31.01.2023

wtorek, 31 stycznia 2023 18:01

Zadanie 2. Zbadać, czy relacja $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ określona wzorem

$$xRy \longleftrightarrow |x-y| \leqslant 4$$

jest relacją równoważności, jeśli tak wyznacz $[1]_R$.

$|x-y| \leq 4$

Relacja równoważności

*) zwrotna $\forall\, xRx$ $\qquad xRx \Leftrightarrow |x-x| \leq 4 \Leftrightarrow |0| = 0 \leq 4$ ✓

*) symetryczna $xRy \rightarrow yRx$ $\qquad xRy$, tzn. $|x-y| \leq 4$ $\qquad |x-y| = |y-x| \leq 4 \rightarrow yRx$

*) przechodnia $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$ $\qquad \boxed{|x-y| \leq 4 \wedge |y-z| \leq 4}$ $\qquad$ ale $|x-z| \not\leq 4$

$-4 \leq x-y \leq 4 \wedge -4 \leq y-z \leq 4$

Zbadamy, czy xRz

tzn. $|x-z| \overset{?}{\leq} 4$

$\underline{\underline{|x-z|}} = |(x-y)+(y-z)| \leq \underbrace{|x-y|}_{\leq 4} + \underbrace{|y-z|}_{\leq 4} \leq 4+4 \leq \underline{\underline{8}}$

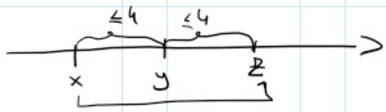
$|x-y|$ = odległość x od y

$|x-y| = |y-x|$

$|x| \leq a$

$-a \leq x \leq a$

$|x+y| \leq |x|+|y|$



$x = 2$

$y = 6$

$z = 10$

$xRy \Leftrightarrow |6-2| = 4 \leq 4$ ok!

$yRz \Leftrightarrow |6-10| = 4$ ok!

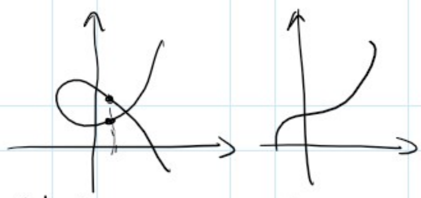
$xRz \Leftrightarrow |2-10| = |-8| = 8 \geq 4$ nie są w relacji

Zatem nie jest relacja równoważności.

Zadanie 3. Zbadać, czy relacja $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ określona wzorem

$$xRy \longleftrightarrow |x| \leqslant |y|$$

jest funkcją.



Nie jest funkcja. $\qquad$ Funkcja.

(Bo dla jednego x przypadają dwie wartości)

$xRy \Leftrightarrow |x| \leq |y|$

Jest funkcja, jeżeli dla każdego x

x przypada jedna wartość y.

Zatem nie jest funkcja, bo dla $x = 1$:

$1R1,\ 1R2,\ 1R3, \ldots$

Zadanie 4. Niech $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \underline{\underline{\mathbb{N}}}$ będzie odwzorowaniem określonym wzorem $f((x,y)) = x^2 + 3$.

$x \in \mathbb{N}$ $y \in \mathbb{N}$

- Czy odwzorowanie f jest różnowartościowe?
- Czy odwzorowanie f jest na?

$f((x,y)) = x^2 + 3$

$f((1,2)) = 1^2 + 3 = 4$

$$f((2,3)) = 4+3 = 7$$

$$f((1,5)) = 4$$

Nie jest różnowartościowa, bo dla różnych pkt. np. $(1,2), (1,5)$

dostajemy taką samą wartość.

b) $f((x,y)) = x^2+3$

$f_1(x) = x^2+3$

$f_1(0) = 3$

$f_1(1) = 4$

$f_1(2) = 7$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

żeby była „na" musi przyjmować wartość w każdej liczbie naturalnej $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Nie jest „na", bo nie przyjmuje np. $y=0$.

2. Pokaż, że $\equiv$ jest relacją równoważności na zbiorze $\mathbb{Z}$, jeśli
(a) $n \equiv k \longleftrightarrow 3|(n+2k)$,
(b) $n \equiv k \longleftrightarrow 5|(n^2-k^2)$.

liczby całkowite

$$nRk \longleftrightarrow 5 \mid (n^2-k^2)$$

- zwrotne $\forall_n \; nRn$ $\quad 5 \mid (n^2-n^2) \Rightarrow 5 \mid 0$ ✓ ok!

- symetryczność $\forall_{n,k} \; nRk \overset{?}{\Rightarrow} kRn$ $\quad (5 \mid (k^2-n^2)?)$

$$5 \mid (n^2-k^2) \longleftrightarrow n^2-k^2 = 5m \quad | \cdot (-1)$$

$$-n^2+k^2 = -5m \quad \exists_{m \in \mathbb{Z}}$$

$$k^2-n^2 = -5m$$

$10 = 5 \cdot 2$

więc k^2-n^2 jest podzielne przez 5.

Więc jest symetryczne.

- nRk i kRm

$5 \mid n^2-k^2$ i $5 \mid k^2-m^2$

$n^2-k^2 = 5a \qquad k^2-m^2 = 5b$

CEL: nRm
$5 \mid n^2-m^2$

$a, b \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} n^2 - k^2 = 5a \\ k^2 - m^2 = 5b \end{cases} \qquad n^2 - m^2$$

$$n^2 - k^2 + k^2 - m^2 = 5a + 5b$$

$$n^2 - m^2 = 5(a+b)$$

Stąd $n^2 - m^2$ jest podzielne przez 5.

Zatem jest przechodnia.

Jest relacją równoważności.