HAX501X – Groupes et anneaux 1

Contrôle continu 1

Clément Dupont

- Durée : 2h.
- Tout matériel électronique est interdit ainsi que les documents de cours.
- Une partie du barème sera consacrée à la clarté de la rédaction ainsi qu'à la propreté/lisibilité de la copie.

Questions de cours (7 pts).

1) (1 pt) Est-ce que $\overline{17}$ est inversible dans $\mathbb{Z}/140\mathbb{Z}$? Si oui, calculer son inverse.
2) (1 pt) Calculer, en justifiant, $\varphi(140)$.
3) (1 pt) Dans le groupe $\mathbb{Z}/140\mathbb{Z}$, quel est l'ordre du sous-groupe engendré par $\overline{119}$? On justifiera.
4) (1 pt) Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Démontrer que, si l'on note e_G et e_H les éléments neutres respectifs de G et H, on a $f(e_G) = e_H$.
5) (1,5 pt) Soit G un groupe, et soient H, H' deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.
6) (0,5 pt) Énoncer le théorème de Lagrange.
7) (1 pt) En utilisant le théorème de Lagrange, démontrer qu'un groupe G d'ordre p premier est nécessairement cyclique.

Exercice 1 : des congruences (4 pts).

1) (0,5 pt) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 5.
2) (1,5 pt) Pour quels entiers naturels n a-t-on à la fois $n \equiv 2 \pmod 5$ et $3^n \equiv 2 \pmod 5$? Justifier.
3) (2 pts) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n qui vérifient :

$$3^n \equiv n \pmod 5.$$

Exercice 2 : 24 heures chrono (4 pts)

1) (1 pt) Montrer que le groupe $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ a autant de générateurs que de sous-groupes. Faire la liste des générateurs. Faire la liste des sous-groupes, en décrivant chaque sous-groupe de la manière la plus explicite possible.
2) (1 pt) Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$ peut être engendré par 3 de ses éléments.
3) (1 pt) Lister les sous-groupes d'ordre 2 du groupe $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$.
4) (1 pt) Donner un exemple de sous-groupe d'ordre 4 du groupe $(\mathbb{Z}/24\mathbb{Z})^\times$. (Bonus : lister tous les sous-groupes d'ordre 4.)

Exercice 3 : transformations affines (4 pts).

1) Pour (a, b) et (a', b') deux éléments de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on définit

$$(a, b)\#(a', b') = (aa', b + ab').$$

   a) (1,5 pt) Montrer que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, muni de la loi de composition interne $\#$, est un groupe.

   b) (0,5 pt) Ce groupe est-il abélien ? On justifiera.

2) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on considère l'application

$$f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ x \mapsto ax + b.$$

   On remarque (on ne demande pas de justification) que c'est une application bijective. On rappelle la notation $\mathrm{Bij}(E)$ pour le groupe des permutations d'un ensemble E.

   a) (1 pt) Montrer que l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Bij}(\mathbb{R}) \ , \ (a, b) \mapsto f_{a,b}$$

   est un morphisme de groupes, où la structure de groupe de $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ est celle de la question précédente.

   b) (1 pt) Montrer que ce morphisme de groupes est injectif.

Exercice 4 : union de sous-groupes (3 pts).

1) (2 pts) Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G. Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

2) (1 pt) Donner un exemple de groupe G et de trois sous-groupes H, K, L qui sont tous les trois différents de G et tels que $G = H \cup K \cup L$.