GROUPES ET ANNEAUX 2
FEUILLE DE TD N°4

Anneaux et idéaux

Exercice 1. Soit I un idéal d'un anneau A satisfaisant $I \neq A$.

(*i*) Montrer que I est premier si et seulement si, pour tout $x, y \in A$, on a $xy \in I \Rightarrow x \in I$ ou $y \in I$.

(*ii*) Montrer que I est maximal si et seulement si, pour tout idéal $J \subset A$, on a $I \subset J \Rightarrow J = I$ ou $J = A$.

Exercice 2. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

(*i*) Montrer que, si I est un idéal premier de B, alors $f^{-1}(I)$ est un idéal premier de A.

(*ii*) Montrer que, si I est un idéal maximal de B, alors $f^{-1}(I)$ n'est pas nécessairement un idéal maximal de A.

Exercice 3. Montrer que, pour tout $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \Bbbk \times \ldots \times \Bbbk$, l'idéal

$$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \subset \Bbbk[X_1, \ldots, X_n]$$

est maximal. *Indication :* Étudier $\ker \varepsilon_{\underline{a}}$ pour

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\underline{a}} : \Bbbk[X_1, \ldots, X_n] &\to \Bbbk \\ P(X_1, \ldots, X_n) &\mapsto P(a_1, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

Exercice 4. Soient I et J deux idéaux d'un anneau A.

(*i*) Montrer que

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$

est un idéal de A qui contient $I \cup J$. Non seulement, il est le plus petit idéal de A ayant cette propriété : si K est un idéal de A et $I \cup J \subset K$, alors $I + J \subset K$.

(*ii*) Montrer que

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in I, y_1, \ldots, y_n \in J \right\}$$

est un idéal de A contenu dans $I \cap J$.

Exercice 5. Soit B une A-algèbre, soit I un idéal de A, et soit

$$IB := \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in I, b_1, \ldots, b_n \in B \right\}$$

l'*extension de I à B*. Montrer que IB est un idéal de B. Ensuite, montrer que

$$A[X]/(I(A[X])) \cong (A/I)[X].$$

Exercice 6. Soient I un idéal de A et $\bar{A} = A/I$ l'anneau quotient. La projection canonique sera désignée par $\pi : A \to \bar{A}$.

(*i*) Soit J un idéal de A contenant I, et soit $\bar{J} = \pi(J)$ son image dans $\bar{A}$. Montrer que $A/J \cong \bar{A}/\bar{J}$.

(*ii*) Soit $J = (a_1, \ldots, a_n)$ l'idéal de A engendré par $a_1, \ldots, a_n \in A$, et soit $\bar{a}_i := \pi(a_i) \in \bar{A}$. Montrer que $A/(I + J) \cong \bar{A}/(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n)$.

Exercice 7. On rappelle que deux idéaux I et J de A sont dit *co-maximaux* si $I + J = A$.

(*i*) Montrer que, si $I \subset A$ est un idéal maximal, alors tout idéal $J \subset A$ est soit co-maximal avec I, soit inclus dans I.

(*ii*) Donner un exemple de pair d'idéaux co-maximaux $I, J \subset A = \Bbbk[X, Y]$ tels que ni I ni J soient maximaux.

(*iii*) Les idéaux $I = (X)$ et $J = (Y)$ de $A = \Bbbk[X, Y]$ sont-ils co-maximaux ?

Exercice 8. Soit $p > 2$ un nombre premier et $\square_p = \{a^2 \mid a \in \mathbb{F}_p^\times\}$ l'ensemble des carrés non-nuls de $\mathbb{F}_p$.

(*i*) Montrer que l'ensemble des racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ est précisément $\square_p$. *Indication :* On pourra utiliser le principe du berger pour déterminer $|\square_p|$.

(*ii*) En déduire que $-1 \in \square_p$ si et seulement si $p \equiv 1 \pmod 4$.

(*iii*) Montrer que, si $p \equiv 1 \pmod 4$, alors $(p) \subset \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ n'est pas premier.

(*iv*) Montrer que, si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors $(p) \subset \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est maximal. *Indication :* Utiliser le fait que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ est un anneau principal, avec jauge euclidienne $N(a + \mathrm{i}b) = a^2 + b^2$ pour tout $a + \mathrm{i}b \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$, et remarquer que p n'est pas une somme de deux carrés, c'est-à-dire $p \notin \{a^2 + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 9. Soit $P \in \Bbbk[X]$ un polynôme de degré 2 ou 3.

(*i*) Montrer que P est irréductible si et seulement si P ne possède aucune racine dans $\Bbbk$.

(*ii*) Montrer que $\mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$ est un corps avec 4 éléments.

(*iii*) Montrer que $\mathbb{F}_3[X]/(X^2 + 1)$ est un corps avec 9 éléments.

(*iv*) Construire un corps avec 8 éléments et ensuite déterminer un générateur du groupe multiplicatif de ses éléments inversibles.