ØVING 4 side 1 Andreas B. Berg

11.2

7) Finn $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$ ved Taylor-polynom

Bruker $T_3 f(x)$ i $x=0$, $f(x) = \sin x - x$

$f(0) = \sin 0 - 0 = 0$

$f'(x) = \cos x - 1 \qquad f'(0) = 1 - 1 = 0$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = 1$

$R_3 f(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-0)^4 = \frac{\sin(c)}{4!} x^4$

$T_3 f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \frac{x^3}{3!} = \frac{1}{6}x^3$

$f(x) = T_3 f(x) + R_3 f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{\sin(c)}{4!}x^4$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6}x^3 + \frac{\sin(c)}{4!}x^4}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{6} + \frac{\sin c}{4!} x = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$

11.3

1) Vis at følgen $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot f.

a) $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \qquad f(x) = e^{-x^2}$

La $k = x^2$. Da vet vi at

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^{-k} = e^{-x^2}$

Så $\{f_n\}$ konv. punktvis mot f.

b) $f_n(x) = \frac{n^2 x + 7 \sin x}{n^2 e^x + n x^3} \qquad f(x) = xe^{-x}$

$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x + 7\sin x}{n(ne^x + x^3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x}{n(ne^x + x^3)} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{\lim_{n \to \infty} \frac{7 \sin x}{n(ne^x + x^3)}}}$

$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^2 x}{n(ne^x + x^3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{nx}{ne^x + x^3} = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{e^x + \frac{1}{n}x^3}$

$= \frac{x}{e^x} = xe^{-x} = f$

$\{f_n\}$ konv. punktvis mot f.

 Andreas B. Berg

11.3

2) Finn $d_A(f,g)$

a) $f(x) = x \quad g(x) = x^2 - x \quad A = [0, \frac{1}{2}]$

$d_A(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|\}_{x \in A}$

$|f(x) - g(x)| = |x - x^2 + x| = |2x - x^2|$

Ser at dette stiger i A, så maksverdi når $x = \frac{1}{2}$

$d_A(f,g) = |f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2})| = |2 \cdot \frac{1}{2} - (\frac{1}{2})^2| = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$

b) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x \quad A = [0, \pi]$

$d_A(f,g) = |f(x) - g(x)| = |\sin x - \cos x|$

$\frac{\partial}{\partial x}(f(x) - g(x)) = \frac{d}{dx}(\sin x - \cos x) = \cos x + \sin x$

$f(x) - g(x)$ ekstpunkt når $\frac{d}{dx} f(x) - g(x) = 0$

$$\cos x + \sin x = 0$$
$$\cos x = -\sin x$$
$$x = \frac{3\pi}{4}$$

$d_A(f,g) = \sup(f(x) - g(x)) = |f(\frac{3\pi}{4}) - g(\frac{3\pi}{4})|$

$= |\sin(\frac{3\pi}{4}) - \cos(\frac{3\pi}{4})| = |\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}| = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

 Andreas B. Berg

11.3

7) Vis at $\{f_n\}$ der $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ konv. punktvis mot en funk. f. Avgjør om uniform på $[0,\infty)$, $[a,\infty)$, $[0,b]$

$$\lim_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}}$$

Ser at dette er $\frac{\infty}{\infty}$, så bruker L'Hôpitals:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x \cdot e^{nx^2}}, \quad \text{Så:}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{xe^{nx^2}} = \frac{1}{\infty} = \underline{0}$$

$\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = 0$

[Spm: er det lov å regne slik jeg gjorde, å derivere for n? Skulle jeg evt derivert på x?]

$\{f_n\}$ konv. uniformt mot f på A hvis $\lim_{n\to\infty} d_A(f, f_n) = 0$

$$d_A(f_n, f) = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$$
$$= \sup\{|f_n(x)| : x \in A\}$$

Se på $A = [0, b]$, $b > 0$, Finner makspunkt for $f_n(x)$:

$$f_n'(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = \frac{n - 2n^2x^2}{e^{nx^2}}$$
$$= \frac{n(1 - 2nx^2)}{e^{nx^2}}$$

$f_n'(x) = 0$ når $1 - 2nx^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2n}}$

Da er $f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = n\sqrt{\frac{1}{2n}}\, e^{-n\frac{1}{2n}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{n}/e^{\frac{1}{2}}$

Ser at $\lim_{n\to\infty} f_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{e}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{e}} = \sqrt{\infty} = \infty$

Dvs $\lim_{n\to\infty} f_n(x) > \varepsilon$ for f.eks. $\varepsilon = 1$, så $\{f_n\}$ konvergerer ikke uniformt på $[0,b]$, og dermed heller ikke på $[0,\infty)$

 Andreas B. Berg

7) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$

La $A = [0, \infty)$. Ser at $f_n(x) = \frac{nx}{e^{nx^2}} < \varepsilon$ for stor nok n eller x. Siden nevneren $= e^{nx^2}$ stiger fortere enn telleren $= nx$ kan vi enten velge stor nok a eller stor nok n til at $d_A(f_n, f) = 0$ på $A = [a, \infty)$, $a > 0$, så $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot $f(x) = 0$ på et intervall $[a, \infty)$ der $a > 0$.

11.4

2) La $\{f_n\}$ gitt ved $f_n(x) = \begin{cases} n & \text{hvis } x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot en f

$\lim_{n \to \infty} f_n(x) \Rightarrow \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow (0, \frac{1}{n}) \to \emptyset$ så

$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = 0$

$\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = 0$

b) Vis at $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0\,dx = \underline{0}$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)dx \overset{n>1}{=} \lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx + \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^1 f_n(x)dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n\,dx + \lim_{n \to \infty} \int_{1/n}^1 0\,dx$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left([nx]_0^{1/n} + 0 \right) = \lim_{n \to \infty} 1 = \underline{1} \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

 Andreas B. Berg

11.4

3) La $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$. Vis at $\{f_n\}$ konv. punktvis mot f, men

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

Viste i 11.3.7 at $\{f_n\}$ konv. punktvis mot $f(x)=0$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 0\,dx = \underline{0}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Ser at } \frac{d}{dx} e^{-nx^2} = -2nxe^{-nx^2}, \text{ så} \\ \frac{d}{dx} \frac{-1}{2} e^{-nx^2} = nxe^{-nx^2} \end{array} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-nx^2} \right]_0^1 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-n} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-n} + \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}} \neq \int_0^1 f(x)\,dx$$

5) La $f_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$

a) Vis at $\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $f(x) = \frac{1}{1-x}$ i $(-1,1)$

Ser at $\{f_n\}$ er en geometrisk rekke med kvotient $= x$

$\Rightarrow \{f_n\}$ konvergerer når $|x| < 1$.

Ser på intervallet $x \in (-1,1)$. Da er $|x| < 1$ og

$\underline{\{f_n\} \text{ konvergerer punktvis mot } \frac{a_0}{1-r} = \frac{1}{1-x} = f(x).}$

 Andreas B. Berg

1.1.4

5) Vis at konv. ikke er uniform på $(-1,1)$, men uniform på $(-a,a)$ der $0<a<1$

Uniform konvergens hvis $\lim_{n\to\infty} d_A(f_n, f) = 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|1 + x + x^2 + \dots + x^n - \frac{1}{1-x}\right|$$

$$= \left|\frac{(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n) - 1}{1-x}\right|$$

$$= \left|\frac{1 - \cancel{x} + \cancel{x} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - \dots - \cancel{x^n} + \cancel{x^n} - x^{n+1} - \cancel{1}}{1-x}\right|$$

$$= \left|-\frac{x^{n+1}}{1-x}\right| = \frac{|x|^{n+1}}{|1-x|} \quad \underline{\underline{x<1}} \quad \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

$$d_A(f_n, f) = \sup|f_n(x) - f(x)| = \sup\left\{\frac{|x|^{n+1}}{1-x} : x \in (-1,1)\right\}$$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) - f(x) = \frac{d}{dx} x^{n+1}(1-x)^{-1}$$

$$= (n+1)x^n(1-x)^{-1} - x^{n+1}(1-x)^{-2}$$

$$= \frac{(n+1)(1-x)x^n - x^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{(n+1)(x^n - x^{n+1}) - x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{nx^n + x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2} = \frac{x^n(n+1-nx)}{(1-x)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f_n(x) - f(x) = 0 \Rightarrow nx = n+1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n}$$

Ser at $d_A(f_n, f)$ har ekstr. punkt når $x = 1 + \frac{1}{n}$. Da er det naturlig å anta at $d_A(f_n, f)$ $A = (-a, a)$ kommer i $x = a$!

$d_A(f_n, f) = \frac{|a|^{n+1}}{1-a}$ $\quad a<1$ gir

$\lim_{n\to\infty} d_A(f_n, f) = 0$, så $\{f_n\}$ konvergerer uniformt mot f på $(-a,a)$, $0<a<1$

[Spm: Hva skiller $(-1,1)$ og $(-a,a)$ når $0<a<1$? Hvordan vise ikke-uniform konvergens i $(-1,1)$?]

 Andreas B. Berg

11.4

5) c) Vis at $\ln(1-x) = -\lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right)$, $x \in (-1,1)$

La $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n \Big|_{n=1}^{\infty} = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$

Da er $f_n'(x) = x^{n-1} \Big|_{n=1}^{\infty} = x^n \Big|_{n=0}^{\infty} = 1 + x + \dots + x^n$

Dermed vet vi fra tidligere at $f_n'(x)$ konv. uniformt mot $f(x) = \frac{1}{1-x}$ på $(-1,1)$, og er kontinuerlig.

Da vet vi fra setning at $\{f_n\}$ konvergerer uniformt (og dermed punktvis) mot en h så $h' = f = \frac{1}{1-x}$

$$h = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln|1-x| \overset{x<1}{=} -\ln(1-x)$$

$\{f_n\}$ konvergerer punktvis mot $-\ln(1-x)$

$\Rightarrow -\ln(1-x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$\Rightarrow \ln(1-x) = -\lim_{n\to\infty}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n}\right)$, $x \in (-1,1)$