Øving 6 - side 1

Andreas B. Berg

6.5.6) På hvor mange måter kan man velge 5 vanlendes elementer fra 3 med repetisjon?

Antall kombinasjoner er gitt ved $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ der r = antall elem = 3 og n = antall plukket = 5. Dette gir

Antall måte $= \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = \underline{\underline{35}}$

6.5.14) Hvor mange løsninger har $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ der $x_i \geq 0$

Ser ved eks. 6.5.5 at dette er det samme som antall måte å velge 17 elementer fra 4 mulige. Dette gir:

$C(17+4-1, 4-1) = \frac{(17+4-1)!}{17!(4-1)!} = \frac{20!}{17!3!} = \underline{\underline{1140}}$

6.5.32) Hvor mange strings kan bli laget av alle bokstaver i MISSISSIPPI?

Dette er det samme som teorem 3, antall permutasjoner av n elem. med grupper. La $n = 11$, $n_1^{(M)} = 1$, $n_2^{(I)} = 4$, $n_3^{(S)} = 4$, $n_4^{(P)} = 2$. Da er

$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!} = \frac{11!}{1!4!4!2!} = \underline{\underline{34650}}$

6.5.56) På hvor mange måter kan 5 like objekter fordeles på 3 like bokser?

Ser på fordelinger, med "fullest" boks først. Antar ingen kapasitetsbegrensning.

5 | 4,1 | 3,2 | 3,1,1 | 2,2,1

<u>Dette gir 5 forskjellige måter å fordele.</u>

ØVING 6 - side 2

Andreas B. Berg

6.6. 5) Finn neste større permutasjon i lexicographic orden etter følgende:

a) 1432 $\quad n = 4,\ r = 4$

Siste a_i så $a_i \neq 4 - 4 + i = i$ er $a_4 = 2 \neq 4$

La $a_i = a_i + 1 \Rightarrow a_4 = 3$

Lett å se at neste permutasjon = $\underline{2134}$

b) 54123 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{54132}}$

c) 12453 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{12534}}$

d) 45231 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{45312}}$

e) 6714235 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{6714253}}$

f) 31528764 $\Rightarrow$ $\underline{\underline{31542678}}$

8.1.11) a) Finn recurrence relation for # måter å klatre n trinn hvis man kan klatre 1 eller 2 trinn pr steg. La a_n = # måter ved n trinn:

n	a_n	comb.
1	1	(1)
2	2	(11)(2)
3	3	(111)(21)(12)
4	5	(1111)(211)(22)(112)(121)
5	8	(11111)(2111)(221)(212)(1211)(122)(1121)(1112)
6	13	(111111)(21111)(2112)(2121)(2211)(222)(12111)(1212)(1221)(11211)(1122)(11121)(11112)

Ser at $\underline{\underline{a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \forall n > 2, \quad a_1 = 1,\ a_2 = 2}}$

b) Initialverdiene er $\underline{\underline{a_1 = 1,\ a_2 = 2.}}$ Kan ikke ha trapp med 0 trinn $\Rightarrow$ ingen a_0

c) På hvor mange måter kan man klatre trapp med 8 trinn? Fortsette fra (a):

n	a_n
7	$8 + 13 = 21$
8	$13 + 21 = \underline{34}$

$\underline{\underline{a_8 = 34 \text{ måter}}}$

 Andreas B. Berg

8.1.20) En bussjåfør betale toll med 5- og 10-cents mynter.

a) Finn recurrence relation for betaling av n cent.

n	a_n	måter
1	2	(5)(10)
2	2	(5)(10)
3	2	
⋮		
6	3	(5,5)(5,10)(10)
⋮	⋮	
11	5	(5,5,5)(10,5)(5,10)(10,10)(5,5,10)
⋮	⋮	
16	8	(5,5,5,5)(10,5,5)(10,5,10)(5,10,5)(5,10,10)(5,5,5,10)(5,5,10)(10,10)
⋮	⋮	
21	13	(5,5,5,5,5)(5,5,5,5,10)(5,5,5,10)(10,10,10),(10,10,5)(10,5,5,5)(10,5,5,10) (10,5,10)(5,10,5,5)(5,10,10)(5,10,5,10)(10,5,10)(10,5,5,5)(10,5,5,10)
⋮		
$1+5k$	$a_{1+5(k-1)} + a_{1+5(k-2)}$	, $k>2$ og heltall

La n = cent å betale. Da er $a_n = a_{1+5k} = a_{1+5(k-1)} + a_{1+5(k-2)}$

$= a_{5k-4} + a_{5k-9}$ der k er største heltall så $1+5k \leq n$ og $k>2$.

$k=0 \Rightarrow a_{1+5k} = 2$ $\quad k=1 \Rightarrow a_{1+5k} = 3$

b) Hvor mange måte kan 45 cent betales?

$n = 45 \Rightarrow k = 8 \quad \Rightarrow \quad a_{45} = a_{1+5\cdot 8} = a_{41}$

k	a_{1+5k}
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21
7	34
8	55

$\Rightarrow$ 55 måte å betale 45 cent.

 Andreas B. Berg

8.23c) Løs: $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

Ser på $r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2) \Rightarrow$ 2 og 3 e røtter

T1 $\Rightarrow a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n$

$a_0 = 1 \Rightarrow C + D = 1$
$C = 1 - D$
$C = 1 - (-2) = 3$

$a_1 = 0 \Rightarrow 2C + 3D = 0$
$2(1-D) + 3D = 0$
$2 - 2D + 3D = 0$
$D = -2$

$$\underline{\underline{a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n}}$$

d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$

Ser på $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 \Rightarrow$ 2 e rot

T2 $\Rightarrow a_n = C \cdot 2^n + Dn \cdot 2^n$

$a_0 = C = 6$

$a_1 = 2C + 2D = 12 + 2D = 8 \Rightarrow D = -2$

$$\underline{\underline{a_n = 6 \cdot 2^n - 2n \cdot 2^n}} = \underline{\underline{(6-2n)2^n}}$$

e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$

Ser på $r^2 + 4r + 4 = (r+2)^2 \Rightarrow -2$ e rot

T2: $\Rightarrow a_n = C(-2)^n + Dn(-2)^n$

$a_0 = C = 0$
$a_1 = -2D = 1 \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$

$$\underline{\underline{a_n = -\frac{1}{2}n(-2)^n}}$$

g) $a_n = \frac{1}{4}a_{n-2}$ for $n \geq 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$

Ser på $r^2 - \frac{1}{4} = (r + \frac{1}{2})(r - \frac{1}{2}) \Rightarrow \pm\frac{1}{2}$ e røtter

T1 $\Rightarrow a_n = C(\frac{1}{2})^n + D(-\frac{1}{2})^n$

$a_0 = C + D = 1$
$\Rightarrow C = D = \frac{1}{2}$

$a_1 = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D = 0 \Rightarrow C = D$

$$\underline{\underline{a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^n + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n}}$$

ØVING 6 - side 5

Andreas B. Berg

8.2. 6) Hvor mange ulike meldinger kan sendes på n mikrosek. når signal 1 tar 1 mikrosek. og signal 2 & 3 tar 2 mikrosekund

n	a_n	komb
1	1	(1)
2	3	(11)(2)(3)
3	5	(111)(12)(13)(21)(31)
4	11	(1111)(112)(113)(121)(131)(211)(311)(23)(22)(32)(33)
5	21	(11111)(1112)(1113)(1121)(1131)(1211)(122)(123)(1311)(132)(133)(2111)(212)(221)(213)(231)(3111)(312)(321)(313)(331)

$$a_n = a_{n-1} + 4(n-3) + 2 \quad \text{for } n > 2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 3$$

$$= a_{n-1} + 4n - 10$$

Se på $a_n^{(h)} = a_{n-1} \Rightarrow r^2 - r = r(r-1) \Rightarrow 0, 1$ e rötte

$a_n^{(h)} = C \cdot 1^2 = C$

TS: Løsning $= \{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$ der $a_n^{(p)}$ er en løsning

$a_3 = 5 \Rightarrow a_n^{(p)} = 5,\ a_n^{(h)} = C$

$\Rightarrow a_n = 5 + C$

[Dette er åpenbart feil, men vet ikke hvor]

11) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$

a) Vis at $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ for $n = 2, 3, \ldots$

$L_2 = L_1 + L_0 = 1 + 2 = 3 \qquad f_1 + f_3 = 1 + 2 = 3$

$L_3 = L_2 + L_1 = 3 + 2 = 5 \qquad f_2 + f_4 = 1 + 4 = 5$

Anta sant: $n > 3$ $\quad L_n = L_{n-1} + L_{n-2} = f_{n-2} + f_n + f_{n-3} + f_{n-1} \qquad [f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-3}]$

$= f_{n-1} + f_n + f_{n-1} = f_{n+1} + f_{n-1}$

Stemmer for $n = 2, 3$ og for $n > 3 \Rightarrow$ sant $\forall n \geq 2$

Andreas B. Berg

8.2.11b) Finn generell formel for Lucas' tall

$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, $L_0 = 2$, $L_1 = 1$

Se på: $r^2 - r - 1$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$L_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$L_0 = C + D = 2$

$C = 2 - D$

$$L_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)C + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)D = 1$$

$$(1+\sqrt{5})C + (1-\sqrt{5})D = 2$$

$$(1+\sqrt{5})(2-D) + (1-\sqrt{5})D = 2$$

$$2(1+\sqrt{5}) - (1+\sqrt{5})D + (1-\sqrt{5})D = 2$$

$$D(1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}) = 2(1-1-\sqrt{5})$$

$$-D(2\sqrt{5}) = -2\sqrt{5}$$

$$D = 1$$

$C = 2 - 1 = 1$

$$\underline{\underline{L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}}$$

8.2.42) Vis at hvis $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$, $a_1 = t$, s, t konst. så er

$a_n = s f_{n-1} + t f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Viser for $n=1$: $\underline{a_1 = t = s \cdot 0 + t \cdot 1 = s f_0 + t f_1}$

$n=2$: $\underline{a_2 = s + t = s \cdot 1 + t \cdot 1 = s f_1 + t f_2}$

Anta sant for $\forall m < n$:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (s f_{n-2} + t f_{n-1}) + (s f_{n-3} + t f_{n-2})$$

$$= s(f_{n-2} + f_{n-3}) + t(f_{n-2} + f_{n-1})$$

$$\underline{\underline{= s f_{n-1} + t f_n}}$$

Stemmer for $n = 1, 2$ og $\forall n$ der det stemmer for $\forall m < n$

$$\underline{\underline{\Rightarrow a_n = s f_{n-1} + t f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}}} \quad \square$$