ØVING 2 side 1 Andreas B. Berg

1.6

27) La W_1 og W_2 underrom av $P(F)$.

$W_1 = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i = 0 \Leftrightarrow i$ partall

$W_2 = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i = 0 \Leftrightarrow i$ oddetall

Da er basen til

$W_1 = \{x^i\}$ for $0 \le i \le n$, i = oddetall

$W_2 = \{x^i\}$ for $0 \le i \le n$, i = partall

Siden $W_1 \subseteq P_n(F)$ er basen for W_1 = basen for $W_1 \cap P_n(F)$.

Tilsvarende for W_2.

Da får vi at for n = partall:

$\underline{\underline{\dim(W_1 \cap P_n(F)) = \frac{n}{2} + 1}}$, $\underline{\underline{\dim(W_2 \cap P_n(F)) = \frac{n}{2}}}$

For n = oddetall:

$\underline{\underline{\dim(W_1 \cap P_n(F)) = \frac{n+1}{2} = \dim(W_2 \cap P_n(F))}}$

28) V vektorrom over $\mathbb{C}$, $\dim V = n$

La B være basis for V over $\mathbb{R}$. Da er $B = b_r \cup b_i$, hvor

alle $b_{rj} \in b_r$, $b_{rj} \in \mathbb{R}$

$b_i = \{ i \cdot b_{rj} \mid b_{rj} \in b_r \}$

Siden b_i har lengde n (fra oppgaven), og den har lik lengde som b_r (tar hvert element i b_r og ganger med i), blir

$\underline{\text{len } B = \dim(V) = 2n}$

 Andreas B. Berg

1.7

3) La V = sett av reelle tall, V vektorrom over $\mathbb{Q}$

$\pi \in \mathbb{R}$, men kan ikke skrives som endelig sum av rasjonelle tall.

La $V = \{\pi, \pi^2, \dots\}$. Settet er uendelig og lin. uavhengig, så $\dim V = \infty$.

2.1

5) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = xf(x) + f'(x)$

(☆) $R(T) = \text{span}\{T(1), T(x), T(x^2)\}$

$= \text{span}\{x, x^2+1, x^3+2x\} = \text{span}\{x, x^2+1, x^3\}$

Bevis at T er lin. transf.:

$T(af(x)) = xaf(x) + (af(x))' = axf(x) + af'(x)$

$= a(xf(x) + f'(x)) = aT(f(x))$

$T(f(x)+g(x)) = x(f(x)+g(x)) + (f(x)+g(x))'$

$= xf(x) + xg(x) + f'(x) + g'(x) = T(f(x)) + T(g(x))$

$\Rightarrow$ T er lin. transformasjon.

Fortsetter med ☆:

Ser at $\{x, x^2+1, x^3\}$ er lin. uavh., så mengden er basis for $R(T)$.

Ser at $N(T) = \{0\}$, basis $= \emptyset$

$(T(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0)$

Rank $(T) = 3$, nullitet $(T) = 0$

Nullitet $= 0 \Rightarrow$ T en-til-en

Rank $(T) = 3 < 4 = \dim P_3(\mathbb{R}) \Rightarrow$ T ikke onto

 Andreas B. Berg

2.1

13) La V, W vektorrom, $T: V \to W$ lineær, $\{w_1, \dots, w_k\}$ lin. uavh. $\subseteq R(T)$

La $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k \mid T(v_i) = w_i\}$

Bevis at S er lin. uavhengig:

La $\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i} = 0$. Da er

$$T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i \vec{v_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i T(\vec{v_i}) = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{w_i} = 0$$

$\Rightarrow a_i = 0$ for $0 < i \leq k$, så $\underline{S \text{ er lin. uavh.}}$

15) $T: P(R) \to P(R)$, $T(f(x)) = \int_0^x f(t)dt$

Bevis: T lineær, T en-til-en, T ikke onto

T lineær:

$$T(af(x)) = \int_0^x af(t)dt = a\int_0^x f(t)dt = aT(f(x))$$

$$T(f(x)+g(x)) = \int_0^x (f(t)+g(t))dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt$$

$$= T(f(x)) + T(g(x))$$

$\underline{\underline{\Rightarrow T \text{ lineær}}}$

T en til en, se på $\vec{0}$:

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in P(R)$

$$T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} = 0 \Rightarrow \frac{a_i}{i+1} = 0 \Rightarrow a_i = 0$$

$\underline{\underline{\text{Så } T \text{ er 1-til-1}}}$

T onto $= \forall y \in P(R)\ \exists f(x) \in P(R)$ s.a. $T(f(x)) = y$

La $y = 1$. Siden ingen integral kan bli 1, finnes ingen $f(a)$ så $T(f(x)) = 1$, så $\underline{\underline{T \text{ er ikke onto.}}}$

 Andreas B. Berg

2.1

16) La $T: P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R})$, $T(f(x)) = f'(x)$

Bevis: T onto, ikke 1-til-1

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in P(\mathbb{R})$

$T\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$

T onto:

$$\underline{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = T\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} a_i x^{i+1}\right)}$$

Dvs. $\forall f(x) \in P(\mathbb{R})\ \exists\, g(x) \in P(\mathbb{R})$ s.a. $T(g(x)) = f(x)$

$\underline{\underline{\Rightarrow T \text{ onto}}}$

T ikke 1-til-1:

$1, 0 \in P(\mathbb{R})$

$T(1) = 1' = 0$

$T(0) = 0' = 0$

$T(1) = T(0) \Rightarrow \underline{\underline{T \text{ ikke 1-til-1}}}$