Subiecte Maple

1. (*Ecuatia de grad trei*) Rezolvati ecuatia de gradul 3 in *x*: $x^3 - a\,x + 1 = 0$. Determinati solutiile particulare pentru *a=1,2,...*. Reprezentati grafic polinomul de gradul al treilea care apare in ecuatie intr-un caz in care ecuatia are o radacina reala si intr-un caz in care ecuatia are trei radacini reale.

2. (*Ecuatie neliniara*) Aproximati toate solutiile reale ale ecuatiei $7\cos(x) + x + x^2 = 15$.

3. (*Sistem neliniar*) Gasiti toate solutiile reale ale sistemului:

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\sin(x+y) + \cos(x) = 1 \; .$$

4. (*Sistem neliniar 2*) Evaluati $\sin(x\,y + z)$ cu 5 cifre exacte in cazul cand (x,y,z) este solutia sistemului

$$x + y + z = 1$$
$$3\,x + 2\,y - z = 5$$
$$x\,y + 7\,z^3 = 0 \; .$$

5. (*Sistem neliniar 3*) Gasiti solutiile reale ale sistemului

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$
x+y+z=0
$$x\sin(y\,z) = -1 \; .$$

6. (*Sistem neliniar 4*) Gasiti solutiile reale ale sistemului

$$x^2 + y^2 = 9$$
$$x^3 + y^3 - \sin(x\,y) = 7$$

7. (*Valori complexe*) Reprezentati in planul complex valorile proprii ale unei matrice.

8. (*Patrat magic*) Scrieti o procedura care verifica daca o matrice oarecare este patrat magic (adica sumele elementelor de pe fiecare linie, fiecare coloana si diagonala principala sunt egale). Verificati pentru matricele

$$A := \begin{bmatrix} 92 & 99 & 1 & 8 & 15 & 67 & 74 & 51 & 58 & 40 \\ 98 & 80 & 7 & 14 & 16 & 73 & 55 & 57 & 64 & 41 \\ 4 & 81 & 88 & 20 & 22 & 54 & 56 & 63 & 70 & 47 \\ 85 & 87 & 19 & 21 & 3 & 60 & 62 & 69 & 71 & 28 \\ 86 & 93 & 25 & 2 & 9 & 61 & 68 & 75 & 52 & 34 \\ 17 & 24 & 76 & 83 & 90 & 42 & 49 & 26 & 33 & 65 \\ 23 & 5 & 82 & 89 & 91 & 48 & 30 & 32 & 39 & 66 \\ 79 & 6 & 13 & 95 & 97 & 29 & 31 & 38 & 45 & 72 \\ 10 & 12 & 94 & 96 & 78 & 35 & 37 & 44 & 46 & 53 \\ 11 & 18 & 100 & 77 & 84 & 36 & 43 & 50 & 27 & 59 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 17 & 24 & 1 & 8 & 15 \\ 23 & 5 & 7 & 14 & 16 \\ 4 & 6 & 13 & 20 & 22 \\ 10 & 12 & 19 & 21 & 3 \\ 11 & 18 & 25 & 2 & 9 \end{bmatrix},$$

$$C := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

9. (*Metoda trapezelor)* Aproximati $\int_0^1 \sin(x^3)\, dx$ utilizand metoda trapezelor.

10. (*Integrare prin parti*) Integrati prin parti $\int x^3\, \mathrm{e}^x\, dx$.

11. (*Dreapta 3D*) Determinati punctul de intersectie a dreptei din spatiu care trece prin $A=(2,1,9)$ si $B=(-3,0,1)$ cu planul xOy.

12. (*Paralelogram*) Demonstrati, folosind vectori, ca patrulaterul format din mijloacele laturilor unui patrulater convex oarecare este paralelogram.

13. (*Distanta*) Determinati distanta de la punctul $X=(3,2,5)$ la dreapta ce trece prin punctele $A=(2,0,0)$ si $B=(0,0,4)$.

14. (*Polinom*) Se considera expresia

$$(a\, x^2 + b\, x \sin(y) + c \sin(y))^2 + (a \sin(y)^2 + b\, x)^3 .$$

(a) Rescrieti expresia ca un polinom in x si determinati coeficientul lui x^2 .

(b) Rescrieti expresia ca un polinom in x si $\sin(y)$ si determinati coeficientul lui $x \sin(y)^2$.

15. (*Sir in oglinda*) (a) Construiti o procedra de inversare a unei liste.

(b) Construiti o procedura de transformare a unui sir de caractere intr-o lista de simboluri. Construiti si procedura ce efectueaza transformarea inversa.

(c) Utilizand procedurile construie anterior inversati un sir de caractere. Testati pe sirul "Acesta este un exemplu".

16. (*Calculul valorii lui* π) Pentru aproximarea lui π se poate folosi seria lui Gregory

$$\pi = 4 \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{(n+1)}}{2\, n - 1} \right)$$

daca N este suficient de mare. Care este eroarea absoluta si cea relativa produsa prin aceasta aproximare, daca $N=50000$? Propuneti o metoda mai buna!

17. (*Factorial*) Se doreste calculul numarului de zerouri cu care se termina $n!$ in baza 10. Scrieti o procedura (care accepta *n* la intrare) care face acest calcul (evitand calculul lui *n*!). Testati procedura pentru diverse valori ale lui $(10\, i)!$.

18. (*Matrice*) Gasiti conditia necesara si suficienta ca doua matrice 2x2 simetrice sa comute.

19. (*Catalan*) Constanta lui Catalan poate fi definita in mai multe moduri

$$C = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x}\, dx = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{2 \sin(x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln\left(2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) dx .$$

Se poate reprezenta de asemenea ca o suma

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{\pi \ln(2+\sqrt{3})}{8} + \frac{3\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \operatorname{binomial}(2n,n)}\right)}{8},$$

prima din cele doua sume avand avantajul simplitatii, iar cea de-a doua ca permite un calcul rapid. Scrieti o procedura care calculeaza aproximativ aceasta constanta, considerand un numar potrivit de zecimale in argument.

20. (*Serii*) Demonstrati cu Maple ca

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(\theta)^n \cos(n\,\theta)}{n} = -\ln(\sin(\theta)), \quad \theta \text{ in intervalul } (0, \pi)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} k^2} = 18 - 24\ln(2).$$

Indicatie: la prima suma se calculeaza $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(I\,n\,\theta)} \cos(\theta)^n}{n}$ si se ia partea reala.

21. (*Recurenta integrala*) Stabiliti o relatie de recurenta pentru integrala

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx.$$

Folosind aceasta relatie de recurenta calculati I_n.

22. (*Imprumut*) Presupunem ca imprumutam o suma de *A* unitati monetare de la o banca pentru o perioada de *T* ani de la o banca cu o dobanda anuala de *r* procente. Daca se va plati datoria la o rata anuala constanta *k*, care trebuie sa fie valoarea lui *k* in functie de *A*, *T* si *r*?

Dar daca se face o plata in rate lunare egale? Indicatie: Ecuatia diferentiala care guverneaza rata de schimb a banilor datorati la momentul de timp t este $\frac{\partial}{\partial t} a = r\,a - k$.

Exemplu numeric pentru *A=8000, T=3, r=0.1*.

23. (Haos) Se considera ecuatia cu diferente $x_{n+1} = f(x_n)$, unde $f(x) = r\,x\,(1-x)$, iar r este un numar fixat, numit factorul ratei de crestere. Pornind de la o valoare initiala x_0, ecuatia poate fi utilizata pentru a genera sirul $x_0, x_1, x_2, \ldots$ prin iteratie. Diagrama de scara asociata cu sirul $x_0, x_1, x_2, \ldots$ este diagrama in care punctele ($x_0, 0$), (x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, x_n), ..., (x_n, x_{n+1}), ... sunt unite prin linii.

(a) Ecuatia de mai sus este utilizata in modelarea evolutiei populatiei in generatii succesive. Experimental s-a stabilit ca rata de crestere a populatie umane este r=3.57 (aproximativ). Trasati diagrama pentru aceasta valoare a ratei de crestere.

(b) Studiati influenta ratei de crestere asupra diagramei (prin animatie).

24. (Pendulul) Se considera un pendul de lungime L si cu masa atasata . Fie θ unghiul dintre fir si pozitia verticala. Legea de miscare este exprimata prin ecuatiile

$$L\left(\frac{d^2}{dt^2}\theta(t)\right) + b\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right) + g\,\theta(t) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad D(\theta)(0) = v_0,$$

unde b este coeficientul corespunzator fortei de frecare $F_r(t) = b\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta\right)$, iar v_0 este viteza initiala imprimata pendulului.

(1) Daca $L=g=32$, $\theta_0 = 0$, $v_0 = 2$, $b = 0$, care este perioada pendulului?

(2) Simulati miscarea pendulului pentru $L = \frac{8}{5}$, $b = \frac{32}{5}$, $g = 32$, $\theta_0 = 1$, $v_0 = 2$.

(3) Studiati influenta conditiilor initiale asupra graficului solutiei. Teste numerice pentru:

(a) $v_0 = 0$, $\theta_0 = -1, -.5, .5, 1$;

(b) $\theta_0 = 0$, $v_0 = -2, -1, 1, 2$.

(c) $\theta_0 = 1$, $v_0 = 1$; $\theta_0 = -1$, $v_0 = -1$; $\theta_0 = 1$, $v_0 = 5$; $\theta_0 = -1$, $v_0 = -5$.

25. (*Determinant*) Se cauta o formula generala pentru determinantul de ordinul n al matricei A_n, care are x pe diagonal principala, 1 pe diagonalele alaturate si zero in rest. De exemplu, A_2 = $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$. Gasiti o formula de recurenta, rezolvati recurenta, simplificati si verificati pentru $n = 6$.

26. (*Functii de matrice*) Determinati puterile si radacina patrata a matricei $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27. (*Factor prim*) Gasiti cel mai mare factor prim al unui numar intreg si multiplicitatea sa.

28. Scrieti o rutina pentru calculul unei integrale curbilinii de speta I. Se dau functia, variabilele, o parametrizare a curbei, parametrul si intervalul in care parametrul variaza. Aplicatie: calculati $\int_C xy\, ds$, unde *C* este data de $x = a\,(\cos(t) + t\sin(t))$ si $y = a\,(\sin(t) - t\sin(t))$ iar *t* variaza in $[-\pi, \pi]$.

29. Scrieti o rutina pentru calculul unei integrale curbilinii de speta II. Se dau functia, variabilele, o parametrizare a curbei, parametrul si intervalul in care parametrul variaza. Aplicatie: calculati $\int_C \sqrt{1-x^2}\, dx + x\, dy$, unde *C* este data de $x = \cos(t)$, $y = 2\sin(t)$, *t* variaza in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.