Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024
UE HAX601X - Topologie
Licence 3ème année - Semestre 6

Planche TD 4.

Exercice 1. Montrer que dans un espace normé non réduit à 0 une sphère n'est jamais vide.

Exercice 2. Soit B la boule unité ouverte d'un espace normé E. Montrer que B est homéomorphe à E (indice: on pourra considérer l'application $h : x \mapsto \frac{x}{1+\|x\|}$). En déduire que E est homéomorphe à n'importe quelle boule ouverte de E de rayon > 0.

Exercice 3. Soient $I = [-1, 1]$ et E l'espace normé $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$, $\mathcal{P}$ le sous-espace des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. Montrer que la décomposition $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ est une somme directe topologique. (Indice : utiliser l'opérateur $\mathbf{s} : E \to E : f \mapsto f \circ \sigma$ où $\sigma(t) = -t$.)

Exercice 4. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme symétrique[1]. Calculer $\|u\|$. (Indice : penser “valeurs propres”.) Question subsidiaire : si u n'est que $\mathbb{R}$-diagonalisable, obtient-on encore le même résultat ?

Exercice 5. Soit X et Y deux espaces normés, a un point de Y et $\mu \in X'$. Vérifier que $a \otimes \mu : X \to Y$ est linéaire et continu puis montrer que sa norme est $= \|a\| \, \|\mu\|$.

Exercice 6. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Calculer la norme d'opérateur de u dans chacun des deux cas suivants:

1. Si $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont équipés de $\|\cdot\|_\infty$.
2. Si $\mathbb{R}^3$ est équipé de $\|\cdot\|_1$ et $\mathbb{R}^2$ de $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 7. Soit $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorphisme, de matrice A. On place sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\|\cdot\|_1$. Montrer que

$$\|u\| = \left\| \begin{pmatrix} \|A_1\|_1 \\ \vdots \\ \|A_n\|_1 \end{pmatrix} \right\|_\infty$$

(où A_j désigne le $j$ème vecteur-colonne de A).

Question facultative : que devient $\|u\|$ si on place sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\|\cdot\|_\infty$ à la place de $\|\cdot\|_1$?

Exercice 8. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. On considère sur E les deux normes usuelles $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

1. Pour quelle(s) norme(s) la forme linéaire $\mu : E \to \mathbb{R} : P \mapsto P(1)$ sera-t-elle continue ?
2. Que peut-on dire, dans chaque cas, de l'espace H des polynômes admettant 1 comme racine ?
3. Expliciter, quand cela est possible, un supplémentaire topologique de H.

Exercice 9. Soit E un espace normé. Soient $B = \{a_1, \ldots, a_n\}$ une famille de n vecteurs de E et $B' = \{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ une famille de n formes linéaires continues sur E vérifiant la condition $\mu_i(a_j) = \delta_{ij}$. On notera F le sous-espace engendré par B et H_i le noyau de μ_i.

1. Vérifier que B est libre.
2. Rappeler pourquoi F est fermé.
3. Montrer que $p := \sum_{i=1}^n a_i \otimes \mu_i$ est un projecteur continu de E et que $1 \leq \|p\| \leq \sum_{i=1}^n \|a_i\| \, \|\mu_i\|$.
4. Montrer que E/F est isomorphe à $\bigcap_{i=1}^n H_i$.

[1] $\mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire usuel.

Exercice 10. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur l'espace vectoriel des matrices carrées $n \times n$ qui soit invariante par conjugaison (indice: trouver une matrice A semblable à $2A$).

Exercice 11. Soit A une matrice carrée telle que la suite (A^n) converge. Montrer que la limite de cette suite est une matrice idempotente (autrement dit, c'est la matrice d'un projecteur).

Exercice 12. Soit a un point d'un espace normé E et μ une forme linéaire continue non-nulle sur E de noyau H. Montrer que $d(a, H) = \frac{|\mu(a)|}{\|\mu\|}$.(Indices : D'une part on utilisera l'inégalité $|\mu(a-x)| \leq \|\mu\| \|a-x\|$ en prenant x dans H. D'autre part on remarquera que le vecteur $h_x := \mu(a)x - \mu(x)a$ est constamment dans H et on particularisera au cas où x est sur la sphère-unité.)

Exercice 13. Soit $I = [0, 1]$, E l'espace normé $(C^0(I), \|\cdot\|_\infty)$ et F l'espace normé $(C^0(I), \|\cdot\|_1)$.

1. Une forme linéaire est dite positive sur E si elle prend des valeurs positives sur les fonctions positives. Montrer que toute forme linéaire μ positive sur E est continue et que sa norme est égale à $\mu(\mathbf{1})$.
2. Si g est un point fixé de E, on définit
$$\mu_g : E \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\, dt.$$
Montrer que μ_g est dans E' et que $\|\mu_g\| = \|g\|_1$ (indice : on pourra utiliser la suite (f_n) de E définie par $f_n(t) = \frac{g(t)}{|g(t)|+\frac{1}{n}}$). Montrer que l'application $\mathcal{I} : F \to E' : g \mapsto \mu_g$ est linéaire et préserve les normes. En déduire que $\mathcal{J} : E \to E' : g \mapsto \mu_g$ est linéaire, continue, injective et de norme ≤ 1.

Exercice 14. Soient E et F deux espaces normés. Montrer que si $u : E \to F$ et $v : F \to E$ sont deux applications linéaires continues de norme ≤ 1 et vérifiant $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_F$, alors u est un isomorphisme isométrique.

Exercice 15. On se propose de montrer que le dual topologique de l^1 est naturellement isomorphe et isométrique à l^∞. Pour tout entier naturel n, on pose : $e_n(k) = \delta_{nk}$ (symbole de Kronecker) et $B := \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Vérifier que B est dans la sphère-unité de l^1.
2. (a) Vérifier que si $\mu \in (l^1)'$, la suite $\overline{\mu}$ définie par $\overline{\mu}(n) = \mu(e_n)$ est dans l^∞.
   (b) Montrer que $\Phi : (l^1)' \longrightarrow l^\infty : \mu \longmapsto \overline{\mu}$ définit une application linéaire continue vérifiant $\|\Phi\| \leq 1$.
3. (a) Vérifier que si $\alpha \in l^\infty$ et si $x \in l^1$ la série $\sum \alpha(n)x(n)$ est absolument convergente. On notera
$$\hat{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(n)x(n).$$
   (b) Montrer que $\Psi : l^\infty \longrightarrow (l^1)' : \alpha \longmapsto \hat{\alpha}$ définit une application linéaire continue vérifiant $\|\Psi\| \leq 1$.
4. Déduire de ce qui précède que Φ est une isométrie linéaire d'inverse Ψ.

Exercice 16. Soit $\mu : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue définie sur un sous-espace de l'espace normé E. Soit $a \in E \backslash F$ et $D = \mathrm{Vect}(a)$. Montrer que μ admet un prolongement linéaire et continu $\hat{\mu} : F \oplus D \to \mathbb{R}$ tel que $\|\hat{\mu}\| = \|\mu\|$.

Exercice 17. On se place ici dans l^∞ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On notera c_0 le sous-espace des suites convergeant vers 0 et c_{00} celui des suites nulles à partir d'un certain rang. On a donc : $c_{00} \subset c_0 \subset l^\infty$.

1. Montrer que c_0 est fermé. En déduire que c'est un espace de Banach.
2. Montrer que c_{00} est dense dans c_0. Est-il aussi dense dans l^∞ ?

Exercice 18. [facultatif] transféré dans le cours à la fin de la section 2.9

Exercice 19. Montrer que le dual topologique de c_0 est naturellement isomorphe et isométrique à l^1. (Indice : on pourra s'inspirer de l'exercice 15.)