LICENCE MATHÉMATIQUES

OPTIMISATION - HAX606X - 2023/2024

TD 3 - MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère un nuage de points $\{(t_i, x_i)\}_{1\leq i\leq N}$ et on cherche à mettre en oeuvre une régression parabolique : on cherche la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = at^2 + bt + c$, où a, b, et c sont trois réels à déterminer, tels que la somme sur tous les indices i du carré de la distance du point (t_i, x_i) au point de même abscisse sur $\mathcal{P}$ soit minimale.

(1) Ecrire ce problème comme un problème de minimisation quadratique :

$$\inf_{X\in\mathbb{R}^n} J(X) \qquad \text{avec} \qquad J(X) = \frac{1}{2}(AX, X) - (b, X) + c, \qquad (P)$$

avec $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. On devra expliciter n, A, b, c. On utilisera la notation

$$S_k = \sum_{i=1}^{N} t_i^k.$$

(2) On suppose que A est définie positive. Montrer que (P) possède une unique solution.

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par $f(x) = x^3$. L'espace $E = C^0([-1, 1])$ est muni du produit scalaire définie par

$$(h, g) = \int_{-1}^{1} h(x)g(x)\,dx,$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On souhaite déterminer le polynôme P de degré inférieur ou égal à 1 qui approche le mieux f au sens des moindres carrés, c'est à dire qui minimise $\|f - P\|^2$ parmi tous les polynômes de $\mathbb{R}^1[X]$ (sous réserve qu'il existe et soit unique).

(1) Mettre ce problème sous la forme d'un problème de moindres carrés de dimension finie. Quelle est cette dimension ?

(2) Étudier l'existence/l'unicité des solutions de ce problème.

(3) Résoudre ce problème.

Exercice 3. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $c \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} \psi & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}, \\ & & x & \mapsto & \|Bx - c\|^2, \end{array}$$

où $\|.\|$ est la norme euclidienne.

(1) Montrer que ψ est convexe,

(2) Montrer que si B est injective, il existe $\alpha > 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|Bx\| \geq \alpha \|x\|,$$

(3) En déduire que si B est injective, alors ψ est coercive,

(4) Montrer que si ψ est minorée et atteint son minimum (dans le cas où B n'est pas injective, on pourra introduire un supplémentaire de $\mathrm{Ker} B$,

(5) Montrer que ψ est de classe C^1. Calculer sa dérivée, et donner l'équation vérifiée par $\bar{x}$ le minimum de ψ.