Øving 7 - side 1

Andreas B. Berg

5.1 4) $P(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

a) $P(1) = 1^3 = \underline{\underline{1}}$

b) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{1(2)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1 = \underline{\underline{P(1)}}$

d) Anta sant for $P(n)$. Hvis det da e sant for $P(n+1) \Rightarrow$ sant for alle n.

c) $1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

e) Anta sant for $P(n)$

$$P(n+1) = P(n) + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right)$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right) = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \quad \square$$

f) $P(1)$ e sann. $P(n+1)$ er sann når $P(n)$ er sann $\Rightarrow P(2)$ sann $\Rightarrow$ $P(3)$ sann $\Rightarrow \dots \Rightarrow P(n)$ sann for $n \geq 1$.

6) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

$n = 1: \quad 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = 2! - 1$

Anta sant for $k \geq 1$.

$$k+1: \quad 1 \cdot 1! + \dots + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$$

$$= (k+1)!(1 + k + 1) - 1 = (k+2)! - 1 \quad \square$$

14) $\sum_{k=1}^{n} k 2^k = (n-1)2^{n+1} + 2$

$n = 1: \quad 1 \cdot 2^1 = 2 = 0 + 2 = (0)2^2 + 2$

Anta sant for $n \geq 1$. $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k 2^k = \left(\sum_{k=1}^{n} k 2^k\right) + (n+1)2^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2 + (n+1)2^{n+1}$$

$$= (n - 1 + n + 1)2^{n+1} + 2 = 2n\,2^{n+1} + 2 = n \cdot 2^{n+2} + 2 = \underline{((n+1)-1)2^{(n+1)+1} + 2}$$

 Andreas B. Berg

5.2 4) $P(n)$ = postage of n cents kan lages av kombinasjon av 4 og 7 cent for $n \geq 18$

a) $P(18)$: $18 = 4 + 7 + 7$. $P(19)$: $4 + 4 + 4 + 7$

$P(20)$: $20 = 5 \cdot 4$ $P(21)$: $3 \cdot 7$

b) $k \geq 21$. For alle $18 \leq j < k$ kan vi få j av kombinasjoner av 4 og 7

c) Må bevise at hvis (b) stemmer, så kan vi få $k+1$ av å kombinere 4 og 7

d) $k \geq 21 \Rightarrow k - 3 \geq 18 \Rightarrow P(k-3)$ er sann, kan få $k-3$

$k - 3 + 4 = k + 1 \Rightarrow P(k+1)$ er sann.

e) Har vist at $P(n)$ er sann for $n \in [18, 21]$ og for $n \geq 21 \Rightarrow$ sann for alle $n \geq 18$

14) $n = 1 \Rightarrow$ ingen delinger $\Rightarrow$ bidrag $0 = \frac{1(1-1)}{2} = \frac{1(0)}{2}$

$k \geq 1$. Anta sant for $j \in [1, k]$

Vise at deling av $k+1$ steiner gir bidrag $\frac{k(k+1)}{2}$

Første deling gir r, s steiner, $r + s = k+1$. Ind.hyp. $\Rightarrow$ bidrag fra haugene er $\frac{r(r-1)}{2}$ og $\frac{s(s-1)}{2}$

Totalt bidrag: $rs + \frac{r(r-1)}{2} + \frac{s(s-1)}{2} = \frac{2rs + r^2 - r + s^2 - s}{2}$

$= \frac{1}{2}\left((r^2 - r + rs) + (s^2 - s + rs)\right) = \frac{1}{2}\left(r(r+s-1) + s(r+s-1)\right)$

$= \frac{1}{2}\left(r(k+1-1) + s(k+1-1)\right) = \frac{k(r+s)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$ $\square$

Øving 7 - side 3 Andreas B. Berg

5.3.12) Bevis at $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ for $n > 0$

$n = 1: \quad f_1^2 = 1 = 1 \cdot 1 = f_1 f_2$

Anta sant for $k \geq 1$. Vis sant for $k+1$:

$$f_1^2 + \dots + f_k^2 + f_{k+1}^2 = f_k f_{k+1} + f_{k+1}^2 = f_{k+1}(f_k + f_{k+1}) = f_{k+1} f_{k+2} \quad \square$$

18) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vis at $A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ for $n > 0$

$n = 1: \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{bmatrix}$

Anta sant for $k \geq 1$. Vis sant for $k+1$:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{bmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+1} + f_k & f_{k+1} \\ f_k + f_{k-1} & f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{k+2} & f_{k+1} \\ f_{k+1} & f_k \end{bmatrix} \quad \square$$

5.4.3) Vis alle steg algoritme 3 bruker for å finne gcd(8, 13):

1) → else : gcd(13 mod 8, 8) = gcd(5, 8)
2) → else : gcd(8 mod 5, 5) = gcd(3, 5)
3) → else : gcd(5 mod 3, 3) = gcd(2, 3)
4) → else : gcd(3 mod 2, 2) = gcd(1, 2)
5) → else : gcd(2 mod 1, 1) = gcd(0, 1)
6) → a = 0 : return b = 1

⇒ gcd(0, 1) = 1 ⇒ <u>gcd(8, 13) = 1</u>