

Seminar 5

1. Determinati A' pentru multimile

a) $A = \left\{ \frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

b) $A = \mathbb{Q}$

c) $A = (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$

2. Verificati daca functiile urmatoare isi ating valorile extreme si determinati aceste valori

a) $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$

b) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x = 0 \\ x & , x \in (0, 1] \end{cases}$

c) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x\sqrt{1-x^2}$

d) $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x|(1-x)$

3. (**caracterizarea monotoniei cu ajutorul derivatei**) Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o functie derivabila pe intervalul (a, b) . Au loc afirmatiile

a) f este crescatoare pe $(a, b) \iff f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$

b) f este decrescatoare pe $(a, b) \iff f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$

c) Daca $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ este strict crescatoare pe (a, b)

d) Daca $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ este strict descrescatoare pe (a, b)

In general, reciprocele afirmatiilor c) si d) nu sunt adevarate. Justificati.

4. Determinati punctele de optim local ale functiilor de la exercitiul 2.

5. Calculati limitele

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(1+x)^{\frac{1}{x}}} - e^{-x}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha}{e^x}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$