

Séance 3: Intégration

Raphaël Bigey

22 septembre 2025

1 Introduction

Lors de cette séance, nous avons exploré différentes méthodes d'intégration numérique en Python, en comparant l'intégration de Riemann et de type Lebesgue. Nous avons également étudié le rôle de l'adaptation a posteriori et la convergence des différentes méthodes pour des fonctions présentant des caractéristiques différentes.

Deux fonctions tests ont été considérées :

1. Fonction lisse avec oscillations et pic :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \sin(4\pi x) + 10 \exp(-100(x - 0.5)^2), \quad a = 0.5, b = 10, c = 3$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Fonction avec singularités aux extrémités :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1),$$

dont l'intégrale exacte vaut π .

2 Intégration Riemann et Lebesgue : $f(x)$ avec pic et oscillations

2.1 Tracé de la fonction

La fonction a été tracée sur une grille dense pour visualiser les oscillations et le pic au centre :

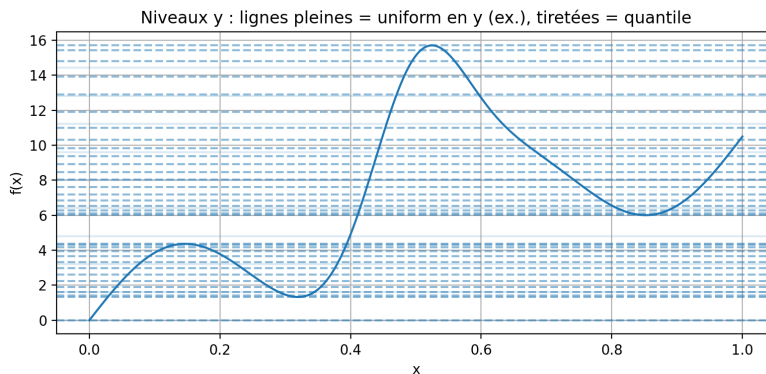


FIGURE 1 – Tracé de $f(x)$.

2.2 Méthodes utilisées

On sait que l'intégrale de cette fonction vaut 6.94.

- **Riemann** : intégration par la règle des trapèzes sur un maillage uniforme en x . Le nombre minimal de points pour atteindre une précision 10^{-3} a été déterminé automatiquement et est de $N_x = 10$. L'erreur est 1.671×10^{-4} .
- **Lebesgue** : intégration par sets de niveau, avec niveaux uniformes en y et niveaux adaptatifs basés sur les quantiles des valeurs de $f(x)$. Le nombre minimal de points pour atteindre une précision 10^{-3} a été déterminé automatiquement et est de $N_x = 30$. L'erreur est 5.946×10^{-4} .

3 Intégration de $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ sur $(-1, 1)$

Cette fonction possède des singularités aux extrémités $x = \pm 1$, nécessitant d'exclure un petit ε lors de la discrétisation : On intègre sur $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

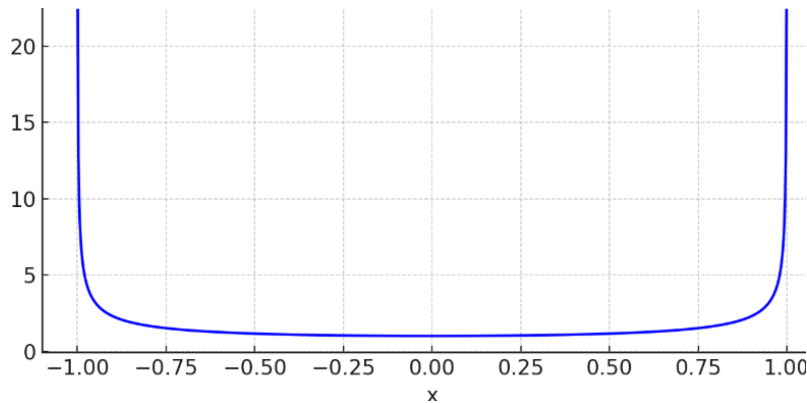


FIGURE 2 – Tracé de $g(x)$.

3.1 Méthodes étudiées

- **Riemann** : grille uniforme en x avec correction aux bornes.
- **Lebesgue** : intégration par niveaux y uniformes.
- **Monte Carlo** : tirages aléatoires uniformes en x .

3.2 Courbes d'erreurs

L'erreur absolue est tracée en fonction du nombre d'évaluations de la fonction pour chaque méthode :

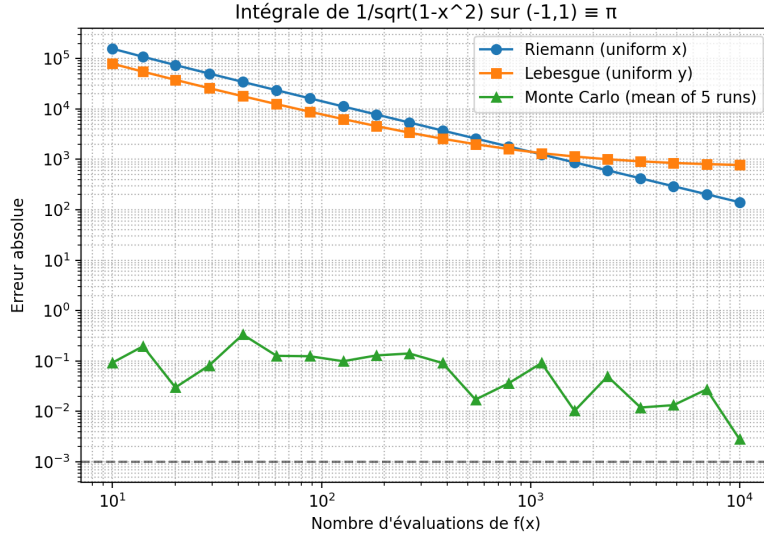


FIGURE 3 – Erreur absolue des intégrations Riemann, Lebesgue et Monte Carlo pour $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ en fonction du nombre d'évaluations de f .

3.3 Observations

- Méthode de **Monte Carlo** : Elle maintient une erreur relativement constante autour de 10^{-1} , indépendamment du nombre d'évaluations. C'est typique de Monte Carlo dont la convergence est en $O(1/\sqrt{n})$, ce qui est très lent.
- Méthodes de **Riemann** et **Lebesgue** : Elles montrent toutes deux une convergence claire, avec l'erreur qui diminue régulièrement quand le nombre d'évaluations augmente.
- **Lebesgue** est nettement supérieure : L'intégration de Lebesgue (avec y uniforme) converge beaucoup plus rapidement que Riemann, atteignant une erreur d'environ 10^3 pour 10^4 évaluations, tandis que Riemann reste autour de 10^5 .
- La différence de performance reste significative sur toute la plage testée, avec environ 2 ordres de grandeur d'écart entre les deux méthodes.

4 Analyse de l'Adaptation de Maillage pour l'Équation ADRS 1D

Méthodologie

Nous avons implémenté une méthode d'adaptation de maillage basée sur une métrique locale pour résoudre l'équation d'advection-diffusion-réaction-source (ADRS) en 1D :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V \frac{\partial u}{\partial x} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \lambda u + f(x)$$

La métrique M_i au nœud s_i est définie par :

$$M_i = \max \left(\min \left(\frac{1}{\varepsilon} |\partial_s^2 u_h(s_i)|, \frac{1}{h_{\min}^2} \right), \frac{1}{h_{\max}^2} \right)$$

avec ε la tolérance d'erreur, h_{\min} et h_{\max} les tailles de maille extrêmes.

La condition d'adaptation impose une longueur unitaire dans l'espace métrique :

$$l(s_i, s_{i+1}) = (s_{i+1} - s_i)^2 \frac{M_{i+1} + M_i}{2} = 1$$

Résultats Numériques

L'analyse a été conduite pour différentes valeurs de tolérance $\varepsilon \in \{0.04, 0.02, 0.01, 0.005, 0.0025\}$. La figure 5 montre l'évolution du nombre de points NX en fonction de ε .

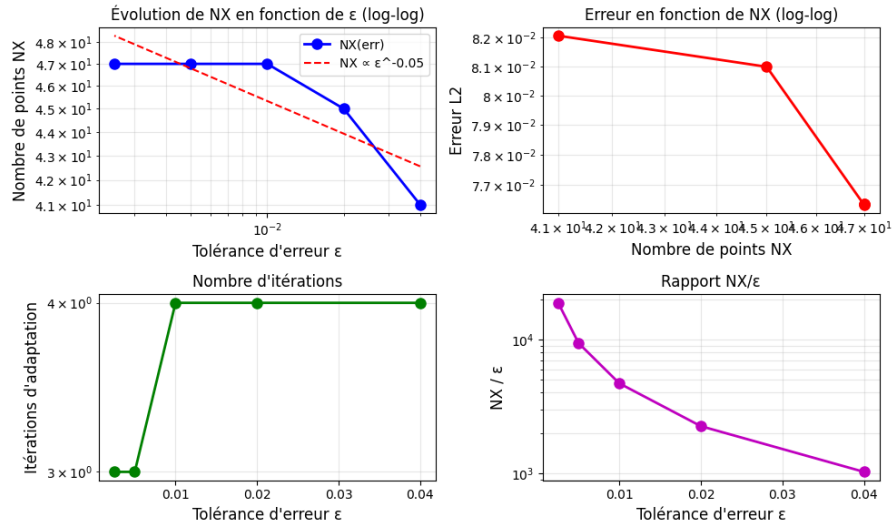


FIGURE 4 – Évolution de NX en fonction de ε en échelle log-log

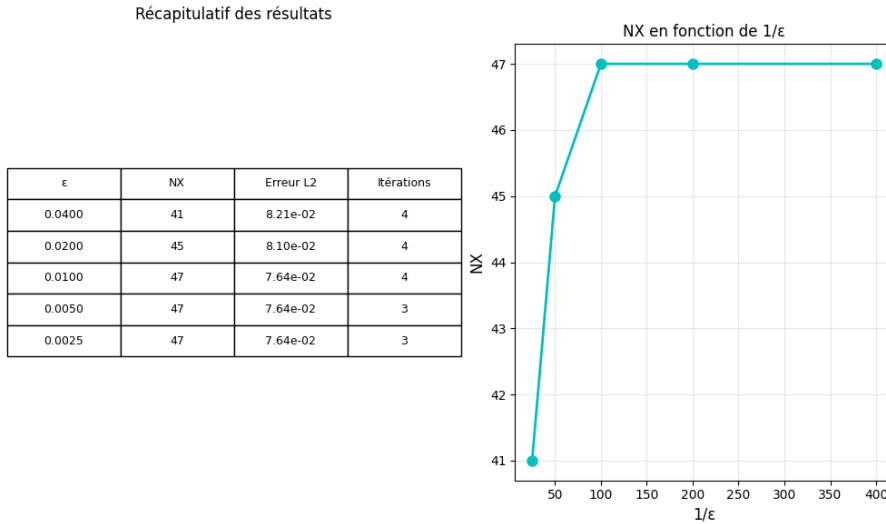


FIGURE 5 – Schéma récapitulatif