UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **L3 Mathématiques**
HAX502X **Année 2023-2024**
Calcul différentiel et équations différentielles

DM pour le 4 décembre

discussions entre étudiants encouragées

rédaction individuelle soignée requise

l'investissement dans les TD sera pris en compte dans la note.

On considère la fonction $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Psi(u, v) = (u, (u^2 + 1)v)$$

1. Montrer que Ψ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

On cherche les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$(x^2 + 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2xy\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1}$$

Soit f une telle fonction. On considère alors $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(u, v) = f(u, (u^2 + 1)v)$$

2. Calculer $\frac{\partial F}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial F}{\partial v}(u, v)$ en fonction des dérivées partielles de f. En déduire une équation aux dérivées partielles vérifiée par F.

3. En déduire, en justifiant proprement, que f est de la forme

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x^2 + 1}\right), \tag{2}$$

   où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

4. Réciproquement, vérifier qu'une fonction f de la forme (2) est une solution de (1).
