Laborator 10

Se consideră următoarele funcţii:
a) $f : [0,1] \to [0,\infty)$, $f(x) = x^3$, $x \in [0,1]$.
b) $f : [2,5] \to [0,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, $x \in [2,5]$.
c) $f : [-1,2] \to [0,\infty)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \in [-1,0] \\ \frac{1}{x^2}\sin^2\frac{x}{1-x}, & x \in (0,1) \\ \sqrt{2x-x^2}, & x \in [1,2]. \end{cases}$

I. Realizaţi pentru fiecare funcţie de mai sus un program în Matlab care returnează valoarea $f(x)$ pentru x dat din domeniul de definiţie al funcţiei f.

II. Implementaţi în Matlab fiecare din metodele descrise mai jos pentru funcţiile date mai sus. Comparaţi rezultatele obţinute cu metode diferite pentru aceeaşi funcţie.

Integrare Monte-Carlo - versiunea I

Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$ o funcţie integrabilă dată şi $M > 0$ astfel încât $f(x) \leq M$, oricare ar fi $x \in [a,b]$. Considerăm următorii paşi pentru aproximarea integralei $\int_a^b f(x)\,dx$:

• se generează N numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul $[a,b]$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \in [a,b],$$

unde $N \in \mathbb{N}$ este dat ($N = 100, 1000, \ldots$).

• se generează N numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul $[0,M]$:

$$y_1, y_2, \ldots, y_N \in [0,M].$$

• se calculează numărul P de perechi (x_i, y_i) care verifică inegalitatea: $y_i \leq f(x_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$.

• se calculează valoarea aproximativă $\mathcal{A}$ a integralei $\int_a^b f(x)\,dx$: $\mathcal{A} = M(b-a)\dfrac{P}{N}$.

Integrare Monte-Carlo - versiunea II

Fie $f : [a,b] \to [0,\infty)$ o funcţie integrabilă dată. Considerăm următorii paşi pentru aproximarea integralei $\int_a^b f(x)\,dx$:

• se generează N numere aleatoare uniform distribuite pe intervalul $[a,b]$:

$$x_1, x_2, \ldots, x_N \in [a,b],$$

unde $N \in \mathbb{N}$ este dat ($N = 100, 1000, \ldots$).

• se notează: $y_i = (b-a)f(x_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N$.

• se calculează valoarea aproximativă $\mathcal{A}$ a integralei $\int_a^b f(x)\,dx$: $\mathcal{A} = \dfrac{1}{N}\big(y_1 + y_2 + \ldots + y_N\big)$.

Integrare numerică - regula trapezului

Fie $f : [a, b] \to [0, \infty)$ o funcţie integrabilă dată. Considerăm următorii paşi pentru aproximarea integralei $\int_a^b f(x)\, dx$:

• se consideră o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$:

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

unde $N \in \mathbb{N}$ este dat $(N = 100, 1000, \ldots)$.

• se notează: $y_i = f(x_i)$, pentru $i = 1, 2, \ldots, N + 1$.

• se calculează aria $\mathcal{A}_i$ a tranpezului cu vârfurile în punctele de coordonate $(x_i, 0)$, $(x_{i+1}, 0)$, (x_{i+1}, y_{i+1}) şi (x_i, y_i), pentru $i = 1, 2, \ldots, N$.

• se calculează valoarea aproximativă $\mathcal{A}$ a integralei $\int_a^b f(x)\, dx$: $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots + \mathcal{A}_N$.