**Université de Montpellier - Faculté des Sciences**

Année Universitaire 2023-2024

**HAX506X - Théorie des probabilités**

---

# Corrigé de l'Examen terminal - 15/01/2024

Durée : 2h.
Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

---

Dans tout l'examen, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

## Exercice 1 - Questions de cours

1. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. Donner la définition de $\limsup_{n\to\infty} A_n$.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \,.$$

2. Énoncer le lemme de Borel-Cantelli (les deux implications).
   Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$.
   (a) Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.
   (b) Si $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et que les $A_n$ sont indépendants, alors $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.
3. Énoncer la caractérisation de la convergence en loi via les fonctions de répartition.
   Une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle $X$ si et seulement $F_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(t)$ pour tout point de continuité $t \in \mathbb{R}$ de $F_X$.

## Exercice 2

1. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire
   (a) de loi de Bernoulli,
   (b) de loi binomiale,
   (c) de loi de Poisson.

   (a) Si $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p$, alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] = (1-p) \times \mathrm{e}^{it\times 0} + p \times \mathrm{e}^{it\times 1} = (1-p) + p\,\mathrm{e}^{it} \,.$$

   (b) Si $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$, alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,\mathrm{e}^{itk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p\,\mathrm{e}^{it})^k (1-p)^{n-k} = (p\,\mathrm{e}^{it} + 1 - p)^n \,,$$

d'après la formule du binôme de Newton.
(c) Si $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$, alors pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\,\theta^k}{k!}\, e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\,(\theta\, e^{it})^k}{k!} = e^{-\theta}\, e^{\theta\, e^{it}} = e^{\theta(e^{it}-1)}\,.$$

2. On considère une suite $X_1, \ldots, X_n$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Déterminer la fonction caractéristique de $S_n$ puis en déduire la loi de $S_n$.
La fonction caractéristique de $S_n$ est donnée par

$$\varphi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itS_n}] = \mathbb{E}[e^{it(X_1+\cdots+X_n)}] = \mathbb{E}[e^{itX_1}\cdots e^{itX_n}] = \mathbb{E}[e^{itX_1}]\cdots\mathbb{E}[e^{itX_n}]\,,$$

par indépendance de $X_1, \ldots, X_n$, donc de $e^{itX_1}, \ldots, e^{itX_n}$. Comme les $X_k$ suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$, la question précédente donne

$$\varphi_{S_n}(t) = (1-p+p\,e^{it})\cdots(1-p+p\,e^{it}) = (1-p+p\,e^{it})^n\,.$$

On reconnaît la fonction caractéristique d'une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$, donc $S_n$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$.

3. Quelle est la limite au sens presque sûr de la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ? Justifier.
Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, identiquement distribuées, et intégrables donc la loi forte des grands nombres assure que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1] = p\,.$$

4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite quand $n \to \infty$ de

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

*Indication : on pourra remarquer que la quantité à étudier correspond à l'espérance d'une certaine variable aléatoire.*
Le théorème de transfert assure que

$$\mathbb{E}[f(S_n/n)] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Par ailleurs, la convergence presque sûre implique la convergence en loi donc $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers $p$. La fonction $f$ étant continue sur le segment $[0,1]$ elle est bornée. Par définition de la convergence en loi on obtient

$$\mathbb{E}[f(S_n/n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(p)] = f(p)\,.$$

On a donc montré que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(p)\,.$$

5. (**Bonus**) Déterminer la limite quand $n \to \infty$ de

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}\, n^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On répètera la démarche des questions 2. à 4.

Il suffit de répéter la même démarche que précédemment :

- On considère une suite $Y_1, \dots, Y_n$ iid de loi de Poisson de paramètre 1 et on pose $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. En calculant la fonction caractéristique de $S_n$, on en déduit que $S_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n$.
- La loi forte des grands nombres assure la convergence presque sûre, donc la convergence en loi, de $S_n/n$ vers $\mathbb{E}[Y_1] = 1$.
- La formule de transfert permet de réécrire l'espérance précédente via

$$\mathbb{E}[f(S_n/n)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}\, n^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

- La fonction $f$ est continue et bornée, donc la définition de la convergence en loi permet de conclure :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-n}\, n^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}[f(S_n/n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[f(1)] = f(1).$$

**Exercice 3** Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $M_n = \max(U_1, \dots, U_n)$.

1. Soit $n \geq 1$. Calculer $\mathbb{P}(M_n \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. En déduire la densité $f_{M_n}$ de la variable aléatoire $M_n$.

   L'indépendance des $U_k$ permet d'écrire

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \mathbb{P}(U_1 \leq t, \dots, U_n \leq t) = \mathbb{P}(U_1 \leq t) \cdots \mathbb{P}(U_n \leq t).$$

   Puis, comme les $U_k$ suivent une loi uniforme sur $[0,1]$, on obtient

$$\mathbb{P}(M_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t^n & \text{si } t \in [0,1], \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

   La densité $f_{M_n}$ de $M_n$ correspond alors à la dérivée presque partout de la fonction de répartition de $M_n$ :

$$f_n(t) = n t^{n-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

2. Montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.
   Pour $\epsilon > 0$ on écrit

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(\{M_n \leq 1-\epsilon\} \cup \{M_n \geq 1+\epsilon\}) = \mathbb{P}(M_n \leq 1-\epsilon) + \mathbb{P}(M_n \geq 1+\epsilon)\,,$$

   par incompatibilité des deux événements considérés. La deuxième probabilité est nulle puisque $M_n$ est à valeurs dans $[0,1]$. La question précédente donne alors

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq \epsilon) = \mathbb{P}(M_n \leq 1-\epsilon) = (1-\epsilon)^n \mathbb{1}_{[0,1]}(\epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$

   ce qui prouve que $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$.

3. On souhaite établir la convergence presque sûre de $(M_n)_{n\geq 1}$ vers 1.
   (a) Pour $k \geq 1$ fixé, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq 1/k)$ converge.
   Comme $1/k \in ]0,1]$, le calcul de la question précédente donne

$$\mathbb{P}(|M_n - 1| \geq 1/k) = (1 - 1/k)^n\,.$$

   Cette dernière quantité est le terme général d'une série convergente (série géométrique de raison strictement inférieure à 1) donc la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq 1/k)$ converge.

   (b) En déduire que

$$\mathbb{P}(\forall N \geq 1,\, \exists n \geq N : |M_n - 1| \geq 1/k) = 0\,.$$

   Le lemme de Borel-Cantelli implique que

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} \{|M_n - 1| \geq 1/k\}) = 0\,,$$

   ce qui se réécrit, par définition de la $\limsup$ d'une suite d'événements,

$$\mathbb{P}(\forall N \geq 1,\, \exists n \geq N : |M_n - 1| \geq 1/k) = 0\,,$$

   (c) Montrer alors que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 1.
   Posons

$$A_k = \{\forall N \geq 1,\, \exists n \geq N : |M_n - 1| \geq 1/k\}\,,$$

   qui est un événement de probabilité nulle. L'égalité obtenue dans la question précédente étant vraie pour tout entier $k \geq 1$, on obtient

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0\,,$$

   En passant au complémentaire on en déduit alors que

$$\mathbb{P}(\forall k \geq 1,\, \exists N \geq 1,\, \forall n \geq N : |M_n - 1| < 1/k) = 1\,,$$

   ce qui assure la convergence presque sûre de $(M_n)_{n\geq 1}$ vers 1.

4. On souhaite à présent étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$.

   (a) Soit $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $n(1-M_n)$.

   Il suffit de reprendre les calculs de la première question. Si $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, alors

$$F_{n(1-M_n)}(t) = \mathbb{P}(n(1-M_n) \leq t) = \mathbb{P}(M_n \geq 1-t/n) = \left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\mathbb{1}_{[0,n]}(t)+\mathbb{1}_{]n,\infty[}(t)\,.$$

   (b) En déduire que $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire à déterminer.

   On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{n(1-M_n)}(t) = \left[1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]\mathbb{1}_{[0,n]}(t)+\mathbb{1}_{]n,\infty[}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1-\mathrm{e}^{-t})\mathbb{1}_{[0,\infty[}(t)\,,$$

   ce qui assure la convergence en loi de $(n(1-M_n))_{n\geq 1}$ vers une loi exponentielle de paramètre 1.