Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2022-2023

HAX506X - Théorie des probabilités

Examen terminal - 03/01/2023

Durée : 2h.
Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Rappels.

1. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi normale centrée réduite vaut
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] = \mathrm{e}^{-t^2/2}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
2. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est croissante sur $[0, \infty[$.
3. Critère de Bertrand. La série à termes positifs
$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 1 - Questions de cours.

1. Énoncer la loi forte des grands nombres.
2. Donner la définition de la convergence en loi.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} X_k\,, \quad n \geq 1\,.$$

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la loi forte des grands nombres.
2. Pour tout $k \geq 1$, donner la loi de $\sqrt{k} X_k$.
3. En déduire la loi de Y_n, puis la fonction caractéristique φ_{Y_n} de Y_n.
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi à préciser.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. En déduire que

$$\sqrt{\frac{3}{2n}}\, S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z\,,$$

   où Z est une variable aléatoire de loi à préciser.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq 0)$.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n a pour loi

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n+1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\,.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.
2. Montrer que

$$\mathbb{E}[S_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(k+1)}\,.$$

3. En déduire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$, puis que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
4. On souhaite montrer que, presque sûrement, la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.
   (a) On considère les événements $A_n = \{X_n \geq n\}$, pour $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1\,.$$

   (b) Montrer l'inclusion d'événements

$$\Big\{(S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}\Big\} \subset \Big\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\} \bigcap \Big\{\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}\,.$$

   (c) En simplifiant la différence $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}$, montrez que

$$\big\{(S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}\big\} \subset \Big\{\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}\,.$$

   (d) Conclure que, presque sûrement, la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.