Seminar 1

Ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

1.1 Introducere

Definiţia 1.1.1 *Ecuaţia funcţională ce conţine ca necunoscută o funcţie, derivatele acesteia şi variabila independentă se numeşte* ***ecuaţie diferenţială****.*

x $\rightarrow$ variabila independentă
$y(x)$ $\rightarrow$ funcţia necunoscută

$$F(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x) = 0 \tag{1.1}$$

Exemplul 1.1.1 *Exemple de ecuaţii diferenţiale:*

1. $2y' + y = 2x$

2. $\frac{1}{x}y'' + (y')^2 = \sin x$

Definiţia 1.1.2 *Fie* $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*,* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$*, domeniu. Ecuaţia diferenţială:*

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \tag{1.2}$$

se numeşte ***ecuaţie diferenţială de ordinul n în formă explicită*** *sau* ***în formă normală Cauchy****.*

Definiţia 1.1.3 *O funcţie* $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ *se numeşte* ***soluţie*** *a ecuaţiei (1.2) dacă:*

(i) $I \subset \mathbb{R}$ *este interval nedegenerat;*

(ii) $y \in C^n(I)$ *şi* $\big(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)\big) \in \Omega$ *pentru orice* $x \in I$*;*

(iii) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ *pentru orice* $x \in I$*;*

Definiţia 1.1.4 *Graficul unei soluţii*

$$G_y = \{(x, y(x)) : x \in I\} \subset \Re^2 \tag{1.3}$$

se numeşte ***curbă integrală****.*

În acest seminar vom studia ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi în formă normală rezolvabile efectiv.

$$y'(x) = f(x, y(x)) \tag{1.4}$$

1.2 Ecuaţii cu variabile separabile

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi în formă normală cu variabile separabile au următoarea formă:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y), \tag{1.5}$$

unde $f \in C(I)$, $g \in C(J, \mathbb{R}^*)$, $J \subset \mathbb{R}$, sunt continue.

Fie y o soluţie a ecuaţiei (1.5) şi $f :]x_1; x_2[\to \mathbb{R}$, $g :]y_1; y_2[\to \mathbb{R}^*$. Din (1.5) obţinem:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

Ştiind că $y' = \frac{dy}{dx}$ deducem:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

Fie $x_0 \in]x_1; x_2[$ şi notăm cu $y_0 = y(x_0)$. Integrăm relaţia de mai sus:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)} = \int_{x_0}^{x} f(s)ds. \tag{1.6}$$

Considerăm funcţia:

$$G(\xi) = \int_{y_0}^{\xi} \frac{dt}{g(t)},$$

funcţie ce este derivabilă şi strict monotonă datorită semnului funcţiei g, fapt ce asigură existenţa inversei G^{-1}. Astfel din relaţia (1.6) obţinem:

$$G(y) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \Longrightarrow$$

$$y(x) = G^{-1}\left(\int_{x_0}^{x} f(s)ds.\right) \tag{1.7}$$

Reciproc se poate arăta că orice funcţie de forma (1.7) este soluţie a ecuaţiei (1.5).

Observaţia 1.2.1 *Dacă există $y_0 \in]y_1; y_1[$ astfel încât $g(y_0) = 0$ atunci funcţia constantă $y(x) \equiv y_0$ este soluţie a ecuaţiei (1.5). Astfel de soluţii se numesc **soluţii singulare**.*

Exerciţiul 1.2.1 *Să se rezolve ecuaţiile diferenţiale:*

1. $y' = 2x(1 + y^2)$;

2. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$;

3. $xy' = y^3 + y$;

4. $xy + (2x-1)y' = 0$;

5. $y' = k \cdot \dfrac{y}{x}, \quad k \in \mathbb{R}^*$;

6. $y - xy' = a(1 + x^2y'),\ a \in \mathbb{R}^*$.

Rezolvare.

1. $f(x) = 2x$,

   $g(y) = 1 + y^2 > 0$

   $$\frac{y'}{1+y^2} = 2x \Longrightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{x_0}^{x} 2sds \Longrightarrow arctg(y) - arctg(y_0) = x^2 - x_0^2 \Longrightarrow$$

   $arctg(y) = x^2 + c \Longrightarrow y = tg(x^2 + c), \quad c \in \Re$.

Observaţia 1.2.2 *Orice funcţie de forma de mai sus definită pe un interval este soluţie a ecuaţiei.*

2. $y' = -\dfrac{2x}{x^2-1} \cdot y^2$

   $f(x) = -\dfrac{2x}{x^2-1}, \quad f : \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} \to \mathbb{R}$

   $g(y) = y^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

   Se observă că pentru $y_0 = 0 \Longrightarrow g(y_0) = 0$. Astfel $y \equiv 0$ este soluţie singulară.

   Pentru cazul în care $y \neq 0$ avem;

   $$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2-1}dx \Longrightarrow -y^{-1} = -\ln|x^2-1| + c \Longrightarrow y(x) = \frac{1}{\ln|x^2-1| + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Conform teoriei generale ar trebui să considerăm 5 cazuri distincte corespunzătoare intervalelor, dar cum expresiile primitivelor sunt aceleaşi se pot rezolva simultan toate cazurile.

De exemplu, dacă $c < 0$ atunci soluţiile sunt definite pe intervalele:

$$\left]-\infty; -(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[;\ \left]-(1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; -1\right[;\ ]-1;1[;\ \left]1; (1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}\right[;\ \left](1+e^{-c})^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[.$$

Observaţia 1.2.3 *În ecuaţia iniţială nu apar discontinuităţile $x = -1$ şi $x = 1$. De aceea suntem tentaţi să extindem prin continuitate soluţia atribuindu-i valoarea 0 în $x = -1$ şi $x = 1$. Acest lucru nu este posibil deoarece extensiile obţinute nu sunt funcţii derivabile (nici măcar lateral) în $x = -1$ şi $x = 1$.*

3. Soluţia este: $\ln|y| - \frac{1}{2}arctg(y^2 + 1) = \ln|x| + c$;

4. Soluţii singulare: $y(x) = 0; \quad y(x) = \frac{1}{2}$;

   soluţia generală: $y(x) = c \cdot e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (2x-1)^{-\frac{1}{4}}$;

5. Soluţii singulare: $y(x) = 0$;

   soluţia generală: $y(x) = \pm e^c |x|^k$ sau $y(x) = c\,|x|^k$;

6. Soluţia generală: $y(x) = a + \dfrac{cx}{1+ax}$.

1.3 Ecuaţii omogene în sens Euler

Ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi în formă normală omogenă în sens Euler are următoarea formă:

$$y'(x) = g(x, y), \tag{1.8}$$

unde funcţia g este omogenă de grad 0.

Definiţia 1.3.1 *Funcţia $g(x, y)$ este omogenă de grad k dacă:*

$$g(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k g(x, y).$$

Pentru $k = 0$ avem $g(\lambda x, \lambda y) = g(x, y)$, lucru ce ne permite scrierea ecuaţiei (1.8) în forma:

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.9}$$

Rezolvarea acestei ecuaţii se face prin substituţia:

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Înlocuind în (1.9) obţinem ecuaţia cu variabile separabile:

$$z'(x) = \frac{1}{x} \cdot [f(z) - z]$$

Exerciţiul 1.3.1 *Să se rezolve:*

1. $2x^2 y' = x^2 + y^2$;
2. $y' = -\frac{x+y}{y}$;
3. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$;
4. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$;
5. $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$

Rezolvare.

1. Soluţia generală: $y(x) = x - \frac{2}{\ln|x| + c}$
   soluţie singulară $y(x) = x$;
2. Soluţia generală: $y(x) = \frac{2tg(4x+c) - 8x - 1}{2}$;
3. Soluţia generală: $x - ctg\left(\frac{y-x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = c$;
4. Soluţia generală: $3e^{-2y} + 2e^x = ce^{-2x}$;
5. Soluţia generală: $y = x\arcsin(cx)$;

1.4 Ecuaţii liniare

Forma generală a ecuaţiilor diferenţiale liniare este:

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.10}$$

unde P şi Q sunt funcţii continue. Rezolvarea ecuaţiilor liniare se face astfel:

1. Se rezolvă ecuaţia liniară omogenă:

   $$y' + P(x)y = 0, \tag{1.11}$$

   soluţia generală o notăm cu y_0;

2. Se caută o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene y_p prin metoda variaţiilor constantelor;

3. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare neomogene este:

   $$y = y_0 + y_p \tag{1.12}$$

Exerciţiul 1.4.1 *Să se rezolve:*

1. $y' + y \cdot tg(x) = \frac{1}{\cos(x)}$;
2. $y' + \frac{2}{x} \cdot y = x^3$;
3. $y' + 2x \cdot y = 2xe^{-x^2}$;
4. $xy' - y + x = 0$
5. $\left(\sin^2(y) + xctg(y)\right) \cdot y' = 1$
6. $(2e^y - x)\, y' = 1.$

Rezolvare.

1. $y = c \cdot \cos(x) + \sin(x)$;
2. $y = \frac{x^4}{6} + \frac{c}{x^2}$;
3. $y = (c + x^2)e^{-x^2}$;
4. $x = c \cdot \sin(y) - \sin(y)\cos(y)$;
5. $x = e^y + ce^{-y}$.

Bibliografie

[1] Gh. Micula, P. Pavel, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale prin probleme şi exerciţii*, Ed. Dacia, 1989.

[2] G. Moroşanu, *Ecuaţii diferenţiale. Aplicaţii*, Ed. Acad. RSR, 1989.

[3] V. Olariu, T. Stănăşilă, *Ecuaţii diferenţiale şi cu derivate parţiale*, Ed. Tehnică,1982.