GROUPES ET ANNEAUX 2
CORRIGÉ DU CONTRÔLE CONTINU N°1

Exercice 1. Soit G un groupe, $K \lhd G$ un sous-groupe distingué, et $H < G$ un sous-groupe. Montrer que :

(i) $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H ;

(ii) $KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$ est un sous-groupe de G ;

(iii) $H/(K \cap H) \cong KH/K$.

Solution. (i) Comme l'intersection entre deux sous-groupes de G est un sous-groupe, alors $K \cap H$ est un sous-groupe. Pour montrer qu'il est distingué dans H, il faut vérifier que $hxh^{-1} \in K \cap H$ pour tout $x \in K \cap H$ et $h \in H$. Mais $hxh^{-1} \in K$ car $x \in K$ et $K \lhd G$, et $hxh^{-1} \in H$ car $x \in H$ est $H < G$.

(ii) Tout d'abord, $e = ee \in KH$ car $e \in K$ et $e \in H$. Ensuite, pour tout $kh, k'h' \in KH$, on a

$$khk'h' = k(hkh^{-1})hh' \in KH$$

car $K \lhd G$, donc KH est clos par multiplication. De plus, pour tout $kh \in KH$, on a

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} = (h^{-1}k^{-1}h)h^{-1} \in KH$$

car $K \lhd G$, donc KH est clos par inversion.

(iii) Considérons la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/K$, et soit $\pi : H \to G/K$ sa restriction à H. Son noyau est $\ker \pi = K \cap H$ car, pour tout $h \in H$, on a

$$h \in \ker \pi \quad \Leftrightarrow \quad hK = eK \quad \Leftrightarrow \quad h \in K.$$

De plus, son image est $\operatorname{im} \pi = KH/K$. En effet, pour tout $h \in H$, on a

$$\pi(h) = hK = ehK \in KH/K,$$

donc $\operatorname{im} \pi \subset KH/K$. De plus, pour tout $khK \in KH/K$, on a

$$khK = h(h^{-1}kh)K = hK = \pi(h) \in \operatorname{im} \pi,$$

car $K \lhd G$, donc $\operatorname{im} \pi \supset KH/K$. L'isomorphisme suit alors du Théorème de noyau et image. $\square$

Exercice 2. Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G. Le *centralisateur de H dans G* est $\mathrm{C}_G(H) := \{g \in G \mid gh = hg \,\forall\, h \in H\} < G$, et le *normalisateur de H dans G* est $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} < G$.

(i) Montrer que $\mathrm{C}_G(H) \lhd \mathrm{N}_G(H)$.

(ii) Déterminer $\mathrm{C}_G(H)$ et $\mathrm{N}_G(H)$ lorsque $G = \mathfrak{S}_3$ et $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$.

(iii) Montrer que $\mathrm{C}_G(gHg^{-1}) = g\mathrm{C}_G(H)g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et en déduire que, si $H \lhd G$, alors $\mathrm{C}_G(H) \lhd G$.

(iv) Montrer que $[G : \mathrm{N}_G(H)]$ est égal au nombre de sous-groupes de G conjugués à H. *Indication :* étudier l'action par conjugaison de G sur l'ensemble X de ses sous-groupes.

Solution. (i) On commence par montrer que $\mathrm{C}_G(H) \subset \mathrm{N}_G(H)$. En effet, on a que

$$\begin{aligned} g \in \mathrm{C}_G(H) \quad &\Leftrightarrow \quad gh = hg \quad \forall\, h \in H \quad \Leftrightarrow \quad ghg^{-1} = h \quad \forall\, h \in H \\ &\Rightarrow \quad gHg^{-1} = H \quad \Leftrightarrow \quad g \in \mathrm{N}_G(H). \end{aligned}$$

Ensuite, pour montrer que $\mathrm{C}_G(H)$ est distingué dans $\mathrm{N}_G(H)$, on doit vérifier que $xyx^{-1} \in \mathrm{C}_G(H)$ pour tout $x \in \mathrm{N}_G(H)$ et $y \in \mathrm{C}_G(H)$. Cela suit du fait que, pour tout $h \in H$, on a

$$(xyx^{-1})h = xy(x^{-1}hx)x^{-1} = x(x^{-1}hx)yx^{-1} = h(xyx^{-1}),$$

car $x \in \mathrm{N}_G(H)$ et $y \in \mathrm{C}_G(H)$.

(*ii*) Comme $H = \langle (1\ 2\ 3) \rangle$ est cyclique, pour tout $\sigma \in G = \mathfrak{S}_3$ on a que

$$\sigma \in C_G(H) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (1\ 2\ 3).$$

Au même temps, pour tout $\sigma \in G$ on a que

$$\sigma(1\ 2\ 3)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)).$$

Considérons alors $\sigma \in C_G(H)$.

- Si $\sigma(1) = 1$, alors $\sigma(2) = 2$, $\sigma(3) = 3$, et $\sigma = \mathrm{id}$.
- Si $\sigma(1) = 2$, alors $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, et $\sigma = (1\ 2\ 3)$.
- Si $\sigma(1) = 3$, alors $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$, et $\sigma = (1\ 3\ 2)$.

Donc

$$\mathrm{C}_G(H) = H.$$

Par contre, $[G : H] = 2$ implique $H \lhd G$, ce qui implique

$$\mathrm{N}_G(H) = G.$$

(*iii*) On commence par montrer que $\mathrm{C}_G(gHg^{-1}) = g\mathrm{C}_G(H)g^{-1}$. En effet, on a que

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{C}_G(gHg^{-1}) \quad &\Leftrightarrow \quad x(ghg^{-1}) = (ghg^{-1})x \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad (g^{-1}xg)h = h(g^{-1}xg) \quad \forall\, h \in H \\ &\Leftrightarrow \quad g^{-1}xg \in \mathrm{C}_G(H) \quad \Leftrightarrow \quad x \in g\mathrm{C}_G(H)g^{-1}. \end{aligned}$$

Ensuite, si $H \lhd G$, alors, pour tout $g \in G$, on a

$$\mathrm{C}_G(H) = \mathrm{C}_G(gHg^{-1}) = g\mathrm{C}_G(H)g^{-1}.$$

Cela implique que $\mathrm{C}_G(H) \lhd G$.

(*iv*) Soit X l'ensemble des sous-groupes de G, sur lequel G agit par conjugaison. Alors, par définition, le stabilisateur de $H \in X$ est $G_H = \mathrm{N}_G(H)$, et son orbite est $G \cdot H = \{gHg^{-1} \mid g \in G\}$. On obtient une bijection

$$\begin{aligned} G/G_H &\to G \cdot H \\ [g] &\mapsto gHg^{-1}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$[G : \mathrm{N}_G(H)] = |G/G_H| = |G \cdot H|.$$

□

Remarque. Une méthode alternative pour voir que, si $H \lhd G$, alors $\mathrm{C}_G(H) \lhd G$, consiste à remarquer que $\mathrm{N}_G(H) = G$, et à appliquer le point (*i*) de l'Exercice 2.

Exercice 3. Soit G un groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}$, et soit $p \in \mathbb{N}$ le plus petit nombre premier divisant n. Montrer que, si $H \lhd G$ et $|H| = p$, alors $H \subset \mathrm{Z}(G)$. *Indication :* étudier l'action par conjugaison de G sur H, ainsi que le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(H)$.

Solution. Vu que $H \triangleleft G$, alors G agit par conjugaison sur H. Comme il s'agit d'une action par homomorphisme, on obtient un morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \rho : G &\to \mathrm{Aut}(H) \\ g &\mapsto g\_g^{-1} \end{aligned}$$

Vu que $|H| = p$, alors $H \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Maintenant, pour définir un automorphisme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il suffit de choisir l'image de 1, qui doit être un élément d'ordre p. Comme il y en a exactement $p-1$ (tous sauf 0), on déduit que $|\mathrm{Aut}(H)| = p - 1$. Mais $(p-1) \nmid n$, car p est le plus petit nombre premier divisant n. Alors le seul morphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{Aut}(H)$ est le morphisme trivial. En d'autres termes, $ghg^{-1} = h$ pour tout $g \in G$ et $h \in H$. Donc $H \subset \mathrm{Z}(G)$. $\square$