ØVING 5 side 1

Andreas B. Berg

2.7

3) Finn basis for løsningsrommet:

a) $y'' + 2y' + y = 0$

$(D^2 + 2D + 1)y = 0$

$(D+1)^2 y = 0$

$\Rightarrow L = (D+1)^2$

$\Rightarrow$ Basis for L: $\{e^{-t}, te^{-t}\}$

b) $y''' = y'$

$(D^3 - D)y = 0$

$(D-0)(D^2-1)y = (D-0)(D+1)(D-1)y = 0$

$\Rightarrow$ Basis for L: $\{1, e^{-t}, e^{t}\}$

c) $y^{(4)} - 2y^{(2)} + y = 0$

$(D^4 - 2D^2 + 1)y = 0$

$(D^2-1)^2 y = (D+1)^2(D-1)^2 y = 0$

$\Rightarrow$ Basis for L: $\{e^{-t}, te^{-t}, e^{t}, te^{t}\}$

 Andreas B. Berg

2.7

7) La V være vektorrommet utspent av $\{x, y\}$ og W utspent av $\{\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2i}(x-y)\}$, begge over $\mathbb{C}$.

<u>$V \subset W$:</u>

$$x = \frac{1}{2}(x+y) + \frac{i}{2i}(x-y) \in W$$

$$y = \frac{1}{2}(x+y) - \frac{i}{2i}(x-y) \in W$$

<u>$W \subset V$:</u>

$$\frac{1}{2}(x+y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in V$$

$$\frac{1}{2i}(x-y) = \frac{1}{2i}x - \frac{1}{2i}y \in V$$

Siden $V \subset W$ og $W \subset V$ må $V = W$, og mengdene er basiser av samme vektorrom over $\mathbb{C}$.

13) a) La $x = P(D)(y)$, der $P(D) = D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_0 D^0$

D er på $\Rightarrow$ $P(D)$ er på $\Rightarrow$ $\forall x_0 \in C^\infty \; \exists y_0 \in C^\infty$ s.a. $x_0 = P(D)(y_0)$.

b) La V være løsningsrommet av $P(D)(y) = 0$, dvs nullrommet til $P(D)(y)$. La z være en løsning av $P(D)(y) = x$.

Vet at løsningen av et likn.sett $= \{x + x_0 \mid x \in L \text{ og } x_0 = N\}$

$\Rightarrow$ Alle løsninger: $\{z + y : y = N(P(D)(y))\} = \underline{\underline{\{z + y : y \in V\}}}$

ØVING 5 side 3 Andreas B. Berg

2.7

18) a) $my'' + ry' + ky = 0$

$$\left(D^2 + \frac{r}{m}D + \frac{k}{m}\right)y = 0 \qquad (*)$$

Se på $x^2 + \frac{r}{m}x + \frac{k}{m}$

$$x = \frac{-\frac{r}{m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{m^2} - 4\frac{k}{m}}}{2} = \frac{-\frac{r}{m} \pm \sqrt{\frac{r^2-4km}{m^2}}}{2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2-4km}}{2m}$$

La $a = \frac{-r + \sqrt{r^2-4km}}{2m}$, $b = \frac{-r - \sqrt{r^2-4km}}{2m}$

$$(*): (D-a)(D-r)y = 0$$

$$\underline{\underline{y = C_1 e^{at} + C_2 e^{bt}}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

b) $y(0) = 0 \qquad y'(0) = V_0$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0 \rightsquigarrow C_1 = -C_2$

$$y(t) = C_1 e^{at} - C_1 e^{bt}$$

$y'(t) = aC_1 e^{at} - bC_1 e^{bt}$

$y'(0) = aC_1 - bC_1 = (a-b)C_1 = V_0 \rightsquigarrow C_1 = (a-b)^{-1}V_0$

$$\underline{\underline{y(t) = \frac{V_0}{a-b}e^{at} + \frac{V_0}{b-a}e^{bt}}}$$

c) Vis at $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{V_0}{a-b}e^{at} + \frac{V_0}{b-a}e^{bt} = \frac{V_0}{a-b}\lim_{t\to\infty} e^{at} + \frac{V_0}{b-a}\lim_{t\to\infty} e^{bt}$$

anta $km > 0$

$$a = \frac{-r}{2m} + \frac{\sqrt{r^2-4km}}{2m} < \frac{-r}{2m} + \frac{r}{2m} = 0$$

$$b = \frac{-r}{2m} - \frac{\sqrt{r^2-4km}}{2m} < \frac{-r}{2m} - \frac{r}{2m} = \frac{-r}{m} < 0$$

$\Rightarrow a, b < 0$, så

$$\underline{\lim_{t\to\infty} e^{at} = \lim_{t\to\infty} e^{bt} = 0, \text{ så } \lim_{t\to\infty} y(t) = 0.}$$

 Andreas B. Berg

3.3

1) a) Alle lin. likn.sett har minst en løsning - **TRUE**

b) Alle lin. likn.sett har maks en løsning - **FALSE**

c) Alle homog. syst. av lin. likn har minst en løsning - **TRUE**

d) Alle likn.sett med n likn. og n ukjente har maks en løsn - **FALSE**

e) ———— // ———— minst en løsn. - **TRUE**

f) Hvis et homog. system tilhørende en lin. likn. sett har en løsning, har settet en løsning - **FALSE**

g) Hvis koeff.matr. til et homog. syst. av n lin. likn. med n ukjente er invertibel, har syst. ingen ikke-null løsn. - **TRUE**

h) Løsn.settet til et syst. av m lin. likn. med n ukjente er et underrom av F^n - **FALSE**

EKS. V 2015

1) b) i) $\{1-x,\ 1+x,\ x^2\}$ er lin. uavh., da

$$a(1-x)+b(1+x)+cx^2=0 \iff a=b=c=0$$

ii) $\{1+x,\ 1+x^2,\ x-x^2\}$ er ikke lin. uavh.:

$$x-x^2 = 1+x-1-x^2 = 1+x-(1+x^2)$$

d) $\{\sin x, \cos x\}$ lin. uavh. for alle $x \in [0,\pi]$

$\iff a\sin x + b\cos x = 0$ hvis og bare hvis $a=b=0$; $\forall x \in [0,\pi]$

Se på $x=0$: $a\sin 0 + b\cos 0 = 0a+b = b = 0 \Rightarrow b=0$

$x=\frac{\pi}{2}$: $a\sin\frac{\pi}{2}+b\cos\frac{\pi}{2} = a+0b = a = 0 \Rightarrow a=0$

$\Rightarrow a\sin x + b\cos x = 0$ kun hvis $a=b=0$, så

$\{\sin x, \cos x\}$ lin. uavh. i $F([0,\pi])$

 Andreas B. Berg

EKS. S 1 5

6) a) $[T]_B^B(1) = 0$

$[T]_B^B(x) = x + 1$

$[T]_B^B(x^2) = 2x(x+1) = 2x^2 + 2x$

$$\underline{\underline{[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

$$\begin{tikzcd} P_2 \arrow[r, "T"] & P_2 \arrow[d, "{[\cdot]_B}"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[u, "{([\cdot]_B)^{-1}}"] \arrow[r, "{[T]_B^B}"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

b) Finn basis for $N(T)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y+2z \\ 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y = 0, \quad z = 0, \quad x = x$

$$\underline{\underline{\text{Basis } N(t) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}} = \underline{\underline{\{1\}}}$$

c) Finn basis for $R(T)$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\text{Basis } R(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \{x, x^2\}}}$$

ØVING 5 side 6 Andreas B. Berg

EKS. 515

6) d) Er T 1-til-1? På? Isomorfi?

T en-til-en: $T(x) = 0 \iff x = 0$:

Ser at $N(T) \neq \{\vec{0}\}$, så f.eks. er

$$T(1) = 0$$

$\Rightarrow T$ ikke en-til-en.

T på: $\forall f \in P_2 \ \exists g \in P_2$ s.a. $T(g) = f$

Ser at $\dim(R(T)) \neq \dim(P_2)$, så f.eks.:

La $f = 1 \in P_2$. $1 \notin R(T)$, så finnes ingen

$g \in P_2$ s.a. $T(g) = 1$

$\Rightarrow T$ ikke på

T ikke på og ikke en-til-en:

$\Rightarrow T$ ikke isomorfi