Curs 9 – Complexitatea algoritmilor

- Recursivitate
- Complexitate

Curs 8 – Testarea programelor

- Moștenire, UML
- Unit teste in python
- Depanarea aplicațiilor python

Recursivitate

O noțiune e recursivă dacă e folosit în propria sa definiție.

O funcție recursivă: funcție care se auto-apelează.
Rezultatul este opținut apelând același funcție dar cu alți parametrii

```
def factorial(n):
    """
      compute the factorial
      n  is a positive integer
      return n!
    """
    if n== 0:
        return 1
    return  factorial(n-1)*n
```

- Recursivitate directă: P apelează P
- Recursivitate indirectă: P apelează Q, Q apelează P

Cum rezolvăm probleme folosind recursivitatea:

- Definim cazul de bază: soluția cea mai simplă.
    - Punctul în care problema devine trivială (unde se oprește apelul recursiv)
- Pas inductiv: înpărțim problema într-o variantă mai simplă al aceleași probleme plus ceva pași simplii
    - ex. apel cu n-1, sau doua apeluri recusive cu n/2

```python
def recursiveSum(l):
    """
    Compute the sum of numbers
    l - list of number
    return int, the sum of numbers
    """
    #base case
    if l==[]:
        return 0
    #inductive step
    return l[0]+recursiveSum(l[1:])
```

```python
def fibonacci(n):
    """
    compute the fibonacci number
    n - a positive integer
    return the fibonacci number for a given n
    """
    #base case
    if n==0 or n==1:
        return 1
    #inductive step
    return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2)
```

Obs recursiveSum(l[1:]):

l[1:] - crează o copie a listei l

exercițiu: modificați funcția recursiveSum pentru a evita l[1:]

Recursivitate în python:

- la fiecare apel de metodă se crează o noua tabelă de simboluri (un nou namespace). Această tabelă conţine valorile pentru parametrii şi pentru variabilele locale
- tabela de simboluri este salvat pe stack, când apelul se termină tabela se elimină din stivă

```python
def isPalindrome(str):
    """
      verify if a string is a palindrome
      str - string
      return True if the string is a palindrome False otherwise
    """
    dict = locals()
    print id(dict)
    print dict

    if len(str)==0 or len(str)==1:
        return True

    return str[0]==str[-1] and isPalindrome(str[1:-1])
```

Recursivitate

Avantaje:

- claritate
- cod mai simplu

Dezavantaje:

- consum de memorie mai mare
    - pentru fiecare recursie se crează o nouă tabelă de simboluri

Analiza complexității

Analiza complexități – studiul eficienței algoritmilor.

Eficienţa algoritmilor în raport cu:

- timpul de execuție – necesar pentru rularea programului
- spațiu necesar de memorie

Timp de execuție, depinde de:

- algoritmul folosit
- datele de intrare
- hardwareul folosit
- sistemul de operare (apar diferențe de la o rulare la alta).

Exemplu timp de execuție

```python
def fibonacci(n):
    """
     compute the fibonacci number
     n - a positive integer
     return the fibonacci number for a given n
    """
    #base case
    if n==0 or n==1:
        return 1
    #inductive step
    return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2)
```

```python
def fibonacci2(n):
    """
     compute the fibonacci number
     n - a positive integer
     return the fibonacci number for a given n
    """
    sum1 = 1
    sum2 = 1
    rez = 0
    for i in range(2, n+1):
        rez = sum1+sum2
        sum1 = sum2
        sum2 = rez
    return rez
```

```python
def measureFibo(nr):
    sw = StopWatch()
    print "fibonacci2(", nr, ") =", fibonacci2(nr)
    print "fibonacci2 take " +str(sw.stop())+" seconds"

    sw = StopWatch()
    print "fibonacci(", nr, ") =", fibonacci(nr)
    print "fibonacci take " +str(sw.stop())+" seconds"


measureFibo(32)
```

```
fibonacci2( 32 ) = 3524578
fibonacci2 take 0.0 seconds
fibonacci( 32 ) = 3524578
fibonacci take 1.7610001564 seconds
```

Eficiența algoritmilor

- Eficienţa algoritmilor poate fi definită ca fiind cantitatea de resurse utilizate de algoritm (timp, memorie).

Măsurarea eficienţei:

- analiză matematică a algoritmului - **analiză asimptotică**
  Descrie eficienţa sub forma unei funcţii matematice.
  Estimeaza timpul de execuţie pentru toate intrările pisibile.
- o analiză **empirică** a algoritmului

  determinarea timpului exact de execuţie pentru date specifice

  nu putem prezice timpul pentru toate datele de intrare.

Timpul de execuţie pentru un algoritm este studiat în relaţie cu dimensiunea datelor de intrare.

- Estimăm timpul de execuţie în funcţie de dimensiunea datelor.
- Realizăm o **analiză *asymptotică***. Determinăm ordinul de mărime pentru resursa utilizată (timp, memorie), ne interesează în special pentru cazurile în care datele de inrare sunt mari

Complexitate

- **caz favorabil** - datele de intrare care conduc la timp de execuţie minim
  - *best-case complexity* (BC): $BC(A) = \min_{I \in D} E(I)$
- **caz defavorabil –** date de intrare unde avem cel mai mare timp de execuţie.
  - *worst-case complexity* (WC): $WC(A) = \max_{I \in D} E(I)$
- **caz mediu** - timp de execuție.
  - *average complexity* (AC): $AC(A) = \sum_{I \in D} P(I)E(I)$

A - algoritm; *E(I)* număr de operații; *P(I)* probabilitatea de a avea *I* ca și date de intrare
D – multimea tutoror datelor de intrare posibile pentru un n fixat

Obs. Dimensiunea datelor (n) este fixat (**un numar mare**) caz favorabil/caz defavorabil se referă la un **anumit aranjament al datelor** de intrare care produc timp minim/maxim

Complexitate timp de execuție

- **numărăm pași** (operații elementare) efectuați (de exemplu numărul de instrucțiuni, număr de comparații, număr de adunări).
- numărul de pași nu este un număr fixat, **este o funcție**, notat $T(n)$, este in funcție de dimensiunea datelor (n), nu rezultă timpul exact de execuție
- Se surprinde doar esențialul: cum crește timpul de execuție în funcție de dimensiunea datelor. Ne oferă **ordinea de mărime** pentru timpul de execuție (dacă $n \to \infty$, then $3 \cdot n^2 \approx n^2$).
- putem **ignora constante mici** – dacă $n \to \infty$ aceste constante nu afectează ordinea de mărime.

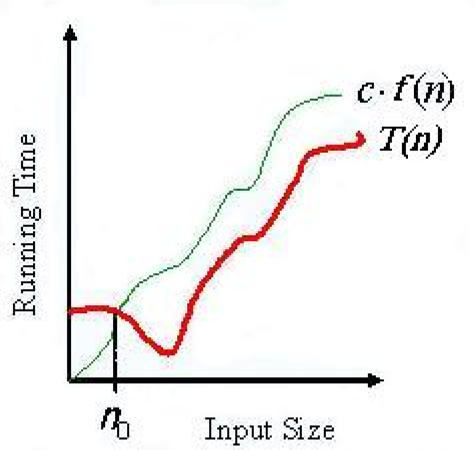
Ex : $T(n) = 13 \cdot n^3 + 42 \cdot n^2 + 2 \cdot n \cdot \log_2 n + 3 \cdot \sqrt{n}$

Fiindcă $0 < \log_2 n < n, \ \forall n > 1$ și $\sqrt{n} < n, \ \forall n > 1$, putem conclude că temenul n^3 domină această expresie cand n este mare

Ca urmare, timpul de execuţie a algoritmului creşte cu ordinul lui n^3, ceea se scrie sub forma $T(n) \in O(n^3)$ şi se citeşte "T(n) este de ordinul n^3

În continuare, vom nota prin *f* o funcţie $f : N \to \Re$ şi prin *T* funcţia care dă complexitatea timp de excuţie a unui algoritm, $T : N \to N$.

<u>Definiţia 1</u> (Notaţia O, "Big-oh"). Spunem că $T(n) \in O(f(n))$ dacă există **c** şi **n₀** constante pozitive (care nu depind de *n*) astfel încât $0 \le T(n) \le c \cdot f(n), \qquad \forall n \ge n_0.$



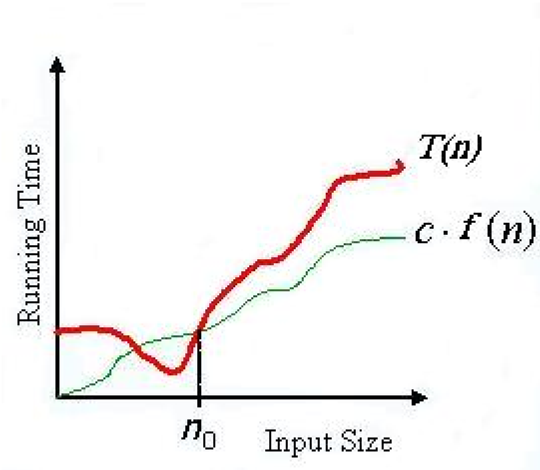
Cu alte cuvinte, notaţia *O* dă marginea superioară

Definiţia alternativă: Spunem că $T(n) \in O(f(n))$ dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ este 0 sau o constantă, dar **nu** ∞.

Observaţii.

1. Dacă $T(n) = 13 \cdot n^3 + 42 \cdot n^2 + 2 \cdot n \cdot \log_2 n + 3 \cdot \sqrt{n}$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^3} = 13$. Deci, putem spune că $T(n) \in O(n^3)$.
2. Notaţia O este bună pentru a da o limită superioară unei funcţii. Observăm, totuşi, că dacă $T(n) \in O(n^3)$, atunci este şi $O(n^4)$, $O(n^5)$, etc atâta timp cât limita este 0. Din această cauză avem nevoie de o notaţie pentru limita inferioară a complexităţii. Această notaţie este Ω.

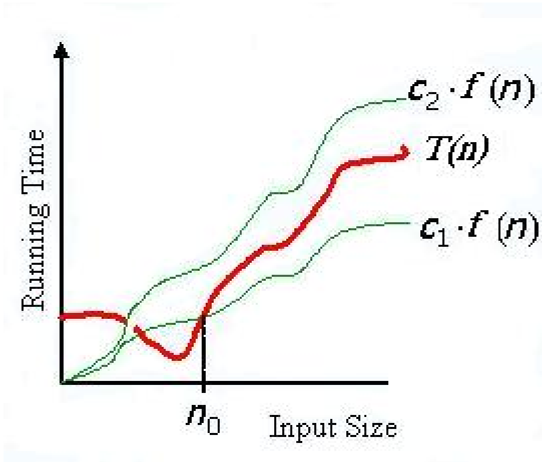
<u>Definiţia 2</u> (Notaţia Ω, “Big-omega”). Spunem că $T(n) \in \Omega(f(n))$ dacă există **c** şi **n_0** constante pozitive (care nu depind de *n*) astfel încât $0 \le c \cdot f(n) \le T(n), \quad \forall n \ge n_0$.



notaţia Ω dă marginea inferioară

Definiţia alternativă: Spunem că $T(n) \in \Omega(f(n))$ dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ este o constantă sau_∞, dar **<u>nu</u>** 0.

<u>Definiţia 3</u> (Notaţia θ, "Big-theta"). Spunem că $T(n) \in \theta(f(n))$ dacă $T(n) \in O(f(n))$ şi dacă $T(n) \in \Omega(f(n))$, altfel spus dacă există **c1, c2** şi $\mathbf{n_0}$ constante pozitive (care nu depind de *n*) astfel încât $c1 \cdot f(n) \leq T(n) \leq c2 \cdot f(n), \quad \forall n \geq n_0$.



notaţia θ mărgineşte o funcţie până la factori constanţi

Definiţia alternativă Spunem că $T(n) \in \theta(f(n))$ dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{f(n)}$ este o constantă nenulă (dar **nu** 0 sau ∞).

Observaţii.

1. Timpul de execuţie al unui algoritm este $\theta(f(n))$ dacă şi numai dacă timpul său de execuţie în cazul cel mai defavorabil este $O(f(n))$ şi timpul său de execuţie în cazul cel mai favorabil este $\Omega(f(n))$.
2. Notaţia $O(f(n))$ este de cele mai multe ori folosită în locul notaţiei $\theta(f(n))$.
3. Dacă $T(n) = 13 \cdot n^3 + 42 \cdot n^2 + 2 \cdot n \cdot \log_2 n + 3 \cdot \sqrt{n}$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^3} = 13$. Deci, $T(n) \in \theta(n^3)$. Acest lucru poate fi dedus şi din faptul că $T(n) \in O(n^3)$ şi $T(n) \in \Omega(n^3)$.

Sume

for i *in range(0, n):*

  #some instructions

presupunând că ceea ce este în corpul structurii repetitive (*) se execută în *f(i)* paşi $\Rightarrow$ timpul de execuţie al întregii structuri repetitive poate fi estimat astfel

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

Se poate observa că, în cazul în care se folosesc bucle imbricate, vor rezulta sume imbricate. În continuare, vom prezenta câteva dintre sumele uzuale:

Calculul se efectueaza astfel:

- se simplifică sumele – eliminăm constantele, separăm termenii in sume individuale
- facem calculul pentru sumele simplificate.

Exemple cu sume

Analizați complexitatea ca timp de execuție pentru următoarele funcții

<pre>def f1(n):
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+i
    return s</pre>
	$T(n)=\sum_{(i=1)}^{n} 1=n \rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
	Complexitate (Overall complexity) $\Theta(n)$
	Cazurile Favorabil/Mediu/Defavorabil sunt identice

<pre>def f2(n):
    i = 0
    while i<=n:
        #atomic operation
        i = i + 1</pre>
	$T(n)=\sum_{(i=1)}^{n} 1=n \rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
	Overall complexity $\Theta(n)$
	Cazurile Favorabil/Mediu/Defavorabil sunt identice

<pre>def f3(l):
   """
   l - list of numbers
   return True if the list contains
an even nr
   """
   poz = 0
   while poz<len(l) and l[poz]%2 !=0:
       poz = poz+1
   return poz<len(l)</pre>
	Caz favorabil:
	primul element e număr par: $T(n)=1 \in \Theta(1)$
	Caz defavorabil:
	Nu avem numere pare în listă: $T(n)=n \in \Theta(n)$
	Caz mediu:
	While poate fi executat 1,2,..n ori (același probabilitate).
	Numărul de pași = numărul mediu de iterații
	$T(n)=(1+2+\ldots+n)/n=(n+1)/2 \rightarrow T(n) \in \Theta(n)$
	Complexitate $O(n)$

Exemple cu sume

```python
def f4(n):
    for i in range(1,2*n-2):
        for j in range(i+2,2*n):
            #some computation
            pass
```

$$T(n)=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}\sum_{(j=i+2)}^{2n}1=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}(2n-i-1)$$

$$T(n)=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}2n-\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}i-\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}1$$

$$T(n)=2n\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}1-(2n-2)(2n-1)/2-(2n-2)$$

...

$T(n)=2n^2-3n+1\in\Theta(n^2)$ Overall complexity $\Theta(n^2)$

```python
def f5():
    for i in range(1,2*n-2):
        j = i+1
        cond = True
        while j<2*n and cond:
            #elementary operation
            if someCond:
                cond = False
```

Caz favorabil: While se execută odată

$$T(n)=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}1=2n-2\in\Theta(n)$$

Caz defavorabil: While executat $2n-(i+1)$ ori

$$T(n)=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}(2n-i-1)=...=2n^2-3n+1\in\Theta(n^2)$$

Caz mediu:

Pentru un i fixat While poate fi executat 1,2..2n-i-1 ori

număr mediu de pași:

$$C_i=(1+2+...+2n-i-1)/2n-i-1=...=(2n-i)/2$$

$$T(n)=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}C_i=\sum_{(i=1)}^{(2n-2)}(2n-i)/2=...\in\Theta(n^2)$$

Overall complexity $O(n^2)$

Formule cu sume:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$ suma constantă.

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$ suma liniară (progresia aritmetică)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$ suma pătratică

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln(n) + O(1)$$ suma armonică

$$\sum_{i=1}^{n} c^i = \frac{c^{n+1}-1}{c-1}, \quad c \neq 1$$ progresia geometrică (crește exponențial)

Complexităţi uzuale

$T(n) \in O(1)$ **- timp *constant*.** It is a great complexity. This means that the algorithm takes only constant time.

$T(n) \in O(\log_2 \log_2 n)$ - timp foarte rapid (aproape la fel de rapid ca un timp constant)

$T(n) \in O(\log_2 n)$ **-** complexitate *logaritmică*:
timp foarte bun (este ceea ce căutăm, în general, pentru orice algoritm);
$\log_2 1000 \approx 10, \quad \log_2 1.000.000 \approx 20$;
complexitate căutare binară, înâlțimea unei arbore binar echilibrat

$T(n) \in O((\log_2 n)^k)$ **-** unde k este factor constant; se numeşte complexitate *polilogaritmică* (este destul de bună);

Complexităţi uzuale

$T(n) \in O(n)$ - complexitate *liniară;*

$T(n) \in O(n \cdot \log_2 n)$ - este o complexitate faimoasă, întâlnită mai ales la sortări (MergeSort, QuickSort);

$T(n) \in O(n^2)$ - *este complexitate pătratică (cuadratică); dacă n este de ordinul milioanelor, nu este prea bună;*

$T(n) \in O(n^k)$ - *unde k este constant; este complexitatea polinomială (este practică dora daca k nu este prea mare);*

$T(n) \in O(2^n), O(n^3), O(n!)$ - complexitate *exponenţială* (algoritmii cu astfel de complexităţi sunt practici doar pentru valori mici ale lui *n*: $n \le 10, n \le 20$).

Recurențe

O **recurență** este o formulă matematică definită recursiv.

Ex. numărul de noduri (notat *N(h)*) dintr-un arbore ternar complet de înălţime *h* ar putea fi descris sub forma următoarei formule de recurenţă:

$$\begin{cases} N(0) = 1 \\ N(h) = 3 \cdot N(h-1) + 1, \qquad h \geq 1 \end{cases}$$

Explicaţia ar fi următoarea:

- Numărul de noduri dintr-un arbore ternar complet de înălţime 0 este 1.
- Numărul de noduri dintr-un arbore ternar complet de înălţime *h* se obţine ca fiind de 3 ori numărul de noduri din subarborele de înălţime *h-1*, la care se mai adaugă un nod (rădăcina arborelui).

Dacă ar fi să rezolvăm recurenţa, am obţine că numărul de noduri din arborele ternar complet de înălţime *h* este $N(h) = 3^h \cdot N(0) + (1 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{h-1}) = \sum_{i=0}^{h} 3^i$

Exemple

<pre>def recursiveSum(l):
    """
    Compute the sum of numbers
    l - list of number
    return int, the sum of numbers
    """
    #base case
    if l==[]:
        return 0
    #inductive step
    return l[0]+recursiveSum(l[1:])</pre>
	Recurrence: $T(n)=\begin{cases} 1 \; for \; n=0 \\ T(n-1)+1 \; otherwise \end{cases}$
	
	$\begin{aligned} T(n)&=T(n-1)+1 \\ T(n-1)&=T(n-2)+1 \\ T(n-2)&=T(n-3)+1 \\ \ldots&=\ldots \\ T(1)&=T(0)+1 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $T(n)=n+1\in\Theta(n)$

<pre>def hanoi(n, x, y, z):
    """
        n -number of disk on the x
stick
        x - source stick
        y - destination stick
        z - intermediate stick
    """
    if n==1:
      print "disk 1 from",x,"to",y
      return
    hanoi(n-1, x, z, y)
    print "disk ",n,"from",x,"to",y
    hanoi(n-1, z, y, x)</pre>
	Recurrence: $T(n)=\begin{cases} 1 \; for \; n=1 \\ 2\mathrm{T}(n-1)+1 \; otherwise \end{cases}$
	
	$\begin{aligned} T(n)&=2T(n-1)+1 \\ T(n-1)&=2T(n-2)+1= \\ T(n-2)&=2T(n-3)+1 \\ \ldots&=\ldots \\ T(1)&=T(0)+1 \end{aligned}$ $\Rightarrow$ $\begin{aligned} T(n)&=2T(n-1)+1 \\ 2T(n-1)&=2^2T(n-2)+2 \\ 2^2T(n-2)&=2^3T(n-3)+2^2 \\ \ldots&=\ldots \\ 2^{(n-2)}T(2)&=2^{(n-1)}T(1)+2^{(n-2)} \end{aligned}$
	
	$T(n)=2^{(n-1)}+1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{(n-2)}$
	
	$T(n)=2^n-1\in\Theta(2^n)$

Complexitatea spaţiu de memorare

Complexitatea unui algoritm din punct de vedere al *spaţiului de memorare* estimează cantitatea de memorie necesară algoritmului pentru stocarea datelor de intrare, a rezultatelor finale şi a rezultatelor intermediare. Se estimează, ca şi *timpul de execuţie* al unui algoritm, în notaţiile O, Θ, Ω .

Toate obsevaţiile referitoare la notaţia asimptotică a complexităţii ca timp de execuţie sunt valabile şi pentru complexitatea ca spaţiu de memorare.

Exemplu

Analizați complexitatea ca spațiu de memorare pentru următoarele funcții

<table>
<tr>
<td>

```
def iterativeSum(l):
    """
    Compute the sum of numbers
    l - list of number
    return int, the sum of numbers
    """
    rez = 0
    for nr in l:
        rez = rez+nr
    return rez
```

</td>
<td>

Avem nevoie de spațiu pentru numerele din listă

$T(n) = n \in \Theta(n)$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

```
def recursiveSum(l):
    """
    Compute the sum of numbers
    l - list of number
    return int, the sum of numbers
    """
    #base case
    if l==[]:
        return 0
    #inductive step
    return l[0]+recursiveSum(l[1:])
```

</td>
<td>

Recurență: $T(n) = \begin{cases} 0 \; for \; n=1 \\ T(n-1)+1 \; otherwise \end{cases}$

</td>
</tr>
</table>

Analza complexității (timp/spațiu) pentru o funcție

1 Dacă există caz favorabil/defavorabil:

- descrie **Caz favorabil**
- calculează complexitatea pentru **Best Case**
- descrie **Worst Case**
- calculează complexitatea pentru **Worst case**
- calculează complexitatea **medie**
- calculează complexitatea **generală**

2 Dacă Favorabil = Defavorabil = Mediu – (nu avem cazuri favorabile/defavorabile)

- calculează complexitatea

Calculează complexitatea:

- dacă avem recurență
  - calculează folosind egalități
- altfel
  - calculează folosind sume

Curs 9 – Complexitatea algoritmilor

- Recursivitate
- Complexitate

Curs 10 – Căutări sortări

- Căutări
- Sortări