ØVING 8 - side 1

Andreas B Berg

9.1. 7) Bestem om R på heltall er:

	Refleksiv	Symmetrisk	Antisymmetrisk	Transitive	$(x,y) \in R$
a		X			$x \neq y$
b		X		X	$xy \geq 1$
c		X			$x = y \pm 1$
d	X	X		X	$x \equiv y \pmod{7}$
e	X			X	$x = ay,\ a \in N$
f	X	X		X	$xy > 0$
g			X		$x = y^2$
h			X	X	$x \geq y^2$

42) $R_1 = \{(a,b) \mid a \text{ deler } b\}$ $R_2 = \{(a,b) \mid a \text{ multiple av } b\}$, $a, b > 0$ heltall

a) $R_1 \cup R_2 = \underline{\underline{\{(a,b) : a \mid b \text{ eller } b \mid a\}}}$

c) $R_1 - R_2 = \{(a,b) : a \mid b \text{ og } b \nmid a\} = \underline{\underline{\{(a,b) : a \mid b \text{ og } a \neq b\}}}$

9.3.10) Hvor mange ikke-null elementer må R på $A = \{1, \dots, 1000\}$ ha hvis $R =$

a) $\{a, b \mid a \leq b\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 + 2 + \dots + 1000 = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = \underline{\underline{500500}}$

b) $\{(a,b) \mid a = b \pm 1\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2 \cdot 999 = \underline{\underline{1998}}$

c) $\{(a,b) \mid a + b = 1000\} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{999}}$

d) $\{(a,b) \mid a + b \leq 1001\} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{500500}}$ (se a)

ØVING 8 - side 2 Andreas B. Berg

3.10) e) $\{(a,b) \mid a \neq 0\} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{1\,000\,000}}$

14) $M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) $M_{R_1 \cup R_2} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}}$ $(M_{R_1} \vee M_{R_2})$

b) $M_{R_1 \cap R_2} = M_{R_1} \wedge M_{R_2} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}}$

c) $M_{R_2 \circ R_1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}}$

9.4.16) Bestem om sekvensene er del av grafen:

a) abce = $\underline{\underline{\text{JA}}}$ b) becbe = $\underline{\underline{\text{NEI}}}$

c) aabede = $\underline{\underline{\text{JA}}}$ d) bcedaab = $\underline{\underline{\text{NEI}}}$

e) bccbeded = $\underline{\underline{\text{JA}}}$ f) aabbccbed = $\underline{\underline{\text{NEI}}}$

20) $R = \{(a,b) \mid a, b$ har direktefly $a \Rightarrow b\}$. Når er (a,b):

a) $R^2 \Rightarrow$ Når det er fly $a \to b$ med en mellomlanding

b) $R^3 \Rightarrow$ ——— " ——— to —— " —er

c) $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \Rightarrow$ Når det finnes fly $a \to b$ med n mellomlandinger der $n \in [0, \infty)$, altså når det er fly $a \to b$.

24) R irrefleksiv. Er R^2 irrefleksiv?

Nei! Se f.eks $R = \{(1,2), (2,1)\}$ på $A = \{1, 2\}$

$R^2 = R \circ R = \{(1,1), (2,2)\}$

ØVING 8 - side 3

Andreas B. Berg

9.5. 9) $A \neq \emptyset$, $f: A \to A$, $R = \{(x,y) \mid f(x) = f(y)\}$

a) Vis at R er ekvivalensforhold på A

$f(x) = f(x) \Rightarrow (x,x) \in R$ (refleksiv)

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R$ (Symmetrisk)

$f(x) = f(y)$ og $f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow (x, z \in R)$ (transitiv)

b) Hva er ekvivalensklassene til R?

Ekv. klass er $f^{-1}(x) = \{y \in A \mid f(y) = x\}$

16) R satt på pos. heltall s.a. $((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow ad = bc$. Vis at R er ekvivalensforhold.

Refleksiv: $ab = ab \Rightarrow ((a,b),(a,b)) \in R$

Symmetrisk: $ad = bc \Leftrightarrow cb = bc = ad = da$

$\Rightarrow ((a,b),(c,d)) \in R \Leftrightarrow ((c,d),(a,b)) \in R$

Transitivitet: $((a,b),(c,d)) \in R$ og $((c,d),(e,f)) \in R$

$\Leftrightarrow ad = bc \quad | \cdot f$ og $cf = de$

$adf = bcf = bde \quad d > 0$

$af = be$

$\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R$