

TD IV : Intégration pour quelques mesures particulières

1 Intégration et mesure produit

Exercice 1. L'aire sous la courbe

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable positive, et soit $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$. Montrer que V est une partie mesurable de \mathbb{R}^2 , et calculer $\lambda_2(V)$.

Exercice 2. On considère, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, la mesure de Lebesgue λ_1 et la mesure $\mu = \delta_1 + \sqrt{2}\delta_2$. On note $\rho = \lambda_1 \otimes \mu$, mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Déterminer $\rho(D)$ dans les cas suivants :

1. $D = [-a, a]^2$, où $a > 0$.
2. D est le disque euclidien fermé de rayon 2 et de centre $(0, 0)$.

Exercice 3. Dans chacun des cas suivants, calculer $\int_D f(x, y) d\lambda_2(x, y)$.

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $f(x, y) = xy$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1 \text{ et } \frac{1}{x} \leq y \leq x\}$ et $f(x, y) = \frac{1}{x^2 y}$.

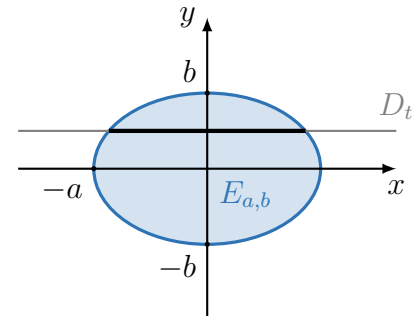
Exercice 4. Volume d'un ellipsoïde

Dans ce qui suit, λ_2 et λ_3 désignent les mesures de Lebesgue de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 .

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Dans le plan \mathbb{R}^2 , le domaine elliptique d'axes a et b est $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $D_t \subset \mathbb{R}^2$ la droite d'équation $y = t$. Déterminer la longueur $\ell(t)$ du segment $E_{\cdot, t} = E \cap D_t$.

En déduire $\lambda_2(E)$ en fonction de a et b .



2. Dans \mathbb{R}^3 on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $P_t \subset \mathbb{R}^3$ le plan d'équation $z = t$.

Montrer que $F \cap P_t$ est un domaine elliptique et déterminer ses axes. En déduire $\lambda_3(F)$.

2 En probabilité

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit X une variable aléatoire positive sur Ω et x, p des réels strictement positifs. Montrer l'**inégalité de Markov** : $\mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{\mathbb{E}(X^p)}{x^p}$.
2. En déduire l'**inégalité de Chernov** : pour toute variable aléatoire X sur Ω et tout réel $\lambda > 0$ on a $\mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\lambda x} \mathbb{E}(e^{\lambda X})$.

3 Intégrales à paramètre

Exercice 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{n}{nk^2 + k + 1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2} \left(\frac{k}{k+1} \right)^n$.

On pourra regarder la vidéo <https://www.youtube.com/watch?v=851U557j6HE> sur les intégrales de Borwein. **Exercice 7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \sin x e^{-xy}$.

1. Montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, mais que, pour tout $T > 0$, f est intégrable sur $[0, T] \times [0, +\infty[$.
2. En utilisant le théorème de Fubini, calculer l'intégrale (au sens de Riemann) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Exercice 8. On considère \mathbb{R}_+ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1 , et on note $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, t) = \frac{\ln(1 + xt^2)}{1 + t^2}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on note $F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x, t) d\lambda_1(t)$.

1. Montrer que F est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+ (on pourra commencer par montrer la continuité sur $[0, a]$, où $a > 0$).
2. Montrer que F est C^1 sur \mathbb{R}_+^* et exprimer F' comme une intégrale dépendant d'un paramètre.
3. Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$ (pour $x \neq 1$ fixé, on pourra décomposer la fraction rationnelle $t \mapsto \frac{t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}$ en éléments simples). En déduire $F(x)$ pour tout x .

Exercice 9. On considère $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$, et $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Montrer que la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* et que $\int_{\mathbb{R}_+^*} F(x, y) d\lambda_1(y) = 2f(x)$. (On pourra déterminer deux fonctions $a(x)$ et $b(x)$ telles que $F(x, y) = \frac{a(x)}{1+y} + \frac{b(x)}{1+x^2y}$.)
2. Montrer que f se prolonge par continuité à \mathbb{R}_+^* et que $f \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$. On note $I = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x) d\lambda_1(x)$.

Justifier que $J = \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} F(x, y) d\lambda_2(x, y)$ est bien définie. En calculant J de deux façons différentes, montrer que $I = \frac{\pi^2}{4}$.

3. Montrer que $I = 2 \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$. En déduire, à l'aide des questions précédentes, que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, puis que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4 Pour s'entraîner

Exercice 10. Soit $X = [1, +\infty[$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1 .

1. Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = ne^{-nx}$ est simplement convergente sur X . On pose, pour tout $x \in X$, $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$.
2. Justifier que f est borélienne sur X et calculer $\int_X f d\lambda_1$.

Exercice 11. On considère \mathbb{R} muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1 . Pour tout $n \geq 1$, soit f_n la fonction définie sur \mathbb{R} par $f_n(t) = \frac{n}{t^2+n^2}$.

1. Montrer que les fonctions f_n sont mesurables et calculer $\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1$ pour tout $n \geq 1$.
2. Calculer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la limite de la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda_1)_{n \in \mathbb{N}}$. Expliquer pourquoi ce résultat ne contredit pas les théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée.

Exercice 12.

1. Montrer que $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel $x \geq -n$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p dx = p!$.
3. Soit $b > 1$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-bx} d\lambda_1(x)$.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, calculer $\int_D f(x, y) d\lambda_2(x, y)$.

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 1\}$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 2, \text{ et } 0 \leq xy \leq \frac{\pi}{2}\}$ et $f(x, y) = \cos(xy)$.

Exercice 14. Extrait d'un sujet d'examen

On considère $[0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ_1 , et on note

$f : \mathbb{R}_+ \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ et $F : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_{[0,1]} f(x, t) d\lambda_1(t)$.

1. Montrer que F est bien définie. Calculer $F(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
2. Montrer que F est dérivable sur \mathbb{R}_+ et exprimer sa dérivée.
3. On note $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $G(x) = \left(\int_0^x e^{-s^2} ds\right)^2$.
 - (a) Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+ et que $F'(x) + G'(x) = 0$.
 - (b) Dédire de ce qui précède la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} d\lambda_1(s)$.

Exercice 15. Extrait d'un contrôle continu

Soit μ une mesure borélienne finie sur \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on note

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} d\mu(x)$$

La fonction ϕ s'appelle la **transformée de Fourier** de la mesure μ . Par ailleurs, on note $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$K(y) = \begin{cases} \frac{\sin(y)}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction ϕ est continue et bornée sur \mathbb{R} .
2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{iat} \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} K(n(a-x)) d\mu(x).$$

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n e^{iat} \phi(t) dt$. En déduire que, si ϕ est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R} , alors la mesure μ est diffuse (c'est à dire que $\forall a \in \mathbb{R} \quad \mu(\{a\}) = 0$).