SEMINARUL 9

Matrici. Determinanţi

1. Folosind proprietăţile determinanţilor arătaţi că:

(a) $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$

(b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -a & b & x & y \\ -a & -b & c & z \\ -a & -b & -c & d \end{vmatrix} = 8abcd$

2. Să se calculeze următorii determinanţi:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, (b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, (c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$, (d) $\begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

3. Calculaţi $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile ecuaţiei $x^3 - 2x^2 + 2x + 17 = 0$.

4. Determinaţi rangul următoarelor matrici (folosind cele două metode cunoscute):

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 3 & 11 \end{pmatrix}$, (c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & -5 & 8 & -4 & 3 \\ 6 & 0 & -1 & 2 & -7 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5. Să se discute în funţie de α şi β rangul matricii $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & 9 & \alpha & 3 \\ 5 & -6 & 10 & \beta \end{pmatrix}$.

6. Determinaţi inversa următoarelor matrici (folosind cele trei metode cunoscute):

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

7. Fie $A, B \in M_3(\mathbb{Z}_3)$, $A = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{1} \\ \hat{2} & \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

Să se arate că sunt inversabile şi să se determine inversele lor.