Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2024-2025

HAX506X - Probabilités

Corrigé du Contrôle continu - 29/11/2024

Exercice 1 - Questions diverses

Les trois questions sont indépendantes.

1. Énoncer l'inégalité de Markov.

   Soit X une variable aléatoire réelle positive et $p \in [1, \infty[$. Alors pour tout $t > 0$,

   $$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[X^p]}{t^p}\,.$$

   Remarque : l'inégalité reste vraie pour une variable aléatoire X réelle quelconque à condition de considérer $|X|$ dans les deux membres de l'inégalité.

2. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi binomiale.

   Pour $t \in \mathbb{R}$,

   $$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, \mathrm{e}^{itk} = (p\,\mathrm{e}^{it} + 1 - p)^n\,.$$

3. Donner (en justifiant) un exemple de deux variables aléatoires X et Y de même loi qui vérifient $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

   Prenons X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et posons $Y = -X$. Alors la symétrie de la densité de la loi normale centrée réduite assure que Y suit aussi une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Par ailleurs,

   $$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}(X = -X) = \mathbb{P}(2X = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0\,,$$

   car X est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 - Fonction génératrice et parité

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Donner la définition de la fonction génératrice G_X de X et rappeler la valeur de $G_X(1)$.

   Pour $z \in [-1, 1]$,

   $$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) z^n\,.$$

   De plus, $G_X(1) = \mathbb{E}[1^X] = 1$.

2. Soit A l'événement "X est paire". Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $G_X(-1)$.
   Il suffit d'écrire
$$G_X(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n)(-1)^n = \sum_{n \text{ pairs}} \mathbb{P}(X=n) - \sum_{n \text{ impairs}} \mathbb{P}(X=n)\,.$$
   Or, on a aussi la décomposition
$$1 = G_X(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) = \sum_{n \text{ pairs}} \mathbb{P}(X=n) + \sum_{n \text{ impairs}} \mathbb{P}(X=n)\,.$$
   Ainsi, en sommant les deux égalités précédentes on obtient la relation
$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \text{ pairs}} \mathbb{P}(X=n) = \frac{G_X(-1)+1}{2}\,.$$

3. On suppose maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Calculer la fonction génératrice de X et en déduire la probabilité que X soit paire.
   Pour $z \in \mathbb{R}$,
$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!} z^k = \mathrm{e}^{-\theta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta z)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\theta}\, \mathrm{e}^{z\theta} = \mathrm{e}^{\theta(z-1)}\,.$$
   D'après la question précédente, la probabilité que X soit paire vaut alors
$$\frac{G_X(-1)+1}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-2\theta}+1}{2}\,.$$

Exercice 3 - Loi de Pareto

Soit $\alpha > 0$. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est donnée par
$$F_X(t) = (1 - t^{-\alpha})\mathbb{1}_{]1,\infty[}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
On dit alors que X suit une loi de Pareto de paramètre α.

1. Déterminer la densité de X.
   La fonction de répartition F_X est dérivable partout sauf en 1. Sa dérivée correspond à la densité f_X de X :
$$f_X(t) = F_X'(t) = \alpha t^{-\alpha-1}\mathbb{1}_{]1,\infty[}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

2. Donner une condition sur α pour que X admette une espérance finie. Calculer $\mathbb{E}[X]$ dans ce cas.
   La variable aléatoire X admet une espérance finie si et seulement si la quantité $tf_X(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire ici, si et seulement si $t^{-\alpha}$ est intégrable en ∞. Ainsi, X admet une espérance finie si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas on obtient
$$\mathbb{E}[X] = \int_1^{\infty} t f_X(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_1^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \alpha\Big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big]_1^{\infty} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\,.$$

3. Donner une condition sur α pour que X admette un moment fini d'ordre $p \in \mathbb{N}$.

   Le même raisonnement qu'à la question précédente assure que X admet un moment fini d'ordre p si et seulement si $t^{p-\alpha-1}$ est intégrable en l'infini ce qui donne la condition nécessaire et suffisante $\alpha > p$.

4. On pose $Y = \sqrt{X}$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. En déduire la loi de Y.

   La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $]1, \infty[$, donc il en est de même pour $Y = \sqrt{X}$. Ainsi, si $t \leq 1$, alors $F_Y(t) = 0$. Puis, pour $t > 1$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^2) = (1 - (t^2)^{-\alpha}) \,.$$

   On en déduit que Y a pour fonction de répartition $F_Y(t) = (1 - t^{-2\alpha})\mathbb{1}_{]1,\infty[}(t)$, donc que Y suit loi de Pareto de paramètre 2α.

5. On pose $Z = \ln(X)$. Calculer $\mathbb{E}[h(Z)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire la loi de Z.

   La formule de transfert donne

$$\mathbb{E}[h(Z)] = \mathbb{E}[h(\ln(X))] = \int_1^\infty h(\ln(t))\alpha t^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty h(u)\alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u\,,$$

   où on a utilisé le changement de variable $u = \ln(t)$ dans la dernière égalité. Ainsi, Y admet la densité $u \mapsto \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha u}\,\mathbb{1}_{]0,\infty[}(u)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, donc Y suit une loi exponentielle de paramètre α.