Probleme MATLAB

11 decembrie 2013

Cuprins

1 Introducere

Problema 1 *Evaluaţi următoarele expresii matematice în MATLAB:*

a) $\tanh(e)$ *b)* $\log_{10}(2)$ *c)* $log_2 10$

d) $\left|\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right|$ *e)* $123456 \bmod 789$ *f)* $\arg(1+i\sqrt{2})$

Problema 2 MATLAB furnizează unele date interesante. De exemplu, încercaţi:

```
load usapolygon, plot(uslon,uslat)
```

Utilizaţi `who` sau Workspace browser pentru a vedea de unde provin datele.

Problema 3 Care este numele funcţiei predefinite MATLAB utilizate pentru

1. a calcula funcţia Bessel de speţa a doua?
2. a testa primalitatea unui întreg?
3. a înmulţi două polinoame?
4. a reprezenta grafic un câmp de vectori?
5. a obţine timpul şi data curentă?

Problema 4 Găsiţi o funcţie în MATLAB Central File Exchange care permite ştergerea celui mai recent obiect grafic creat printr-o linie de comandă.

Problema 5 MATLAB se furnizează cu anumite facilităţi predefinite pentru lucrul cu imagini (în special dacă este instalat Image Toolbox). În definitiv, o imagine este reprezentată fie ca un tablou fie ca trei tablouri de valori de intensităţi ale pixelilor. Utilizaţi comenzile

```
>>load durer
>>image(X)
>>colormap(map)
```

pentru a vedea reproducerea unei opere de artă cu temă matematică. Utilizaţi apoi documentaţia online pentru a afla mai multe despre matricea ce apare în opera de artă.

About the MATLAB Treasure Hunt: I load a briefcase with a reward and secure it using a three-digit luggage lock. Teams or individuals work to find the last answer in the hunt and try it as the combination of the lock. The first team to open the lock keeps the bounty.

A MATLAB Treasure Hunt

Follow the directions. You may use only MATLAB and its local online help.

Find the largest prime factor of 20830123:	$\alpha =$ ____________
Find the complete elliptic integral of the first kind, $K(1-1/\alpha^2)$, rounded to three significant digits	$\beta =$ ____________
Find the remainder after the largest possible 32-bit integer in MATLAB is divided by 100β	$\gamma =$ ____________
Find the maximum element in a $\gamma \times \gamma$ symmetric Clement matrix, rounded to the nearest integer:	$\delta =$ ____________
Find the number of minutes that elapsed between January 20, 1961 at 12:51 PM, and July 16, 1969 at 9:32AM.Divide by 100δ, and round to the nearest integer:	$\varepsilon =$ ____________

2 Matrice şi tablouri

Problema 6 Fie A o matrice aleatoare generată cu `rand(8)`. Găsiţi valoarea maximă (a) din fiecare coloanå, (b) din fiecare linie, (c) din întreaga matrice. De asemenea (d) utilizaţi `find` pentru a găsi indicii de linie şi coloană ai tuturor elementelor mai mari decât 0.25.

Problema 7 *Un pătrat magic* este o matrice $n \times n$ în care întregii $1, 2, \ldots, n^2$ apar o singură dată şi sumele pe linii, coloane şi diagonale sunt identice. Comanda MATLAB magic returnează un pătrat magic. Verificaţi ieşirea pentru câteva dimensiuni şi utilizaţi MATLAB pentru a verifica proprietatea sumelor. (Suma de pe diagonala secundară este mai dificilă. Uitaţi-vă în help pentru a vedea cum se poate ,,roti” o matrice.)

Problema 8 Fie A o matrice generică $n \times n$. Afirmaţiile următoare sunt adevărate sau false?

(a) `A^(-1)` este egal cu `1/A`.

(b) `A.^(-1)` este egal cu `1./A`.

Problema 9 Presupunem că `p` este un vector linie de coeficienţi polinomiali ordonaţi descrescător după puterile variabilei. Ce face comanda de mai jos?

```
(length(p)-1:-1:0).*p
```

Problema 10 (a) Căutaţi `diag` în help-ul online şi utilizaţi-l (de mai multe ori) pentru a construi matrice 16×16

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) Citiţi apoi despre `toeplitz` şi utilizaţi-o pentru a genera D.

(c) Utilizaţi `toeplitz` sau orice altceva este necesar pentru a construi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 8 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 7 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{7} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{6} & \ddots & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{7} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Cea de-a doua matrice arată mai bine cu `format rat`.

Problema 11 Presupunem că A este o matrice arbitrară. Ce face instrucţiunea următoare?

```
A(1:size(A,1)+1:end)
```

Problema 12 (a) Presupunem ca A este o matrice cu elementele strict pozitive. Scrieţi o linie de cod care înmulţeşte fiecare coloană a lui A cu un scalar astfel ca în matricea rezultat suma fiecărei coloane să fie 1.

(b) Încercaţi varianta mai dificilă: Presupunem că A poate avea şi elemente 0 şi lăsaţi coloanele lui A a căror sumă este 0 neschimbate.

Problema 13 Găsiţi o expresie MATLAB de un rând pentru a genera matricea A cu elementele

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i - j \text{ este prim} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Problema 14 Presupunem că reprezentăm un pachet de 52 de cărţi de joc printr-un vector `v` ce conţine elementele de la 1 la 52. Arătaţi cum se poate ,,amesteca" `v` aranjându-i conţinutul în ordine aleatoare. (Notă: un răspuns foarte simplu la problemă se poate obţine dacă căutăm suficient de mult.)

Problema 15 Fie `B=bucky` şi facem o serie de spy pe B^2, B^3, etc. pentru a vedea fenomenul *fill-in* (umplere): multe operaţii, printre care şi înmulţirea, cresc densitatea elementelor nenule. Puteţi explica de ce elementul (i, j) din B^n este numărul de drumuri de lungime n între nodurile i şi j? Ce fill-in se observă la `inv(B)`?

3 Script-uri şi funcţii

Problema 16 Scrieţi o funcţie `quadform` care rezolvă o ecuaţie de gradul al doilea cunoscând coeficienţii, aplicâd formulele cunoscute. Scrieţi o funcţie `quadform2` bazată pe o strategie diferită. Calculaţi întâi

$$x_1 = \frac{-b - sign(b)\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

care este rădăcina cea mai mare în modul şi apoi utilizaţi relaţia $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ pentru a determina x_2. Aplicaţi apoi atât `quadform` cât şi `quadform2` pentru a găsi rădăcinile ecuaţiei $x^2 - (10^7 + 10^{-7})x + 1 = 0$. Explicaţi de ce `quadform2` este mai bună.

Problema 17 Polinoamele Cebîşev de grad n se definesc prin

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \qquad x \in [-1, 1].$$

Ele verifică $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, şi relaţia de recurenţă

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \qquad n \geq 1.$$

Scrieţi o funcţie `chebeval(x,N)` care evaluează toate Polinoamele Cebîşev de grad $\leq$ `N` în toate punctele vectorului coloană `x`. Rezultatul va fi un tablou de dimensiune `length(x)` pe `N+1`.

Problema 18 Un mod de a calcula funcţia exponenţială e^x este de a considera dezvoltarea Taylor trunchiată în jurul lui $x = 0$,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.$$

Din nefericire pentru $|x|$ mare, pentru a atinge o precizie dată este nevoie de un număr mare de termeni. O proprietate specială a exponenţialei este $e^{2x} = (e^x)^2$. Aceasta conduce la o metodă numită scalare şi ridicare la pătrat (scaling and squaring method): se împarte x la 2 repetat până când $|x| < 1/2$, şi se utilizează dezvoltarea Taylor (16 termeni sunt mai mult decât este necesar), şi se ridică la pătrat repetat. Scrieţi o funcţie `expss(x)` care realizează aceşti trei paşi. (Funcţiile `cumprod` şi `polyval` pot ajuta la implementarea dezvoltării Taylor.) Testaţi funcţia dumneavoastră pentru $x = -30, -3, 3, 30$.

Problema 19 Fie `x` şi `y` vectori coloană ce descriu vârfurile unui poligon, date în ordine. Scrieţi funcţiile `polyperim(x,y)` şi `polyarea(x,y)` care calculează perimetrul şi aria unui polygon. Pentru arie, utilizaţi o formulă bazată pe teorema lui Green:

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k)\right|.$$

Aici n este numărul de vârfuri şi prin definiţie, $x_{n+1} = x_1$ şi $y_{n+1} = y_1$. Testaţi funcţia pentru un pătrat şi pentru un triunghi echilateral.

Problema 20 Presupunem că o sursă de date produce o secvenţă de caractere extrase dintr-o mulţime de M simboluri distincte. Dacă simbolul k este produs cu probabilitatea p_k, entropia sursei se defineşte prin

$$H = -\sum_{k=1}^{M} p_k \log_2 p_k.$$

În esenţă H_1 este numărul de biţi pentru un simbol necesari la codificarea unui mesaj lung, adică el măsoară cantitatea de informaţie şi deci numărul de biţi necesari într-o strategie de compresie. Valoarea $H = 0$ corespunde cazului când se produce un singur simbol —nici o informaţie— în timp ce dacă toate cele M simboluri au aceeaşi probabilitate, atunci $H_2 = \log_2 M$. Scrieţi o funcţie `[H,M] = entropy(v)` care calculează entropia unui vector v. Probabilităţile vor fi calculate empiric determinând simbolurile distincte (utilizând `unique`), şi apoi numărând apariţiile fiecărui simbol şi împărţind la lungimea lui `v`. Testaţi funcţia pe o imagine mare existentă în MATLAB, de exemplu tastând `load clown, v = X(:);`.

4 Funcţii

Problema 21 Scrieţi o funcţie `plusone(f,x)` care, dându-se o funcţie f şi o valoare x, returnează $f(x) + 1$.

Problema 22 Scrieţi o funcţie `trap(f,a,b,n)` aproximează $\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x$ prin metoda trapezelor

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(n)\right],$$

unde $h = (b-a)/n$ şi $x_i = a + ih$. Testaţi funcţia dumneavostră pentru $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ şi $0 \le x \le \pi/3$. Scrieţi o funcţie `simp` pentru regula lui Simpson,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\,x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right].$$

Această formulă necesită ca n să fie par. În acest scop puteţi verifica parametrul de intrare.

Problema 23 Scrieţi o funcţie `bisect(f,a,b,tol)` care aplică metoda înjumătăţirii pentru a determina o valoare a lui x pentru care $f(x) = 0$. Primul parametru este un function handle pentru f. Presupunând că f este continuă şi că $f(a)f(b) < 0$, funcţia are cel puţin o rădăcină în intervalul (a, b). Definim $m = (a + b)/2$ şi dacă $f(m) \neq 0$, atunci fie $f(a)f(m) < 0$ fie $f(b)f(m) < 0$, deci rădăcina este fie în (a, m) fie în (m, b). Precesul se continuă până când rădăcina este conţinută într-un interval de lungime mai mică decât `2*tol` şi apoi se opreşte. Un code bun nu va evalua f mai mult decât este necesar.

Problema 24 Scrieţi o funcţie `newton(f,fprime,x0,tol)` care implementează metoda lui Newton pentru determinarea unei rădăcini a unei funcţii scalare:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Primele două intrări sunt function handle pentru parametrii f şi f', iar a treia este o aproximaţie iniţială a rădăcinii. Se continuă iteraţia până când fie $|f(x_{n+1})|$ fie $|x_{n+1} - x_n|$ este mai mică decât `tol`.

Problema 25 Modificaţi `newton` din exerciţiul precedent astfel ca ea să luceze şi pentru un sistem de ecuaţii $F(x) = 0$. Funcţia `fprime` returnează acum matricea jacobiană `J`, iar pasul de actualizare Newton se scrie matematic sub forma

$$x_{n+1} = x_n - J^{-1}F(x_n),$$

deşi în practica numerică nu se calculează inversa jacobianului, ci se rezolvă un sistem de ecuaţii liniare în care $F(x_n)$ apare în membrul drept.

Problema 26 Multe instrumente financiare simple, care au plăţi regulate egale, cum ar fi împrumuturile pentru maşini sau anuităţile pentru investiţii, pot fi modelate prin ecuaţia

$$F = P\left(\frac{(1 + r)^t - 1}{r}\right),$$

unde P plată regulată, r este rata fixă a dobânzii (de exemplu, $r = 0.05$ pentru 5% dobândă), t este numărul de intervale de plată scurse, iar $F(t)$ este valoarea acumulată a instrumentului la momentul t. Această ecuaţi nu este uşor de rezolvat în raport cu r. Scrieţi un script sau o funcţie care determină r când $P = 200$, $t = 30$ şi F ia valorile 10000, 15000, ..., 40000.