 Andreas B. Berg

5.4

2) For T lin.op. på v.rom V, avgjør om underrom W er T-invariant underrom av V

a) $V = P_3(R)$, $T(f(x)) = f'(x)$, $W = P_2(R)$

$ax^2 + bx + c \in W \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$

$T(ax^2 + bx + c) = 2ax + b \in W \quad \forall a,b,c$

$\Rightarrow$ W er T-invariant underrom av V

b) $V = P(R)$, $T(f(x)) = xf(x)$, $W = P_2(R)$

$T(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx \notin W$

$\Rightarrow$ W er <u>ikke</u> T-invariant underrom av V

3) La T lin.op. på end.dim. vektorrom V. Vis at underrommet er T-invariant:

c) E_λ for enhver λ av T

Skal vise at $T(v) \in E_\lambda \quad \forall v \in E_\lambda$

La $v \in E_\lambda$. Da vet vi fra definisjon at $Tv = \lambda v$.

Vet at for $v \in E_\lambda$, så er $\text{span}(v) \in E_\lambda$. Dermed er $\lambda v \in E_\lambda$.

$Tv = \lambda v \Rightarrow Tv \in E_\lambda \quad \forall v \in E_\lambda$

$\Rightarrow E_\lambda$ T-invariant

6.5

2) For matrisen A, finn ortogonal eller unitær matrise P og diagonal matrise D s.a. $P^*AP = D$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Fra normal diagonalisering: $D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$$A - iI = \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \overset{T}{\sim} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i \\ -1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = v_1$$

$$A + iI = \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix} \overset{T}{\sim} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & i \\ -1 & i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = v_2$$

$$\|v_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{v_1 \bar{v}_1} = \sqrt{1 \cdot 1 + i(-i)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{\langle v_2, v_2 \rangle} = \sqrt{v_2 \bar{v}_2} = \sqrt{1 \cdot 1 + (-i)i} = \sqrt{2}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\left(P^*AP = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right)$$

c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3-3i \\ 3+3i & 5 \end{bmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3-3i \\ 3+3i & 5-\lambda \end{bmatrix} \quad \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(5-\lambda) - (3-3i)(3+3i)$$

$$= 10 - 7\lambda + \lambda^2 - 9 - 9 = \lambda^2 - 7\lambda - 8 = (\lambda - 8)(\lambda + 1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -1$$

$$A - 8I = \begin{bmatrix} -6 & 3-3i \\ 3+3i & -3 \end{bmatrix} \overset{T}{\sim} \begin{bmatrix} -6 & 3+3i \\ 3-3i & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -6 & 3+3i \\ 18 & -9-9i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 \\ 1+i \end{bmatrix} = v_1$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & 3-3i \\ 3+3i & 6 \end{bmatrix} \overset{T}{\sim} \begin{bmatrix} 3 & 3+3i \\ 3-3i & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 3+3i \\ 18 & 18+18i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = v_2$$

$$\|v\| = \sqrt{4 + (1+i)(1-i)} = \sqrt{4+2} = \sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3} \quad \|v_2\| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 1+i & -\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

 Andreas B. Berg

6.5

3) Vis at sammensetningen av unitære/ortogonale operatorer er unitær/ortogonal

La U, V være unitære operatorer $\Leftrightarrow U^*U = V^*V = I$

$$(UV)^* UV = V^* U^* U V = V^* V = I$$

$\Rightarrow$ <u>UV (sammenset. av unitære operatorer) er unitær</u>

7) Vis at hvis T unitær operator på end. dim indreprod. rom V, så har T unitær kvadratrot ($\exists$ unitær U s.a. $T = U^2$)

Finnes en ortonormal basis β s.a.

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad |\lambda_i| = 1$$

La $S = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \mu_2 & & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ O & & & \mu_n \end{pmatrix}$ s.a. $(\mu_i)^2 = \lambda_i$. $|\mu_i| = \sqrt{|\lambda_i|} = 1$

La U være matrisen s.a. $[U]_\beta = S$

<u>Da er U unitær og $T = U^2$</u>

6.6

2) La $V = \mathbb{R}^2$, $W = \text{span}\{(1,2)\}$, β standard ordn. basis for V. Finn $[T]_\beta$ der T er ortogonal proj. av V på W. Gjør samme for $V = \mathbb{R}^3$, $W = \text{span}(1,0,1)$

$$T_1 = \frac{\langle (1,0), (1,2) \rangle}{\|(1,2)\|^2}(1,2) = \frac{1}{5}(1,2)$$

$$T_2 = \frac{\langle (0,1), (1,2) \rangle}{\|(1,2)\|^2}(1,2) = \frac{2}{5}(1,2)$$

$$\Rightarrow [T]_\beta = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ØVING 12 side 4 Andreas B. Berg

6.6

2) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \text{span}\{(1,0,1)\}$

$$T_1 = \frac{\langle (1,0,0), (1,0,1) \rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$T_2 = \frac{\langle (0,1,0), (1,0,1) \rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) = 0$$

$$T_3 = \frac{\langle (0,0,1), (1,0,1) \rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1) = \frac{1}{2}(1,0,1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{[T]_\beta = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

7) La T norm. op. på end. dim komplekst indreprod. rom V. Bruk

$\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_k T_k = T$ til å vise

a) g polynom $\Rightarrow g(T) = \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) T_i$

$$g(T) = g(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \dots + \lambda_k T_k)$$

$$\overset{\text{lineær}}{=} g(\lambda_1 T_1) + g(\lambda_2 T_2) + \dots + g(\lambda_k T_k)$$

Vet at $T_i T_i = T_i$, så $g(\lambda_i T_i) = g(\lambda_i) T_i$

$$\Rightarrow \underline{\underline{g(T) = \sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) T_i}}$$

b) $T^n = T_0$ for noen $n \Rightarrow T = T_0$.

$$T_0 = T^n = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n T_j$$

La v_i være eg.vektor til eg.verdi λ_i. Da er

$$0 = T(v_i) = \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^n T_j\right) v_i = \lambda_i^n v_i$$

$$\Rightarrow \lambda_i^n = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j T_j = T_0}}$$

Kommentar: Litt usikker på framgangsmåten. Ser fram til LF ☺