Analyse des EDP 2 – Cours

Raphaël Bigey

25 janvier 2025

Table des matières

Chapitre 1 — Equation de transport

1.1 Equation de transport à coefficients constants

Soit $v \in \mathbb{R}^d$ un vecteur non nul. On s'intéresse ici à l'étude de l'équation de transport (parfois nommée équation d'advection, ou de convection).

$$\partial_t u(t,x) + v \cdot \nabla u(t,x) = 0$$

et plus particulièrement à la recherche de solutions régulières (nommées aussi **solutions fortes**)

Définition 1.1.1 Courbe caractéristique.
Soit $z \in \mathbb{R}$. On appelle **courbe caractéristique issue de** z de l'opérateur $\partial_t + v \cdot \nabla$ l'ensemble $\{(t, y(t)), t \in \mathbb{R}\}$ où y est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt}(t) & = v \\ y(0) & = z \end{cases}$$

Remarque 1.1.2. Clairement, puisque v est constant, on a dans ce cas $y(t) = z + tv$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On déduit que la courbe caractéristique $\{(t, z + tv), t \in \mathbb{R}\}$ est donc une droite de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$.

Proposition 1.1.3. Soit $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ une solution de l'équation de transport

$$\partial_t u(t,x) + v \cdot \nabla u(t,x) = 0.$$

Soit $z \in \mathbb{R}^d$ et $\{(t, y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$ la courbe caractéristique issue de z.
Alors l'application $t \mapsto u(t, y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et u est constante le long de l'ensemble $\{(t, y(t)), t \in \mathbb{R}_+\}$.

Démonstration. ... □

Théorème 1.1.4. Soit $v \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + v \cdot \nabla u(t,x) = 0 & (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, donnée par la formule

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, u(t,x) = u_0(x - tv)$$

Démonstration. ... □

1.2 Equation de transport à coefficients variables

On considère dans la suite un champ de vecteur $b : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, pour $T > 0$ fixé. On s'intéresse ici au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + b(t,x) \cdot \nabla u(t,x) = 0 & (t,x) \in \,]0,T[\, \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

On suppose que b admet des dérivées partielles d'ordre 1 par rapport à $x_i, i \in [\![1,d]\!]$, et qu'il satisfait les conditions suivantes :

1. $b \in \mathscr{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$
2. $\nabla b \in \mathscr{C}^0([0,T] \times \mathbb{R}^d)$
3. $\exists C_b > 0, \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d, |b(t,x)| \leq C_b(1 + |x|)$ ("croissance lente")

Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ considérons le pb de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy}{ds}(s) & = b(s, y(s)) \\ y(t) & = x \end{cases} \tag{1}$$

Proposition 1.2.1. Le problème de Cauchy (1) admet une unique solution $s \mapsto y(s) \in \mathscr{C}^1([0, T])$

Démonstration. ... □

Définition 1.2.2. L'ensemble $\{(s, y(s)), s \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ est appelé **courbe caractéristique** de l'opérateur " $\partial_t + b \cdot \nabla$ " passant par x à l'instant t.

Remarque 1.2.3. On note dans la suite : $X(s, t, x) = y(s)$ l'unique solution de la proposition 1.2.1 de sorte que

$$\begin{cases} \partial_s X(s, t, x) & = b(s, X(s, t, x)) \\ X(t, t, x) & = x \end{cases}$$

Définition 1.2.4. L'application $X : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est appelée **flot caractéristique** de l'opérateur $\partial_t + b \cdot \nabla$.

Proposition 1.2.5. Le flot caractéristique de l'opérateur $\partial_t + b \cdot \nabla$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall t_1, t_2, t_3 \in [0, T]$, on a $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x)$
2. $X \in \mathscr{C}^1([0, T]^2 \times \mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$
3. $\forall i \in [\![1, d]\!]$, les dérivées partielles secondes $\partial_s \partial_{x_i} X(s, t, x)$ et $\partial_{x_i} \partial_s X(s, t, x)$ existent pour tout $(s, t, x) \in [0, T]^2 \times \mathbb{R}^d$. Elles vérifient $\partial_s \partial_{x_i} X(s, t, x) = \partial_{x_i} \partial_s X(s, t, x)$ et sont continues.
4. $\forall s, t \in [0, T]$, l'application
$$\begin{aligned} X(s, t, \cdot) : \mathbb{R}^d &\to \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto X(s, t, x) \end{aligned}$$
est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même, et on a $X(s, t, \cdot)^{-1} = X(t, s, \cdot)$

Démonstration. ... □

Théorème 1.2.6. Soit $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant les hypothèses du début de section et $u_0 \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d)$. Notons X le flot caractéristique de $\partial_t + b \cdot \nabla$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + b(t, x) \cdot \nabla u(t, x) = 0 & (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^1([0, T[\times \mathbb{R}^d)$, donnée par la formule suivante :

$$\forall (t, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^d, u(t, x) = u_0(X(0, t, x))$$

Démonstration. ... □

Chapitre 2 — Compléments sur les distributions

2.1 Suites de distributions

Nous allons commencer par quelques rappels du cours d'EDP1.

Définition 2.1.1 Convergence d'une suite de distributions.
Soit $(T_n) \in \mathscr{D}'$. On dit que (T_n) **est convergente** si et seulement si

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}, (\langle T_n, \varphi\rangle)_n \text{ est convergente.}$$

Remarque 2.1.2. On peut alors affirmer que la limite est une distribution (voir plus loin).

Théorème 2.1.3 Borne uniforme sur $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.
Soit $(T_n) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ une suite convergente. Alors

$$\begin{aligned} &\forall K \subset \mathbb{R}^d \text{ compact}, \ \exists C > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall \varphi \in \mathscr{D}, \\ &\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \ \Rightarrow \ \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle T_n, \varphi\rangle| \leq C \times P_{N,K}(\varphi) \end{aligned}$$

Démonstration. Ce résultat est une variante du théorème de Banach-Steinhaus et ne sera pas démontré ici. □

Remarque 2.1.4. $P_{N,K}(\varphi)$ est définie au chapitre 0.
Puisque $(T_n)_n$ est supposée convergente, cela implique que $\forall n, \ |\langle T_n, \varphi\rangle|$ est bornée.

Voici deux conséquences remarquables du théorème précédent :

Corollaire 2.1.5. Soit $(T_n) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\langle T_n, \varphi\rangle)_n$ est convergente. Alors il existe $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle$.

On dit que $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'} T$.

Démonstration. ... □

Corollaire 2.1.6 Continuité séquentielle du crochet de dualité.
Soit $(T_n) \in \mathscr{D}'$ et $(\varphi_n) \in \mathscr{D}$ telles que $T_n \xrightarrow{\mathscr{D}'} T$ et $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi$. Alors $\langle T_n, \varphi_n\rangle \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle$.

Démonstration. ... □

2.2 Familles de distributions paramétrées par un réel

Motivations à l'introduction de fonctions du temps à valeur dans un EVN ou équipé d'une famille de semi-normes séparantes pour l'étude de certains problèmes d'évolution.

On se donne ici un opérateur différentiel à coefficients constants sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$

$$p(\partial_t, \partial_x) = \sum_{k=0}^{m} A_k(\partial_x)\partial_t^k$$

où $A_k(\partial_x) = \sum_{finie} a_{k,\alpha}\partial_k^\alpha$ et $a_{k,\alpha}$ = constante $\in \mathbb{C}$.

On se donne des fonctions $f, u_0, ..., u_{m-1}$ et on cherche une solution $(t,x) \longmapsto u(t,x)$ du problème suivant :

$$\begin{cases} p(\partial_t,\partial_x)u & = f, \\ u(0,x) & = u_0(x), \\ \vdots \\ \partial_t^{m-1}u(0,x) & = u_{m-1}(x). \end{cases} \tag{2}$$

il s'agit du Problème de Cauchy pour l'équation $p(\partial_t,\partial_x)u = f$.

Nous verrons dans la suite une méthode de résolution de ce problème pour des équations "usuelles". Pour de telles équations, essentiellement issues de la physique, les deux variables t et x jouent des rôles très différents, t représentant le temps ($t \geq 0$) et x représentant la position ($x \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{1,2,3\}$).

Il est donc intuitivement légitime de "regarder" une fonction $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \ni (t,x) \longmapsto u(t,x) \in \mathbb{R}$ comme une fonction $\mathbb{R} \ni t \longmapsto \widetilde{u}(t)$ à valeurs dans un espace vectoriels de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$. (C'est-à-dire $\mathbb{R}^d \ni x \longmapsto \widetilde{u}(t)(x) \in \mathbb{R}$).
Dans un cadre plus général, cela revient formellement à dire, étant donné trois ensembles X, Y, Z , que nous avons un isomorphisme canonique ϕ entre les ensembles $\mathscr{F}(X\times Y;Z)$ (fonctions définies sur $X\times Y$ à valeurs dans Z) et $\mathscr{F}(X;\mathscr{F}(Y;Z))$. Cet isomorphisme est donné par les formules qui suivent, réciproques l'une de l'autre ($\phi(u) = \widetilde{u}$) :

1. Pour $u \in \mathscr{F}(X\times Y;Z)$, on définit $\widetilde{u} \in \mathscr{F}(X;\mathscr{F}(Y;Z))$ par $\widetilde{u}(x) = u(x,\cdot)$.
2. Pour $\widetilde{u} \in \mathscr{F}(X;\mathscr{F}(Y;Z))$, on définit $u \in \mathscr{F}(X\times Y;Z)$ par $u(x,y) = \widetilde{u}(x)(y)$.

Pour donner un sens aux données initiales pour le problème de Cauchy (2), il peut être intéressant de chercher les solutions dans des espaces où les fonctions sont particulièrement régulières en temps, afin que $u(0,x), .., \partial_t^{m-1}u(0,x)$ soient définies.
On utilisera de manière indifférenciée les deux notations $u(t,\cdot)$ et $u(t)(\cdot)$

Définition 2.2.1.
On considère une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$.
On dit que $\varphi \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R};\mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si,

$$\forall s \in \mathbb{R},\ \forall (s_n)_n \subset \mathbb{R},\ s_n \to s \Rightarrow\ \varphi(s_n) \to \varphi(s) \text{ dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Rappel. Soit $(u_n)_n \subset \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$u_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0 \Leftrightarrow\ \exists K \subset \mathbb{R}^d \text{ compact},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \operatorname{supp}(u_n) \subset K \text{et } \forall j \in \mathbb{N},\ P_{j,K}(u_n) \longrightarrow 0.$$

Proposition 2.2.2. Soit $s \mapsto \varphi(s) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R};\mathscr{D}(\mathbb{R}^d))$.
Alors $\forall S \subset \mathbb{R}$ compact, $\exists K \subset \mathbb{R}^d$ compact tels que

$$\forall s \in S,\ \operatorname{supp}(\varphi(s)) \subset K \text{ et } \forall j \in N,\ \text{l'application } S \ni s \mapsto P_{j,K}(\varphi(s)) \text{ est continue.}$$

Démonstration. ... □

Définition 2.2.3. On considère une application $\mathbb{R} \ni s \mapsto T(s) \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$.

1. On dit que $s \mapsto T(s) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R};\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si,

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d),\ \text{l'application } \mathbb{R} \ni s\ \longmapsto\ \langle T(s),\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} \text{ est continue.}$$

2. On dit que $s \mapsto T(s) \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R};\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si,

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d),\ \text{l'application } \mathbb{R} \ni s \longmapsto \langle T(s),\varphi\rangle_{\mathscr{D}',\mathscr{D}} \text{ est de classe } \mathscr{C}^k(\mathbb{R}).$$

Il existe une variante du théorème 2.1.3 adaptée aux familles de distributions paramétrées :

Théorème 2.2.4 Principe de la borne uniforme.
Soit $S \subset \mathbb{R}$ compact et $s \mapsto T(s) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}; \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$. Alors

$$\forall K \subset \mathbb{R}^d \text{ compact, } \exists C > 0, \ \exists N \in N, \ \forall s \in S, \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d) \text{ tel que}$$
$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \Rightarrow \ |\langle T(s), \varphi \rangle| \leq C * P_{N,K}(\varphi)$$

Démonstration. Tout comme le théorème 2.1.3, ce résultat ne sera pas démontré. □

Proposition 2.2.5. Soit $T \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$.
Alors $\forall l \in \{0, .., k\}$, $\forall s \in \mathbb{R}$, il existe une distribution, notée $T^{(l)}(s)$, telle que l'application $s \mapsto T^{(l)}(s) \in \mathscr{C}^{k-l}(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$ et telle que $\forall s_0 \in \mathbb{R}, \forall \varphi \in \mathscr{D}$,

$$\left(\frac{d^{(l)}}{ds} \langle T(s), \varphi \rangle \right)_{|s=s_0} = \left\langle T^{(l)}(s_0), \varphi \right\rangle.$$

Démonstration. . . . □

Proposition 2.2.6. Soit $T \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$ et $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Alors l'application

$$s \longmapsto \langle T(s), \ \psi(s, \cdot) \rangle$$

est continue.

Démonstration. ... □

Proposition 2.2.7. Soit $T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$ et $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. Alors l'application

$$s \longmapsto \ \langle T(s), \ \psi(s, \cdot) \rangle$$

est $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{d}{ds} \langle T(s), \psi(s, \cdot) \rangle \ = \ \langle T^{(1)}(s), \psi(s, \cdot) \rangle + \langle T(s), \partial_1 \psi(s, \cdot) \rangle$$

Démonstration. ... □

Proposition 2.2.8. Soit $T \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d))$. On pose, pour $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,

$$\langle \widetilde{T}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle T(s), \psi(s, \cdot) \rangle_{\mathscr{D}'} ds$$

Alors $\widetilde{T} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.

Démonstration. ... □

Proposition 2.2.9. Soit $T \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$. Il existe une distribution, notée $\int_0^t T(s) ds$, définie $\forall t \in \mathbb{R}$ par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}, \ \langle \int_0^t T(s) ds, \varphi \rangle \ = \int_0^t \langle T(s), \varphi \rangle \ ds$$

Démonstration. ... □

Théorème 2.2.10 Théorème Fondamental de l'analyse.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$. La fonction F définie par

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds$$

est $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$, et $F'(t) = f(t)$.

2. Soit $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$. On a : $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = F(a) + \int_a^t F'(s)ds$$

Démonstration. ... □

Remarque. Le problème : Trouver $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$ vérifiant

$$\begin{cases} F'(t) & = \alpha(t), \\ F(a) & = \beta \end{cases} \tag{3}$$

avec $\alpha \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$, $\beta \in \mathscr{D}'$ possède une unique solution.
En effet, cette solution est donnée par le 2) du théorème 2.2.10.
Soit $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathscr{D}')$ solution de (3), alors nécessairement, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$F(t) = F(a) + \int_a^t F'(s)ds$$

d'où

$$F(t) = \beta + \int_a^t \alpha(s)ds$$

Réciproquement, pour $F(t) = \beta + \int_a^t \alpha(s)ds$, on a

$$F(a) = \beta + \underbrace{\int_a^a \alpha(s)ds}_{\substack{= 0 \text{ par} \\ \text{théorème 2.2.10}}}$$

et $h > 0$, $F'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \left(\int_0^t \alpha(s)ds\right)' = \alpha(t)$.

Corollaire 2.2.11. Soit $a \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. Le problème :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } T \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}; \mathscr{D}') \text{ solution de} \\ \begin{cases} T'(s) + a(x)T(s) = \alpha(s), \\ T(0) = \beta, \end{cases} \\ \text{avec } \alpha \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}; \mathscr{D}') \text{ et } \beta \in \mathscr{D}', \end{array} \right.$$

admet une unique solution donnée par :

$$T(t) = e^{-ta(x)}\beta + \int_0^t e^{-(t-s)a(x)}\alpha(s)ds$$

Démonstration. ... □

2.3 Distributions tempérées, Fourier, Sobolev

On notera dans la suite $\langle\xi\rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$
On a donc $\langle\xi\rangle^s = (1+|\xi|^2)^{s/2}$ et on note dans la suite $L^2_s(\mathbb{R}^d) := L^2(\mathbb{R}^d; \langle\xi\rangle^{2s} d\xi)$

Rappel.

$$H^k(\mathbb{R}^d) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d), \partial^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall|\alpha| \le k\} \text{ pour } k \in \mathbb{N},$$

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d), \langle\xi\rangle^s \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)\} \text{ pour } s \in \mathbb{R},$$

$$\left.\begin{aligned} \|u\|_{H^k} &= \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|^2_{L^2}\right)^{1/2} \\ \|u\|_{H^s} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2s} \, |\widehat{u}(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \text{ équivalence}$$

Lorsque $s = k \in \mathbb{N}$, $\|u\|_{H^k}$ est équivalente à $\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}$.

Soient $s, t \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$. On a les propriétés suivantes :

1. L'injection $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$ est dense.
2. $s \le t \implies H^t \subset H^s$.
3. L'application $\partial^\alpha \colon H^s \to H^{s-|\alpha|}$ est continue.

Proposition 2.3.1. F réalise une isométrie entre $H^s(\mathbb{R}^d)$ et $L^2_s(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. ... □

Définition 2.3.2 Transformée de Fourier partielle.
Soit $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, avec la notation de variables $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. La **transformée de Fourier partielle par rapport à x** de u est la fonction

$$\widetilde{u}(t,\xi) = \mathscr{F}_{x\to\xi}(u(t,x))$$

par

$$\widetilde{u}(t,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x) e^{-ix\cdot\,\xi} dx$$

Remarque. On note cette transformée partielle à l'aide d'un "$\widetilde{\cdot}$" pour la différencier de la transformée "usuelle" notée avec le " $\widehat{\cdot}$ " .

En raisonnant à $t \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

Proposition 2.3.3. La transformée de Fourier partielle $\mathscr{F}_{x\to\xi}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, d'inverse $\mathscr{F}^{-1}_{x\to\xi}$:

$$\mathscr{F}^{-1}_{x\to\xi}(u(t,\xi)) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi$$

De plus, la transformée de Fourier partielle est continue :

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists C_k > 0,\ \forall u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d), \\ N_k(\widetilde{u}) \le C_k * N_{k+d+1}(u) \end{aligned}$$

Démonstration. Similaire à celle du chapitre 0. □

La transformée de Fourier partielle s'étend à $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ par dualité : pour $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$,

$$\widetilde{T}=\mathscr{F}_{x\to\xi}(T)$$

est définie par

$$\forall u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d),\ \langle\mathscr{F}_{x\to\xi}T,u\rangle=\langle T,\mathscr{F}_{x\to\xi}\ u\rangle$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.3.4. La transformée de Fourier partielle est un isomorpshime de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, d'inverse

$$\mathscr{F}_{x\to\xi}^{-1}=(2\pi)^{-\frac{d}{2}}\ \widecheck{\mathscr{F}}_{x\to\xi}$$

De plus, si $T_n\to T$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$, alors $\widetilde{T_n}\to\widetilde{T}$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. On procède par transposition, comme d'habitude pour prolonger de $\mathscr{S}$ vers $\mathscr{S}'$. □

Remarque 2.3.5. Les règles de calcul "usuelles" s'adaptent aisement :

$$\widetilde{\partial_x^\alpha T}=\xi^\alpha\widetilde{T}\quad\text{et}\quad\widetilde{x^\alpha T}=(-\partial_\xi)^\alpha\widetilde{T}$$

La formule de permutation $\widetilde{\partial_t T}=\partial_t\widetilde{T}$ devra être justifiée au cas par cas.

Remarque 2.3.6. Lorsque $u\in\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ (ou $\mathscr{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$) est vue comme une fonction dépendant de $t\in\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on pourra noter de manière équivalente :

$$\widehat{u(t)}(\xi)=\widetilde{u}(t,\xi)$$

(puisque $u(t)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, $\widehat{u(t)}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$)

2.4 Fonctions régulières à valeurs dans un Sobolev

On considère une fonction $\mathbb{R}\ni t\mapsto u(t)\in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.4.1. Soit $\mathbb{R}\ni t\mapsto u(t)\in H^s(\mathbb{R}^d)$. On dit que $u\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si

$$\forall t\in\mathbb{R},\ \forall(t_n)\text{ telle que }t_n\to t,\text{ on a }u(t_n)\xrightarrow{H^s}u(t)$$

Définition 2.4.2. On dit que l'application $\rho\mapsto u(\rho)$ est **dérivable en** t à valeurs dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ et **de dérivée** $u'(t)$ si et seulement si

$$\forall h>0,u(t+h)=u(t)+hu'(t)+h\phi(h)$$

avec $\phi\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$ telle que $\phi(0)=0$.

Définition 2.4.3. On dit que $u\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$ si et seulement si

$$t\longmapsto u(t)\text{ est dérivable en tout point }t$$

avec $\forall t\in\mathbb{R},u'(t)\in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $t\longmapsto u'(t)\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$.

Pour $u\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R},H^s(\mathbb{R}^d))$, on définit T_u par : $\forall\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$,

$$\langle T_u,\varphi\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}\langle u(t),\varphi(t,\cdot)\ \rangle dt$$

Proposition 2.4.4. Pour tout $u \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$, on a $T_u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$. De plus l'application linéaire $u \longmapsto T_u$ est injective.

Démonstration. ... □

Proposition 2.4.5. $\mathscr{F}_{x\to\xi}$ est une isométrie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}^d))$ sur $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, L^2_s(\mathbb{R}^d))$

Démonstration. C'est immédiat à partir de la proposition 2.3.1 et la définition de $\mathscr{F}_{x\to\xi}$. □

Proposition 2.4.6. Soit $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable, et $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. On suppose que :

1. Il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \smallsetminus N$, $t \longmapsto u(t,x)$ est continue.
2. Il existe $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ positive telle que :

$$\sup_{t\in[a,b]} |u(t,\cdot)| \leq g$$

Alors on a $u \in \mathscr{C}^0([a,b];\ L^2_s(\mathbb{R}^d))$

Démonstration. ... □

Proposition 2.4.7. Soit $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ mesurable, et $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$. On suppose que :

1. Il existe un ensemble négligeable N tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \smallsetminus N$, $t \longmapsto u(t,x)$ est de régularité $\mathscr{C}^1$.
2. Il existe $g \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ positive telle que :

$$\sup_{t\in[a,b]} |u(t,\cdot)| \leq g$$

3. Il existe $h \in L^2_s(\mathbb{R}^d)$ positive telle que :

$$\sup_{t\in[a,b]} |\partial_t u(t,\cdot)| \leq h$$

Alors on a $u \in \mathscr{C}^1([a,b];\ L^2_s(\mathbb{R}^d))$

Démonstration. ... □

Chapitre 3 — Equation de la chaleur

On étudie le problème de Cauchy suivant :

$$\left|\begin{array}{l}\text{Trouver } u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \ni (t,x) \longmapsto u(t,x) \in \mathbb{R} \text{ telle que} \\ \begin{cases}\partial_t u - \Delta u = 0, \text{ sur } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0,\end{cases}\end{array}\right. \tag{4}$$

C'est l'équation de la chaleur qui modélise des phénomènes d'évolution : diffusion de la chaleur, répartition de substances chimiques . . .
Nous allons préciser dans la suite la régularité de la donnée initiale u_0 et ses conséquences sur la régularité de la solution.

3.1 Donnée initiale dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$

Théorème 3.1.1 Solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.
On considère le problème de Cauchy (4) avec $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors (4) admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, u(t) = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{u}(t))$$

avec

$$\widehat{u}(t) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0}$$

Démonstration. ... □

3.2 Donnée initiale dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Nous imposons dans cette section une régularité beaucoup plus forte sur u_0.

Théorème 3.2.1 Solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$.
On considère le pb de Cauchy (4) avec $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d),\ s \in \mathbb{R}$. Alors (4) admet une unique solution

$$u \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+;H^s) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;H^{s-2})$$

Remarque 3.2.2. Nous allons bien entendu utiliser le fait que $H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ afin d'éviter de tout redémontrer.

Démonstration. ... □

3.3 Quelques propriétés qualitatives

Théorème 3.3.1 Noyau de la chaleur.
Soit $t > 0,\ u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$. Alors

$$u(t) = K_t * u_0$$

est solution de (4) avec K_t défini ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}^d$,

$$K_t(x) = (4t\pi)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$$

Démonstration. ... □

Remarque 3.3.2. K_t est parfois aussi appelé "Noyau de la chaleur".

Remarque 3.3.3. On observe de manière évidente que $\forall t > 0,\ K_t \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.
Ainsi, si $u_0 \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),\ u(t) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 3.3.4 Régularité parabolique.
On suppose $u_0 \in \mathscr{C}_b^0(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ définie par

$$u(t,x) = \frac{1}{(4t\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} u_0(y)\ dy$$

est $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d)$ et vérifie $\partial_t u - \Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$.
De plus, on peut la prolonger par continuité à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ en posant

$$u(0,x) = u_0(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$

de sorte que $u \in \mathscr{C}_b^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et vérifie (4).

Démonstration. ... □

Proposition 3.3.5 Principe du maximum.
Soit $u \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d) \cap \mathscr{C}_b(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ solution de (4). Alors

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d} u(t,x) = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} u_0(x)$$

Démonstration. ... □

Remarque 3.3.6. Il résulte également du principe du maximum si u_0 est non nulle, alors $u(t,x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^d$. Cette propriété est particulièrement frappante lorsque $u_0 \in \mathscr{D}$ par exemple : une partie de la quantité étudiée s'est immédiatement propagée à l'infini. On parle parfois de "vitesse de propagation infinie".

Définition 3.3.7 Semi-groupe de la chaleur.
Pour tout $t \geq 0$, on définit une application linéaire

$$e^{t\Delta} : L^2 \ni u_0 \longmapsto e^{t\Delta} u_0 \in L^2$$

telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $e^{t\Delta}u_0 = u(t,\cdot)$ la solution du problème de Cauchy homogène de donnée initiale u_0.
La famille $(e^{t\Delta})_{t\geq 0}$ est appelée "semi-groupe de la chaleur".

Remarque 3.3.8. $e^{t\Delta}$ est une notation et ne correspond pas à une somme de série...

Cette notation permet de souligner l'analogie entre le semi-groupe de la chaleur et la formule $u = e^{-tA}u_0$ donnant la solution du système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{u} + Au &= 0, \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

d'inconnue $t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}^n$ et A matrice carrée de taille $n \times n$.

Proposition 3.3.9 Propriétés de $e^{t\Delta}$.
Le semi-groupe de la chaleur $e^{t\Delta}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. $\forall t \geq 0$, on a $\left\|e^{t\Delta}u_0\right\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}$
2. $\forall t, s \geq 0$, on a $e^{(t+s)\Delta} = e^{t\Delta}e^{s\Delta}$
3. Pour tout $u_0 \in L^2$, la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto e^{t\Delta}u_0 \in L^2$ est continue.

Démonstration. ... □

Proposition 3.3.10 Comportement en temps long.
Soit $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\|K_t * u_0\|_{H^s} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si de plus on a $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left| K_t * u_0(x) - (4t\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)\ dy \right| = o(t^{-\frac{d}{2}})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Démonstration. ... □

3.4 Donnée initiale dans $\mathscr{S}'$: Cas non-homogène

On considère le problème de Cauchy suivant (cas non-homogène)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \text{ sur } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ u(0,\cdot) = u_0, \end{cases} \tag{5}$$

Théorème 3.4.1 Solution dans $\mathscr{C}^1(\mathbb{R};\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$.
Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ et $u_0 \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.
Alors (5) admet une unique solution $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d))$ donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ u(t) = \mathscr{F}^{-1}(\widehat{u}(t))$$

et

$$\widehat{u}(t) = e^{-t|\xi|^2}\widehat{u_0} + \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2}\widehat{f}(s)\ ds$$

Démonstration. ... □

3.5 Donnée initiale dans H^s : Cas non-homogène

Théorème 3.5.1.
Soit $s \in \mathbb{R}$, $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+;H^s(\mathbb{R}^d))$. Alors la fonction

$$t \mapsto u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}f(s,\cdot)\ ds$$

est $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+;H^s(\mathbb{R}^d)) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+;H^{s-2}(\mathbb{R}^d))$. De plus, u est l'unique solution de (5) dans cet espace.

Démonstration. ... □

La partie sur l'électromagnétisme ne sera pas explicitée dans ce papier.