GROUPES ET ANNEAUX 2
FEUILLE DE TD N°2

Sous-groupes distingués

Exercice 1. Soit G un groupe et $H, K < G$ deux sous-groupes. Montrer les énoncés suivants.

(*i*) Si $H \lhd G$ et $K \lhd G$, alors $(H \cap K) \lhd G$.

(*ii*) Si $K \lhd G$, alors $(H \cap K) \lhd H$.

(*iii*) Si G est abélien, alors G/H est abélien.

(*iv*) Si G est cyclique, alors G/H est cyclique.

Exercice 2. Soit G un groupe et $H < G$ un sous-groupe. Montrer les énoncés suivants.

(*i*) Pour tout G-ensemble X, si $H \lhd G$, alors X^H est stable par G.

(*ii*) Pour $X = G/H$, si X^H est stable par G, alors $H \lhd G$.

Exercice 3. Soient G et G' des groupes, et soient $H \lhd G$ et $H' \lhd G'$ des sous-groupes distingués. Montrer que $H \times H' \lhd G \times G'$ et construire un isomorphisme

$$\varphi : (G \times G')/(H \times H') \to G/H \times G'/H'.$$

Exercice 4. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G, et K un sous-groupe de H. Donner un exemple où $K \lhd H$ et $H \lhd G$, mais K n'est pas distingué dans G.

Exercice 5. Soit $\mathfrak{V} \subset \mathfrak{S}_4$ le sous-ensemble $\{\mathrm{id}, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.

(*i*) Montrer que $\mathfrak{V}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ isomorphe à $\boldsymbol{\mu}_2 \times \boldsymbol{\mu}_2$. Il s'agit du *groupe de Klein*.

(*ii*) Montrer que $\mathfrak{V} \lhd \mathfrak{S}_4$.

(*iii*) Que pouvez-vous dire sur le groupe quotient $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{V}$? Et sur $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{V}$?

Exercice 6. Soit $\Bbbk$ un corps, et n un entier strictement positif.

(*i*) Soit $\Bbbk^\times I_n = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \Bbbk^\times\} < \mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ le sous-groupe des multiples non-nuls de l'identité. Montrer que $\Bbbk^\times I_n \cap \mathrm{SL}_n(\Bbbk)$ est fini, et calculer son cardinal pour $\Bbbk = \mathbb{C}$.

(*ii*) Utiliser la projection canonique $\pi : \mathrm{GL}_n(\Bbbk) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$ pour construire un isomorphisme entre $\mathrm{PSL}_n(\Bbbk)$ et un sous-groupe distingué de $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$. On identifiera $\mathrm{PSL}_n(\Bbbk)$ avec son image dans $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)$.

(*iii*) Soit $(\Bbbk^\times)^n$ le sous-groupe de $\Bbbk^\times$ constitué des éléments de la forme λ^n pour $\lambda \in \Bbbk^\times$. Montrer que $\mathrm{PGL}_n(\Bbbk)/\mathrm{PSL}_n(\Bbbk) \cong \Bbbk^\times/(\Bbbk^\times)^n$ en étudiant le morphisme composé

$$\mathrm{GL}_n(\Bbbk) \xrightarrow{\det} \Bbbk^\times \twoheadrightarrow \Bbbk^\times/(\Bbbk^\times)^n$$

En déduire que $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$, mais que, par contre, l'inclusion $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un isomorphisme si n est pair.

(*iv*) Soit $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sphère de Riemann. Une *transformation de Möbius* est une bijection de la forme

$$\begin{aligned} f_A : \hat{\mathbb{C}} &\to \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

pour quelque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, où par convention

$$f_A\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \qquad\qquad f_A(\infty) := \frac{a}{c}.$$

Montrer que le groupe $\mathscr{M}$ des transformations de Möbius est isomorphe à $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 7. Soit p un nombre premier et n un entier strictement positif.

(*i*) Calculer le cardinal des groupes $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)$ et $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_p)$ en fonction de p et n. *Indication :* On pourra utiliser le calcul déjà fait

$$|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)| = \prod_{k=0}^{n-1}(p^n - p^k) = p^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1}(p^{n-k} - 1).$$

(*ii*) Calculer le cardinal de $\mathrm{PSL}_n(\mathbb{F}_p)$. *Indication :* On pourra utiliser la cyclicité de $\mathbb{F}_p^\times$, montrée dans l'Annexe A du cours.

(*iii*) Considérer l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$, et montrer que $|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \smallsetminus \{[e_2]\}| = p$. En déduire que $|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)| = p + 1$. Cela permet de voir $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p \cup \{\infty\}$ comme la sphère de Riemann sur $\mathbb{F}_p$.

(*iv*) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_n(\Bbbk)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ induit une action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$

(*v*) On suppose $p = 3$. Utiliser l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ pour montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{S}_4$ et $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \cong \mathfrak{A}_4$.

Exercice 8. Montrer que, si $G/\mathrm{Z}(G)$ est cyclique, alors G est abélien. Combiner ce résultat avec la Remarque 2.3.14 du cours pour montrer que, si p est premier, alors tout groupe d'ordre p^2 est abélien.