GROUPES ET ANNEAUX 2
EXAMEN DU 24 MAI 2024

Exercice 1 (2+4 pts)**.** Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G. On considère l'action par translation à gauche de G sur l'ensemble G/H.

(i) Montrer que, pour tout $g \in G$, le stabilisateur $\mathrm{st}(gH)$ coïncide avec gHg^{-1}.

(ii) Soit $H' < G$ un autre sous-groupe de G. Montrer que les G-ensembles G/H et G/H' sont isomorphes si et seulement si H et H' sont conjugués.

Exercice 2 (4+2+2 pts)**.** Soit A un anneau. Par définition, le *nilradical de* A est le sous-ensemble $\mathrm{N}(A) = \{x \in A \mid \exists\, m \in \mathbb{N}\ x^m = 0\} \subset A$, et le *radical de Jacobson de* A est le sous-ensemble $\mathrm{J}(A) = \{x \in A \mid \forall\, a \in A\ 1 - ax \in A^\times\} \subset A$.

(i) Montrer que $\mathrm{N}(A)$ et $\mathrm{J}(A)$ sont des idéaux de A.

(ii) Montrer que, si $I \subset A$ est un idéal premier, alors $\mathrm{N}(A) \subset I$.

(iii) Montrer que, si $I \subset A$ est un idéal maximal, alors $\mathrm{J}(A) \subset I$.

Exercice 3 (2+4+4+2 pts)**.** Soit G un groupe d'ordre 255. Le but de cet exercice est de montrer que G est cyclique.

(i) Montrer que G admet un sous-groupe distingué $K \triangleleft G$ d'ordre 17.

(ii) Montrer que G admet un sous-groupe $H < G$ d'ordre 15. *Indication :* montrer que G admet un sous-groupe d'ordre 3 et un d'ordre 5, et que l'un des deux est forcement distingué.

(iii) Montrer que $G \cong K \times H$. *Indication :* montrer d'abord que $G = K \rtimes H$, et ensuite que l'action par conjugaison de H sur K est triviale.

(iv) Montrer que tout groupe H d'ordre 15 est cyclique.