ØVING 1 side 1

Andreas B. Berg

1.2

13) $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

V vektorrom $\Leftrightarrow$ V tilfredsstiller aksiomene for vektorrom.
Ser på aksiom 8: $(a+b)x = ax + bx$
La $a, b \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2) \in V$:
$(a+b)x = (a+b)(x_1, x_2) = ((a+b)x_1, x_2)$
$ax + bx = (ax_1, x_2) + (bx_1, x_2) = ((a+b)x_1, x_2^2)$
Ser at $(a+b)x \neq ax + bx$, så V er ikke vektorrom.

19) $V = \{(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ $\quad c(a_1, a_2) = \begin{cases} (0,0) & : c = 0 \\ (ca_1, \frac{a_2}{c}) & : c \neq 0 \end{cases}$

V vektorrom $\Leftrightarrow$ V tilfredsstiller aksiomene for vektorrom. Ser igjen på aksiom 8.
La $a, b \in \mathbb{R}$, $a+b \neq 0$, $a, b \neq 0$. La $x = (x_1, x_2) \in V$:
$(a+b)x = \left((a+b)x_1, \frac{x_2}{a+b}\right)$
$ax + bx = \left(ax_1, \frac{x_2}{a}\right) + \left(bx_1, \frac{x_2}{b}\right) = \left((a+b)x_1, \frac{x_2}{a} + \frac{x_2}{b}\right)$

Ser at $(a+b)x \neq ax + bx$, så V er ikke vektorrom.

21) La V og W være vektorrom over F. La $Z = \{(v, w) \mid v \in V, w \in W\}$.
Siden V og W er vektorrom, vet vi fra def. at:

(I) $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$, (III) $av_1 \in V$

(II) $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$, (IV) $aw_1 \in W$.

I Z har vi at $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ og $c(v_1, w_1) = (cv_1, cw_1)$. Fra (I)-(IV) over vet vi at dette fortsatt er elementer i Z, så Z er et vektorrom over F.

1.3

19) La $W_1 \subseteq V$, $W_2 \subseteq V$. Skal vise at $W_1 \cup W_2 \subseteq V$ $\Leftrightarrow$ $W_1 \subseteq W_2$ eller $W_2 \subseteq W_1$.

1) "$\Leftarrow$": Hvis $W_1 \subseteq W_2$ vil $W_1 \cup W_2 = W_2$, som er et underrom. Tilsvarende hvis man bytter W_1 og W_2.

2) "$\Rightarrow$": Bruker selvmotsigelse. Anta $W_1 \not\subseteq W_2$, $W_2 \not\subseteq W_1$ og $W_1 \cup W_2 \subseteq V$.

Da finnes det en x så $x \in W_1$, $x \notin W_2$ og en y så $y \in W_2$, $y \notin W_1$. Siden $W_1 \cup W_2 \subseteq V$, vil - fra definisjon - $(y+x) \in W_1 \cup W_2$. Anta $(y+x) \in W_1$.

Siden $x \in W_1$ og $(y+x) \in W_1$, må $-x \in W_1$ og $y = (y+x) - x \in W_1$. Dette strider mot antagelsen om at $y \notin W_1$, så det går ikke.

Dermed har vi vist at $W_1 \cup W_2 \subseteq V \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$ eller $W_2 \subseteq W_1$.

1.4

3)d) $a(2,-1,0) \overset{?}{=} b(1,2,-3) + c(1,-3,2)$

$$\begin{aligned} \text{I}&: & 2a &= b + c \\ \text{II}&: & -a &= 2b - 3c \\ \text{III}&: & 0 &= -3b + 2c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{III}: \quad 0 &= -3b + 2c \\ 0 &= -3\cdot 2 + 2(-3) \\ b &= 2r, \quad c = -3r \end{aligned}$$

$\text{I}: \quad 2a = 2 - 3 = -3 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$

$\text{II}: \quad -a = 2\cdot 2 - 3(-3) = 4 + 9 = 13 \Rightarrow a = -13$

Ser at det ikke finnes en verdi for (a,b,c) så $a(2,-1,0) = b(1,2,-3) + c(1,-3,2)$, så $(2,-1,0)$ kan ikke skrives som en kombinasjon av de andre

 Andreas B. Berg

1.4

15) La S_1 og S_2 være delmengde av V. Vis at $\text{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$

Se på $x \in \text{span}(S_1 \cap S_2)$. Kan skrive

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \quad , \quad x_i \in S_1 \text{ og } x_i \in S_2, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Siden $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ og $x_i \in S_1$, er $x \in \text{span}(S_1)$.

Tilsvarende for S_2, så

$x \in \text{Span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$, så

$\underline{\text{span}(S_1 \cap S_2) \subseteq \text{span}(S_1) \cap \text{Span}(S_2)}$

La $S_1 = \{(1,0)\} = S_2$. Da er $S_1 \cap S_2 = S_1 = S_2 = \{(1,0)\}$, så $\text{span}(S_1 \cap S_2) = \text{span}(S_1) \cap \text{span}(S_2)$

La $S_1 = \{(1,0),(1,1)\}$, $S_2 = \{(1,0),(1,1)\}$. Da er $S_1 \cap S_2 = \{(1,1)\}$, så $\text{span}(S_1 \cap S_2) \underline{= a(1,1)}$, mens $\text{span}\, S_1 \cap \text{span}\, S_2 = \mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^2 \underline{= \mathbb{R}^2}$

1.5

3) Et set er lin. uavhengig $\Leftrightarrow$ $a_1\vec{s}_1 + \dots + a_n\vec{s}_n = \vec{0}$ hvis og bare hvis $a_1 = \dots = a_n = 0$. Ser at

$$1\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\1&1\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix} = \vec{0}, \quad \text{så}$$

<u>Settet er lin. avhengig.</u>

 Andreas B. Berg

1.5

20) Anta $\{f, g\}$ er lin. avhengige. Da har vi at

$af + bg = \vec{0}$, $a, b \neq 0$. La $c = \frac{-b}{a}$, så

$f - cg = \vec{0}$ $\rightsquigarrow$ $f = cg$.

Vet at $f(t) = e^{rt}$, $g(t) = e^{st}$, $r \neq s$. Se på $t=0$:

$f(0) = e^0 = 1 = cg(0) = ce^0 = c$, så $c = 1$.

Se på $t = 1$:

$f(1) = e^r = 1g(1) = e^s$, så $r = s$. Dette strider mot informasjonen vi har fra før, så

<u>$\{f, g\}$ må være lin. uavhengige.</u>

1.6

3) Avgjør om base for $P_2(\mathbb{R}) = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$:

a) $\{(-1 - x + 2x^2), (2 + x - 2x^2), (1 - 2x + 4x^2)\} = B$

Ser at alle $a = -2b$ i alle ledd, så f.eks. er

$x^2 + 7x \in P_3(\mathbb{R})$, men $x^2 + 7x \notin \operatorname{span} B$, så B er <u>ikke basis for $P_2(\mathbb{R})$</u>

b) $\{(1 + 2x + x^2), (3 + x^2), (x + x^2)\} = B$

Sjekker om B er lin. uavhengig, som matrise:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\\1 & 1 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & -6 & 1\\0 & -2 & 1\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & -6 & 1\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\0 & 0 & -2\\0 & 1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$ Ser at denne kan reduseres til I_3, så vektorene er lin. uavh. $\dim(P_2(\mathbb{R})) = 3$, så 3 lin. uavh. vektorer <u>danner en basis, så B er basis for $P_2(\mathbb{R})$.</u>

 Andreas B. Berg

1.6

3) c) $\{(1-2x-2x^2), (-2+3x-x^2), (1-x+6x^2)\} = B$

Sjekker som i oppg. B:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Ser at denne kan reduseres til I_3, så B inneholder 3 lin. uavh. vektorer, og er dermed en basis for $P_2(\mathbb{R})$

24) La $f(x)$ være polynom av grad n i $P_n(R)$. Vis at for alle $g(x) \in P_n(R)$ eksisterer $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ så $g(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \dots + c_n f^{(n)}(x)$, hvor $f^{(i)}(x)$ er i-te deriverte av f.

Vet at $f(x)$ er grad n. Da er $f'(x)$ polynom av grad $n-1$, $f''(x)$ grad $n-2$, ..., $f^{(n)}(x)$ en konstant. Ser på mengden $B = \{f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)\}$. Siden alle elementer i B er polynomer av ulik grad, må B være lin. uavhengig. Siden B inneholder $n+1$ lin. uavh. polynomer, er B en base for $P_n(R)$. Ved definisjonen av base vet vi at alle $g(x) \in P_n(R)$ kan skrives som en lin. kombinasjon av elementene i B, dvs. det finnes $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ så

$$g(x) = c_0 f(x) + c_1 f'(x) + \dots + c_n f^{(n)}(x) \qquad \square$$