Séance 1: Schéma d'Euler explicite
Résolution de $u'(t) = -\lambda u$

Raphaël Bigey

8 septembre 2025

1 Introduction

On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u, \qquad u(0) = 1, \qquad \lambda = 1,$$

à l'aide d'un **schéma d'Euler explicite**, puis comparer la solution numérique à la solution exacte

$$u_{\text{exact}}(t) = e^{-t}.$$

L'étude porte sur un intervalle de temps de 60 s.

2 Méthode numérique

Le schéma d'Euler explicite s'écrit

$$u_{n+1} = u_n - \lambda u_n \, \Delta t,$$

où Δt est le pas de temps. Dans un premier temps, on fixe $\Delta t = 1$ s, puis on étudie l'erreur L^2 pour 20 valeurs de Δt décroissantes de 1 s à 0.001 s.

3 Code Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

a = 1.0      # lambda
u0 = 1.0
T = 60.0     # 1 minute in seconds

# --- Solution numerique pour Dt = 1 s ---
Dt = 1.0
N  = int(T/Dt)
t  = np.linspace(0, T, N+1)
u  = np.zeros(N+1)
u[0] = u0
for n in range(N):
    u[n+1] = u[n] - a * u[n] * Dt
u_exact = u0 * np.exp(-a * t)
```

```
# (La suite calcule les erreurs L2 pour 20 pas de temps ...)
```

4 Résultats

— La figure 1 compare la solution numérique et la solution exacte pour $\Delta t = 1$ s, ainsi que l'erreur absolue au cours du temps.
— La figure 2 montre l'évolution de l'erreur L^2 en fonction du pas de temps, pour la fonction u et sa dérivée.

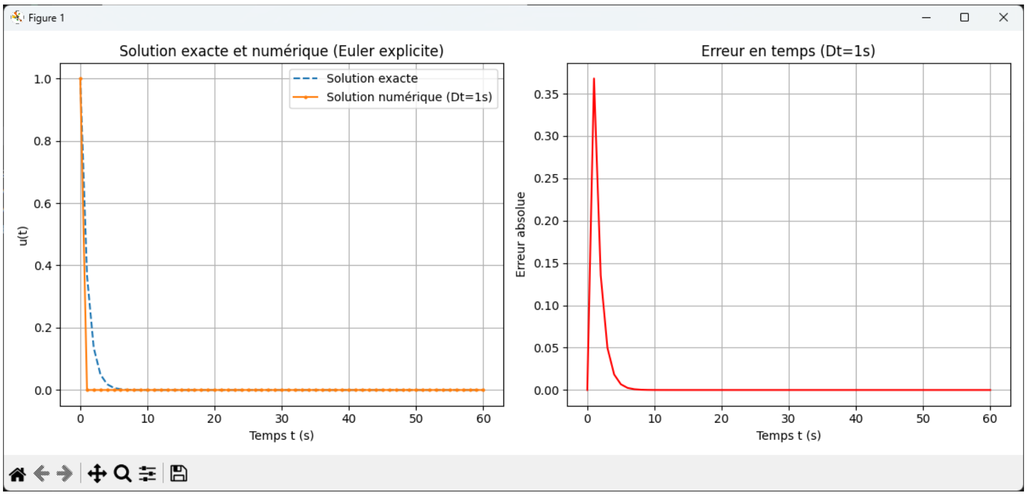

FIGURE 1 – Solution exacte vs. numérique et erreur temporelle pour $\Delta t = 1$ s.

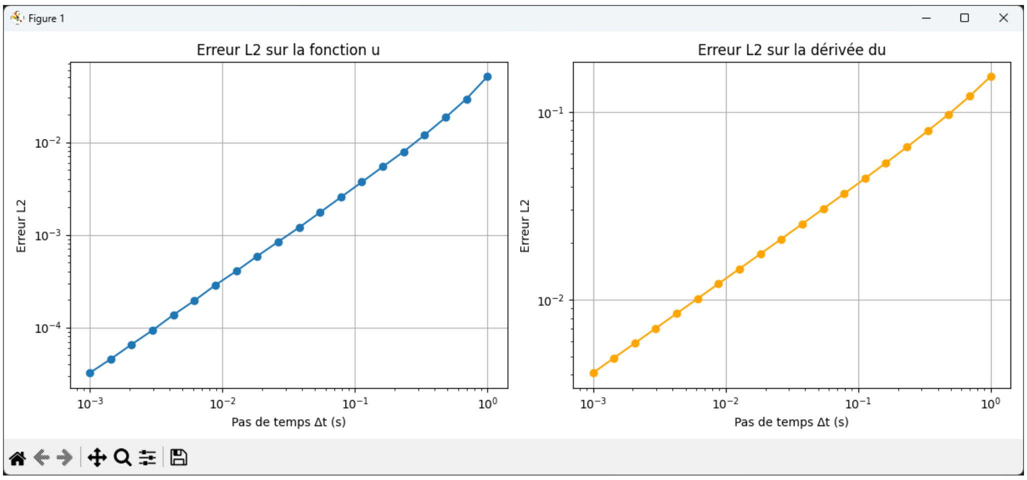

FIGURE 2 – Erreur L^2 en fonction du pas de temps (fonction et dérivée).

Le schéma d'Euler explicite reproduit correctement la décroissance exponentielle. L'erreur L^2 décroît de façon quasi-linéaire en échelle log-log, illustrant la *convergence d'ordre 1* attendue du schéma.

5 Résolution numérique de l'équation de transport-diffusion-réaction

Pour valider le schéma numérique proposé, on considère la solution exacte

$$u_{\text{exact}}(x) = e^{-10(x-0.2)^2},$$

et on construit le terme source f de manière à ce que u_{exact} soit solution stationnaire de

$$u_t + Vu_x - \nu u_{xx} = -\lambda u + f(x).$$

On adopte un schéma d'Euler explicite : dérivée amont pour l'advection, centrée pour la diffusion.

5.1 Solution numérique vs. solution exacte

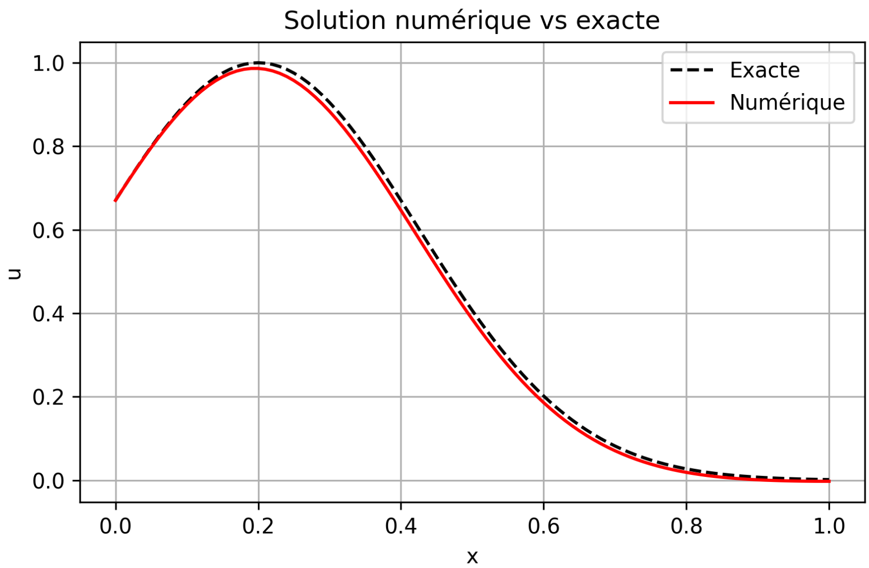

FIGURE 3 – Comparaison entre la solution numérique et la solution exacte.

5.2 Erreur en norme $\mathcal{L}^2$

La norme discrète utilisée est

$$\|e\|_{\mathcal{L}^2} = \sqrt{\sum_i (u_i - u_{\text{exact},i})^2 \, \Delta x}.$$

L'erreur finale obtenue est de l'ordre de 10^{-3}.

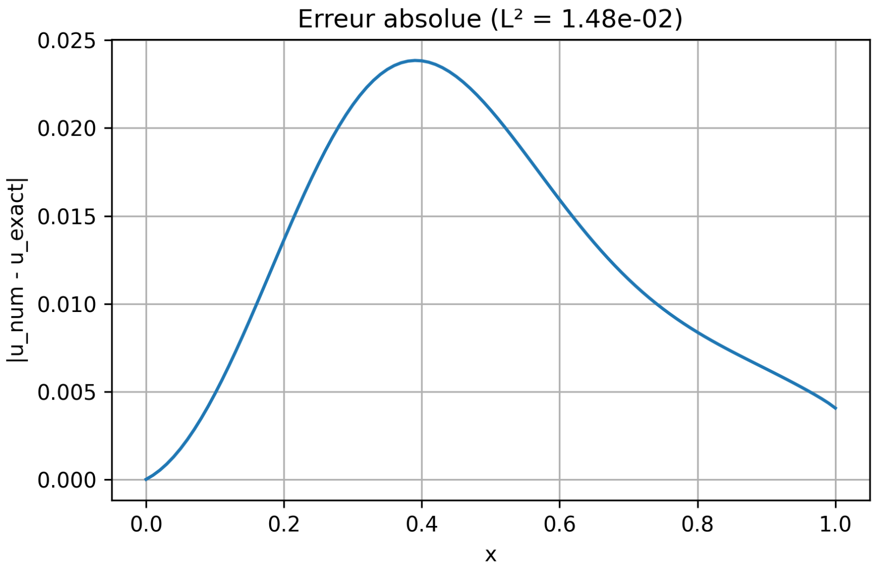

FIGURE 4 – Erreur absolue $|u_{\text{num}} - u_{\text{exact}}|$ (norme $\mathcal{L}^2 \approx 10^{-3}$).

5.3 Erreur sur le gradient

On calcule également l'erreur sur le gradient

$$\|\nabla u - \nabla u_{\text{exact}}\|_{\mathcal{L}^2},$$

en approximant la dérivée spatiale par différences centrées.

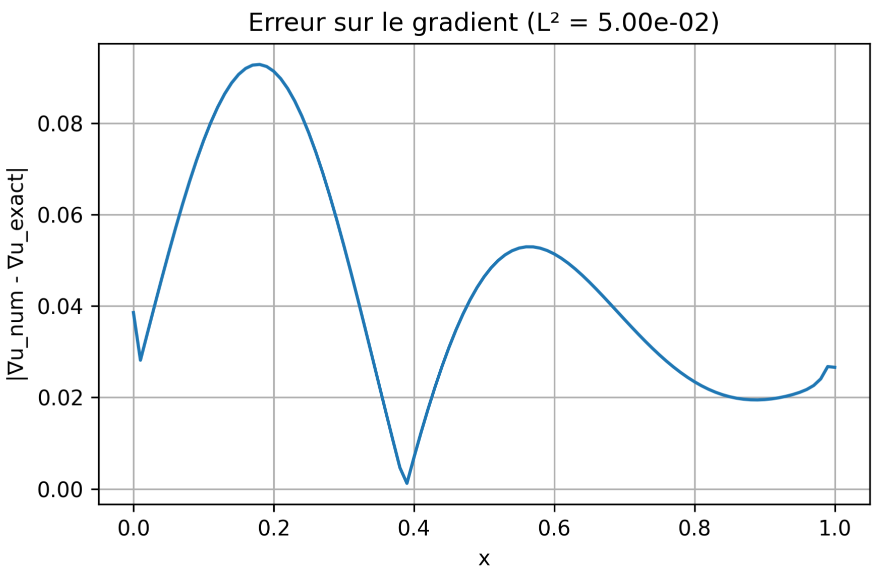

FIGURE 5 – Erreur absolue sur le gradient (norme $\mathcal{L}^2 \approx 10^{-3}$).

Ces résultats confirment la bonne convergence du schéma explicite sous les conditions de stabilité

$$\text{CFL} = \frac{|V|\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \qquad \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$