

Séance 2: Analyse numérique d'une équation d'advection-diffusion-réaction 1D Étude de convergence par raffinement de maillage

Raphaël Bigey

15 septembre 2025

1 Introduction

Ce rapport présente l'analyse numérique d'une équation aux dérivées partielles (EDP) d'advection-diffusion-réaction en une dimension spatiale. L'objectif est d'étudier la convergence de la solution numérique par raffinement successif du maillage spatial.

2 Problème étudié

2.1 Équation différentielle

L'EDP résolue est de la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} - K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda T = F(x) \quad (1)$$

où :

- $T(x, t)$ est la variable dépendante (température, concentration, etc.)
- $V = 1$ est la vitesse d'advection
- $K = 0.1$ est le coefficient de diffusion
- $\lambda = 1$ est le coefficient de réaction
- $F(x)$ est le terme source
- Le domaine spatial est $[0, L]$ avec $L = 1$

2.2 Méthode des solutions manufacturées

Pour valider le schéma numérique, nous utilisons la méthode des solutions manufacturées. Une solution exacte $T_{ex}(x)$ est imposée a priori :

$$T_{ex}(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (2)$$

Le terme source $F(x)$ est alors calculé en substituant cette solution dans l'équation stationnaire :

$$F(x) = V \frac{dT_{ex}}{dx} - K \frac{d^2 T_{ex}}{dx^2} + \lambda T_{ex} \quad (3)$$

3 Méthode numérique

3.1 Discrétisation spatiale

Le domaine $[0, L]$ est discrétisé en N_x points uniformément répartis avec un pas $\Delta x = \frac{L}{N_x - 1}$.

Les dérivées spatiales sont approximées par :

— **Advection** : Schéma décentré amont (upwind)

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \begin{cases} \frac{T_j - T_{j-1}}{\Delta x} & \text{si } V \geq 0 \\ \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x} & \text{si } V < 0 \end{cases} \quad (4)$$

— **Diffusion** : Différences finies centrées

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{j-1} - 2T_j + T_{j+1}}{\Delta x^2} \quad (5)$$

3.2 Discrétisation temporelle

La discrétisation temporelle utilise un schéma d'Euler explicite :

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \Delta t \cdot RHS_j^n \quad (6)$$

où RHS_j^n représente le membre de droite de l'EDP discrétisée.

3.3 Condition de stabilité

Le pas de temps est choisi selon une condition CFL adaptée :

$$\Delta t = \frac{\Delta x^2}{V\Delta x + 2K + |F_{max}|\Delta x^2} \quad (7)$$

Cette condition assure la stabilité du schéma explicite en tenant compte des termes d'advection, de diffusion et de source.

4 Conditions aux limites

Des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont appliquées :

$$T(0, t) = 0, \quad T(L, t) = 0 \quad (8)$$

5 Algorithme de résolution

5.1 Procédure de raffinement

L'étude de convergence est réalisée par raffinement successif du maillage :

1. Initialisation avec $N_x = 2$ points
2. Boucle sur 10 raffinements : $N_x \leftarrow N_x + 3$
3. Pour chaque maillage :
 - Calcul de la solution exacte discrétisée
 - Calcul du terme source correspondant
 - Résolution itérative jusqu'à convergence temporelle
 - Calcul de l'erreur L^2 par rapport à la solution exacte

5.2 Critère de convergence temporelle

La marche en temps s'arrête lorsque :

$$\frac{\|RHS^n\|}{\|RHS^0\|} < \epsilon = 10^{-3} \quad (9)$$

où $\|RHS^n\|$ est la norme du résidu à l'itération n .

6 Métriques d'erreur

L'erreur L^2 entre la solution numérique T_h et la solution exacte T_{ex} est calculée comme :

$$\text{Erreur } L^2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_x} (T_h(x_j) - T_{ex}(x_j))^2} \quad (10)$$

7 Résultats et visualisation

7.1 Solutions numériques et exacte

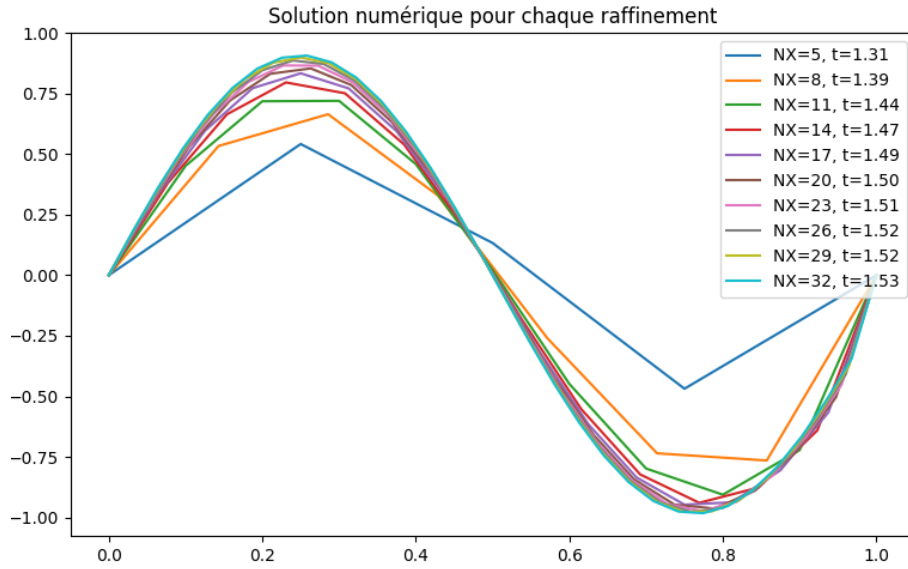


FIGURE 1 – Évolution de la solution numérique $T_h(x)$ pour différents raffinements de maillage.

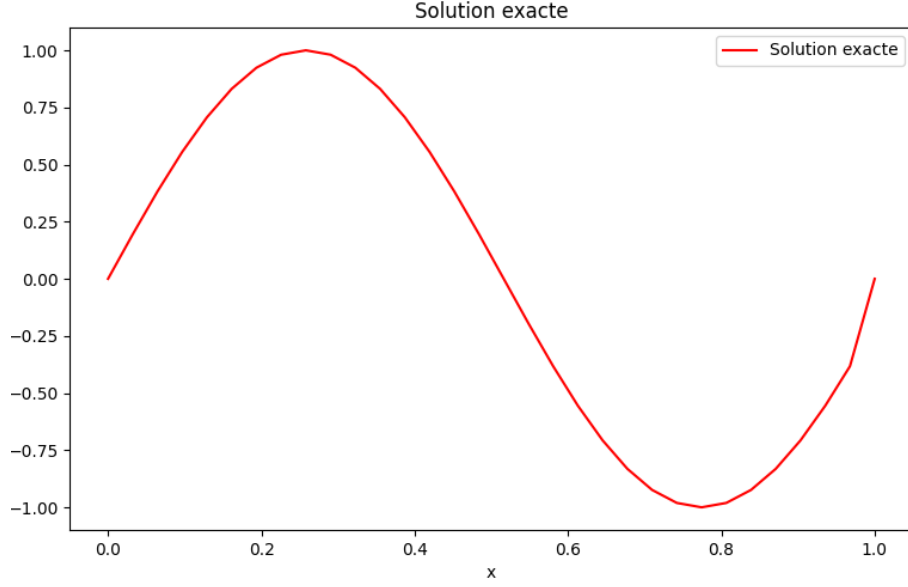


FIGURE 2 – Solution exacte manufacturée $T_{ex}(x) = \sin(2\pi x/L)$ utilisée comme référence pour l'étude de convergence.

La Figure 1 illustre la convergence de la solution numérique vers la solution exacte lors du raffinement du maillage. On observe que les oscillations numériques diminuent progressivement et que la solution se stabilise autour de la référence exacte (Figure 2).

7.2 Analyse de convergence

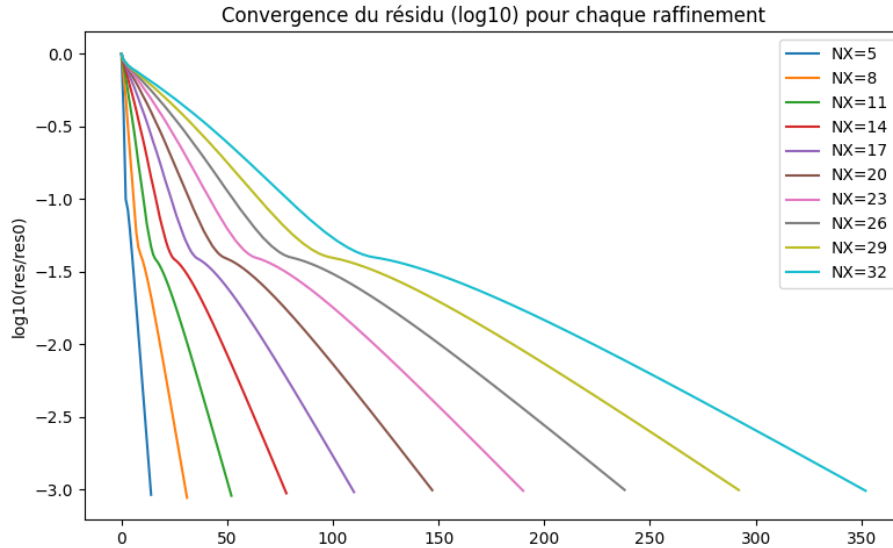


FIGURE 3 – Convergence du résidu temporel normalisé $\log_{10}(\|RHS^n\|/\|RHS^0\|)$ pour chaque maillage.

La décroissance linéaire en échelle logarithmique confirme la convergence exponentielle.

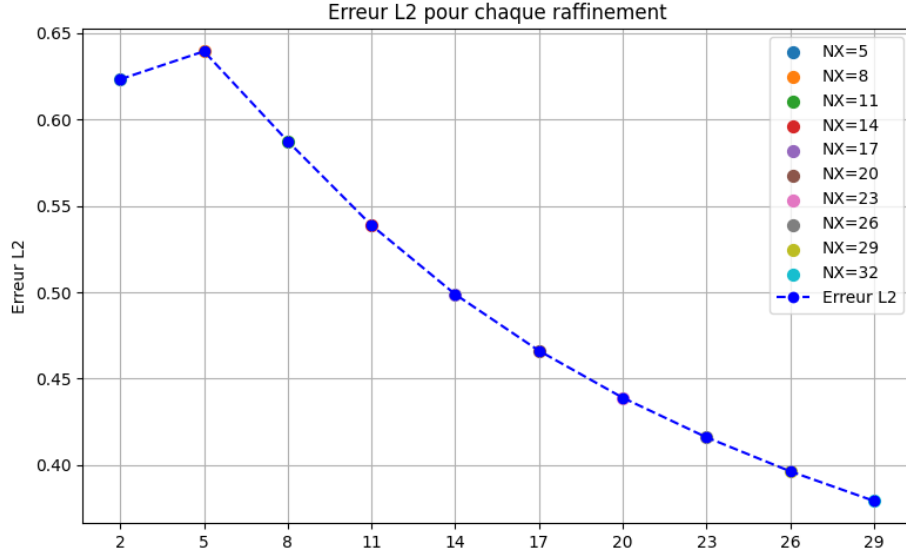
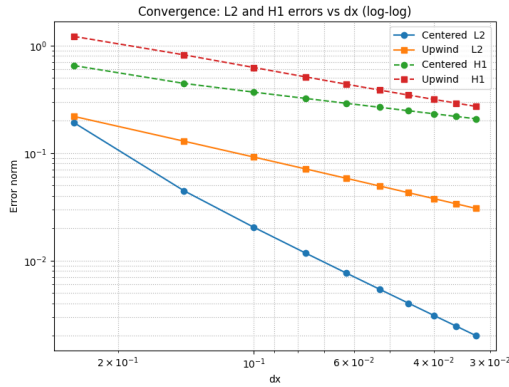
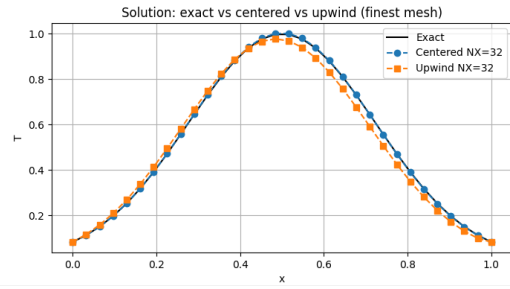


FIGURE 4 – Évolution de l'erreur L^2 en fonction du raffinement de maillage. La décroissance de l'erreur valide la convergence spatiale du schéma numérique.



(a) Convergence des erreurs L^2 et H^1 en fonction de h .



(b) Comparaison entre la solution exacte, le schéma centré et upwind.

FIGURE 5 – Résultats numériques pour l'équation ADR avec $u_{ex}(s) = \exp(-10(s - L/2)^2)$. On observe à gauche la convergence en normes L^2 et H^1 , et à droite les profils numériques comparés à la solution exacte.

8 Interprétation des résultats

8.1 Convergence spatiale

L'analyse de l'erreur L^2 (Figure 4) permet d'évaluer l'ordre de convergence spatiale du schéma. Pour un schéma aux différences finies d'ordre 2 en espace, on s'attend théoriquement à une décroissance de l'erreur proportionnelle à $(\Delta x)^2$.

8.2 Stabilité numérique

La convergence régulière du résidu temporel (Figure 3) démontre la stabilité du schéma explicite sous la condition CFL imposée. L'absence d'oscillations ou de divergence confirme

le bon choix du pas de temps.

Commentaire. On remarque que le schéma centré présente en général une meilleure précision (pente de convergence plus élevée en normes L^2 et H^1), mais il peut souffrir d'instabilités si la condition CFL n'est pas suffisamment restrictive. Le schéma *upwind*, de son côté, est toujours stable grâce à sa viscosité numérique implicite, mais il introduit une diffusion artificielle qui lisse la solution. Ainsi, il est plus robuste mais moins précis, en particulier pour les faibles valeurs de h .