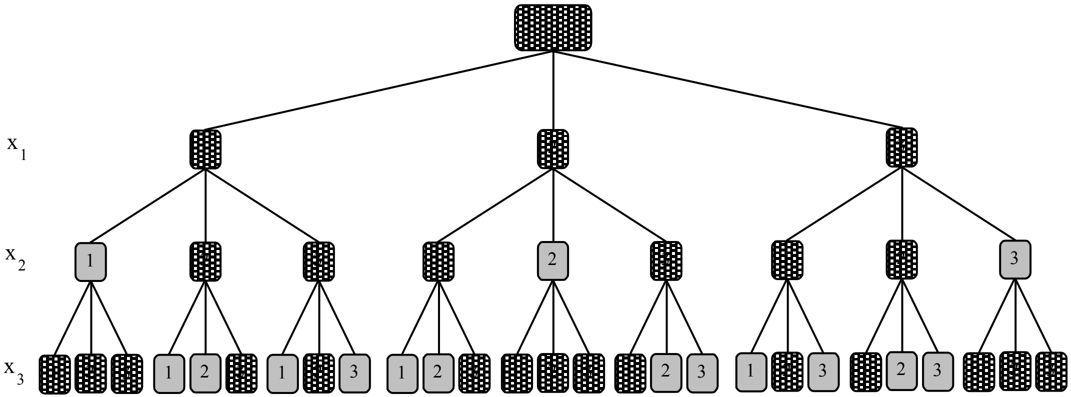
Probleme:

- Numărul total de **liste generate este 3^3**, în cazul general n^n
- inițial se generează toate componentele listei, apoi se verifica dacă lista este o permutare – in unele cazul nu era nevoie sa continuăm generarea (ex. Lista ce incepe cu 1,1 sigur nu conduce la o permutare
- Nu este general. Funcționează doar pentru n=3

În general: dacă n este afâncimea arborelui (numărul de variabile/componente în soluție) și presupunând că fiecare componentă poate avea k posibile valori, numărul de noduri în arbore este k^n. Înseamnă că pentru căutarea în întreg arborele avem o complexitate exponențială, $O(k^n)$.

Înbunătățiri posibile

- să evităm crearea comăletă a soluției posibile în cazul în care știm cu siguranță că nu se ajunge la o soluție.
  - Dacă prima componentă este 1, atunci nu are sens să asignam 1 să pentru a doua componentă



- lucrăm cu liste parțiale (soluție parțială)
- extindem lista cu componente noi doar dacă sunt îndeplinite anumite condiții (*condiții de continuare)*
  - *dacă lista parțială nu conține duplicate*

Generate and test - recursiv

folosim recursivitate pentru a genera toate soluțiile posibile (soluții candidat)

```python
def generate(x,DIM):
    if len(x)==DIM:
        print x
    if len(x)>DIM:
        return
    x.append(0)
    for i in range(0,DIM):
        x[-1] = i
        generate(x[:],DIM)

generate([],3)
```

```
[0, 0, 0]
[0, 0, 1]
[0, 0, 2]
[0, 1, 0]
[0, 1, 1]
[0, 1, 2]
[0, 2, 0]
[0, 2, 1]
[0, 2, 2]
[1, 0, 0]
...
```

Testare – se tipărește doar soluția

<pre>def generateAndTest(x,DIM):
    if len(x)==DIM and isSet(x):
        print x
    if len(x)>DIM:
        return
    x.append(0)
    for i in range(0,DIM):
        x[-1] = i
        generateAndTest(x[:],DIM)
generateAndTest([],3)</pre>
	<pre>[0, 1, 2]
	[0, 2, 1]
	[1, 0, 2]
	[1, 2, 0]
	[2, 0, 1]
	[2, 1, 0]</pre>

- **În continuare se genereaza toate listele ex: liste care încep cu 0,0**
- **ar trebui sa nu mai generăm dacă conține duplicate Ex (0,0) – aceste liste cu siguranță nu conduc la rezultat – la o permutare**

Reducem spatiu de căutare – nu generăm chiar toate listele posibile

Un candidat e valid (merită să continuăm cu el) doar dacă nu conține duplicate

<pre>def backtracking(x,DIM):
    if len(x)==DIM:
        print x
    if len(x)>DIM:
        return #stop recursion
    x.append(0)
    for i in range(0,DIM):
        x[-1] = i
        if isSet(x):
            #continue only if x can conduct to a solution
            backtracking(x[:],DIM)
 	
backtracking([], 3)</pre>
	<pre>[0, 1, 2]
	[0, 2, 1]
	[1, 0, 2]
	[1, 2, 0]
	[2, 0, 1]
	[2, 1, 0]</pre>

Este mai bine decât varianta *generează și testează*, dar complexitatea ca timp de execuție este tot exponențial.

Permutation problem

- **rezultat:** $x=(x_{0,}x_{1,..},x_n), x_i \in (0,1,..,n-1)$
- **e o solutie:** $x_i \neq x_j \; for\, any\, i \neq j$

8 Queens problem:

Plasați pe o tablă de sah 8 regine care nu se atacă.

- **Rezultat: 8 poziții de regine pe tablă**
- **Un rezultat partial e valid: dacă nu există regine care se atacă**
  - **nu e pe acelși coloana, linieor sau diagonală**
- **Numărul total de posibile poziții (atât valide cât și invalide):**
  - **combinări de 64 luate câte 8, C(64, 8) $\approx 4.5 \times 10^9$)**
- **Generează și testează – nu rezolvă problma în timp rezonabil**

Ar trebui sa generăm doar poziții care pot conduce la un rezultat (sa reducem spațiu de căutare)

- **Dacă avem deja 2 regine care se atacă nu ar trebui să mai continuăm cu această configurație**
- **avem nevoie de toate soluțiile**

Backtracking

- **spațiu de căutare**: $S = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$;
- ***x*** este un vector ce reprezintă **soluția**;
- $x[1..k]$ în $S_1 \times S_2 \times ... \times S_k$ este o **soluție candidat**; este o configurație parțială care ar putea conduce la rezultat; k este numărul de componente deja construită;
- **consistent** – o funcție care verifică dacă o soluție parțială este soluție candidat (poate conduce la rezultat)
- **soluție** este o funcție care verifică dacă o soluție candidat $x[1..k]$ este o soluție pentru problemă.

Algoritmul Backtracking – recursiv

```
def backRec(x):
    x.append(0) #add a new component to the candidate solution
    for i in range(0,DIM):
        x[-1] = i  #set current component
        if consistent(x):
            if solution(x):
                solutionFound(x)
            backRec(x[:]) #recursive invocation to deal with next components
```

Algoritm mai general (componentele soluției pot avea domenii diferite (iau valori din domenii diferite)

```
def backRec(x):
    el = first(x)
    x.append(el)
    while el!=None:
        x[-1] = el
        if consistent(x):
            if solution(x):
                outputSolution(x)
            backRec(x[:])
        el = next(x)
```

Backtracking

Cum rezolvăm problema folosind algoritmul generic:

- **trebuie sa reprezentăm soluția sub forma unui vector** $X=(x_{0,}x_{1,}\ldots x_{n})\in S_{0}xS_{1}x\ldots xS_{n}$
- **definim ce este o soluție candidat valid (condiție prin care reducem spațiu de căutare)**
- **definim condiția care ne zice daca o soluție candidat este soluție**

```python
def consistent(x):
    """
      The candidate can lead to an actual
      permutation only if there are no duplicate elements
    """
    return isSet(x)



def solution(x):
    """
      The candidate x is a solution if
      we have all the elements in the permutation
    """
    return len(x)==DIM
```

Backtracking – iterativ

```python
def backIter(dim):
    x=[-1]    #candidate solution
    while len(x)>0:
        choosed = False
        while not choosed and x[-1]<dim-1:
            x[-1] = x[-1]+1  #increase the last component
            choosed = consistent(x, dim)
        if choosed:
            if solution(x, dim):
                solutionFound(x, dim)
            x.append(-1) # expand candidate solution
        else:
            x = x[:-1]  #go back one component
```