ØVING 2 side 1 Andreas B. Berg

1) a) $f(x,y) = \ln(x+y)$ $\quad \underline{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y > 0\}}$

b) $f(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2} = \frac{1}{(x+y)(x-y)}$

$\underline{D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq \pm y\}}$

2) La $F, G : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ være kont. i $a \in A$. Skal vise at $F \cdot G$ er kont i A.

Har at $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_m(x))$
$G(x) = (G_1(x), G_2(x), \ldots, G_m(x))$

Da er

$$(F \cdot G)(x) = (F_1(x)G_1(x), F_2(x)G_2(x), \ldots, F_m(x)G_m(x))$$

Har fra prop. 2.2.4 at $F_i(x)$ og $G_i(x)$ er kont. i a.

Da er $F_i(x)G_i(x)$ kont. i a.

Dermed har vi fra prop 2.2.4 [motsatt vei] at

$\underline{F \cdot G \text{ er kont i } a}$

3) Vis at $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ er kont. med $\varepsilon - \delta$.

Def: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ s.a.

$$* \begin{cases} \|f_i((x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| < \varepsilon \text{ hvis} \\ \|(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) - (x_1, x_2, \ldots, x_n)\| < \delta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \|x_{0i} - x_i\| < \varepsilon \text{ hvis } \sqrt{(x_{01}-x_{02})^2 + \ldots + (x_{0n} - x_n)^2} < \delta$$

Ser på

$$\delta > \sqrt{\underbrace{(x_{01}-x_{02})^2}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{(x_{0n}-x_n)^2}_{\geq 0}} \geq \sqrt{(x_{0i}-x_i)^2} = \|x_{0i} - x_i\|$$

Ser at $\delta > \|x_{0i} - x_i\| < \varepsilon$. La $\delta < \varepsilon$, så får vi at $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. $(*)$, så

$\underline{f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ er kontinuerlig.}}$

 Andreas B. Berg

4) a) Vis at $f(\vec{x}) = \|\vec{x} - a\|$ er kont., $a \in \mathbb{R}^n$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ s.a. $\|f(\vec{x}_0) - f(\vec{x})\| < \varepsilon$ for
$\|\vec{x}_0 - \vec{x}\| < \delta$

$$\varepsilon > \|f(\vec{x}_0) - f(\vec{x})\| \geq \big|\|\vec{x}_0 - a\| - \|\vec{x} - a\|\big|$$
$$\geq \big|\|\vec{x}_0\| - \|a\| - \|\vec{x}\| - \|a\|\big|$$
$$= \|x_0\| - \|x\|$$
$$\delta > \|\vec{x}_0 - \vec{x}\| \geq \|\vec{x}_0\| - \|\vec{x}\|$$

Har at $\delta > \|\vec{x}_0\| - \|\vec{x}\| < \varepsilon$. Sett $\delta < \varepsilon$, så
ser vi at $f(\vec{x})$ er kont.

b) Vis at $g(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x} - a\|}$ er kont. Vet fra (a) at
$f(\vec{x}) = \|\vec{x} - a\|$ er kont. Siden $g(\vec{x}) = \frac{1}{f(\vec{x})}$ og
f er kontinuerlig, må g være kontinuerlig, når $f(x) \neq 0$.

5) Vis at $F(x, y, z) = (x^2 z + y,\ x^2 \sin(xyz),\ x^3)$ er kont.
Vet at $f(x, y, z) = x$, $f(x, y, z) = y$ og $f(x, y, z) = z$
er kontinuerlige. Da vet vi fra prop 2.2.2 at
$$F_1 = x^2 z + y \quad \text{og}$$
$$F_3 = x^3 \quad \text{er kont. i } \mathbb{R}^3$$
Ved prop 2.2.3 og 2.2.2 ser vi at
$$F_2 = x^2 \sin(xyz) \quad \text{er kont. i } \mathbb{R}^3.$$

Dermed gir prop. 2.2.4 oss at F_1, F_2, F_3 kont

$\Rightarrow$ $F(x, y, z)$ kontinuerlig i $\mathbb{R}^3$

 Andreas B. Bog

6) a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin(r)}{r} = \underline{\underline{1}}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2}{xy}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4 = \underline{\underline{4}}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$

$\neq$

$\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$

<u>Grenseverdien eksisterer ikke</u>

7) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & , (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & , (x,y)=(0,0) \end{cases}$

a) $\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^6} = \underline{\underline{0}}$

b) $\lim_{(y^3,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^6+y^6} = \lim_{y\to 0} \frac{\cancel{y^6}}{2\cancel{y^6}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

c) Siden <u>$\lim_{(y^3,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq \lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y)$ er f ikke kont. i $(0,0)$.</u>

8) La $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$

f ikke kontinuerlig der f ikke er definert, dvs. når

$x^2+y^2+z^2-1 = 0$

<u>f er ikke kont. i planet gitt ved $x^2+y^2+z^2-1=0$</u>