Serii de numere

1. Stabiliti convergenta urmatoarelor serii

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n!}$;

Rezolvare. Aplicam criteriul raportului (D'Alembert). Avem

$$\frac{\frac{n^2+1}{n!}}{\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)(n^2+1)}{(n+1)^2+1} \to \infty.$$

Limita raportului termenilor consecutivi este strict mai mare decat 1. Conform criteriului raportului, concluzia este ca seria este convergenta.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$;

Rezolvare. Raportul termenilor consecutivi este

$$\frac{\frac{(an)^n}{n!}}{\frac{(a(n+1))^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)n^n}{a(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{ae}.$$

Daca $a < 1/e$ avem

$$\frac{1}{ae} > 1,$$

deci seria este convergenta.

Daca $a > 1/e$ avem

$$\frac{1}{ae} < 1,$$

deci seria este divergenta.

c)$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha n)!}{(n!)^{\beta}}$;

Rezolvare. Avem

$$\frac{\frac{(\alpha n)!}{(n!)^{\beta}}}{\frac{(\alpha(n+1))!}{((n+1)!)^{\beta}}} = \frac{(n+1)^{\beta}}{(\alpha n+1)(\alpha n+2)(\alpha n+3)...(\alpha n+\alpha)}.$$

In acest caz limita raportului termenilor consecutivi este limita unei functii rationale (fractie in care numaratorul si numitorul sunt functii polinomiale).

Daca $\beta > \alpha$ atunci limita este ∞ si seria este convergenta.

Daca $\beta < \alpha$ atunci limita este 0 si seria este divergenta.

Daca $\beta = \alpha$ atunci limita este egala cu raportul coeficientilor termenilor dominanti $\frac{1}{\alpha^\alpha}$. Daca $\beta = \alpha > 1$ atunci limita este mai mica decat 1 si seria este divergenta.

Serii Taylor

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k =$$

$$f(a)+\tfrac{f'(a)}{1!}(x-a)+\tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

2. Scrieti seriile Taylor asociate urmatoarelor functii in punctul $x_0 = a = 0$. Gasiti multimile de convergenta.

a)$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$;

Rezolvare. Derivatele de ordin superior sunt

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k (k+1)! \frac{1}{(x-1)^{k+2}}.$$

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k (k+1)! \frac{1}{(-1)^{k+2}} = (k+1)!.$$

Seria Taylor asociata functiei f in punctul $x_0 = a = 0$ este

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k.$$

Pentru a determina multimea de convergenta se aplica criteriul raportului, pentru un x oarecare, seriei valorilor absolute $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|x|^k$.

Avem

$$\frac{(k+1)|x|^k}{(k+1+1)|x|^{k+1}} \to \frac{1}{|x|}.$$

Daca $|x| < 1$ seria valorilor absolute este convergenta, deci seria initiala este convergenta. Daca $|x| \geq 1$ se deduce imediat (scriind seria) ca seria este divergenta. In consecinta, multimea de convergenta este intervalul $(-1; 1)$.

b)$f(x) = \frac{x^2-10x}{(x-5)^2}$;

Rezolvare. Prelucram expresia functiei pentru a obtine o expresie mai convenabila cu numarator constant.

$$\frac{x^2-10x}{(x-5)^2} = \frac{x^2-10x+25-25}{(x-5)^2} = 1 - \frac{25}{(x-5)^2}.$$

Derivatele de ordin superior sunt

$$f^{(k)}(x) = 25(-1)^{k+1}(k+1)!\frac{1}{(x-5)^{k+2}}.$$

$$f^{(k)}(0) = 25(-1)^{k+1}\frac{(k+1)!}{(-5)^{k+2}} = -\frac{(k+1)!}{5^k}.$$

Seria Taylor asociata functiei f in punctul $x_0 = a = 0$ este

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)!}{5^k k!}x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-(k+1)}{5^k}x^k.$$

Se aplica criteriul raportului, pentru un x oarecare, seriei valorilor absolute $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{5^k}|x|^k$.

Avem

$$\frac{\frac{k+1}{5^k}|x|^k}{\frac{k+1+1}{5^{k+1}}|x|^{k+1}} \to \frac{5}{|x|}.$$

Daca $|x| < 5$ seria valorilor absolute este convergenta, deci seria initiala este convergenta. Daca $|x| \geq 5$ se deduce imediat (scriind seria) ca seria este divergenta. In consecinta, multimea de convergenta este intervalul $(-5; 5)$.