ØVING 1 side 1

Andreas B. Berg

1) Finn t så $(t, 1, t) \perp (t, -6, 1)$

Vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale når $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$:

$$(t, 1, t) \cdot (t, -6, 1) = 0$$
$$t^2 - 6 + t = 0$$
$$(t+3)(t-2) = 0$$
$$\underline{\underline{t_1 = -3 \quad , \quad t_2 = 2}}$$

2) Finn vinkel mellom $\vec{a} = (1, 2, 3)$ og $\vec{b} = (-1, 0, 1)$ og finn $\mathrm{Proj}_b(a)$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\Theta$$
$$\Theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-1+3}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{1+1}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{28}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{7}}\right)$$
$$\underline{\underline{= \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) \approx 1{,}18 \text{ rad} \approx 67{,}8^\circ}}$$

$$\mathrm{Proj}_b(a) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$$
$$= \frac{2}{2} \cdot \vec{b} = 1\vec{b} = \vec{b} = \underline{\underline{(-1, 0, 1)}}$$

3) Hvorfor kan ikke $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ og $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$?

1) Vet fra trekantulikhet at $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$, og $7 > 3 + 2$

2) Maks lengde på $|\vec{a} + \vec{b}|$ oppnås hvis vektorene er parallelle. Da er $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| = 3 + 2 = 5$, men $5 < 7$.

 Andreas B. Berg

4) Vis at for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, så er $|\vec{x}| - |\vec{y}| \leq |\vec{x} - \vec{y}|$

Ser på h. side.

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{|\vec{x} - \vec{y}|^2} = \sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}$$

$$= \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y} - 2(\vec{x}\cdot\vec{y})}$$

$$= \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta}$$

Vet at $\cos\theta \leq 1$, så

$$\geq \sqrt{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$$= \sqrt{(|\vec{x}| - |\vec{y}|)^2}$$

$$= \big||\vec{x}| - |\vec{y}|\big|$$

$$\geq |\vec{x}| - |\vec{y}|$$

Altså har vi at

$$\underline{\underline{|\vec{x} - \vec{y}| \geq |\vec{x}| - |\vec{y}|}}$$

ØVING 1 side 3 Andreas B. Berg

5) Finner fartsvektorene til skipene. S_i = skip i, v_i = fart til i

$$V_1 = 15 \cdot \frac{(3,4)}{|(3,4)|} = 15 \cdot \frac{(3,4)}{\sqrt{9+16}}$$

$$= 15 \cdot \frac{(3,4)}{5} = 3(3,4) = (9, 12)$$

$$V_2 = 13 \frac{(-12,5)}{|(-12,5)|} = 13 \cdot \frac{(-12,5)}{\sqrt{144+25}}$$

$$= 13 \frac{(-12,5)}{13} = (-12, 5)$$

$$S_1 = (0,4) + t(9, 12) = (9t, 4+12t)$$
$$S_2 = (39, 14) + s(-12, 5) = (39-12s, 14+5s$$

Kursen krysser når

$$(9t, 4+12t) = (39-12s, 14+5s)$$

$$\text{(i)} \quad 9t = 39 - 12s$$
$$\text{(ii)} \quad 4 + 12t = 14 + 5s$$

$$\text{(i)} \quad t = \frac{39-12}{9}$$

$$\text{(ii)} \quad 4 + 12\left(\frac{39-12s}{9}\right) = 14 + 5v$$

$$4 + 52 - 16s = 14 + 5s$$
$$-16s - 5s = 14 - 56$$
$$\frac{-21v}{-21} = \frac{-42}{-21}$$
$$s = 2$$

$$\text{(i)} \quad t = \frac{39-12v}{9} = \frac{39-24}{9} = \frac{5}{3}$$

a) Dette gir at kursene krysser ved

$$(9t, 4+12t) = (9 \cdot \tfrac{5}{3}, 4 + 12 \cdot \tfrac{5}{3})$$
$$= (15, 4+20) = \underline{\underline{(15, 24)}}$$

 Andreas B. Berg

5) b) Anta skipets posisjon er gitt ved fronten (baugen) av skipet. Siden $t - v = \frac{1}{3}$, er det $\frac{1}{3}$ time fra baugen av skip 1 passerer krysning til skip 2 passerer krysning. Siden $V_1 = 15$ knop, beveger skip 1 seg $\frac{1}{3} \cdot 15 = 5$ nautiske mil fra det passerer krysningspunktet til skip 2 passerer krysningspunktet

Merk: vi antar at skipene ikke har nevneverdig bredde.

Med mindre skip 1 er over 5 nautiske mil (9,26 km) langt, vil ikke skipene kollidere

Mao: skip 1 passerer 20 min før skip 2, så de vil ikke kollidere

6) $\vec{a} = (-2, 3, 1)$ $\vec{b} = (4, 0, -2)$ Finn areal parallellogram.

$$\text{Areal} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \left\| \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \|(-6, 0, -12)\| = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5} \approx 13,4$$

7) Finn linje gjennom $(1, -2, -3)$, ortogonalt på $3x - y - 2z + 4 = 0$

Vet at vektor ortogonalt på plan: $\vec{v} = (3, -1, -2)$.
Da får vi at linjen er gitt

$$l(t): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad \text{evt. } l(t) = (1 + 3t, -2 - t, -3 - 2t)$$

 Andreas B. Berg

8) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $A+B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = (3\cdot2\cdot1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 1\cdot2\cdot1) = 6 - 2 = \underline{\underline{4}}$

$\det(B) = (0 + 0 + (-1)2\cdot1) - (1\cdot1\cdot1 + 0 + 0) = -2 - 1 = \underline{\underline{-3}}$

$\det(AB) = (3(-1)(-1) + 1\cdot1\cdot1 + (-3)5\cdot1) - (3\cdot1\cdot1 + 1\cdot5(-1) + (-3)(-1)1)$

$= 3 + 1 - 15 - 3 + 5 - 3 = \underline{\underline{-12}}$

$\det(A+B) = (4\cdot2\cdot1 + 0 + 0) - (0 + 0 + 0) = \underline{\underline{8}}$

9) Finn volum av parallellpiped av $(-1,0,2), (3,-1,3), (4,0,-1)$

$\text{Volum}_{\vec{a}\vec{b}\vec{c}} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

$V = (-1,0,2)\cdot(3,-1,3)\times(4,0,-1)$

$= (-1,0,2)\cdot\left(\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}\right)$

$= (-1,0,2)\cdot(1, 15, 4)$

$= -1 + 0 + 8 = \underline{\underline{7}}$

 Andreas B. Berg

10) $D := \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0 \qquad = a_1 b_2 - a_2 b_1$

a) Vis at $a_1 x + b_1 y \overset{(1)}{=} c_1$, $a_2 x + b_2 y \overset{(2)}{=} c_2$ har løsning

$$x = \frac{1}{D}\det\begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad y = \frac{1}{D}\det\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{D}(c_1 b_2 - c_2 b_1) \qquad = \frac{1}{D}(a_1 c_2 - a_2 c_1)$$

$$= \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

(i): Setter inn verdiene for x og y i (1):

$$a_1 x + b_1 y$$

$$= a_1 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$= \frac{a_1 c_1 b_2 - \cancel{a_1 c_2 b_1} + \cancel{b_1 a_1 c_2} - b_1 a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$= \frac{a_1 c_1 b_2 - a_2 c_1 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1 \qquad \underline{\text{ok}}$$

(ii): Setter inn verdiene for x og y i (2):

$$a_2 x + b_2 y$$

$$= \frac{a_2 c_1 b_2 - a_2 c_2 b_1 + b_2 a_1 c_2 - b_2 a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$= \frac{c_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_2 \qquad \underline{\text{ok}}$$

<u>Ser at løsningen stemmer i begge likninger ⇒ stemmer for settet</u>

b) Når $D = 0$ har man to muligheter:

(i) Linjene $a_1 x + b_1 y = c_1$ og $a_2 x + b_2 y = c_2$ er like, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ ⇒ uendelig antall løsninger

(ii) Linjene er parallelle ⇒ $a_1 = c a_2$, $b_1 = c b_2$ ⇒ ingen løsning

<u>Mao. Hvis $D = 0$ har man enten ingen eller uendelig antall løsninger</u>