Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2022-2023

HAX506X - Théorie des probabilités

Corrigé du Contrôle Continu - 24/11/2022

Durée : 1h.
Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Rappels.

1. La fonction $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et bijective. Sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
2. La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective. Sa bijection réciproque est notée arccos. On a l'équivalence, pour tout $x \in [0, \pi]$ et $u \in [-1, 1]$,
$$u = \cos(x) \iff \arccos(u) = x\,.$$
La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée
$$\arccos'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,.$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a la formule bien connue $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exercice 1 Les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle qu'une telle variable aléatoire vérifie
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{N}^*\,.$$
Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{itk}\, p(1-p)^{k-1} = \mathrm{e}^{it}\, p \sum_{k=0}^{\infty} [\mathrm{e}^{it}(1-p)]^k = \frac{\mathrm{e}^{it}\, p}{1 - \mathrm{e}^{it}(1-p)}\,,$$
où on a reconnu une série géométrique de raison vérifiant $|\,\mathrm{e}^{it}(1-p)| \le |1-p| < 1$.

2. Rappeler la définition de la fonction génératrice G_Z d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner sans preuve le lien entre la dérivée de G_Z et $\mathbb{E}[Z]$.

   La fonction génératrice de Z est la série entière

$$G_Z(t) = \mathbb{E}[t^Z] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = n)t^n \,.$$

   Elle est définie (au moins) sur $[-1, 1]$. En dérivant par rapport à t et en prenant la limite quand t tend à gauche vers 1 on obtient $G'_Z(1-) = \mathbb{E}[Z]$.

Exercice 2 Les deux questions sont indépendantes.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On rappelle que pour tout $0 \leq a \leq b \leq 1$,

$$\mathbb{P}(a \leq U \leq b) = b - a \,. \qquad (\star)$$

1. On pose $X = \tan(\pi(U - 1/2))$. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire que X suit une loi à densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. On précisera la densité.

   Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction de répartition de X vérifie

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\tan(\pi(U - 1/2)) \leq t) = \mathbb{P}\Big(U \leq \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}\Big) \,,$$

   où on a utilisé la croissance de la fonction arctan. Comme $\arctan(t) \in]-\pi/2, \pi/2[$, on en déduit que $\frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \in]0, 1[$ et donc, d'après $(\star)$,

$$F_X(t) = \mathbb{P}\Big(U \leq \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{\arctan(t)}{\pi} + \frac{1}{2} \,.$$

   Ainsi, X suit une loi à densité par rapport à la mesure de Lebesgue de densité

$$f_X(t) = F'_X(t) = \frac{1}{\pi(1 + t^2)} \,, \qquad t \in \mathbb{R} \,.$$

2. On pose $Y = \lfloor nU \rfloor + 1$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de Y.

   Comme U suit une loi uniforme sur $]0, 1[$, la variable aléatoire Y prend les valeurs $1, \ldots, n$ avec, pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\lfloor nU \rfloor + 1 = k) = \mathbb{P}\Big(\frac{k-1}{n} < U \leq \frac{k}{n}\Big) = \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n} \,,$$

   où l'avant-dernière égalité résulte de $(\star)$. Ainsi, Y suit une loi uniforme discrète sur $\{1, \ldots, n\}$.

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0, \pi[$.

1. Donner la densité de X par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1.

   La densité de X est la fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ par $f_X(x) = \frac{\mathbb{1}_{]0,\pi[}(x)}{\pi}$.

2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ puis $\mathbb{E}[\cos(X)]$.
   La formule de transfert donne
   $$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{\mathbb{1}_{]0,\pi[}(x)}{\pi} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} \,,$$
   et
   $$\mathbb{E}[\cos(X)] = \int_{\mathbb{R}} \cos(x) \frac{\mathbb{1}_{]0,\pi[}(x)}{\pi} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(x)}{\pi}\right]_0^{\pi} = 0 \,.$$

3. On pose $Y = \cos(X)$. Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire la loi de Y.
   Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. La formule de transfert donne
   $$\mathbb{E}[h(Y)] = \mathbb{E}[h(\cos(X))] = \int_{\mathbb{R}} h(\cos(x)) \frac{\mathbb{1}_{]0,\pi[}(x)}{\pi} \, \mathrm{d}x \,.$$
   On utilise alors le changement de variables $u = \cos(x)$ qui donne
   $$\mathbb{E}[h(Y)] = \int_{\mathbb{R}} h(u) \frac{\mathbb{1}_{]-1,1[}(u)}{\pi\sqrt{1-u^2}} \, \mathrm{d}u \,.$$
   On en déduit que Y est une variable aléatoire de densité
   $$f_Y(x) = \frac{\mathbb{1}_{]-1,1[}(x)}{\pi\sqrt{1-x^2}} \,, \quad x \in \mathbb{R} \,.$$

4. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}[\cos(X)]$ à partir de la loi de Y.
   L'espérance de Y est donnée par
   $$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} x f_Y(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x \,.$$
   La fonction à intégrer est impaire et on l'intègre sur un intervalle centré en 0, donc $\mathbb{E}[Y] = 0$. On retrouve bien le résultat de la question 2.

5. On considère à présent le vecteur aléatoire $Z = (\cos(X), \sin(X)) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de densité f_T par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d. Montrer que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesgue nulle, on a $\mathbb{P}(T \in A) = 0$.
   Dire que T est une variable aléatoire de densité f_T par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d signifie que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,
   $$\mathbb{P}(T \in A) = \int_{\mathbb{R}} f_T(t) \mathbb{1}_A(t) \, \mathrm{d}\lambda_d(t) \,.$$
   Si $\lambda_d(A) = 0$, alors $\mathbb{1}_A$ est nul λ_d-presque partout. Par suite, $f_T \mathbb{1}_A$ est également nulle λ_d-presque partout, et donc
   $$\mathbb{P}(T \in A) = \int_{\mathbb{R}} f_T(t) \mathbb{1}_A(t) \, \mathrm{d}\lambda_d(t) = 0 \,.$$

(b) En déduire que Z n'admet pas de densité par rapport à λ_2.

On sait que $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$. Donc le borélien $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, qui est de mesure nulle pour λ_2 (c'est un cercle) vérifie $\mathbb{P}(Z \in A) = 1$. Ainsi, Z n'admet pas de densité par rapport à λ_2.