

Séance 5: Étude de l'équation ADRS et optimisation du contrôle

Raphaël Bigey

06 octobre 2025

1 Objectif de l'étude

L'objectif de cette séance est d'analyser et de résoudre un **problème inverse de contrôle** appliqué à l'équation d'advection–diffusion–réaction–source (ADRS). On cherche à déterminer un ensemble de paramètres de contrôle (ou intensités de sources) permettant de reproduire un **état cible** $T_{\text{target}}(x)$, en minimisant un **fonctionnel de coût** défini par :

$$J(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\Omega} (T(x; x_1, x_2, \dots, x_n) - T_{\text{target}}(x))^2 dx. \quad (1)$$

Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un **problème inverse régularisé**, typique des approches de commande optimale et de reconstruction de sources à partir de mesures simulées.

Le travail réalisé se décompose en deux volets :

- une **analyse du comportement du fonctionnel** J vis-à-vis des paramètres de contrôle ;
- une **amélioration de la précision numérique** des intégrations nécessaires à l'optimisation, notamment en présence d'un maillage adaptatif.

2 Exploration du fonctionnel $J(x_1, x_2)$

Afin de mieux comprendre la structure du fonctionnel de coût, on a étudié la dépendance de J vis-à-vis des deux premiers paramètres de contrôle, notés x_1 et x_2 , les autres étant maintenus constants. Cette exploration permet d'observer la **surface du coût** et de détecter d'éventuels minima locaux.

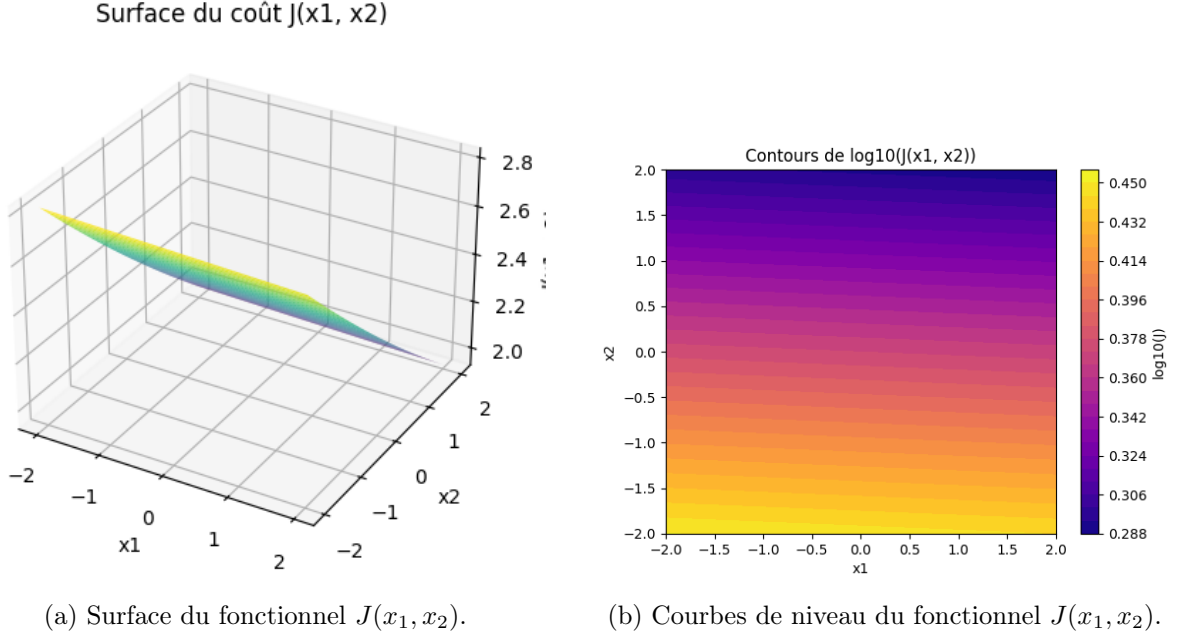


FIGURE 1 – Visualisation de la structure du fonctionnel de coût.

L'analyse de la surface obtenue montre une **régularité du fonctionnel** pour des valeurs proches de la solution optimale, mais également une possible **non-convexité globale**, justifiant le recours à des méthodes d'optimisation robustes.

3 Adaptation de maillage et cohérence numérique

3.1 Problématique

Lors de la résolution de l'équation ADRS, un **maillage adaptatif** est utilisé afin de raffiner la discrétisation dans les zones où les sources sont localisées. Cette adaptation améliore la précision locale des calculs, mais introduit une difficulté : les différentes solutions $T_i(x)$, associées à des champs de contrôle distincts, ne sont **pas définies sur le même maillage**.

Le calcul des intégrales

$$A_{ij} = \int_{\Omega} T_i(x) T_j(x) dx, \quad B_i = \int_{\Omega} (T_{\text{target}}(x) - T_0(x)) T_i(x) dx, \quad (2)$$

nécessite donc de ramener toutes les quantités sur une base commune.

3.2 Méthode adoptée

Pour garantir la cohérence des calculs :

1. Les différentes solutions numériques sont **interpolées sur un maillage de référence commun**, plus fin et régulier.
2. Les intégrales sont ensuite approchées par une **quadrature de Gauss–Legendre** d'ordre suffisant.

Cette approche assure que toutes les quantités sont évaluées sur le même espace de discrétisation, tout en conservant la précision du schéma initial.

3.3 Précision de l'intégration

Afin d'éviter d'introduire une erreur supplémentaire à ce niveau, la précision de l'intégration est choisie de sorte que l'erreur de quadrature soit **inférieure à l'erreur de discrétisation** de l'équation ADRS. Ainsi, une quadrature de Gauss–Legendre à 5 ou 6 points par intervalle est généralement suffisante pour garantir la stabilité numérique et la convergence du coût.

Des tests de convergence ont confirmé que l'erreur relative sur les intégrales A_{ij} et B_i restait inférieure à 10^{-6} lorsque le nombre de points de quadrature était augmenté, ce qui valide le choix adopté.

4 Résultats et observations

Les calculs réalisés montrent :

- une **amélioration significative de la stabilité** des résultats lors du passage à un maillage adaptatif ;
- une **cohérence accrue** des intégrales calculées après interpolation sur le maillage commun ;
- une **convergence plus rapide** du coût J au fil des itérations d'optimisation.

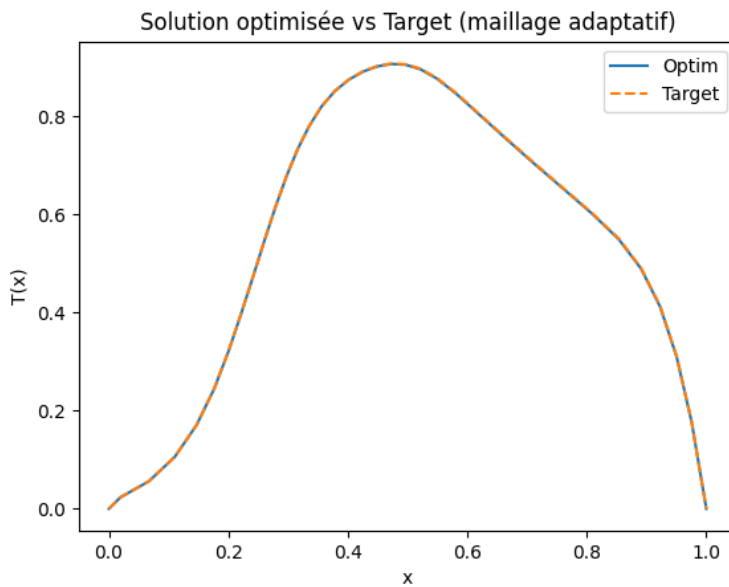


FIGURE 2 – Comparaison entre la solution optimisée T_{opt} et la solution cible T_{target} .

La comparaison entre la solution obtenue et la solution cible montre une excellente correspondance, notamment dans les zones de fort gradient, confirmant l'efficacité de la méthode d'adaptation et de l'intégration de haute précision.

5 Comparaison du contrôle optimal

5.1 Objectif de la comparaison

Après avoir obtenu le contrôle optimal sur un maillage adaptatif, il est nécessaire de vérifier la **cohérence et la précision** de cette solution en la comparant à une référence calculée sur un **maillage fixe très fin**. Cette comparaison permet d'évaluer la fidélité du schéma adaptatif et de quantifier l'erreur introduite par l'ajustement local du maillage.

5.2 Méthodologie

La procédure suivie est la suivante :

1. Calcul du **contrôle optimal** x_{opt} sur maillage adaptatif, à partir du système linéaire $Ax = B$.
2. Évaluation de la solution $T_{\text{opt,adapt}}(x)$ associée.
3. Recalcul de la même solution $T_{\text{opt,fixe}}(x)$ sur un **maillage fixe** très fin (ici, $N_X = 5000$).
4. Interpolation de $T_{\text{opt,fixe}}$ sur le maillage adaptatif pour comparer les deux champs.
5. Calcul de l'erreur quadratique L^2 :

$$\varepsilon_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} (T_{\text{opt,adapt}}(x) - T_{\text{opt,fixe}}(x))^2 dx}.$$

Cette analyse permet de mesurer la différence entre les deux approches, en validant la précision de l'approximation adaptative.

5.3 Résultats obtenus

Les résultats numériques sont les suivants :

- Contrôle optimal obtenu (maillage adaptatif) :

$$x_{\text{opt}} = [1.0539, 3.0454, 2.7154, 5.2218].$$

- Coût associé :

$$J_{\text{opt,adapt}} = 2.68 \times 10^{-9}.$$

- Erreur entre maillage adaptatif et fixe :

$$\varepsilon_{L^2} = 4.56 \times 10^{-7}.$$

L'erreur extrêmement faible montre que le maillage adaptatif reproduit fidèlement la solution de référence, tout en nécessitant un nombre de points bien inférieur.

5.4 Interprétation

La figure 3 ci-dessous illustre la comparaison entre :

- la solution optimisée sur maillage adaptatif,
- la solution optimisée sur maillage fixe,
- et la solution cible $T_{\text{target}}(x)$.

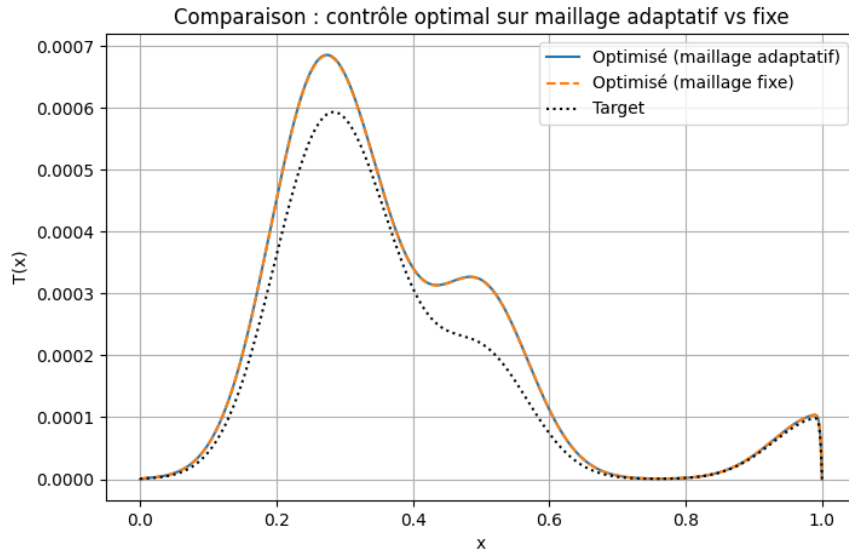


FIGURE 3 – Comparaison entre la solution optimisée sur maillage adaptatif et sur maillage fixe.

On observe une superposition quasi parfaite entre les deux courbes optimisées, confirmant que le maillage adaptatif permet d'obtenir une précision équivalente à celle d'un maillage fixe très fin. Les légères différences résiduelles, de l'ordre de 10^{-7} , sont attribuées à la discrétisation et à l'interpolation, et restent négligeables devant la précision numérique du schéma.

5.5 Conclusion de la comparaison

Cette étude met en évidence l'intérêt du **maillage adaptatif** :

- il permet une réduction du coût de calcul sans perte de précision significative ;
- il conserve la stabilité et la convergence de l'optimisation du contrôle ;
- il constitue une alternative efficace aux maillages uniformes pour les équations à fortes variations locales comme l'ADRS.