ŞIRURI DE NUMERE REALE

1. Se consideră şirurile (x_n) şi (y_n), definite respectiv prin

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Să se demonstreze că:

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$;

b) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad 0 < y_n - x_n < \frac{4}{n}$.

Observaţie. Din afirmaţiile a) şi b) rezultă că şirurile (x_n) şi (y_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită. Numărul real care este limita comună a celor două şiruri se notează cu e, de la numele matematicianului Leonhard Euler. Valoarea aproximativă este $e \approx 2.718281\ldots$.

2. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n are loc

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}.$$

3. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n > 1$ are loc

$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

Concursul William Lowell Putnam 2002

4. Se consideră şirurile (u_n) şi (v_n), definite respectiv prin

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Să se demonstreze că:

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e$;

c) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad 0 < e - 1 - \dfrac{1}{1!} - \dfrac{1}{2!} - \cdots - \dfrac{1}{n!} < \dfrac{1}{n \cdot n!}$;

d) $e \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

5. Se consideră şirurile (x_n) şi (y_n), definite respectiv prin

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \qquad y_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Să se demonstreze că:

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

Observaţie. Din afirmaţiile a) şi b) rezultă că şirurile (x_n) şi (y_n) sunt convergente şi au aceeaşi limită. Numărul real care este limita comună a celor două şiruri se numeşte constanta lui Euler şi se notează cu γ. Conform lui a) avem $0 < \gamma < 1$, valoarea aproximativă fiind $\gamma \approx 0.57721\ldots$. Este o problemă deschisă dacă γ este număr iraţional sau nu.

6. (Generalizarea problemei precedente) Fie $f : [1,\infty[\to]0,\infty[$ o funcţie strict descrescătoare cu proprietatea $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, iar (x_n) şi (y_n) şirurile definite respectiv prin

$$x_n = f(1) + \cdots + f(n) - \int_1^{n+1} f(x)dx, \qquad y_n = f(1) + \cdots + f(n) - \int_1^{n} f(x)dx.$$

Să se demonstreze că:

a) $\forall\, n \in \mathbf{N}\ :\quad x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0.$

7. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

8. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\right) = 6(3 - 4\ln 2).$$

9. (Şirul lui Traian Lalescu) Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}\right) = \frac{1}{e}.$$

Indicaţie. Fie $L_n := \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$ şi $x_n := \dfrac{L_n}{\sqrt[n]{n!}}$. Se ţine seama că $(x_n) \longrightarrow 0$ şi că

$$L_n = \frac{x_n}{\ln(1+x_n)} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n+1} \cdot (n+1)\ln(1+x_n).$$

10. (Şirul lui Wallis) Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

11. Să se determine mulţimea punctelor limită ale şirului $(x_n)_{n\geq 1}$, de termen general $x_n = \sqrt{n} - \left[\sqrt{n}\right]$.

SERII DE NUMERE REALE

1. Să se calculeze:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^3 - n}$;

R: $2\ln 2 - 1$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{kn+j}\right) - \frac{1}{n+1}\right]$, $\quad k \in \mathbf{N},\ k \geq 2$;

A. Kheyfits, The College Math. J. [1998, 152]

4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n b^n}{(a^{n+1} - b^{n+1})(a^n - b^n)}$, $\quad a, b > 0,\ a \neq b$ (D. Oprişa);

R: $\frac{\min\{a,b\}}{(a-b)^2}$

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^{2^n} + 1}$;

V. Ia. Rojenko, Matematika v Şkole, [1989, no. 4, p. 101]

R: 1

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3 \frac{x}{3^n}$, $\quad x \in \mathbf{R}$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \mathrm{tg}\, \frac{x}{2^{n-1}} \mathrm{tg}^2\, \frac{x}{2^n}$, $\quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$;

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \frac{1}{n^2 + n + 1}$;

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \frac{1}{2n^2}$;

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \frac{4}{4n^2 + 3}$;

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{arctg}\, \frac{2}{n^2}$;

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{8n}{n^4 - 2n^2 + 5}$.

2. Să se studieze natura următoarelor serii:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}, \quad p \in \mathbf{R};$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \quad p \in \mathbf{R};$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}};$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}} - 1\right)^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R};$

Concursul William Lowell Putnam 1988

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n)!!}{n^n};$

7) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0;$

8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+bn+c}, \quad a > 0,\ b, c \in \mathbf{R};$

9) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a^{\ln n}, \quad a > 0;$

10) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{n!a^n}, \quad a > 0;$

11) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2;$

12) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^p}{2^{\sqrt{n}}}, \quad p \geq 1;$

13) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\cdot\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\cdot\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}\, x^n, \quad \alpha, \beta, \gamma, x > 0.$

(seria hipergeometrică)

3. Să se calculeze suma seriei $\displaystyle\sum 1 \Bigg/ \binom{n}{k}$, unde sumarea se face pentru toate numerele naturale k şi n cu proprietatea $1 < k < n - 1$.

M. Bhargava, The College Math. J. [1998, 434]

4. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[(2n+1)\ln\frac{n+1}{n}-2\right].$

J. Graham-Eagle, The College Math. J. [1999, 61]

5. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}}{2n(2n+2)}.$

S. Weiner, Amer. Math. Monthly [1956, 39]

6. Să se calculeze $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}.$

M. S. Klamkin, Amer. Math. Monthly [1954, 350]

7. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de numere reale definit recursiv astfel:

$$a_1=\frac{1}{2},\qquad a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}},\quad n\geq 1.$$

Să se demonstreze că $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n<1.03.$

D. Akulici, Kvant [1990]

8. Pentru fiecare număr natural n notăm cu $\langle n\rangle$ cel mai apropiat număr natural de $\sqrt{n}$. Să se calculeze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\langle n\rangle}+2^{-\langle n\rangle}}{2^n}.$$

Concursul William Lowell Putnam 2001

9. Pentru fiecare număr natural n notăm cu $b(n)$ numărul cifrelor 1 din reprezentarea binară a lui n. De exemplu, $b(6)=b(110_2)=2$, $b(15)=b(1111_2)=4$ etc. Să se demonstreze că seria $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{b(n)}{n(n+1)}$ este convergentă şi să se determine suma ei.

Concursul William Lowell Putnam 1981

10. Pentru $n>1$ fie $t(n)$ numărul factorizărilor neordonate ale lui n în produse de divizori strict mai mari decât 1. De exemplu, $t(12)=4$, căci $12=6\times 2=4\times 3=3\times 2\times 2$. Să se demonstreze că $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t(n)}{n^2}=1.$

D. Beckwith, Amer. Math. Monthly [1998, 559]

11. Fie $(a_j)_{j\geq 0}$ un şir de numere nenegative aşa încât $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j = s < \infty$. Pentru fiecare număr natural n notăm

$$\alpha_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{j+k}, \qquad\qquad \beta_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} a_{|j-k|}.$$

Să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$.

W. F. Trench, The College Math. J. [1999, 60]

12. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{\sin n}{\ln n}$ este semiconvergentă.

13. Să se demonstreze că dacă seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este convergentă şi există $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. Să se dea exemplu de serie cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$, care să fie convergentă dar pentru care şirul $(na_n)_{n\geq 1}$ nu converge către 0.

14. Fie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ o serie divergentă cu termeni pozitivi, iar $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ $(n \geq 1)$. Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{s_n}$ este divergentă, dar seria $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{s_n^2}$ este convergentă.

15. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir definit recursiv astfel:

$$a_1 \in \,]0, 1[\,, \qquad a_{n+1} = a_n - na_n^2, \quad n \geq 1.$$

Să se demonstreze că seria $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ este convergentă.

L. Panaitopol, Gazeta Matematică [1980]

PRIMITIVE

1. Să se determine primitivele funcţiilor următoare.

1) $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+b)}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, iar I este un interval pe care $\sin(x+b) \neq 0$;

2) $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, iar I este un interval pe care $\sin(x+a)\sin(x+b) \neq 0$;

3) $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x - \sin^2 a}$, unde $a \in \mathbf{R}$, iar I este un interval pe care $\sin^2 x - \sin^2 a \neq 0$;

4) $f : I \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x + 2\cos^2 \frac{x}{2} + \ln x^{x+1}}{\sin x + x \ln x}$, unde $I \subseteq]0, \infty[$ este un interval pe care $\sin x + x \ln x \neq 0$;

5) $f : [1, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + \cos 2x - 2\sin 2x}{x^2 + \cos 2x + e^{-x}}$;

6) $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{1 + x + e^x}$;

7) $f : [0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x + x^2}{(1 + x + e^x)^2}$;

8) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x \ln x}{e^x + x^x}$;

9) $f : \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$;

10) $f : \left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin 2x}$;

11) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$, unde $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

12) $f :]-a, a[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, unde $a > 0$;

13) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \sin(\ln x)$;

14) $f :]-1, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3} e^{\frac{x-1}{x+1}}$;

15) $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$;

16) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1 + x^2}$;

17) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$;

18) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} + e^{-2x}}$;

19) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}};$

20) $f :]1, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}};$

21) $f :]2, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2};$

22) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)};$

23) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}};$

24) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}};$

25) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}};$

26) $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}};$

27) $f :]2, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2-3x+2};$

28) $f : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x};$

29) $f : \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{3+\sin x+\cos x};$

30) $f :]0, 2\pi[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{3+\sin x+\cos x}.$

INTEGRALE RIEMANN

1. Fie $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x dx \quad (n \geq 0)$.

a) Să se arate că $I_n = -\dfrac{1}{n!} + I_{n-1}$ pentru orice $n \geq 1$.

b) Să se deducă de aici că $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

2. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^{2n} x dx \quad (n \geq 0)$. Să se deducă apoi că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (n \geq 0)$.

a) Să se arate că pentru orice $n \geq 0$ avem

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}, \qquad I_{2n+1} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

b) Să se deducă de aici formula lui Wallis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdots\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

4. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos nx\, dx \quad (n \geq 0)$.

5. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{e^x + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}}\, dx \quad (n \geq 0)$.

6. Fiind dat $a > 0$, să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_{e^{1-a}}^{e} (1-\ln x)^n dx$.

7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 e^{\mathrm{arctg}\, x}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)} + \sqrt{\ln(x+3)}}\, dx$.

Concursul William Lowell Putnam 1987

9. Să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^3+\sqrt{1+x^6}}$.

Olimpiada oraşului Leningrad, 1986

10. Să se demonstreze că

$$\int_{-1}^{1} x\ln^2(1+e^x)dx = \int_{-1}^{1} x^2\ln(1+e^x)dx.$$

11. Fie $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x^2+x+1}$, iar F o primitivă a lui f. Să se calculeze $F(\sqrt{2}+1)-F(\sqrt{2}-1)$.

M. Ivan

12. Fie $f:]-1,1[\to\mathbf{R}$ funcţia definită prin $f(x)=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arcsin x} \ln(1+\sin^2 t)dt$.

a) Să se determine f'.

b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x)dx$.

13. Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k\cdot\frac{n+1}{n}}$.

Olimpiada municipală de matematică, Bucureşti 1994

INTEGRALE RIEMANN–STIELTJES

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ cu $a < b$, fie $c \in \,]a, b[$, iar $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcţiile definite prin

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \ a \le x < c \\ 0 & \text{dacă } \ c \le x \le b, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \ a \le x \le c \\ 1 & \text{dacă } \ c < x \le b. \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g atât pe $[a, c]$ cât şi pe $[c, b]$ dar nu şi pe $[a, b]$.

2. Fie $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin

$$g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{dacă } \ x = a \\ \beta & \text{dacă } \ x \in \,]a, b[\\ \gamma & \text{dacă } \ x = b. \end{cases}$$

Să se demonstreze că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă în a şi b, atunci f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(a)(\beta - \alpha) + f(b)(\gamma - \beta).$$

3. O funcţie $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ se numeşte *funcţie etajată* dacă există o diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ a lui $[a, b]$, precum şi numere reale $c_1, \ldots, c_n$ în aşa fel încât

$$g(x) = c_j \qquad \text{pentru orice } \ x \in \,]x_{j-1}, x_j[\qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Să se demonstreze că dacă $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ este continuă, iar $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie etajată ca mai sus, atunci f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\, dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \sum_{j=1}^{n} c_j [f(x_j) - f(x_{j-1})].$$

4. Determinaţi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1 + x^2) d[nx]$.

5. Fie $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{dacă } \ |x| = \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{în caz contrar,} \end{cases}$$

iar $g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g şi să se determine $\displaystyle\int_{-1}^{1} f dg$.

6. Fie $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$ funcţiile definite prin $f(x) = e^x$ şi respectiv

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \ \ x \in [a,b] \cap \mathbf{Q} \\ 0 & \text{dacă} \ \ x \in [a,b] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Să se demonstreze că f nu este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$.

7. Fie $f, g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ funcţiile definite prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dacă} \ \ x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1 & \text{dacă} \ \ x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dacă} \ \ x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{dacă} \ \ x = 0. \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[-1, 1]$.

8. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă cu variaţie mărginită.

a) Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a, b]$ şi că

$$\int_a^b f(x)\, df(x) = \frac{f^2(b) - f^2(a)}{2}.$$

b) Să se demonstreze că f^2 este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a, b]$, că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f^2 pe $[a, b]$ şi că

$$\int_a^b f^2(x)\, df(x) = \frac{f^3(b) - f^3(a)}{3}, \qquad \int_a^b f(x)\, df^2(x) = \frac{2[f^3(b) - f^3(a)]}{3}.$$

9. Daţi exemplu de funcţie cu variaţie mărginită $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ şi cu proprietatea că f nu este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a, b]$.

10. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ cu $a < b$, I un interval al axei reale şi funcţiile $f : [a, b] \to I$, $\phi : I \to \mathbf{R}$. Se consideră următoarele afirmaţii:

1° Funcţia $\phi \circ f$ este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a, b]$.

2° Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ şi orice sisteme de puncte intermediare $\xi = (c_1, \ldots, c_k) \in P(\Delta)$, $\eta = (d_1, \ldots, d_k) \in P(\Delta)$ are loc inegalitatea

$$\left| \sum_{j=1}^{k} [\phi(f(c_j)) - \phi(f(d_j))][f(x_j) - f(x_{j-1})] \right| < \varepsilon.$$

3° Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Div}\,[a, b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ are loc inegalitatea

$$\left| \sum_{j=1}^{k} [\phi(f(x_j)) - \phi(f(x_{j-1}))][f(x_j) - f(x_{j-1})] \right| < \varepsilon.$$

Pentru orice funcţii f şi ϕ sunt adevărate implicaţiile $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Să se demonstreze că:

a) Dacă ϕ este monotonă şi f este continuă, atunci $2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ$.

b) Dacă f şi ϕ sunt continue, atunci $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ$.

11. Fiind dată funcţia $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1° f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a,b]$.

2° Oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice diviziune $\Delta = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in \operatorname{Div}[a,b]$ cu $\|\Delta\| < \delta$ are loc inegalitatea

$$\sum_{j=1}^{k} [f(x_j) - f(x_{j-1})]^2 < \varepsilon.$$

In legătură cu ultimele două probleme se poate consulta articolul lui A. Pelczynski şi S. Rolewicz: Remarks on the existence of the Riemann–Stieltjes integral. *Colloq. Math.* **5** (1957), 74–77.

12. Daţi exemplu de funcţie continuă $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ şi cu proprietatea că f nu este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f pe $[a,b]$.

13. Fie $f : [a,b] \to]0,\infty[$ o funcţie continuă cu variaţie mărginită. Să se demonstreze că $\dfrac{1}{f}$ este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu f^2 pe $[a,b]$ şi să se determine $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(x)}\, df^2(x)$.

14. Fie $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ funcţii care îndeplinesc următoarele condiţii:

(i) f este integrabilă Riemann;

(ii) există $\alpha \geq 0$ aşa încât

$$|g(x) - g(y)| \leq \alpha |x - y| \qquad \text{pentru orice } \ x, y \in [a,b].$$

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g şi că are loc inegalitatea $\displaystyle\left|\int_a^b f dg\right| \leq \alpha \int_a^b |f| dx$.

15. Fie $f_1, f_2, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ funcţii care îndeplinesc următoarele condiţii:

(i) g este monotonă;

(ii) f_2 este mărginită;

(iii) există $\alpha \geq 0$ şi $p \geq 1$ în aşa fel încât să avem

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq \alpha |f_2(x) - f_2(y)|^p \qquad \text{pentru orice } \ x, y \in [a,b].$$

Să se demonstreze că dacă f_2 este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g, atunci şi f_1 este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g.

S. Rădulescu

16. Să se calculeze următoarele integrale Riemann-Stieltjes:

1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, d(x^4);$

2) $\displaystyle\int_0^{\ln 3} \frac{x}{\sqrt{1+e^x}}\, d(e^x);$

3) $\displaystyle\int_{e^2}^{e^3} \sqrt{1+\ln x}\, d(\ln(\ln x));$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, d(x^2);$

5) $\displaystyle\int_0^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, d(x^2);$

6) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\, d(x^2);$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\, d(\sin^2 x), \qquad a, b \in \mathbf{R},\ a^2+b^2 \neq 0;$

8) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\, d(\operatorname{arctg}(\cos x));$

9) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x}{x^2+1}\, d(\operatorname{arctg}^2 x);$

10) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\, d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{1-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\right).$

17. Fiind date funcţiile $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definite prin $f(x) = x$ şi respectiv

$$g(x) = x \arcsin\frac{2x}{1+x^2} - \ln(1+x^2),$$

să se determine $\displaystyle\lim_{a \nearrow 1} \int_0^a f(x)dg(x)$.

18. Fie funcţiile $f, g : [a,b] \to \mathbf{R}$ şi $c \in\,]a,b[$. Să se demonstreze că dacă există $r > 0$ aşa încât $[c-r, c+r] \subseteq [a,b]$, f este continuă pe $[c-r, c+r]$, iar restricţia lui g la $[c-r, c+r]$ este cu variaţie mărginită, atunci are loc egalitatea

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dg(x) = f(c)[g(c+0) - g(c-0)].$$

19. Fie funcţiile $f, g : [a, b] \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că dacă există $r \in]0, b-a]$ aşa încât f este continuă pe $[a, a+r]$ (respectiv pe $[b-r, b]$), iar restricţia lui g la $[a, a+r]$ (respectiv la $[b-r, b]$) este cu variaţie mărginită, atunci are loc egalitatea

$$\lim_{\delta \searrow 0} \int_a^{a+\delta} f(x)dg(x) = f(a)[g(a+0) - g(a)]$$

$$\left(\text{respectiv} \qquad \lim_{\delta \searrow 0} \int_{b-\delta}^{b} f(x)dg(x) = f(b)[g(b) - g(b-0)] \right).$$

20. Fie $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă şi $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că există o diviziune $(x_0, x_1, \dots, x_k)$ a lui $[a, b]$ astfel încât să fie îndeplinite următoarele condiţii:

(i) există $r_0, r_k \in]0, b-a]$ aşa încât restricţiile lui g la $[a, a+r_0]$ şi la $[b-r_k, b]$ sunt cu variaţie mărginită;

(ii) pentru orice $j \in \{1, \dots, k-1\}$ există $r_j > 0$ aşa încât $[x_j - r_j, x_j + r_j] \subseteq [a, b]$ şi restricţia lui g la $[x_j - r_j, x_j + r_j]$ este cu variaţie mărginită;

(iii) pentru orice $j \in \{1, \dots, k\}$ funcţia g este derivabilă pe $]x_{j-1}, x_j[$, derivata g' este local integrabilă Riemann pe $]x_{j-1}, x_j[$, iar integrala improprie

$$I_j := \int_{x_{j-1}+0}^{x_j-0} f(x)g'(x)dx$$

este convergentă.

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ şi că

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dg(x) &= \sum_{j=1}^{k} I_j + f(a)[g(a+0) - g(a)] + \sum_{j=1}^{k-1} f(x_j)[g(x_j+0) - g(x_j-0)] \\ &\quad + f(b)[g(b) - g(b-0)]. \end{aligned}$$

21. Fie $f, g : [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \to \mathbf{R}$ funcţiile definite prin $f(x) = x^2$ şi respectiv

$$g(x) = \begin{cases} \arcsin x & \text{dacă } |x| \le 1 \\ \operatorname{arctg} x & \text{dacă } 1 < |x| < \sqrt{3} \\ 0 & \text{dacă } |x| = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Să se arate că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ şi să se calculeze $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} f(x)dg(x)$.

22. Fie $\alpha > 0$ şi $f, g : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ funcţiile definite prin $f(x) = |x|^\alpha$ şi respectiv

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{dacă } x \in [-1, 0] \\ -x \ln x & \text{dacă } x \in]0, 1[\\ 1 & \text{dacă } x = 1. \end{cases}$$

Să se demonstreze că f este integrabilă Riemann–Stieltjes în raport cu g pe $[-1, 1]$ şi să se calculeze $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dg(x)$.

ŞIRURI DE FUNCŢII

1. Să se studieze convergenţa şirului de funcţii (f_n), dacă:

1) $f_n :]0, \infty[\to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx};$
2) $f_n :]0, \infty[\to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \arctan(nx);$
3) $f_n :]0, \infty[\to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}} - \sqrt{x}\right);$
4) $f_n : [0, \infty[\to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{x}{x+n};$
5) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}};$
6) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4};$
7) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = x\arctan(nx);$
8) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x^{2n})^n};$

Concursul Traian Lalescu 1986

9) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{|x^2-1| + |x+2|e^{nx}}{|x+3| + |x^2-3x+2|e^{nx}};$
10) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{x^{2n+1} - x^2 + 6}{x^{2n} + x^2 + 4};$
11) $f_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n+x};$
12) $f_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = x^n - x^{2n};$
13) $f_n : [0,1] \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n,\ \ \alpha \in \mathbf{R};$
14) $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ \ f_n(x) = \dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{n^2}.$

2. Fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul de funcţii de termen general $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$. Se cere:

a) Să se determine mulţimea de convergenţă şi limita punctuală f a şirului (f_n).

b) Să se studieze convergenţa uniformă a şirului (f_n).

c) Să se determine mulţimea de convergenţă şi limita punctuală g a şirului (f'_n).

d) Să se studieze convergenţa uniformă a şirului (f'_n).

e) Să se compare f' cu g şi să se explice rezultatul.

3. Acelaşi enunţ pentru şirul $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$, având termenul general

$$f_n(x) = x - \frac{x^n}{n}.$$

4. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul de funcţii de termen general $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Se cere:

a) Să se demonstreze că şirul (f_n) converge punctual pe $[0,1]$ şi să se determine limita sa punctuală f.

b) Să se studieze convergenţa uniformă a şirului (f_n).

c) Să se compare $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ cu $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$ şi să se explice rezultatul.

5. Fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul de funcţii de termen general $f_n(x) = \dfrac{n^2x}{x^2+n^2}$. Se cere:

a) Să se demonstreze că şirul (f_n) converge punctual pe $\mathbf{R}$ şi să se determine limita sa punctuală f.

b) Să se arate că (f_n) nu converge uniform pe $\mathbf{R}$.

c) Să se arate că $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)dt$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

6. Fie $A \subseteq \mathbf{R}^m$ o mulţime nevidă, iar $f_n : A \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ un şir de funcţii uniform continue, care converge uniform către funcţia $f : A \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că f este uniform continuă.

7. Fie $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ un şir de funcţii care converge uniform pe $\mathbf{R}$ către funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Presupunem că pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există $\ell_n = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f_n(x) \in \mathbf{R}$. Să se demonstreze că există şi sunt egale limitele $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ell_n$ şi $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Berkeley 1999

8. Fie $f_1 : [a,b] \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă Riemann, iar $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul de funcţii definit recursiv prin

$$f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t)dt \qquad \text{pentru orice } \ x \in [a,b] \ \text{ şi orice } \ n \geq 1.$$

Să se demonstreze că şirul (f_n) converge uniform către funcţia nulă pe $[a,b]$.

9. Fie $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul definit recursiv astfel: $f_1(x) = 0$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left[x - f_n^2(x)\right] \qquad \text{pentru orice } x \in [0,1].$$

Să se demonstreze că şirul (f_n) converge uniform pe $[0,1]$ către funcţia $f(x) = \sqrt{x}$.

10. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \underbrace{\sqrt{\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x}{2}+\cdots+\sqrt{\frac{x}{2}+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ radicali}}\,dx.$

11. Fie funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că există un şir de funcţii polinomiale $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$), uniform convergent către f, dacă şi numai dacă funcţia f este polinomială.

12. Fie $m \in \mathbf{N}$ şi $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$ ($n \in \mathbf{N}$) un şir de funcţii polinomiale de grad cel mult m, care converge punctual către funcţia $f : [0,1] \to \mathbf{R}$. Să se demonstreze că f este o funcţie polinomiaă de grad cel mult m şi că şirul (f_n) converge uniform către f pe $[0,1]$.

SERII DE FUNCŢII

1. Să se determine mulţimea de convergenţă a următoarelor serii de funcţii:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n^2+5}{7n^2+3n+2}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\};$

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+n+1}\left(\frac{x^2-2}{1-2x^2}\right)^n, \qquad x \in \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\};$

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2n}{4n^2+1} \sin 2nx, \qquad x \in \mathbf{R};$

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^x}\right), \qquad x \in]0,\infty[.$

2. Să se studieze convergenţa seriei de funcţii $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$, unde $f_n : [0,1[\to \mathbf{R}$ este funcţia definită prin $f_n(x) = \dfrac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$.

Concursul William Lowell Putnam 1977

3. Să se demonstreze că seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2} \operatorname{arctg} \frac{n^2}{x}$ ($x \in]0,\infty[$) este punctual convergentă, iar suma sa este o funcţie derivabilă.

4. Să se demonstreze că seria de funcţii $\displaystyle\sum_{n\geq 1} e^{-nx} \sin nx$ ($x \in [1,\infty[$) este uniform convergentă, iar suma sa este o funcţie derivabilă cu derivata continuă.

5. Să se demonstreze că seria de funcţii

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)} \qquad (x \in [0,\infty[)$$

este uniform convergentă.

6. Să se demonstreze că mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ ($x \in \mathbf{R}$) este $[0,\infty[$. Considerând funcţia $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$, definită prin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2},$$

să se demonstreze că f este continuă pe $[0,\infty[$ şi derivabilă pe $]0,\infty[$.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

7. Fie $a > 0$, $f_1 : [0, a] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă, iar $f_n : [0, a] \to \mathbf{R}$ $(n \in \mathbf{N})$ şirul de funcţii definit recursiv prin

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt \qquad \text{pentru orice} \;\; x \in [0, a] \;\; \text{şi orice} \;\; n \geq 1.$$

Să se demonstreze că seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ este uniform convergentă şi să se determine suma sa.

8. Să se calculeze $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \ln x \ln(1-x)dx$.

9. Să se demonstreze că $\displaystyle\int_{0+0}^{1} x^{-x}dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

10. Pentru calculul integralei improprii $I := \displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx$, se poate folosi următoarea idee: oricare ar fi $x \in (0, \infty)$ are loc egalitatea

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx},$$

deci

$$I = \int_{0+0}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+0}^{\infty} xe^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Identificaţi în lanţul de egalităţi de mai sus semnul "=" care necesită o justificare riguroasă. Indicaţi apoi o metodă riguroasă de calcul al integralei I, bazată pe ideea de mai sus.

SERII DE PUTERI

1. Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă pentru următoarele serii de puteri:

1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$;

2) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x+1)^n, \quad a>0$;

3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\binom{2n}{n}}{2^{2n}} x^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\cdot\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}(x-3)^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{a^n n!}(x+2)^n, \quad a>0$;

6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}\right)^{n^2} x^n$.

2. Fie $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri având raza de convergenţă $r>0$ şi fie $\lambda>r$. Există o serie de puteri $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ astfel încât

a) seria $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ are raza de convergenţă r, iar

b) seria $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)x^n$ are raza de convergenţă λ?

S. Zheng şi Y. Song, The College Math. J. [1998, 153]

3. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f :]-1,1[\to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Să se dezvolte în serie de puteri funcţia $f:[-1,1]\to\mathbf{R}$, definită prin $f(x)=\arcsin x$. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei de puteri obţinute.

5. Să se demonstreze că funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x\neq 0\\ 0 & \text{dacă } x=0\end{cases}$$

este de clasă C^∞ dar nu este dezvoltabilă în serie de puteri în jurul lui 0 pe nici un interval nedegenerat $I\subseteq\mathbf{R}$ care conţine pe 0.

6. Este seria de puteri $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ uniform convergentă pe $\mathbf{R}$?

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

7. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriei de puteri $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

8. Să se calculeze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)2^n}$.

9. Să se calculeze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

10. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9} + \cdots = \frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4}\ln 3.$$

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

11. Să se calculezeze $\int_{0+0}^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.

12. Se consideră şirul de termen general $a_n = \int_0^n \ln(1+e^{-x})dx$ $(n \geq 1)$. Să se arate că şirul (a_n) este convergent, iar limita sa aparţine intervalului $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$.

M. Chiriţă, Olimpiada judeţeană de matematică, Bucureşti 1994

13. Să se demonstreze că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)\cdots(m+n)} = \int_{0+0}^{1} \frac{e^x - 1}{x}\, dx.$$

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

14. (Generalizarea problemei precedente) Să se demonstreze că pentru orice $m \in \mathbf{N}^*$

$$\sum_{n_m=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_0=1}^{\infty} \frac{1}{n_0(n_0+1)\cdots(n_0+n_1+\cdots+n_m)}$$
$$= (-1)^{m-1}\left(\int_{0+0}^{1} \frac{e^x-1}{x}\, dx + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j}\left(1 - e\sum_{i=0}^{j-1} \frac{(-1)^i}{i!}\right)\right).$$

N. Anghel, Amer. Math. Monthly [1996, 426]

INTEGRALE IMPROPRII

1. Să se studieze dacă integralele improprii de mai jos sunt convergente, iar în caz afirmativ să se determine valoarea lor.

1) $\displaystyle\int_a^{b-0} \frac{1}{(b-x)^p}\,dx, \quad a,b,p \in \mathbf{R},\ a<b;$

2) $\displaystyle\int_0^{1-0} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx;$

3) $\displaystyle\int_0^{1-0} x^n\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx, \quad n \in \mathbf{N};$

4) $\displaystyle\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx, \quad a>0,\ p \in \mathbf{R};$

5) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\,dx;$

6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx;$

7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+2bx+1}\,dx, \quad |b|<1,$ (M. Ivan);

8) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}+x^n+1}}, \quad n \in \mathbf{N};$

9) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1};$

10) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}, \quad \alpha>0;$

11) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx, \quad a,b \in \mathbf{R},\ a>0;$

12) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^n x\,dx, \quad a>0,\ n \in \mathbf{N};$

13) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx,$ (Euler–Poisson);

14) $\displaystyle\int_{a+0}^{b} \frac{1}{(x-a)^p}\,dx, \quad a,b,p \in \mathbf{R},\ a<b;$

15) $\displaystyle\int_{1+0}^{4} \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-x-1}};$

16) $\displaystyle\int_{1+0}^{2} \frac{dx}{x\ln x};$

17) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} (\ln x)^n dx, \quad n \in \mathbf{N};$

18) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} [\ln x]dx;$

19) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} x\left[\frac{1}{x}\right]dx;$

20) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \left\{\frac{1}{x}\right\}dx;$

21) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \left\{\frac{1}{x}\right\}^2 dx;$

22) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} x\left[\frac{1}{x}\right]\left\{\frac{1}{x}\right\}dx;$

23) $\displaystyle\int_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx, \qquad \int_{0+0}^{\pi-0} \ln(\sin x)dx, \qquad \text{(Euler)};$

24) $\displaystyle\int_{0+0}^{\pi-0} x\ln(\sin x)dx;$

25) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{\arcsin x}{x}dx;$

26) $\displaystyle\int_{a+0}^{b-0} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad a,b\in\mathbf{R},\ a<b;$

27) $\displaystyle\int_{a+0}^{b-0} \frac{x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}dx, \quad a,b\in\mathbf{R},\ a<b;$

28) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{4+3\cos x};$

29) $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx;$

30) $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}dx;$

31) $\displaystyle\int_{-1+0}^{1-0} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\ln\frac{1+x}{1-x}dx;$

32) $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

33) $\displaystyle\int_{1+0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}};$

34) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx, \quad a>0;$

35) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx;$

36) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{x\ln x}{(x^2+1)^3}dx;$

37) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{x^3 \ln x}{(x^4+1)^3}\, dx;$

38) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx;$

39) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\, dx.$

2. (integralele lui Froullani) Fie $a, b > 0$ şi $f :]0,\infty[\to \mathbf{R}$ o funcţie continuă. Să se demonstreze că:

a) Dacă există şi sunt finite limitele $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) =: f(0+)$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f(\infty)$, atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = [f(0+) - f(\infty)] \ln \frac{b}{a}.$$

b) Dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) =: f(0+)$ şi există $c > 0$ aşa încât integrala improprie $\displaystyle\int_{c}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\, dx$ este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = f(0+) \ln \frac{b}{a}.$$

c) Dacă există şi este finită limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =: f(\infty)$ şi există $c > 0$ aşa încât integrala improprie $\displaystyle\int_{0+0}^{c} \frac{f(x)}{x}\, dx$ este convergentă, atunci are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = -f(\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

3. Fiind date numerele reale $a, b > 0$, să se calculeze următoarele integrale improprii:

1) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx;$

2) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx;$

3) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{\cos(ax)-\cos(bx)}{x}\, dx;$

4) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{1}{x^2} \ln \frac{(1+ax)^b}{(1+bx)^a}\, dx.$

4. Să se studieze convergenţa următoarelor integrale improprii:

1) $\displaystyle\int_{0}^{1-0} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x^4}};$

2) $\displaystyle\int_0^{1-0} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$, $|k|<1$, (integralele eliptice de speţa întâi);

3) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1+x^2)^{\beta}}$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$;

4) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^{\alpha}\operatorname{arctg} x}{1+x^{\beta}}\,dx$, $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$;

5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4\cos^2 x}$;

6) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2\cos^2 x}\,dx$;

7) $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx$, $\displaystyle\int_0^{\infty} \cos(x^2)dx$, (integralele lui Fresnel);

8) $\displaystyle\int_b^{\infty} \left(\sqrt{\sqrt{x+a}-\sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx$, $a,b>0$;

Concursul William Lowell Putnam 1995

9) $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{\ln x}\,dx$;

10) $\displaystyle\int_{0+0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}}$;

11) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}+0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)^p dx$, $p>0$;

12) $\displaystyle\int_{0+0}^{1-0} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, $a,b\in\mathbf{R}$, (integralele lui Euler de speţa întâi);

13) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$, $a\in\mathbf{R}$, (integralele lui Euler de speţa a doua);

14) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$;

15) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \sin(x\ln x)dx$;

16) $\displaystyle\int_{0+0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{e^x-e^{-x}}\right)dx$.

5. Fie $f:[0,\infty[\,\to[0,\infty[$ o funcţie descrescătoare cu proprietatea $\displaystyle\int_0^{\infty} f(x)dx<\infty$. Să se demonstreze că $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xf(x)=0$.

Berkeley 1983

6. Fie $f:\,]0,\infty[\,\to\,]0,\infty[$ funcţia definită prin

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Să se demonstreze că:

a) pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea $f(x) < \dfrac{1}{x}$.

b) funcţia f este strict descrescătoare.

Berkeley 1985

7. Fie $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$ o funcţie strict crescătoare de clasă C^1. Să se demonstreze că dacă $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)+f'(x)} < \infty$, atunci şi $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{f(x)} < \infty$.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

8. Fie numerele reale $p > 1$ şi $a > 0$, iar $f : [0,\infty[\to [a,\infty[$ o funcţie de clasă C^2. Să se demonstreze că dacă integrala $\displaystyle\int_0^\infty |f''(x)|dx$ este convergentă, atunci şi integrala $\displaystyle\int_0^\infty \frac{[f'(x)]^2}{[f(x)]^p}\,dx$ este convergentă.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

9. Să se demonstreze că dacă $f :]0,\infty[\to]0,\infty[$ este o funcţie de clasă C^1, atunci $\displaystyle\int_{0+0}^\infty \frac{\sqrt{1+(f'(x))^2}}{f(x)}\,dx = \infty$.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

10. Fie $f : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ o funcţie descrescătoare cu proprietatea $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx = \infty$, iar $g : [0,\infty[\to \mathbf{R}$ o funcţie local integrabilă Riemann care păstrează semn constant pe $[0,\infty[$. Să se demonstreze că

$$\int_0^\infty |f(x)\cos x + g(x)\sin x|dx = \int_0^\infty |f(x)\sin x + g(x)\cos x|dx = \infty.$$

W. F. Trench, Amer. Math. Monthly [1988, E3243]

11. Fie $f : [0,1[\to \mathbf{R}$ o funcţie monotonă. Să se demonstreze că limitele

$$\lim_{x\nearrow 1}\int_0^x f(t)dt \qquad \text{şi} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

există şi sunt egale.

M. Bălună, Olimpiada naţională de matematică 1996

12. Să se demonstreze că:

a) pentru fiecare $n \in \mathbf{N}$ există un unic polinom P_n cu coeficienţi reali, de gradul $n-1$, în aşa fel încât

$$\forall\, x \in \mathbf{R} : \qquad \sin nx = \sin x P_n(\cos x).$$

b) are loc egalitatea

$$\int_0^1 P_n^2(t)dt = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}.$$

I. Chiţescu, Olimpiada naţională de matematică 1991

FUNCŢIILE BETA ŞI GAMMA

1. Să se demonstreze că pentru orice $a, y > 0$ are loc egalitatea

$$\int_{0+0}^{\infty} x^{a-1} e^{-xy} dx = \frac{\Gamma(a)}{y^a}.$$

2. Să se demonstreze că

$$B(a,b) = \int_{0+0}^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\, dt \qquad \text{pentru orice } \ a,b>0.$$

3. Să se demonstreze că

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \qquad \text{pentru orice } \ a,b>0.$$

4. Să se demonstreze că:

1) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k}, \quad n \in \mathbf{N};$$

A. M. Rockett, Fibonacci Quart. [1981, pp. 433–437]

2) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impar}}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k}, \quad n \in \mathbf{N};$$

G. Galperin şi H. Gauchman, Amer. Math. Monthly [2004, 724]

3) $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k} \binom{4n}{2k}^{-1} = \frac{4n+1}{2n+1}, \quad n \in \mathbf{N};$$

T. Trif, Fibonacci Quart. [2000, 80]

4) $$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \binom{2n}{k}^{-1} = -\frac{1}{2n-1}, \quad n \in \mathbf{N};$$

WMC Problems Group, Amer. Math. Monthly [1996, 74]

5) $$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n+m}{p+k}^{-1} = \frac{n+m+1}{n+1} \binom{n}{p}^{-1}, \quad m,n,p \in \mathbf{N},\ p \le n;$$

Concursul William Lowell Putnam 1987

N. Pavelescu, Gaz. Mat. [1992, 230]

6) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m+n}{m+k}^{-1} = \frac{m+n+1}{m+n+2} \left(\binom{m+n+1}{m}^{-1} + (-1)^n \right), \quad m,n \in \mathbf{N};$$

T. Trif, Fibonacci Quart. [2000, 81]

7) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{mk}{nk}^{-1} = \int_0^1 \frac{1+(m-1)t^n(1-t)^{m-n}}{(1-t^n(1-t)^{m-n})^2}\,dt, \quad m,n\in\mathbf{N},\ m>n;$

T. Trif, Fibonacci Quart. [2000, 82]

8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}^{-1} = \frac{4}{3}+\frac{2\pi\sqrt{3}}{27};$

9) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{4k}{2k}^{-1} = \frac{16}{15}+\frac{\pi\sqrt{3}}{27}-\frac{2\sqrt{5}}{25}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2};$

10) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}^{-1} = \frac{n}{n-1}, \quad n\in\mathbf{N},\ n\geq 2;$

J. Pla, Fibonacci Quart. [1997, pp. 342–345]

11) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k+1}(k!)^2}{(2k+1)!} = \pi.$

J. C. R. Li, Amer. Math. Monthly

5. Să se demonstreze că

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\left(1-\sqrt[n]{\operatorname{tg} x}\right)dx = -\frac{\pi^3}{16}.$$

M. Stănean, Gaz. Mat. (Ser. A) [1989, 192]

6. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive şi fie $a = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$. Să se demonstreze că

$$\Gamma(a_1)^{\Gamma(a_1)}\cdot\Gamma(a_2)^{\Gamma(a_2)}\cdots\Gamma(a_n)^{\Gamma(a_n)} \geq e^{n(\Gamma(a)-1)}.$$

Z. F. Stark, Amer. Math. Monthly [1996, 695]

SPAŢIUL EUCLIDIAN $\mathbf{R}^n$

1. Fie $a = (3,\ -2,\ -4) \in \mathbf{R}^3$ şi $b = (8,\ 6,\ 3) \in \mathbf{R}^3$. Să se determine $a+b$, $a-b$, $-3a+b$, $\langle a,\ b\rangle$, $\|a\|$, $\|b\|$, $d(a,b)$.

2. Să se demonstreze inegalitatea lui Cauchy-Buneakovski-Schwarz:

$$\forall\ \ x, y \in \mathbf{R}^n\ \ : \qquad |\langle x,\ y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,\ x\rangle}\sqrt{\langle y,\ y\rangle}.$$

3. Să se demonstreze identitatea paralelogramului:

$$\forall\ \ x, y \in \mathbf{R}^n\ \ : \qquad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

4. Fiind date numerele reale $p, q > 1$, cu proprietatea $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, să se demonstreze că:

1° Are loc inegalitatea lui Young

$$\forall\ \ a, b \in [0, \infty[\ \ : \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2° Are loc inegalitatea lui Hölder

$$\forall\ \ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty[\ \ : \quad \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

5. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se demonstreze că are loc inegalitatea lui Minkowski

$$\forall\ \ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in [0, \infty[\ \ : \quad \left[\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

6. Fiind dat numărul real $p \geq 1$, să se demonstreze că funcţia $\|\cdot\|_p : \mathbf{R}^n \to [0, \infty[$, definită prin

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Minkowski* pe $\mathbf{R}^n$.

7. Fie X un spaţiu liniar real şi $\|\cdot\| : X \to [0, \infty[$ o normă pe X. Se spune că norma $\|\cdot\|$ provine dintr-un produs scalar dacă există un produs scalar $\langle\cdot, \cdot\rangle$ pe X, cu proprietatea $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pentru orice $x \in X$. Să se demonstreze că norma Minkowski $\|\cdot\|_p$ pe $\mathbf{R}^n$, unde $p \geq 1$, provine dintr-un produs scalar dacă şi numai dacă $p = 2$.

8. Să se demonstreze că funcţia $\| \cdot \|_\infty : \mathbf{R}^n \to [0, \infty[$, definită prin

$$\|x\|_\infty := \max\{\, |x_1|, \ldots, |x_n| \,\} \quad \text{oricare ar fi } x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n,$$

este o normă, numită *norma Cebîşev* pe $\mathbf{R}^n$. Să se arate că norma Cebîşev nu provine dintr-un produs scalar.

9. Să se demonstreze că pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$ are loc egalitatea $\lim\limits_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

10. Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbf{R}^n$ şi orice $r > 0$ are loc egalitatea $\operatorname{cl} B(a, r) = \bar{B}(a, r)$.

11. Să se demonstreze că pentru orice mulţime $A \subseteq \mathbf{R}^n$ sunt adevărate următoarele relaţii:

1° $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq \operatorname{cl} A$;
2° $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(\mathbf{R}^n \setminus A)$;
3° $\operatorname{cl} A = \mathbf{R}^n \setminus \operatorname{int}(\mathbf{R}^n \setminus A)$;
4° $\operatorname{bd} A = (\operatorname{cl} A) \cap \operatorname{cl}(\mathbf{R}^n \setminus A)$;
5° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) = \operatorname{cl} A$;
6° $(\operatorname{int} A) \cup (\operatorname{bd} A) \cup (\operatorname{ext} A) = \mathbf{R}^n$;
7° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;
8° $(\operatorname{int} A) \cap (\operatorname{ext} A) = \emptyset$;
9° $(\operatorname{ext} A) \cap (\operatorname{bd} A) = \emptyset$;
10° $\operatorname{cl} A = A \cup A'$.

12. Să se demonstreze că pentru orice mulţimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ are loc egalitatea

$$\operatorname{cl}(A_1 \cup A_2) = (\operatorname{cl} A_1) \cup (\operatorname{cl} A_2).$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale lui $\mathbf{R}^n$ are loc egalitatea

$$\operatorname{cl}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \operatorname{cl} A_i \ ?$$

13. Să se demonstreze că pentru orice mulţimi $A_1, A_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ are loc egalitatea

$$(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2'.$$

Este adevărat că pentru orice familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulţimi ale lui $\mathbf{R}^n$ are loc egalitatea

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)' = \bigcup_{i\in I} \mathrm{A}_i' \ ?$$

14. Să se determine

$$\lim_{k\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{k \text{ radicali}},\ \sum_{j=1}^{k}\frac{b(j)}{j(j+1)}\right),$$

unde $b(j)$ este numărul cifrelor 1 din reprezentarea binară a lui j (de exemplu, $b(6) = b(110_2) = 2$, $b(8) = b(1000_2) = 1$).

15. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie aditivă, adică o funcţie cu proprietatea

$$\forall\ \ x, y \in \mathbf{R}\ :\quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

şi fie

$$\operatorname{graph}(f) := \{\ (x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\,\}$$

graficul lui f. Să se demonstreze că:

a) Dacă f este continuă în cel puţin un punct, atunci f este continuă pe $\mathbf{R}$.

b) Dacă f este continuă în cel puţin un punct (deci pe $\mathbf{R}$), atunci $\forall\ \ x \in \mathbf{R}\ :$ $f(x) = cx$, unde $c = f(1)$.

c) Dacă f este discontinuă pe $\mathbf{R}$, atunci $\operatorname{cl}\operatorname{graph}(f) = \mathbf{R}^2$, adică $\operatorname{graph}(f)$ este o submulţime densă a lui $\mathbf{R}^2$.

16. Fie (x^k) un şir convergent de puncte din $\mathbf{R}^n$ şi $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^k$. Să se demonstreze că mulţimea $A = \{x\} \cup \{\, x^k \mid k = 1, 2, \ldots\}$ este compactă.

17. Fiind date mulţimile $A, B \subseteq \mathbf{R}^n$, notăm

$$A + B := \{\, x \in \mathbf{R}^n \mid \exists\, a \in A \text{ şi } \exists\, b \in B\ :\ x = a + b\,\}.$$

a) Să se demonstreze că dacă una dintre mulţimile A şi B este închisă, iar cealaltă este compactă, atunci mulţimea $A + B$ este închisă.

b) Daţi exemplu de mulţimi închise A şi B pentru care mulţimea $A + B$ nu este închisă.

LIMITE ALE FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE
CONTINUITATEA FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

1. Daţi exemplu de funcţii f, $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, care îndeplinesc următoarele condiţii:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$;

(ii) $\lim\limits_{y\to 1} f(y) = 2$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 0} (f \circ g)(x) \neq 2$.

2. Să se calculeze următoarele limite:

1) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$;

2) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$;

3) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

4) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

5) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{xy}$;

6) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}$;

7) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

8) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$;

9) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2y^2(x^2+y^2)}$;

10) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{x^4+y^4}$;

11) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+x^2y^2\right)^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$;

12) $\displaystyle \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1\cdots x_n}{x_1^2+\cdots+x_n^2}, \qquad n \in \mathbf{N}$;

13) $\displaystyle \lim_{(x_1,\ldots,x_n)\to 0_n} \frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{x_1\cdots x_n}, \qquad n,p \in \mathbf{N}$.

3. Fie A o submulţime compactă a lui $\mathbf{R}^n$, fără puncte izolate, iar $f : A \to \mathbf{R}$ o funcţie având limită finită în fiecare punct al lui A. Să se demonstreze că f este mărginită.

4. Fie $A = [0,1[\, \times [0,1[$ şi $f : A \to \mathbf{R}$ funcţia definită prin

$$f(x,y) = \sum_{\frac{1}{2} \le \frac{m}{n} \le 2} x^m y^n,$$

unde sumarea se face pentru toate perechile de numere naturale (m,n) care satisfac inegalităţile indicate. Să se determine $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (1-xy^2)(1-x^2y)f(x,y)$.

Concursul William Lowell Putnam 1999

5. Să se demonstreze că pentru orice număr natural $n \ge 2$ există o funcţie $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că toate cele $n!$ limite iterate

$$\lim_{x_{\sigma(1)}\to 0} \lim_{x_{\sigma(2)}\to 0} \cdots \lim_{x_{\sigma(n)}\to 0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \sigma \in S_n$$

există şi sunt distincte două câte două.

Olimpiadă studenţească, U.R.S.S.

6. Fie B o submulţime închisă nevidă a lui $\mathbf{R}^n$ şi $f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q : B \to \mathbf{R}$ funcţii continue pe B. Să se demonstreze că mulţimea

$$A = \{\, x \in B \mid f_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p,\ g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, q \,\}$$

este închisă.

7. Să se demonstreze că norma euclidiană este o funcţie continuă de la $\mathbf{R}^n$ în $[0, \infty[$.

8. Fie A o submulţime compactă nevidă a lui $\mathbf{R}^n$ şi $f : A \to A$ o funcţie cu proprietatea

$$\forall \ \ x, y \in A \text{ cu } x \ne y \ : \qquad \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Să se demonstreze că f are un unic punct fix în A.

9. Fie $f : B(0_n, 1) \to B(0_n, 1)$ o funcţie continuă cu proprietatea

$$\forall \ \ x \in B(0_n, 1) \setminus \{0_n\} \ : \qquad \|f(x)\| < \|x\|.$$

Fiind dat un punct oarecare $x^0 \in B(0_n, 1)$, se construieşte recursiv şirul (x^k) punând $x^k := f\left(x^{k-1}\right)$. Să se demonstreze că $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = 0_n$.

Berkeley 1991