

Séance 4: Résolution numérique de l'équation ADRS 1D

Raphaël Bigey

29 septembre 2025

On souhaite valider un schéma numérique pour l'équation

$$u_t = -Vu_x + Ku_{xx} - \lambda u + f(x, t)$$

en comparant la solution calculée à une solution exacte instationnaire $T_{\text{ex}}(x, t) = \sin(4\pi t)v(x)$ où $v(x)$ est un paquet gaussien. Nous étudions à la fois la convergence en maillage, le suivi temporel de l'erreur et l'influence de l'ordre du schéma de Runge–Kutta.

Résultats principaux

1. Évolution spatiale de la solution

La figure 1 montre la température $T(x, t)$ obtenue numériquement comparée à la solution exacte à différents instants.

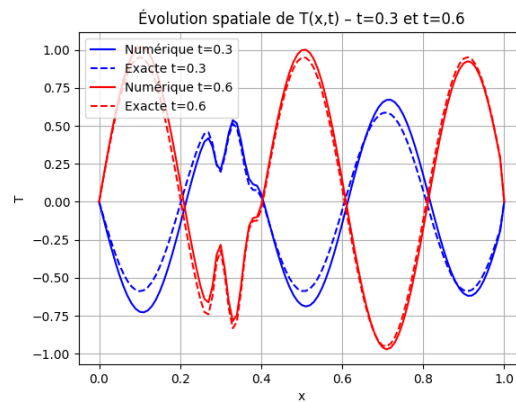


FIGURE 1 – Évolution temporelle de $T(x, t)$ et comparaison à la solution exacte au temps 0.3 et 0.6

2. Résidu de la résolution

La figure 2 présente l'évolution du résidu en fonction du temps, illustrant la stabilité et la convergence du schéma.

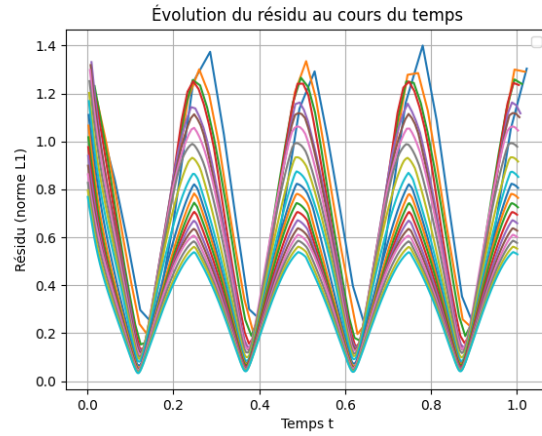


FIGURE 2 – Évolution du résidu au cours du temps.

3. Étude de convergence spatiale

L'erreur L^2 est calculée pour différents maillages à $t = 0.5$ et $t = 1.0$ s, voir figure 3.

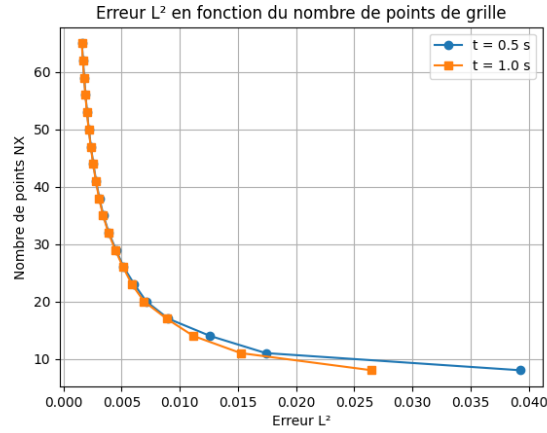


FIGURE 3 – Erreur L^2 en fonction du nombre de points de grille pour deux instants.

Le schéma reproduit correctement la solution analytique. L'étude de convergence confirme la cohérence du schéma d'advection–diffusion–réaction et montre l'intérêt d'augmenter l'ordre de Runge–Kutta pour réduire l'erreur au point central du domaine.

4. Influence de l'ordre de Runge–Kutta

Une nouvelle expérience compare l'erreur ponctuelle au centre du domaine ($x = 0.5$) pour des schémas de Runge–Kutta d'ordre 1 à 4. La figure 5 met en évidence la réduction significative de l'erreur lorsque l'ordre augmente.

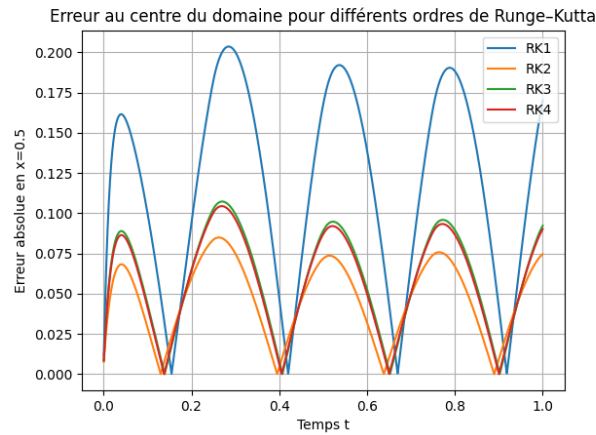


FIGURE 4 – Évolution de l'erreur en $x = 0.5$ pour différents ordres de Runge–Kutta.

5. Le code `adrs_insta_multiple_mesh_adap.py`

Pour illustrer l'évolution de la solution ADRS instationnaire, on trace la solution à quatre instants représentatifs : $t = 0; 0.25; 0.5; 0.75; 1s$

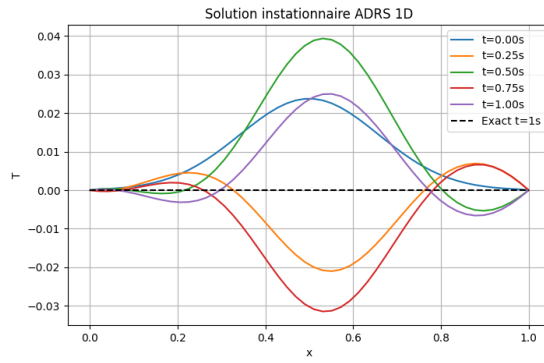


FIGURE 5 – Évolution en temps de la solution.

Les critères d'arrêt sont

— $|N_x - N_x 0| \leq 1$.

— $n_{\text{iter}} < n_{\text{iter refinement}}$