

# Rulling på krumt underlag

A. B. Berg<sup>a</sup>, I. Høie<sup>a</sup>, A. Padget<sup>b</sup>, J. Ø. Vatne<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Institutt for industriell økonomi og teknologiledelse, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

<sup>b</sup>Institutt for informasjonssikkerhet og kommunikasjonsteknologi, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 7491 Trondheim.

## Sammendrag

Et forsøk ble utført for å undersøke egenskapene ved energibevarelse. Ved å kjenne til baneformen kan vi finne diverse størrelser for objektene som ruller ned den krumme banen. Ved hjelp av polynominterpolasjon fikk vi gitt en baneform, som ga utgangspunkt for det fysiske oppsettet. I eksperimentet ble en kule og en ring sluppet ned berg- og dalbanen 10 ganger hver. Både ringen og kulens slutfart ble målt der  $x = (1.30 \pm 0.01)$ . Slutfarten ble beregnet til  $(1.032 \pm 0.001)m/s$  for kule, og eksperimentelt målt til  $(1.020 \pm 0.044)m/s$ . I vår simulering var ringens slutfart  $(0.881 \pm 0.001)m/s$ , mens målt verdi var  $(0.575 \pm 0.062)m/s$ . Avviket mellom målingene kan skyldes både menneskelig feil og målefeil. Likevel er den mest betydelige feilkilden at beregningene forutsatte mekanisk energibevarelse, og så bort ifra friksjon, som ikke er forenelig med de reelle forholdene under eksperimentet.

## 1. Introduksjon

Isaac Newton er en av historien viktigste og mest innflytelsesrike vitenskapspersoner, og formulerte blant annet mekanikkens tre bevegelseslover. Disse beskriver sammenhengen mellom kraft og akslerasjon, og er en av hjørnesteinene i klassisk mekanikk [1]. I denne rapporten skal vi bruke Newtons 2. lov, samt prinsippet om energibevarelse og en variant av Eulers metode til å studere to stive legemers bevegelse gjennom en krummet berg-og-dalbane. Legemene beveger seg uten glid og blir dermed hovedsakelig påvirket av tre krefter: friksjonskraften, gravitasjonskraften og normalkraften. I og med at det er snakk om en krummet bane, varierer summen av krefter på objektene, og akselerasjonen vil variere. Hensikten med rapporten er å sammenligne simulert bevegelse med faktisk bevegelse ved å se på slutfarten og tidsutviklingen til objektene.

## 2. Teori

I forsøket skal følgende verdier beregnes: fart av posisjon og tid, krumning, normalkraft og friksjonskonstanten. I tillegg skal usikkerhet beregnes.

### 2.1. Fart

Et rullende objekts kinetiske energi er gitt ved summen av energien til tyngdepunksbevegelse og rotasjonsenergien.

$$E_k = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}cMv^2 = \frac{1}{2}(1+c)Mv^2 \quad (1)$$

der  $v$  er farten,  $c$  er en konstant utledet fra objektets treghetsmoment og  $M$  er massen til objektet.

Ved bevaring av energi i et system får vi hastighet av vertikal posisjon gitt ved

$$v(y) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1 + c}} \quad (2)$$

når objektet har høyden  $y$ . Vi kjenner baneformen  $y(x)$ , så vi får farten som en funksjon av horisontal posisjon gitt ved

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1 + c}} \quad (3)$$

der  $x$  er horisontal posisjon.

### 2.2. Krumning

Banens krumning,  $\kappa$ , den inverse krumningsradien, er gitt ved

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

der  $y'$  er endring i vertikal posisjon og  $y''$  er endring i  $y'$ .

### 2.3. Normalkraft

Fra (2) og (4) kan vi finne sentripetalakselerasjonen. Denne er gitt ved

$$a_{\perp} = v^2 \kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + c} \cdot \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (5)$$

Vi kan finne normalkraften ved å se på summen av kreftene som påvirker objektet. Ettersom kulen alltid befinner seg over banen vil normalkraft og gravitasjon aldri peke i samme retning. Kreftene som påvirker objektet i sentripetal retning er normalkraften  $N$  og tyngdens sentripetalkomponent  $MG_y = -Mg \cos \beta$  (se Figur 1). Vi har fra Newtons 2. lov at

$$\sum F = Ma. \quad (6)$$

Hvis vi setter inn kreftene i sentipetal retning får vi

$$\begin{aligned} N - MG_y &= Ma_{\perp} \\ N &= M(g \cos \beta + a_{\perp}) \end{aligned} \quad (7)$$

der  $MG_y = Mg \cos \beta$  er tyngdens komponent.

Hvis banen krummer opp er  $a_\perp > 0$  i samme retning som  $N$ , og  $N > Mg \cos \beta$ . Hvis banen krummer ned er  $a_\perp < 0$  i motsatt retning av  $N$ , og  $N < Mg \cos \beta$

#### 2.4. Forholdet mellom friksjon og normalkraft

Kreftene som virker på et objekt som ruller er gitt i Figur 1. Tangielt til banen er kreftene som påvirker objektet  $f$  og tyngdens tangialkomponent ( $-Mg \sin \beta$ ). Når banen heller nedover er  $\beta < 0$ ,  $f < 0$  med retning mot objektets translasjonsfart  $v$  og  $a_t = \frac{dv}{dt} > 0$ . Newtons 2. lov (6) i tangial retning gir

$$-Mg \sin \beta + f = Ma_t. \quad (8)$$

Hvis banen heller oppover er  $\beta > 0$ ,  $f > 0$  med retning med objektets translasjonsfart  $v$  og  $a_t = \frac{dv}{dt} < 0$ . Newtons 2. lov (6) i tangial retning gir da

$$f - Mg \sin \beta = Ma_t \quad (9)$$

som er samme likning som (8).

Newtons 2. lov for rotasjon om senter er

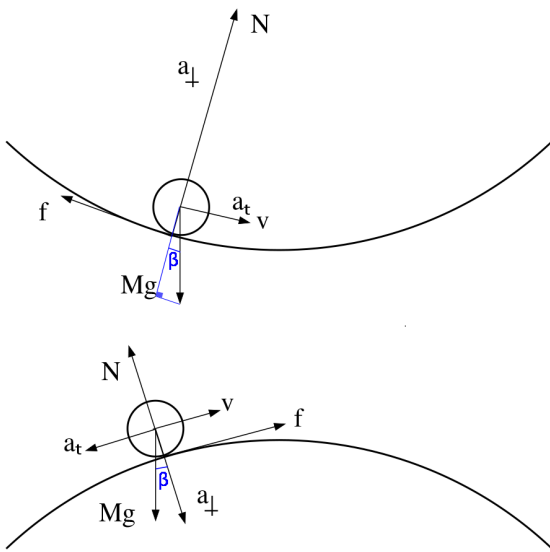
$$\tau = I\alpha \quad (10)$$

der  $\tau$  er summen av moment,  $I$  er treghetsmoment og  $\alpha$  er rotasjonsakselerasjon. Setter vi inn  $\tau = Rf$ ,  $I = cMR^2$  og  $\alpha = -\frac{d\omega}{dt} = -\frac{dv}{Rdt}$  får vi

$$f = -cM \frac{dv}{dt} = -cMa_t. \quad (11)$$

Kombinasjonen av (6) og (11) gir

$$-cMa_t - Mg \sin \beta = Ma_t \quad (12)$$



**Figur 1:** Krefter som virker på objekt som ruller på krum overflate. Bildet er originalt fra [2], med visse endringer.

$$a_t = -\frac{g \sin \beta}{1 + c},$$

som gir

$$f = \frac{cMg \sin \beta}{1 + c}. \quad (13)$$

#### 2.5. Usikkerhet

Ved gjennomføringen av forsøk er det fort gjort at det oppstår tilfeldige feil. For at disse feilene skal ha minst mulig påvirkning er det smart å bruke gjennomsnittet  $\bar{x}$  av flere målinger, gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (14)$$

Dette gir en gjennomsnittlig - og sannsynlig - verdi for et enkeltforsøk, og kan igjen brukes til å finne standardavvik  $s$  gitt ved

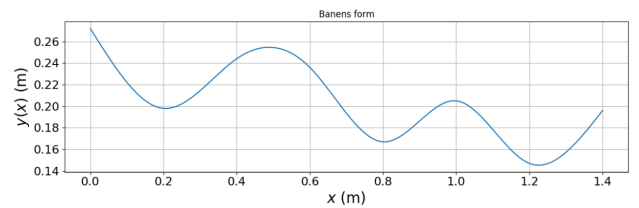
$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (15)$$

Standardavviket er mål på spredningen i målingene. Standardfeil  $\bar{s}$  er mål på feilmarginen på målingene, og er gitt ved

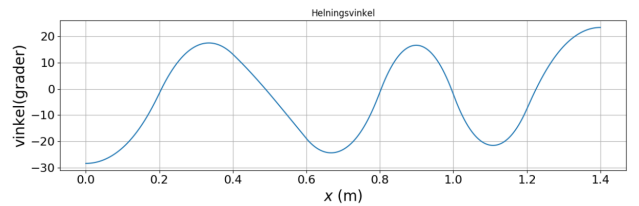
$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{N}}. \quad (16)$$

### 3. Eksperimentell Metode

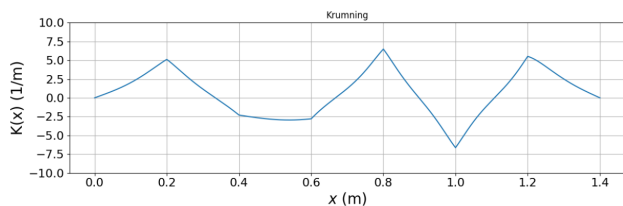
Berg- og dalbanen i eksperimentet ble bygget med utgangspunkt i åtte festepunkter med justerbar høyde. En fleksibel plastlist gikk gjennom punktene og dannede rullebanen. Cubicspline.py ga oss åtte festepunkter for en egnet kurve for eksperimentet, vist i figur 2. 3 og krumning vist i figur 4



**Figur 2:** Den simulerte baneformen for forsøket, gitt ved polynominterpolasjon



**Figur 3:** Banens helningsvinkel



Figur 4: Banens krumning

De 8 punktene ble stilt inn på figuren, basert på øyemål, med en avlesningsnøyaktighet på  $\pm 0,002m$ , etter oppsettet vist i figur 5. Starthøyden var gitt ved  $y_0 = 0.272m$  og laveste festepunkt lik  $y_4 = 0.145$ .

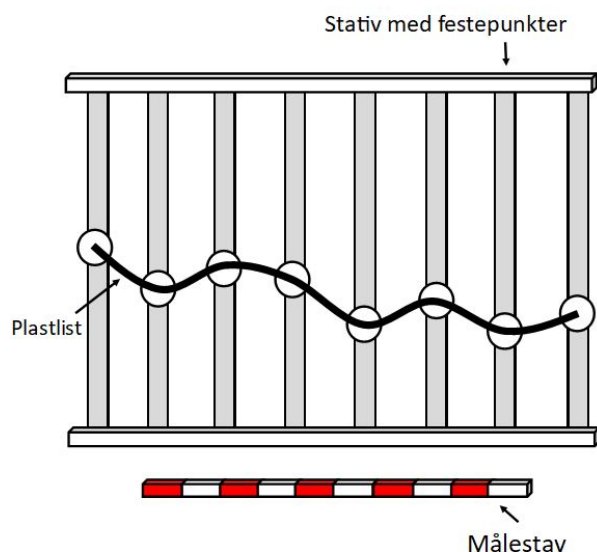
I de numeriske beregningene ble disse parameterene lagt til grunn:

Parameter	Verdi
Ytre radius (R) ring	2,5 cm
Indre radius (r) ring	2,3 cm
Diameter kule	2,3
c kule	2/5
c ring	$(1 + r^2/R^2)/2 = 0.923$
Vekt kule	29,8 g
Vekt ring	13,5 g

Videoanalyseprogrammet Tracker ble brukt for å spore objektene gjennom banen. Hvite ark ble plassert langs veggene for at Tracker skulle klare å spore objektene bedre.

En liten kule og en tynn metallring ble valgt som forsøksobjekter. For å kunne spore metallringen i Tracker, ble det festet en teipbit tvers over ringen, slik at en kunne markere sentrum med en svart prikk.

De to objektene ble sluppet fra startpunktet, definert



Figur 5: Forenklet figur over banens oppsett.

ved midten av første list, og rullet fritt ned banen. Eksperimentet ble gjentatt 10 ganger for hvert objekt.

For kalibrering ble det lagt en meterstav ved foten under banen slik at dybde ikke var et problem for kameraet. Den ble markert i Tracker for at målene skulle bli riktig.

Eksperimentene ble filmet med en Samsung Note 9 på stativ, stilt inn på 60 fps, 1080p. Oppsettet forble uendret gjennom hele forsøket.

Filene ble eksportert til Tracker, der objektenes forflytning kunne spores bilde for bilde. Slik kunne vi hente ut data om fart  $v$ , horisontal posisjon  $x$ , høyde  $y$  og tid  $t$ .

#### 4. Resultater

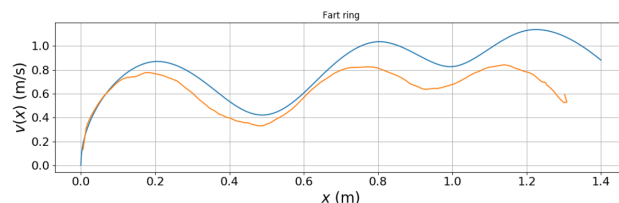
Etter 10 målinger hadde vi tilstrekkelig datagrunnlag for å kunne sammenligne de målte funnene med simuleringen.

I de etterfølgende grafene er numeriske beregning markert med blå, kulens måling grønn og ringens måling med gul farge.

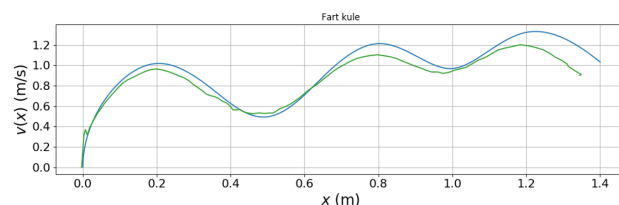
Den numeriske fartsutviklingen ble beregnet ved hjelp av ligning (2) og sammenlignet med datainnsamlingen fra eksperimentet i figur 7 for kule og 6 for ring.

I simuleringen fant vi at ringen skulle nå sin toppfart etter  $(1.225 \pm 0.001)m$  som vist på den blå kurven i figur 6. I målingene registrerte vi en toppfart på  $(1.140 \pm 0.001)m$ , slik vi ser på den gule.

For kule 7 beregnet vi maksimal fart også etter  $(1.225 \pm 0.001)m$ . I målingene ble maksfarten målt etter  $(1.163 \pm 1.001)m$ .



Figur 6: Farten for ring gitt som funksjon av horisontal posisjon



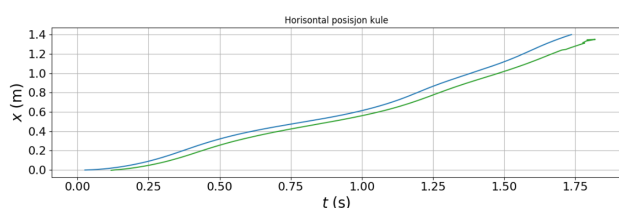
Figur 7: Farten for kule gitt som funksjon av horisontal posisjon. Grønn kurve er målt verdi, blå numerisk

Slutfarten ble beregnet i  $x = (1.30 \pm 0.01)m$  for både kule og ring. Resultater, beregninger og avvik mellom disse er gjengitt i tabellen under.

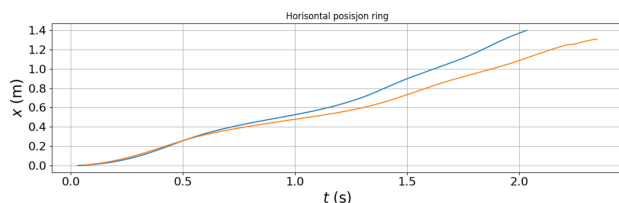
**Tabell 1: Slutfart**

	Kule	Ring
$x$	$(1.30 \pm 0.01)m$	$(1.30 \pm 0.01)m$
Numerisk beregnet verdi ( $v$ )	$1.032m/s$	$0.881m/s$
Resultat ( $v$ )	$(1.020 \pm 0.044m/s)$	$(0.575 \pm 0.062)m/s$
Avvik fra beregning	$0.012m/s$	$0.306m/s$

Under vises horisontal posisjon etter tid. Posisjonen vises i Figur 8 for kule og 9 for ringen.

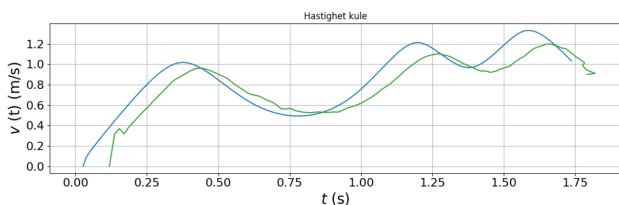


**Figure 8:** Posisjon for kule, som funksjon av tiden

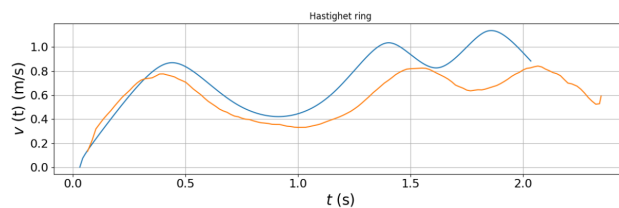


**Figure 9:** Posisjon for ring, som funksjon av tiden

Hastigheten fremstilles i figur 10 for kule og 11 for ringen. Hastigheten ble målt høyest ved  $t = (2.07 \pm 0.01)s$  for ringen og ved  $t = (1.65 \pm 0.01)s$  for kule for de eksperimentelle målingene.

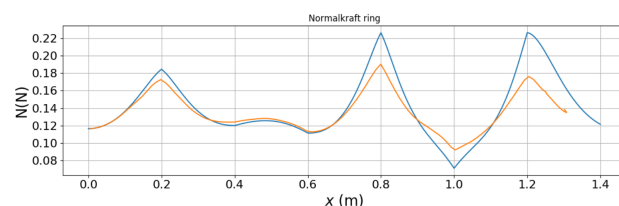


**Figure 10:** Hastigheten for kule, som funksjon av tiden

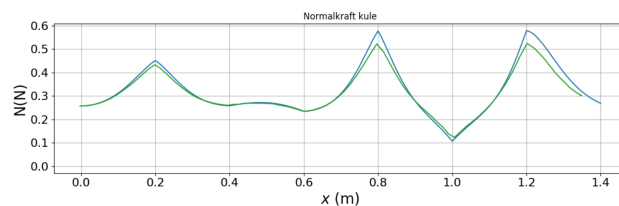


**Figure 11:** Hastighet for ring, som funksjon av tiden

Vi ser at grafene for normalkraften 13 og 12 ligner krumningsgrafene 4

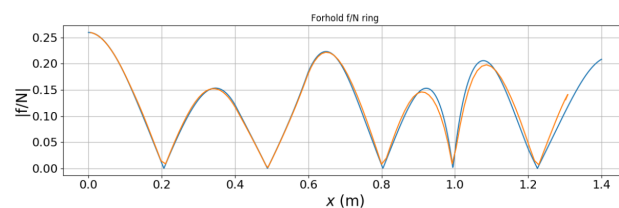


**Figure 12:** Normalkraft for ring, som funksjon av horisontal posisjon



**Figure 13:** Normalkraft for kule, som funksjon av horisontal posisjon

Forholdet mellom friksjonen og normalkraften når sitt toppunkt når  $|f/N| = 0,15$  for kule og  $|f/N| = 0,24$  for ring. Dersom statisk friksjonskoeffesient er større enn dette, vil kula rulle rent.

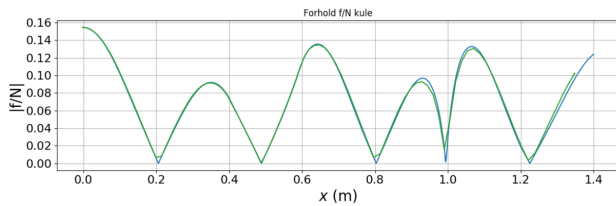


**Figure 14:** Friksjonskoeffesienten for ring

## 5. Diskusjon

### 5.1. Måleusikkerhet

Under oppsettet av banen, målte vi festepunktene høyde ut fra bunnlisten i stativet. Det var krevende å ikke gjøre en forskyvning da vi monterte punktene, og fikk en måleusikkerhet på  $\pm 0,002m$ .



**Figur 15:** Friksjonskoeffisienten for kule

Analysen i Tracker ga rom for unøyaktigheter. Det var krevende å finne slippunktet nøyaktig i filmen, og i analysen måtte gruppen velge mellom bilder der objektet enda ikke var sluppet, og der det allerede hadde en viss fart. I noen tilfeller var også selve filmen startet umiddelbart etter slippet. I Tracker markerer brukeren akser og kalibreringsmål manuelt, som gir en viss usikkerhet.

Kameraets stilling gjorde at vi fikk en krevende vinkel i banens ytterpunkter. Her burde vi definert startpunktet også i dybde dimensjonen, der det nå ble opp til det enkelte gruppe medlem å gjøre en vurdering av hvor i z-planet punktet skulle ligge.

Når det gjelder objektslippet er menneskelig feil en betydelig feilkilde. En vil ikke slippe objektene helt likt hver gang, og kan ikke se bort i fra at objektet gis et lite dytt i slippet. Særlig når det gjelder ringen, måtte vi forkaste en stor andel av forsøkene, fordi ringen skumpet bort i kantene og veltet. Det viste seg at vinkelen i slippet var avgjørende for ringens bane og fart, samtidig som det var vanskelig å gjenskape samme vinkel fra forsøk til forsøk. I tillegg viste det seg vanskelig å slippe fra nøyaktig samme startpunkt hver gang, noe som kan ha bidratt til usikkerhet i målingene.

Ettersom vi gjennomførte eksperimentet 10 ganger for hvert objekt, kom vi frem til et gjennomsnittlig datasett som vil kunne utjevne noen av unøyaktighetene i målingene. Her må man foreta en avveining, ettersom et snitt også vil flate ut topp- og bunnmålinger, og dermed gi et dempet bilde av eksperimentet.

### 5.2. Avvikende slutfart

I figur 6, ser vi at det er et stort avvik mellom simulert fart og de faktiske målingene, særlig for ringen. Dette er også grunnen til at vi ser en forskyvning mot høyre i posisjonsgrafen (figur ??) for ringen, der den bruker betydelig lenger tid på nedfarten enn beregnet. Vi ser også en tilsvarende forskyvning i hastighetsgrafen (figur 11).

Det kan se ut som om banen vår hadde for lite helning til at ringen kunne få god fart og rulle rent. Selv i de vellykkede forsøkene vinglet den mye, og virket ustabil.

I avsnitt 2.1 antar vi mekanisk energibevarelse, og utleder fra dette formel (2) som ble brukt i våre numeriske beregninger av slutfarten. I vårt eksperiment var en slik antagelse for enkel. I virkeligheten vil friksjonen mellom overflatene føre til at objektene avgir mekanisk energi. Denne går over til indre energi, primært i form av varme. Dette gjelder også for luftfriksjonen. Som nevnt, kan det tenkes

at objektene begynte å skli. Når objektet sklir, skapes det større kontaktflate med underlaget, og det vil det avgis mer mekanisk energi. [1, s.354]

I figur 15 fant vi at friksjonskoeffisienten for kule må være minst 0.15, og tilsvarende for ring, 0.24. Om dette ikke er tilfelle, vil objektene skli mot underlaget i stedet for å rulle rent, slik vi ønsker. Vi ser at friksjonskoeffisienten har sitt toppunkt i startpunktet, og det stemmer overens med funnene i fartsgrafen for ring (figur 6). Her ser vi at farten viker bort fra simuleringen i de områdene der friksjonskoeffisienten skulle vært høyest. Det er sannsynlig at ringen her har begynt å skli, og taper mekanisk energi til underlaget. Målingene for kule ligger nærmere simuleringen.

### 5.3. Ujevne hastighetsgrafer

I grafene for hastigheten (figur 6 og 7) ser vi en rekke ujevnheter. Dette skyldes trolig at Tracker ikke er en optimal form for analyse. Hadde vi hatt mulighet til å filme i 3D kunne et program som Tracker tatt hensyn til dybde og trolig fått bedre resultater. For hver runde med gjennomkjøringer av objektene hadde vi ingen mekanisk anretning som kunne slippe objektene helt likt hver gang. Det er derfor mulig at vi ga ballen litt ulik starthastighet som følge av at vi personlig slapp objektene hver gang.

## 6. Konklusjon

I eksperimentet har vi studert rulling ned en berg- og dalbane for en kule og en ring. Ved hjelp av polynominterpolasjon fikk vi gitt en simulert bane som ble utgangspunkt for beregningene. Disse kunne senere sammenlignes med de eksperimentelle målingene. Slutfarten ble numerisk beregnet til å være [x1] for ringen, mens den eksperimentelt ble målt til [x2]. For kule var numerisk beregning [x3] og eksperimentell måling [x4]. Dette betydelige avviket kan skyldes at vi i de numeriske beregningene av slutfarten antok mekanisk energibevarelse, som er en betydelig forenkling av virkeligheten. Dessuten ga forsøket rom for store menneskelige feil i utførelsen og i kalibreringen av programmet.

## Referanser

- [1] Young, H. D. og R. A. Freedman: *University Physics*. Pearson Education, 14. utgave, 2016.
- [2] Ukjent: *NTNU Fysikklab - Labligninger*. <http://home.phys.ntnu.no/brukdef/undervisning/fyslab/files/labligninger.pdf>, (sjekket 20.03.2020).