ØVING 1 side 1 Andreas B. Berg

1) $(0,1), (0,-1), (2,0), (-2,0), (1,1)$

Setter punktene inn i formel for andregradskurve og finner $A, \dots, F$:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(i) } (0,1) \rightsquigarrow & C + E + F = 0 \\ \text{(ii) } (0,-1) \rightsquigarrow & C - E + F = 0 \end{array}\right\} E = -E \rightsquigarrow E = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(iii) } (2,0) \rightsquigarrow & 4A + 2D + F = 0 \\ \text{(iv) } (-2,0) \rightsquigarrow & 4A - 2D + F = 0 \end{array}\right\} 2D = -2D \rightsquigarrow D = 0$$

$$\text{(v) } (1,1) \rightsquigarrow \quad A + B + C + D + E + F = 0$$

$$A + B + C + F = 0$$
$$A + B = 0$$
$$B = -A$$

(i): $C = -F$ (iii): $4A = -F$

La $F = -4$. Da er

$C = -F = 4$

$A = -\frac{1}{4}F = 1$

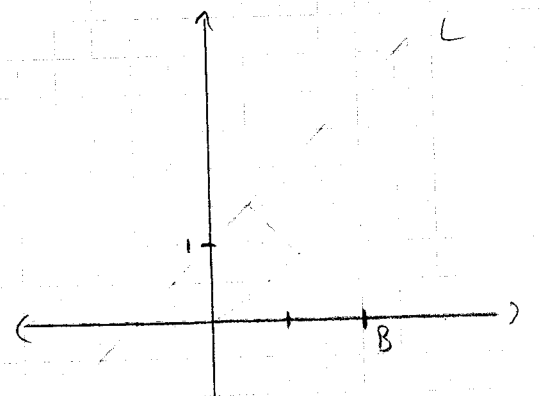
$B = -A = -1$

Så vi har andregradskurven

$$\underline{\underline{x^2 - xy + 4y^2 + 4 = 0}}$$

Andreas B. Berg

2) $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\quad l: \; y = x + 1$ $\quad B = (2, 0)$



Ser at systemet er snudd 45° mot høyre. Dette gir oss

$$x' = \cos(45°)\,x - \sin(45°)\,y = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y$$
$$y' = \sin(45°)\,x + \cos(45°)\,y = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Ser at B' har koordinatene $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Flytter x-aksen så B'' ligger langs denne, og får

$$y'' = y' - \frac{2}{\sqrt{2}} \quad , \quad x'' = x'$$

$$B'' = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Ser på l: $\; 0 = x - y + 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$0 = x' + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightsquigarrow \quad l': \; x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$l'': \; x'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dette gir oss $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $l'': x'' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $L = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ og $B'' = (\sqrt{2}, 0)$

Har da fra notater at

$$\bar{x}'' = \frac{B'' - \varepsilon^2 L''}{1 - \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3/4} = \frac{\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{9\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{2}}$$

 Andreas B. Berg

forts.

2) $a'' = \frac{-\varepsilon(L-\beta)}{1-\varepsilon^2} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)}{3/4} = \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot 4}{3}$

$= \frac{-2\cdot 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{3} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$b'' = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{2}\sqrt{3/4} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Dette gir oss:

$$\underline{\frac{\left(x'' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} + \frac{(y'')^2}{3/2} = 1}$$

$$\underline{\frac{\left(x' - \frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2}{2} + \frac{(y' - \sqrt{2})}{3/2} = 1}$$

$\leadsto \frac{1}{2}\left((x')^2 - 3\sqrt{2}\,x' + \frac{9}{2}\right) + \frac{2}{3}\left((y')^2 - 2\sqrt{2}\,y' + 2\right) = 1$

$\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 - 3(x-y) + \frac{9}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2\right.$

$\left. - 2(x+y) + 2\right) = 1$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - 3x + 3y + \frac{9}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2\right.$

$\left. - 2x - 2y + 2\right) = 1$

$\frac{1}{4}x^2 - \cancel{\frac{1}{2}xy} + \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{9}{4} + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{3}\cancel{y^2}$

$- \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3} = 1$

$\leadsto \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{6}xy + \frac{7}{12}y^2 - \frac{17}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{31}{12} = 0$

$$\underline{\underline{7x^2 + 2xy + 7y^2 - 34x + 2y + 31 = 0}}$$

 Andreas B.Berg

3) a) $x^2 - 2x + 4y^2 = 0$

$B^2 - 4AC = 0 - 4 \cdot 4 = -16 < 0 \Rightarrow$ ellipse

$x^2 - 2x + 1 - 1 + 4y^2 = 0$

$(x+1)^2 + 4y^2 = 1$

$\frac{(x+1)^2}{1} + \frac{y^2}{1/4} = 1 \qquad a = 1 \qquad b = \frac{1}{2} \qquad \bar{x} = -1$

$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1/4}{1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$L = \bar{x} - \frac{a}{\varepsilon} = -1 - \frac{1}{\sqrt{3}/2} = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3}} = \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}$

$B = \bar{x} - \varepsilon a = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

$$\underline{\underline{(\varepsilon, l, B) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ x = -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3},\ \left(-\frac{2+\sqrt{3}}{2}, 0\right)\right)}}$$

b) $2x^2 - y^2 = 2$

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1 \qquad a = \sqrt{2},\ b = 1,\ \bar{x} = 0$

Merk: snudd 90° grader!

$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$L = \bar{y} - \frac{a}{\varepsilon} = 0 - \frac{\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -2$

$B = \bar{y} - \varepsilon a = 0 - \sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = -1$

$$\underline{\underline{(\varepsilon, l, B) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -2,\ (0, -1)\right)}}$$

 Andreas B.Berg

3) c) $y^2 - x + 1 = 0$ $\qquad y^2 = x - 1$

Har da at $2(B - L) = 1 \rightsquigarrow B - L = \frac{1}{2} \rightsquigarrow L - B = -\frac{1}{2}$

og $L^2 - B^2 = -1 \sim (L + B)(L - B) = -1$

$\rightsquigarrow L + B = 2$

$L - B = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow L = B - \frac{1}{2} = \frac{5}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$L + B = 2 \rightsquigarrow B - \frac{1}{2} + B = 2$

$2B = \frac{5}{2}$

$B = \frac{5}{4}$

Vet fra def. at parabel $\Rightarrow \varepsilon = 1$, så

$\underline{(\varepsilon, \ell, B) = \left(1, \; x = \frac{3}{4}, \; \left(\frac{5}{4}, 0\right)\right)}$

4) Siden begge brennpunkt ligger på x-aksen og ellipsen går gjennom origo, har vi at $X_1 = (0, 0) =$ origo.
Har også at styrelinjen er loddrett: $x = L$

La $B_2 = (3, 0)$. Da er $\bar{x} = (2, 0)$, $x_2 = (4, 0)$

$a = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$\varepsilon a = 2\varepsilon = 1 \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{2}$

$l = \bar{x} \pm \frac{a}{\varepsilon} = 2 \pm 4 \qquad L_1 = -2, \; L_2 = 6$

$B_2 = (3, 0), \; l_1: x = -2, \; l_2: x = 6$

Når $\varepsilon \to 1$ vil a øke, mens b minsker, så ellipsen vil bli lengre og smalere ("spissere")
$L_1 \to X_1$ og $L_2 \to X_2$, mens $B_2 \to X_2$
(merk: $\bar{x}$ og x_2 forskyves mot høyre).

4) Ved $\lim_{\varepsilon \to 1}$ vil styrelinjene være på ytterpunktene ($l_1 = x_1$ $l_2 = x_2$), det variable brennpunktet vil være på ytterpunktet ($B_2 = x_2$)
Videre vil ellipsen strekke seg uendelig ut. Ved $\varepsilon = 1$ har vi at $B_1 \in l_1$ og $B_2 \in l_2$. Siden $|PB| = \varepsilon |Pl|$ får vi en linje gjennom $x_1 = B_1$ og $x_2 = B_2$, ortogonal på l_1, dvs. linjen $\underline{\underline{y = 0}}$

Anta hyperbel med $B_1 = (1,0)$ og $\varepsilon > 1$. La $\varepsilon \to 1$

Kall x_1 og x_2 ytterpunkt Når $\varepsilon \to 1$ vil styrelinjene gå mot sine ytterpunkt ($l_1 \to x_1$, $l_2 \to x_2$); og ytterpkt. vil gå mot brennpunktene ($x_1 \to B_1$, $x_2 \to B_2$).

Siden høyre brennpunkt er fast, vil grafen flytte seg mot venstre langs x-aksen, med unntak av l_1, x_1 som flytter seg mot B_1

Ved $\lim_{\varepsilon \to 1}$ vil $l_1 = x_1 = B_1$ og $l_2 = x_2 = B_2$. Som i elipsen over, har vi at $|PB| = \varepsilon |Pl|$. Ved $\lim_{\varepsilon \to 1}$ må

$|PB| = |Pl|$ for alle P i kjeglesnittet. Siden $B_1 \in l_1$ og $B_2 \in l_2$ blir kjeglesnittet en rett linje gjennom

$x_1 = B_1$ og $x_2 = B_2$, ortogonal på l, dvs linjen $y = 0$

Kommentar: når $\varepsilon = 1$ skal man ha parabel, hvor kommer den inn i bildet? Jeg får i begge tilfeller degenerert kjeglesnitt, hvorfor?