Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année universitaire 2023-2024

HAX506X - Théorie des probabilités
Feuilles de TD

- Chaque feuille de TD est composée de trois ou quatre exercices et correspond à une séance d'1h30.
- Les exercices sont à préparer à l'avance chez vous.
- Les exercices **Pour aller plus loin** sont des exercices d'approfondissement d'un niveau de difficulté supérieur aux autres. Ils ne seront pas corrigés pendant les séances. Il n'est pas nécessaire de les préparer à l'avance. De même, la feuille **Intermède** est à traiter uniquement si vous souhaitez approfondir les notions du cours. Elle ne sera pas corrigée en TD.
- Après chaque TD, un corrigé sera disponible sur la page Moodle du cours.

Nicolas Meyer

`nicolas.meyer@umontpellier.fr`

TD 1 - Espaces probabilisés

Exercice 1

1. Soit Ω un ensemble muni d'une tribu $\mathcal{F}$ et $x \in \Omega$. Montrer que $\delta_x : A \mapsto \delta_x(A) = \mathbb{1}_A(x)$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
2. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels dans $[0,1]$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{P}_n$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue $\lambda(I)$ finie et strictement positive. Montrer que $\mathbb{P} : A \mapsto \frac{\lambda(A)}{\lambda(I)}$ définit une probabilité sur $(I, \mathcal{B}(I))$.
4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré (pas forcément de probabilité) et $f : \Omega \to [0, \infty[$ une fonction mesurable telle que $\int_\Omega f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = 1$. Montrer que l'application $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ définie par
$$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega f(\omega)\mathbb{1}_A(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$
est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exercice 2 On considère la mesure $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par
$$\mathbb{P} = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{]0,2[}(x)\lambda\,,$$
où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

On peut imaginer que cette mesure représente le temps d'attente à un carrefour composé de trois feux tricolores, chaque feu restant au vert pendant une minute.

1. Montrer que $\mathbb{P}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\mathbb{P}([a,b])$ pour tout $0 \leq a < b \leq 2$.
3. Déterminer $\int_\mathbb{R} h(x)\,\mathrm{d}\mathbb{P}(x)$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive.

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Soit A et B deux événements.
   (a) Montrer que
   $$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))\,.$$
   (b) On considère le lancer d'un dé équilibré. Proposer un exemple d'événements A et B (d'intersection non vide) pour lequel l'inégalité de gauche est une égalité. Même question pour l'inégalité de droite.

2. Montrer que si $A_1, \dots, A_n$ sont n événements, alors

$$\mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1) \leq \mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \leq \min_{i=1,\dots,n} \mathbb{P}(A_i)\,.$$

Pour aller plus loin

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable. Pour $x \in \Omega$ on définit l'atome de x par

$$A(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}\,:\, x \in A} A\,.$$

1. Rappeler pourquoi l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ formé des parties de $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.
2. Montrer que les $A(x)$ sont soit égaux soit disjoints.
3. Supposons que $\mathcal{F}$ soit au plus dénombrable. Montrer que $\mathcal{F}$ contient ses atomes puis que chaque élément de $\mathcal{F}$ est une réunion au plus dénombrable d'atomes. En déduire que $\mathcal{F}$ n'est pas infini dénombrable.

Ceci montre donc qu'une tribu est soit finie, soit non dénombrable.

TD 2 - Variables aléatoires

Exercice 1 On tire deux fois avec remise dans une urne contenant trois boules numérotées $1, 2, 3$. On désigne par X la somme des résultats obtenus. Montrer que X est une variable aléatoire discrète entre un espace probabilisé et un espace mesurable à déterminer. Donner la loi de X.

Exercice 2 On suppose que la basketteuse française Marine Johannès a une probabilité 0.8 de marquer un lancer franc.

1. Lors d'un entraînement, elle tente une série de 10 lancers francs. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de paniers marqués.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannès marque huit paniers ou plus.
   (c) Donner l'espérance et la variance de X.
2. Lors d'un autre entraînement, Marine Johannès décide de tirer jusqu'à ce qu'elle inscrive un panier. On désigne par Y la variable aléatoire donnant le nombre d'essais nécessaires.
   (a) Donner la loi de Y.
   (b) Déterminer la probabilité que Marine Johannès ait besoin de strictement plus de 3 essais pour marquer son premier panier.
   (c) Donner l'espérance et la variance de Y.

Exercice 3 On tire deux cartes dans un jeu de 52 cartes. On considère le vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$ où X_1 donne le nombre de cartes rouges tirées et X_2 le nombre de cartes noires.

1. Quelles valeurs peut prendre le vecteur X ?
2. Déterminer la loi de X.

Pour aller plus loin

On dit qu'une variable aléatoire réelle positive X est sans mémoire si pour tout $s, t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t + s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)\,.$$

Montrer que les seules variables aléatoires sans mémoire sont les variables aléatoires de loi exponentielle et la variable aléatoire constante égale à 0.

TD 3 - Moments d'une variable aléatoire

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire discrète de loi $\mathbb{P}_X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \delta_{x_k}$, avec (x_k) une suite de réels et p_k des réels positifs qui somment à 1.

1. Déterminer, sous réserve d'existence, la valeur de $\mathbb{E}[X^p]$ pour tout entier p.
2. En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[X]$ pour X suivant respectivement une loi de Bernoulli, binomiale, et de Poisson.

Exercice 2

1. Calculer les moments à tout ordre d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pourra commencer par le cas $\lambda = 1$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle positive. À l'aide du théorème de Fubini, montrer que pour tout entier k,
$$\mathbb{E}[X^k] = k \int_0^{\infty} t^{k-1} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t\,.$$
3. En déduire la relation $\Gamma(k) = (k-1)!$ pour tout entier $k \geq 1$, où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler :
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\,, \quad x > 0\,.$$

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Comparer la probabilité
$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geq c\sigma)$$
donnée dans la table avec les majorations obtenues par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour
$$c = 0.5\,, \quad c = 1\,, \quad c = 1.5\,, \quad c = 2\,, \quad c = 2.5\,.$$

Pour aller plus loin

Le théorème de Weierstrass dit que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales (et l'énoncé se généralise alors à un segment $[a,b]$ quelconque). On souhaite démontrer ce résultat avec la théorie des probabilités en explicitant une suite de fonctions polynomiales.

Soit donc $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. On se fixe $x \in [0,1]$ et on considère une variable aléatoire $B_n(x)$ de loi binomiale de paramètre n et x.

1. Que vaut $\mathbb{E}[f(\frac{B_n(x)}{n})]$?
2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que
$$\Big|\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{B_n(x)}{n}\Big)\Big] - f(x)\Big| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}\Big(\Big|\frac{B_n(x)}{n} - x\Big| \geq \delta\Big) + \epsilon\,.$$
3. Conclure grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

TD 4 - Fonctions associées à une variable aléatoire

Exercice 1 Rappeler la définition de la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X et calculer φ_X dans les cas suivants.

1. X suit une loi uniforme sur $[a, b]$.
2. X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
3. X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
4. X suit une loi normale centrée réduite. On pourra dériver (en justifiant) la fonction caractéristique φ_X puis, après une intégration par parties, en déduire que φ_X est solution d'une équation différentielle que l'on résolvera.

Exercice 2 Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

1. Calculer la fonction de répartition de $-X$ en fonction de celle de X. Qu'en déduit-on ?
2. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y en fonction de celle de X. En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, puis calculer $\mathbb{E}[Y]$.
3. Reprendre la question précédente avec cette fois-ci $Z = \exp(X)$.

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ de fonction génératrice

$$G_X(s) = \alpha(3 + 2s^2)^3 , \quad s \in [0, 1] .$$

1. Déterminer la valeur de α.
2. Déterminer la loi de X.
3. À partir de G_X, donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X.

Pour aller plus loin

Vous disposez de deux dés et vous souhaitez truquer les dés de sorte que la somme des résultats soit uniformément distribuée sur $\{2, \dots, 12\}$. Est-ce possible ? On pourra utiliser les fonctions génératrices.

TD 5 - Calcul de lois

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ. On pose $Y = \lfloor X \rfloor + 1$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x. Déterminer la loi de Y.

Exercice 2

1. Déterminer la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli, de la loi binomiale, et de la loi de Poisson. Rappeler également (sans calcul) la fonction caractéristique de la loi normale.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.
3. (a) On considère deux variables aléatoires $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$.
   (b) Montrer que la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale de paramètres n et p.
   (c) Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi de Poisson de paramètre respectif λ et μ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 3 On considère deux variables aléatoires indépendantes $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$.

1. On pose $T = X^2$. Calculer $\mathbb{E}[h(T)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire la loi de T.

   On pourra vérifier qu'on retrouve bien le résultat de l'exercice 2 du TD 4.
2. On pose $U = \mathbb{1}_{\{X \geq 0\}} - \mathbb{1}_{\{X < 0\}}$. Déterminer la loi de U.
3. Montrer que $Z = UY$ suit une loi normale de paramètres à déterminer.
4. Déterminer la loi de $Y + Z$.

Pour aller plus loin

On considère une succession de lancers d'une pièce ayant une probabilité p de donner pile et on note X (resp. Y) la longueur de la première (resp. deuxième) série de lancers identiques. Par exemple, si les lancers donnent $FFFFPPFP\ldots$, alors $X = 4$ et $Y = 2$.

Déterminer la loi du couple (X, Y). En déduire la loi de X, la loi de Y, puis $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$. Comparer ces deux espérances.

TD 6 - Conditionnement et indépendance

Exercice 1 On souhaite transmettre un message d'un point à un autre à travers des canaux successifs. Ce message peut prendre deux valeurs : 0 ou 1. Au passage de chaque canal, le message a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être bruité, c'est-à-dire d'être transformé en son contraire, et $1-p$ d'être transmis fidèlement. Les canaux de transmission sont indépendants les uns des autres.

1. On considère l'événement A_n : "après le canal n, le message est identique au message initial", et on note p_n sa probabilité. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et p. Que vaut p_1 ?
2. On définit la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par $x_n = p_n - \frac{1}{2}$. Vérifier que cette suite est géométrique. En déduire une expression pour p_n.
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 2 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre respectif λ et μ.

1. Rappeler la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X > t)$, pour tout réel t. En déduire la fonction de répartition puis la loi de $Z = \min(X, Y)$.
4. Soit $t \geq 0$. Montrer que les événements $\{X \leq Y\}$ et $\{Z > t\}$ sont indépendants.

Exercice 3 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité respective f_X et f_Y. Montrer que la variable aléatoire $\max(X, Y)$ admet une densité à déterminer.

Pour aller plus loin

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ de sorte qu'il existe $c > 0$ tel que $X + Y$ et cX ont même loi.

1. Déterminer c, puis $\mathbb{E}[X]$, puis un développement limité à l'ordre 2 en 0 de φ_X.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_X(t) = \left[\varphi_X\left(\frac{t}{2^{n/2}}\right)\right]^{2^n},$$

   puis conclure que X suit une loi normale.

On dit qu'une loi μ est stable si la somme de deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi μ suit encore, à un facteur multiplicatif près, la loi μ. Cet exercice montre que les lois stables de carré intégrable sont les lois normales.

TD 7 - Lemme de Borel-Cantelli et loi du 0-1

Exercice 1 On considère l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ est la mesure de Lebesgue, et on pose $A_n =]0, 1/n]$ pour tout entier $n \geq 1$.

1. Expliciter l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$.
2. Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Commenter.

Exercice 2 On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée et on considère un entier $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtiendra une infinité de fois k Pile consécutifs.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$. Montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)$ converge est dans la tribu terminale de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. En déduire que cet événement est certain ou impossible.

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_n = -1)$, avec $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on considère l'événement $A_n = \{S_n = 0\}$.

1. Déterminer la probabilité de A_n. On pourra distinguer suivant la parité de n.
2. À l'aide de la formule de Stirling, déterminer un équivalent de $\mathbb{P}(A_{2n})$.
3. On pose $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Que représente cet événement ? Déterminer $\mathbb{P}(A)$ dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$.
4. On suppose maintenant que $p = \frac{1}{2}$. On va montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.
   (a) Expliquer pourquoi le lemme de Borel-Cantelli ne s'applique pas.
   (b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $k \geq 1$, les vecteurs aléatoires $(X_{k+1}, \ldots, X_{k+n})$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ ont la même loi.
   (c) On rappelle que $A = \limsup_{n\to\infty} A_n$. Montrer que
   $$A^c = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{S_k = 0 \text{ et } \forall n \geq 1,\ S_{n+k} \neq 0\}.$$
   et que cette union est formée d'événements disjoints.
   (d) En déduire que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Pour aller plus loin

Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$, au sens où $\mathbb{P}(n\mathbb{N}) = 1/n$ pour tout $n \geq 1$. On pourra considérer les événements $p\mathbb{N}$, où p est un nombre premier.

TD 8 - Convergence de variables aléatoires

Exercice 1

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si la série $\sum \mathbb{P}(|X_n| \geq \epsilon)$ est convergente pour tout $\epsilon > 0$.
2. On suppose maintenant X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n.
   (a) Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $p_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (b) Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 dans L^p si et seulement si $p_n \to 0$ quand $n \to \infty$.
   (c) On suppose que les X_n sont indépendantes. Montrer que la suite (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si la série $\sum p_n$ converge.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_n \sim \mathcal{E}(n)$. Montrer que $X_n \to 0$ presque sûrement. Y a-t-il convergence dans L^p ?

Exercice 2 Soit $\alpha > 0$. On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(Y_n)_{n\geq 1}$ de loi de Bernoulli de paramètre $n^{-\alpha}$. Montrer que $Z_n \to 0$ dans L^1 mais que

— si $\alpha \leq 1$, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} Z_n = 1) = 1$,

— si $\alpha > 1$, $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} Z_n = 0) = 1$.

On pourra considérer les événements $A_n = \{Z_n = 1\}$.

Pour aller plus loin

Soit $n \geq 1$ et $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1, \ldots, n\}$. On pose

$$T_n = \inf\{m \geq 1 : \{X_1, \ldots, X_m\} = \{1, \ldots, n\}\}.$$

et

$$\tau_n(k) = \inf\{m \geq 1 : \#\{X_1, \ldots, X_m\} = k\}.$$

L'objectif de l'exercice est de déterminer le comportement asymptotique de T_n quand n est grand. Cet exercice est appelé *problème du collectionneur*. Expliquer pourquoi (cela vous aidera en particulier à mieux appréhender les variables aléatoires T_n et $\tau_n(k)$). Pour simplifier les calculs, on pose $\tau_n(0) = 0$.

1. Montrer que les variables aléatoires $(\tau_n(k) - \tau_n(k-1))_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes et que $\tau_n(k) - \tau_n(k-1)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \frac{k-1}{n}$.

2. Exprimer T_n en fonction des différences $\tau_n(k) - \tau_n(k-1)$, puis déterminer $\mathbb{E}[T_n]$ et enfin montrer que
$$\mathrm{Var}(T_n) \leq Cn^2\,,$$
où $C > 0$ est une constante.

3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que
$$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \epsilon n \ln(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,,$$
puis en déduire que $T_n/(n\ln(n)) \to 1$ en probabilité.
On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ *quand* $n \to \infty$.

Intermède : convergence presque sûre

Cet exercice particulièrement long est à traiter uniquement si les notions de convergence de variables aléatoires sont bien maîtrisées. Il ne sera pas corrigé en TD. Il faut le voir comme un devoir maison (qui n'est pas à rendre) sur lequel on passe un peu de temps et qui permet de prendre du recul sur les concepts étudiés en CM et TD. Il permet aussi de se rendre compte qu'établir la convergence presque sûre est en général compliqué.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n.
2. En déduire que $M_n/\ln(n)$ converge vers 1 en probabilité.
3. On veut montrer que la convergence a en fait lieu presque sûrement. Pour cela on se fixe $\epsilon \in]0,1[$ et on va montrer que presque sûrement

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \geq 1-\epsilon \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \leq 1+\epsilon\,.$$

Attention à bien comprendre la première inégalité au sens de "la limite inférieure de la suite de variables aléatoires $\frac{M_n}{\ln(n)}$ est plus grande que $1-\epsilon$" (et idem pour la deuxième inégalité). En particulier, il n'est pas question de limite inférieure d'événements, même si de tels objets vont apparaître au cours de l'exercice.

(a) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq (1-\epsilon)\ln(n)) = \exp(-n^{\epsilon} + o(n^{\epsilon}))$.

(b) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que

$$\mathbb{P}\Big(\liminf_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \geq 1-\epsilon\Big) = 1\,.$$

(c) Montrer que $\mathbb{P}(M_n > (1+\epsilon)\ln(n)) = n^{-\epsilon} + o(n^{-\epsilon})$. Est-ce suffisant pour conclure ?

(d) Montrer que $\mathbb{P}(M_{2^k} > (1+\epsilon)\ln(2^k)) = 2^{-k\epsilon} + o(2^{-k\epsilon})$. En déduire que

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{k\to\infty} \frac{M_{2^k}}{\ln(2^k)} \leq (1+\epsilon)\Big) = 1\,.$$

On a donc l'inégalité voulue pour la limite supérieure mais uniquement le long d'une sous-suite de la forme 2^k.

(e) En déduire que

$$\mathbb{P}\Big(\limsup_{n\to\infty} \frac{M_n}{\ln(n)} \leq (1+\epsilon)\Big) = 1\,.$$

(f) Conclure que $M_n/\ln(n) \to 1$ presque sûrement.

TD 9 - Loi des grands nombres

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Montrer que la suite de terme général

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \, \mathrm{e}^{X_k}$$

converge presque sûrement lorsque n tend vers l'infini vers une limite que l'on précisera.

Exercice 2 On considère une suite de lancers d'un dé équilibré et on désigne par X_k le résultat du k-ème lancer.

1. On note Y_n la variable aléatoire donnant le plus grand résultat observé au cours des n premiers lancers. Étudier la convergence de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$.
2. On note N_n la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus lors des n premiers lancers. Étudier la convergence de la suite $(N_n/n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3 On suppose que le sexe d'un nouveau-né est équiréparti entre fille et garçon. Un pays propose la politique de natalité suivante : tous les couples ont des enfants jusqu'à obtenir une fille.

1. Soit X le nombre d'enfants d'un couple pris au hasard dans la population. Donner la loi de la variable aléatoire X et son espérance.
2. On considère une génération en âge de procréer constituée de n couples et on note $X_1, \dots, X_n$ le nombre d'enfants respectifs de chaque couple. On désigne par P_n la variable aléatoire donnant la proportion de filles issus de cette génération. Exprimer P_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$, puis déterminer la limite de P_n quand n tend vers l'infini. La politique de natalité du pays a-t-elle un effet ?

Pour aller plus loin

On considère une suite iid $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles et on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. En utilisant le théorème de Fubini, montrer que pour toute variable aléatoire positive Y

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geq t)\,\mathrm{d}t\,,$$

puis en déduire que

$$\mathbb{E}[|X_1|] \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq n)\,.$$

2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable, alors la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ diverge presque sûrement.

TD 10 - Convergence en loi

Exercice 1

1. Rappeler la définition de la convergence en loi, puis sa caractérisation via les fonctions caractéristiques et les fonctions de répartition (dans le cas de variables aléatoires réelles).
2. On suppose que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$, avec (X_n) et X des variables aléatoires réelles. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, a-t-on $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} f(X)$?
3. Donner un exemple de variables aléatoires telles que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ mais $\mathbb{E}[X_n]$ ne converge pas vers $\mathbb{E}[X]$.

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{k/n,\ 1 \leq k \leq n\}$. Montrer de trois manières différentes que X_n converge en loi vers une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 3 Pour tout entier n on considère la variable aléatoire T_n de loi géométrique de paramètre λ/n, avec $\lambda > 0$ fixé. Montrer que T_n/n converge en loi vers une limite à déterminer.

Exercice 4 Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de M_n, puis celle de X_n.
2. Étudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Pour aller plus loin

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires réelles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$ avec $\lambda_n \to 0$. On pose $Z_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$. Étudier la convergence en loi de la suite $(Z_n)_{n\geq 1}$.

TD 11 - Différents modes de convergence et théorème central limite

Exercice 1

1. Rappeler les quatre modes de convergence vus en cours, leurs implications, et réciproques (sous certaines hypothèses) éventuelles. On se restreindra au cas de variables aléatoires réelles.
2. Énoncer le théorème central-limite. On écrira la convergence en loi qui apparaît dans le théorème avec la définition puis avec la caractérisation via les fonctions de répartition.

Exercice 2 Pour tout entier $n \geq 1$ on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1. Montrer que f_n est une densité pour tout entier $n \geq 1$.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires telle que X_n admet pour densité f_n. Les variables aléatoires X_n admettent-elles des moments ?
3. Étudier la convergence en loi, puis la convergence en probabilité de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 3 On considère deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ définies sur le même espace probabilisé et qui convergent en loi respectivement vers les variables aléatoires X et Y.

1. On suppose que pour tout $n \geq 1$, X_n est indépendant de Y_n et que X est indépendant de Y. Montrer que $X_n + Y_n$ converge en loi vers $X + Y$.
2. On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $X_n = X + \frac{1}{n}$ et $Y_n = (1 - X) - \frac{1}{n}$. Montrer que X_n et Y_n convergent respectivement en loi vers X et Y, mais que $X_n + Y_n$ ne converge pas vers $X + Y$.

Exercice 4 Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite iid de variables aléatoires telle que

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2\,.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite de $\mathbb{P}(S_n \geq 0)$ quand $n \to \infty$.

Pour aller plus loin

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ayant toutes la même espérance μ et la même variance σ^2. On suppose que $\mathrm{Cov}(X_n, X_k) \leq 0$ pour tout $n \neq k$. Montrer que la suite (X_n) vérifie la loi faible des grands nombres. On pourra étudier la convergence dans L^2 de $\bar{X}_n$.

TD 12 - Théorème central limite

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer la fonction caractéristique d'une loi de Poisson de paramètre 1.
2. En déduire que la variable aléatoire S_n suit une Poisson de paramètre n et calculer $\mathbb{E}[S_n]$.
3. À l'aide du théorème central limite, déterminer la limite de $\mathbb{P}(S_n/n \leq 1)$.
4. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}, \quad n \geq 1\,.$$

Exercice 2 Après une soirée arrosée, vous vous retrouvez au milieu de la rue de la Loge, en plein centre-ville de Montpellier, mais vous êtes incapable de savoir quelle direction prendre pour rentrer chez vous. Vous errez donc dans la rue en parcourant un pas d'un mètre dans un sens ou dans l'autre de manière aléatoire. Au bout de 100 pas, dans un rayon de combien de mètres autour de votre point de départ allez-vous vous trouver avec 90% de chances ?

Exercice 3 Avant une élection, un institut de sondage contacte des individus pour connaître leur intention de vote entre deux candidats A et B. On suppose que les appels sont indépendants et que chaque individu répond qu'il va voter A avec une probabilité p_A (et donc B avec une probabilité $1-p$). Le but est d'étudier le paramètre inconnu p_A du modèle. Soit n le nombre de réponses en faveur de A collectées en n appels.

1. Exprimer Z_n comme une somme de variables aléatoires iid de loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre.
2. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(Z_n/n)_{n\geq 1}$.
3. Soit $\delta > 0$ un paramètre (petit). En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner un intervalle aléatoire (appelé intervalle de confiance) $I = I(Z_n, \delta)$ pour p_A, c'est-à-dire un intervalle tel que

$$\mathbb{P}(p_A \in I) \geq 1 - \delta\,.$$

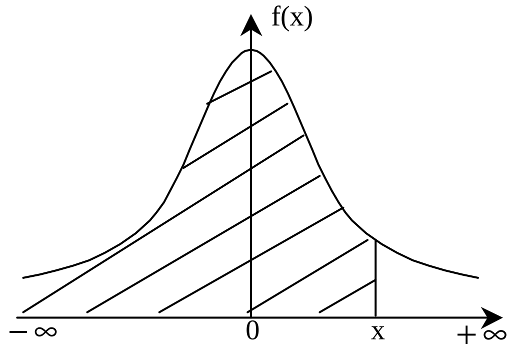
   On prendra garde au fait que I ne doit pas dépendre de p_A qui est inconnu.
4. Répondre à la question en utilisant cette fois-ci le théorème central limite.

Pour aller plus loin

Quel est le nombre minimum de lancers nécessaires d'une pièce équilibrée pour que la fréquence de Pile soit comprise entre 0.4 et 0.6 avec une probabilité de 0.95 ?

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2p}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921