LICENCE MATHÉMATIQUES
OPTIMISATION - HAX606X - 2023/2024

TD 2 - OPTIMISATION SANS CONTRAINTES

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$x^T A x \geq \lambda_1 \|x\|^2$$

Exercice 2. On définit la fonction $J : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$J(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^2.$$

(1) Déterminer les points critiques de J.

(2) Soit $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant l'application

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto J(td_1, td_2),$$

montrer que $(0, 0)$ est un minimum local le long de toute droite passant par $(0, 0)$.

(3) Le point $(0, 0)$ est-il un minimum local de la restriction de J à la parabole d'équation $x = y^2$?

(4) Calculer f''. Quelle est la nature du point critique $(0, 0)$?

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

(1) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ (et les déterminer) tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq \alpha \|(x, y)\|^2 + \beta.$$

(2) Montrer que le problème

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) \qquad (P)$$

possède au moins une solution.

(3) La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$?

(4) Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum local, maximum local , point selle). Résoudre (P).

Exercice 4. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit

$$f_a : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + axy - 2x - 2y.$$

(1) pour quelles valeurs de a la fonction f_a est-elle convexe ? Et strictement convexe ?

(2) discuter en fonction des valeurs du paramètre a de l'existence de solutions au problème d'

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f_a(x, y).$$

(3) lorsque $a \in]-2, 2[$, résoudre ce problème.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \frac{(Ax, x)}{||x||^2}.$$

(1) Montrer que f est C^∞ sur son ensemble de définition.

(2) Montrer que les problèmes d'optimisation
$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x), \qquad et \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(x)$$
possèdent une solution.

(3) Déterminer l'ensemble des points critiques de f.

(4) Résoudre les deux problèmes ci-dessus.

(5) Montrer qu'en un point critique $x^* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, f'' est donnée par
$$f''(x^*) = \frac{2}{||x^*||^2}\Big(A - f(x^*)I_n\Big).$$

(6) En déduire que tout les points critiques qui ne sont pas solution d'un des problèmes au dessus sont des points-selles.