 Andreas B. [illegible]

2.1

38) La $T: C \to C$ s.a $T(z) = \overline{z}$

Vis at T er "additive", men ikke lineær:

La $x = a + bi \qquad y = c + di$

$$T(x+y) = T((a+c)+(b+d)i) = (a+c) - (b+d)i$$

$$= a - bi + c - di = T(x) + T(y)$$

$\Rightarrow$ T er additive.

T lineær $\Leftrightarrow$ $T(ax) = aT(x)$ for $a \in C$

$$T(i) = -i \neq i = iT(1)$$

$\Rightarrow$ T er ikke lineær

2.2

4) La $T: M_{2\times 2}(R) \to P_2(R)$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b) + (2d)x + bx^2$

La $\beta = \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$, $\gamma = \{1, x, x^2\}$

Finn $[T]_\beta^\gamma$

$T(v_1) = 1 + 0x + 0x^2 \qquad T(v_2) = 1 + 0x + x^2$

$T(v_3) = 0 + 0x + 0x^2 \qquad T(v_3) = 0 + 2x + 0x^2$

$$[T]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) La V = vektorrom av komplekse tall over $\mathbb{R}$ $T: V \to V$ $T(z) = \overline{z}$

Vis at T er lineær, finn $[T]_\beta$, $\beta = \{1, i\}$

T additive fra 2.1.38

La $x = b + ci$, $a \in \mathbb{R}$

$$T(ax) = T(a(b+ci)) = T(ab + aci) = ab - aci$$

$$= a(b - ci) = a\overline{x} = aT(x)$$

$\Rightarrow$ T er lineær

 Andreas B. Berg

2.2

9) forts. $\gamma = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{i}\}$

$[T]_\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$(a + bi) \longmapsto (a, b)$

$T(v_1) = T(1) = 1 = [1, 0]$

$T(v_2) = T(i) = -i = [0, -1)$

$$\underline{\underline{[T]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}}$$

13) V, W vektorrom, $T : V \to W$ $U : V \to W$

$R(T) \cap R(U) = \{0\}$

Vis at $\{T, U\}$ er lin. uavh. delmengde av $\mathcal{L}(V, W)$

$T, U : V \to W$, så $\underline{\{T, U\} \subset \mathcal{L}(V, W)}$

Bevis med selvmotsigelse at T, U er lin. avh.:

Anta det finnes en a s.a. $aT = U$. La $x \in V$ og $y \in W$ s.a. $T(x) = y \neq 0$. Ser at

$y = \frac{1}{a} a y = \frac{1}{a} a T(x) = \frac{1}{a} U(x) = U(\frac{1}{a} x) \in R(U)$

Da er $y \in R(U) \cap R(T)$, men vet at $R(U) \cap R(T) = \{0\}$, så det stemmer ikke. Dermed må T, U være lin. uavh.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\{T, U\} \text{ er lin. uavh. delmengde av } \mathcal{L}(V, W)}}$

ØVING 3 side 3 Andreas B. Berg

2.3

3) La $g(x) = 3 + x$. La $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ og $U : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ være lin. transformasjoner så

$$T(f(x)) = f'(x)g(x) + 2f(x) \quad \text{og}$$
$$U(a + bx + cx^2) = (a+b, c, a-b)$$

La $\beta = \{1, x, x^2\}$, $\gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

a) Finn $[U]_\beta^\gamma$, $[T]_\beta^\beta$ og $[UT]_\beta^\gamma$

$U(\beta_1) = (1,0,1) \quad U(\beta_2) = (1,0,-1) \quad U(\beta_3) = (0,1,0)$

$$[U]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T(\beta_1) = 2 + 0x + 0x^2 \quad T(\beta_2) = 3 + x + 2x = 3 + 3x + 0x^2$

$T(\beta_3) = 2x(3+x) + 2x^2 = 0 + 6x + 4x^2$

$$[T]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[UT]_\beta^\gamma = U \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

b) La $h(x) = 3 - 2x + x^2$. Finn $[h(x)]_\beta$ og $[U(h(x))]_\gamma$.

$h(x) : P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$[h(x)]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [U(h(x))]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$[U(h(x))]_\gamma = [U]_\beta^\gamma [h(x)]_\beta^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

 Andreas B. Berg

2.3

9) Finn lin. transf. $U, T : F^2 \to F^2$ s.a. $UT = T_0$, $TU \neq T_0$
Bruk dette til å finne matr. A, B sa. $AB = 0$, $BA \neq 0$

La $U = \{(0,1),(0,1)\}$, $T = \{(1,1),(0,0)\}$

$UT = \{(0,0),(0,0)\} = T_0$

$TU = \{(0,2),(0,0)\} \neq T_0$

La $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

12) La V, W, Z vektorrom. La $T : V \to W$ $U : W \to Z$ lineære

a) Vis at hvis UT er 1-til-1, så er T 1-til-1. Er U 1-til-1

Hvis UT er 1-til-1, så har vi at

$UT(x) = 0 \iff x = 0$

$T(x) = 0 \implies UT(x) = U(0) = 0 \implies x = 0$

$\implies$ T er 1-til-1

U trenger ikke være 1-til-1, da

$U(x) = 0 \not\Rightarrow UT(x) = 0$

b) Vis at UT onto $\Rightarrow$ U onto. Må T være onto?

Hvis UT er onto, vil det for alle $z \in Z$ $\exists$ $v \in V$ s.a.

$UT(v) = z$

Ser at for alle $z \in Z$ finnes det $T(v) \in W$ s.a.

$U(T(v)) = z$, $\implies$ U er onto

T trenger ikke være onto, da vi ikke sier noe om at alle $w \in W$ finnes $T(v) = w$

 Andreas B. Berg

2.3

12) forts.

c) Vis at hvis U og V er 1-til-1 og onto, så er UT også det.

La $v \in V$, $w \in W$, $z \in Z$.

U, V onto

$\Rightarrow$ for alle z finnes w s.a. $U(w) = z$.

$\Rightarrow$ for alle w finnes v s.a. $T(v) = w$

$\Rightarrow$ for alle z finnes v s.a. $U(T(v)) = z$

$\Rightarrow$ <u>UT onto</u>

U, V 1-til-1:

$$U(w) = 0 \Rightarrow w = 0$$
$$T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$UT(v) = U(T(v)) = 0 \Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow v = 0$$

$\Rightarrow$ <u>UT 1-til-1</u>

 Andreas B. Berg

2.3

13) La A, B $n \times n$-matr.

$$tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

- Vis at $tr(AB) = tr(BA)$

Se på $(AB)_{ii}$

$$(AB)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$$

$$(BA)_{kk} = \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}$$

$$tr(BA) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii}$$

$$= tr(AB)$$

$$\Rightarrow tr(AB) = tr(BA)$$

- Vis at $tr(A) = tr(A^T)$

La $A = [A_{ik}]$, $A^T = [A_{ki}]$

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}$$

$$tr(A^T) = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = tr(A)$$

$$\Rightarrow tr(A) = tr(A^T)$$

Merk: Når man transponerer en matrise endres ikke diagonalen