HAX501X – Groupes et anneaux 1

CM11 09/11/2023

Clément Dupont

Polygones réguliers

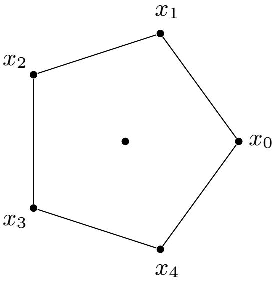
Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On note $P_n \subset \mathbb{R}^2$ l'ensemble formé des n points

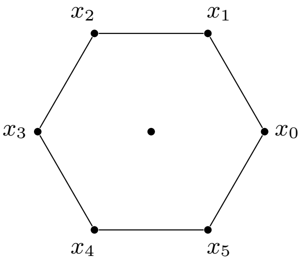
$$x_k = (\cos(2\pi k/n), \sin(2\pi k/n))$$

pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Ce sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Exemple

Voici P_5 et P_6.





Définition du groupe diédral

Définition

Le **groupe diédral** D_n *est l'ensemble des* $f \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ *qui stabilisent* P_n*, c'est-à-dire tels que* $f(P_n) \subset P_n$*.*

- C'est équivalent à $f(P_n) = P_n$ pour des raisons de cardinal, car $f_{|P_n} : P_n \to P_n$ est injective et donc bijective.

Proposition

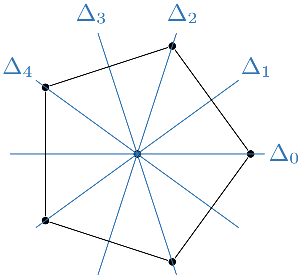
D_n *est un sous-groupe de* $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$*.*

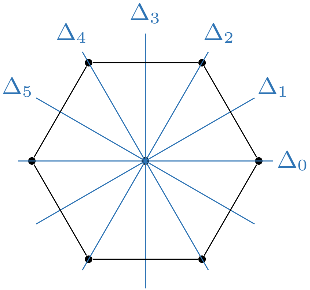
Rotations et réflexions

- Notons r la rotation d'angle $2\pi/n$. C'est clairement un élément de D_n, qui engendre le sous-groupe cyclique à n éléments $C_n = \langle r \rangle \subset D_n$.
- Pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, notons aussi Δ_k la droite qui fait un angle de $\pi k/n$ avec l'axe des abscisses, et s_k la réflexion par rapport à Δ_k. Ce sont aussi des éléments de D_n.

Exemple

Voici, dans les cas $n = 5$ et $n = 6$, les n droites Δ_k.





Les éléments du groupe diédral

Proposition

On a

$$D_n \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = C_n = \{\mathrm{id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$$

et

$$D_n \cap \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) = \{s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Par conséquent, D_n est un groupe d'ordre $2n$ et

$$D_n = \{\mathrm{id}, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}.$$

Démonstration.

1) Soit $f \in D_n \cap \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Alors f est une rotation et il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $f(x_0) = x_k$. Donc $f = r^k$.
2) Soit $f \in D_n \cap \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$. Alors f est une réflexion et il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $f(x_0) = x_k$. Alors on a aussi $f(x_k) = x_0$ et donc $f(x_0 + x_k) = x_0 + x_k$. Donc f agit comme id sur la droite $\mathbb{R}(x_0 + x_k) = \Delta_k$, d'où $f = s_k$.

$\square$

Comment calculer dans le groupe diédral

On calcule facilement dans le groupe D_n grâce à une proposition vue plus haut. Pour $0 \leqslant i, j \leqslant n-1$ on a

$$s_i s_j = r^{i-j}$$

et

$$r^i s_j = s_{j+i} \quad \text{et} \quad s_j r^i = s_{j-i}$$

où les indices sont entendus modulo n.

Exemple

- On a $D_1 = \{\mathrm{id}, s_0\}$, qui est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
- On a $D_2 = \{\mathrm{id}, r, s_0, s_1\}$, où s_0 est la réflexion par rapport à l'axe des abscisses, s_1 est la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, et $s_0 s_1 = s_1 s_0 = r = -\mathrm{id}$. On voit facilement qu'on a un isomorphisme de groupes
$$D_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$
- Pour $n \geqslant 3$ le groupe diédral D_n n'est pas abélien, car par exemple $s_0 s_1 \neq s_1 s_0$.

Et des exercices

Exercice 58
Écrire les tables de multiplication des groupes diédraux D_3 et D_4.

Exercice 59
Démontrer que les groupes D_3 et $\mathfrak{S}_3$ sont isomorphes.

Une autre description du groupe diédral

- On note $s = s_0$, la réflexion par rapport à l'axe des abscisses $\mathbb{R}(1,0)$.
- On a vu que $s_k = r^k s$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.

On a donc la proposition suivante :

Proposition

D_n est engendré par r et s, et plus précisément :

$$D_n = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, \ldots, r^{n-1}, s, rs, r^2 s, r^3 s, \ldots, r^{n-1} s\}.$$

- Avec ces notations, on calcule facilement dans D_n en utilisant les relations

$$r^n = \mathrm{id}\ ,\ s^2 = \mathrm{id}\ ,\ sr^k = r^{-k} s.$$

Exemple

Dans D_5 on a

$$(r^2 s)(r^4 s) = r^2 (s r^4) s = r^3 (r^{-4} s) s = r^{-1} = r^4.$$

Une image

- L'action des 16 éléments du groupe diédral D_8 sur un panneau STOP.

4 – Introduction à la théorie des anneaux et des corps

1. Le langage des anneaux et des corps

1.1 Notation additive dans un groupe abélien
1.2 Anneau
1.3 Exemples
1.4 Inversibles
1.5 Corps
1.6 Règles de calcul dans un anneau
1.7 Anneaux intègres
1.8 Produit d'anneaux
1.9 Fonctions à valeurs dans un anneau

Notation additive dans un groupe abélien

Dans la suite on va rencontrer des groupes **abéliens** avec la **notation additive** $(G, +)$. L'élément neutre est noté 0_G et appelé le **zéro** de G, l'inverse d'un élément $x \in G$ est noté $-x$ et appelé l'**opposé** de x. On a les formules :

$$-(-x) = x \qquad \text{et} \qquad -(x + y) = (-x) + (-y).$$

(Noter que pour la dernière on utilise bien le fait que $+$ est commutative.)

On définit la **soustraction** de deux éléments $x, y \in G$ par la formule :

$$x - y = x + (-y).$$

Elle vérifie les règles de calcul habituelles :

$$x + y = z \iff x = z - y.$$

On peut notamment simplifier :

$$x + y = x' + y \iff x = x'.$$

Produit externe par $\mathbb{Z}$

Pour $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}$ on note

$$nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n}$$

avec la convention que $0x = 0_G$. On étend cette opération aux entiers négatifs avec la formule $(-n)x = -(nx)$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a donc donné un sens au **produit externe** nx avec $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in G$. On a les formules usuelles :

$$0x = 0_G\,,\ 1x = x\,,\ (m+n)x = mx+nx\,,\ m(nx) = (mn)x\,,\ n(x+y) = nx+ny.$$

(Noter que pour la dernière on utilise bien le fait que $+$ est commutative.)

> **Remarque**
> Tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un groupe abélien, et dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E on peut plus généralement donner un sens au produit $ax \in E$ pour $a \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, qui vérifie les mêmes formules que ci-dessus. On peut donc dire que $\mathbb{Z}$ joue pour les groupes abéliens le rôle que $\mathbb{R}$ joue pour les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On pourrait dire qu'un groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-espace vectoriel, mais on n'emploie pas cette terminologie car $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. On parle plutôt de $\mathbb{Z}$-**module**.

Morphismes

Dans la notation additive, un **morphisme de groupes** de G vers H est une application $f : G \to H$ qui vérifie

$$\forall x, y \in G,\ f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Elle vérifie alors automatiquement

$$f(0_G) = 0_H \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

On montre facilement que pour tous $x, y \in G$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$f(mx + ny) = mf(x) + nf(y).$$

- On rappelle la notion de noyau d'un morphisme de groupes :

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0_H\}.$$

Sous-groupes

Dans la notation additive, un **sous-groupe** d'un groupe G est un sous-ensemble $H \subset G$ qui vérifie les axiomes suivants :

(1) $0_G \in H$;

(2) H est stable par somme : $\forall x, y \in H,\ x + y \in H$;

(3) H est stable par passage à l'opposé : $\forall x \in H,\ -x \in H$.

- Soit G un groupe et soit H un sous-groupe de G. Alors pour tous $x, y \in H$ et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ on a $mx + ny \in H$. Réciproquement, tout sous-ensemble $H \subset G$ non vide qui vérifie cette propriété est un sous-groupe de G.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit G un groupe abélien et soient $x_1, \dots, x_r \in G$.

- Le sous-groupe de G engendré par $x_1, \dots, x_r$ peut être décrit comme l'ensemble des combinaisons $\mathbb{Z}$-linéaires de $x_1, \dots, x_r$:

$$\langle\, x_1, \dots, x_r \,\rangle = \{n_1x_1 + \cdots + n_rx_r,\ n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}\}.$$

- Plus généralement, pour une partie $S \subset G$ quelconque, le sous-groupe de G engendré par S, noté $\langle\, S \,\rangle$, est l'ensemble des combinaisons linéaires **finies** $n_1x_1 + \cdots + n_rx_r$ avec $x_1, \dots, x_r \in S$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$.

Anneau

Définition

Un **anneau** *est un triplet* $(A,+,\times)$ *où* A *est un ensemble et* $+$, $\times$ *sont deux lois de composition internes sur* A *qui vérifient les axiomes suivants :*

(1) $(A,+)$ *est un groupe abélien.*

(2) *Associativité de* $\times$ *:* $\forall x,y,z \in A\,,\ (x\times y)\times z = x\times(y\times z)$ *(qu'on peut donc noter* $x\times y\times z$*).*

(3) *Élément neutre pour* $\times$ *: il existe un élément* $1_A \in A$ *tel que* $\forall x \in A\,,\ x\times 1_A = x = 1_A \times x$. *On l'appelle le* **un** *de l'anneau.*

(4) *Distributivité de* $\times$ *par rapport à* $+$ *:* $\forall x,y,z \in A$, $x\times(y+z) = x\times y + x\times z$ *et* $(x+y)\times z = x\times z + y\times z$.

Exercice 60

Montrer que l'élément neutre 1_A est unique.

Définition

Un anneau $(A,+,\times)$ *est* **commutatif** *si la multiplication est commutative, c'est-à-dire si :* $\forall x,y \in A\,,\ x\times y = y\times x$.

Remarque

Quand il n'y a pas d'ambiguïté on écrit simplement A pour $(A,+,\times)$, 0 pour 0_A et 1 pour 1_A, afin d'alléger les notations. On utilise aussi la notation habituelle $xy = x \times y$.

On utilise tout le temps les formules de l'exercice suivant.

Exercice 61

Soit $(A,+,\times)$ un anneau.

- Montrer qu'on a $x \times 0_A = 0_A = 0_A \times x$ pour tout $x \in A$.
- Montrer qu'on a $(-x) \times y = -(x \times y) = x \times (-y)$ pour tous $x, y \in A$.
- Montrer qu'on a $(-1_A) \times x = -x = x \times (-1_A)$ pour tout $x \in A$.

L'anneau nul

Un exemple trivial d'anneau est l'**anneau nul** $A = \{0\}$. Les lois sont $0 + 0 = 0$, $0 \times 0 = 0$, et 0 est à la fois le neutre pour $+$ et le neutre pour $\times$.

Exercice 62
Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Montrer que si $0_A = 1_A$ alors $A = \{0_A\}$ est l'anneau nul.

Exemples d'anneaux

- Les anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ avec l'addition et la multiplication usuelles.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec l'addition et la multiplication définies au chapitre 2. Le zéro est $\overline{0}$, le un est $\overline{1}$.
- L'anneau des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$, avec l'addition et la multiplication usuelles. Le zéro est le polynôme nul, le un est le polynôme constant 1.
- L'anneau des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, muni de l'addition des suites $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ et du produit des suites $(u_n)(v_n) = (u_n v_n)$. Le zéro est la suite nulle, le un est la suite constante égale à 1.
- L'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, muni de la somme $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ et du produit $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Le zéro est la fonction nulle, le un est la fonction constante égale à 1.

Plus d'exemples d'anneaux

- Les exemples précédents sont commutatifs. Les matrices carrées de taille n forment un anneau $(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$, qui n'est pas commutatif si $n \geqslant 2$. Le zéro est la matrice nulle, le un est la matrice identité I_n.

- Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et notons $\mathrm{End}(V)$ l'ensemble des endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de V. Alors $(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ est un anneau qui n'est pas commutatif si $\dim(V) \geqslant 2$. Le zéro est l'endomorphisme nul, le un est l'endomorphisme identité id_V.

Inversibles

Soit $(A, +, \times)$ un anneau.

- $(A, \times)$ n'est pas un groupe en général, mais c'est un **monoïde** au sens du chapitre précédent. (La multiplication est associative et a un élément neutre.)
- On dit qu'un $x \in A$ est **inversible** dans A s'il est inversible pour $\times$, c'est-à-dire s'il existe $y \in A$ tel que $x \times y = 1_A = y \times x$. Dans ce cas-là y est unique et est noté x^{-1}. On a les formules classiques :
$$(x^{-1})^{-1} = x \quad \text{et} \quad (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$$
- L'ensemble des éléments inversibles de A est noté $A^\times$, et $(A^\times, \times)$ forme un groupe, qu'on appelle le **groupe des inversibles** de A.

Exercice 63
Pour les exemples d'anneaux A qu'on vient de voir, déterminer les groupes des inversibles $A^\times$.

Deux remarques

Remarque

Si A n'est pas commutatif alors il est dangereux de noter $x^{-1} = \frac{1}{x}$. En effet, on serait alors tenté d'utiliser des fractions $\frac{x}{y}$ qui seraient alors ambiguës : on ne pourrait pas faire la différence entre $x \times \frac{1}{y}$ et $\frac{1}{y} \times x$. Dans le cas où A est commutatif, il n'y a pas de danger et on peut se permettre d'écrire des fractions – tant que le dénominateur est inversible évidemment.

Remarque

Si $A \neq \{0\}$ n'est pas l'anneau nul, c'est-à-dire si $0_A \neq 1_A$ (d'après l'exercice 62) alors 0_A n'est pas inversible. En effet, on a vu (dans l'exercice 61) que pour tout $x \in A$ on a $x \times 0_A = 0_A$.

Corps

Définition

Un **corps** *est un anneau $K \neq \{0_K\}$ qui est commutatif et tel que tout élément $x \in K \setminus \{0_K\}$ est inversible.*

On rappelle (voir l'exercice 62) que la condition $K \neq \{0_K\}$ revient à dire que $0_K \neq 1_K$.

Remarque

Une définition équivalente : un corps est un anneau commutatif K qui est tel que $K^\times = K \setminus \{0_K\}$. (Noter que cette condition implique bien que $K \neq \{0_K\}$).

On notera comme d'habitude $K^* = K \setminus \{0_K\}$.

Remarque

On insiste sur le fait que dans un corps la multiplication est par définition commutative. La notion plus générale d'un anneau non nul dans lequel tout élément non nul a un inverse pour la multiplication s'appelle **anneau à division** ou **corps gauche**.

Exemples

Des exemples de corps :

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps.
- Si p est un nombre premier alors $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.
- L'ensemble $\mathbb{R}(X)$ des fractions rationnelles (quotients de polynômes) à coefficients réels est un corps.

Des non-exemples de corps :

- $\mathbb{Z}$ n'est pas un corps car il n'existe pas de $y \in \mathbb{Z}$ tel que $2 \times y = 1$.
- $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un corps car il n'existe pas de $f \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X \times f = 1$.
- Pour $n \geqslant 2$ un nombre composé, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas un corps. En effet, si l'on choisit un diviseur positif $d|n$ avec $d \neq 1$ et $d \neq n$, alors $\overline{d} \neq \overline{0}$ et $\overline{d}$ n'est pas inversible.

Espace vectoriel sur un corps

On rappelle la définition d'un espace vectoriel sur un corps.

Définition

*Soit K un corps. Un K-***espace vectoriel** *(ou* **espace vectoriel sur** *K) est un triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble, $+$ est une loi de composition interne sur E, et . est une loi de composition externe $K \times E \to E$, notée $(a, x) \mapsto a.x$, telles que :*

(1) *$(E, +)$ est un groupe abélien ;*

(2) *Linéarité de la loi . : $\forall a \in K\,, \forall x, y \in E\,, a.(x + y) = a.x + a.y$;*

(3) *Compatibilité à l'addition dans K :*
$\forall a, b \in K\,, \forall x \in E\,, (a + b).x = a.x + b.x$;

(4) *Compatibilité à la multiplication dans K :*
$\forall a, b \in K\,, \forall x \in E\,, (ab).x = a.(b.x)$;

(5) *Compatibilité à l'unité de K : $\forall x \in E\,, 1_K.x = x$.*

Remarque

Les théorèmes classiques d'algèbre linéaire (pivot de Gauss, théorie des bases et de la dimension, existence de supplémentaires, théorème du rang, déterminant des matrices, etc.) sont vrais quel que soit le corps, même si on vous les a peut-être seulement énoncés pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Le langage des anneaux et des corps

Puissances

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On peut définir, pour $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$, la puissance

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n}$$

avec la convention $x^0 = 1_A$. Les propriétés usuelles sont satisfaites : $x^0 = 1_A$, $x^1 = x$, $x^{m+n} = x^m x^n$, $(x^m)^n = x^{mn}$.

Remarque

Attention : on n'a pas en général $(xy)^n = x^n \times y^n$. Par exemple, $(xy)^2 = xyxy$ et $x^2y^2 = xxyy$. Si $xy = yx$ alors on a l'égalité.

Développement

Dans un anneau $(A,+,\times)$ on peut utiliser la compatibilité entre $+$ et $\times$ pour développer comme on a l'habitude, par exemple :

$$(x+y)(z+t)=xz+xt+yz+yt.$$

Cas particulier :

$$(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+xy+yx+y^2.$$

Remarque

Attention : si $xy\neq yx$ on a $(x+y)^2\neq x^2+2xy+y^2$.

Identités remarquables

Proposition

Soit A un anneau et $x, y \in A$ tels que $xy = yx$. Alors on a les propriétés habituelles, pour $n \in \mathbb{N}$:

(a) $(xy)^n = x^n y^n$;

(b) *(Formule du binôme de Newton)*
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \ ;$$

(c)
$$x^n - y^n = (x-y)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}\right) \ .$$

Exercice 64

Vérifiez que vous savez identifier l'endroit où on utilise $xy = yx$ dans les preuves ci-dessus.

Anneaux intègres

Définition
*Un anneau commutatif A est dit **intègre** si $A \neq \{0\}$ et pour tous $x, y \in A$ on a*

$$xy = 0 \implies (x = 0 \ \textit{ou} \ y = 0) \ ,$$

ou par contraposée :

$$(x \neq 0 \ \textit{et} \ y \neq 0) \implies xy \neq 0 \ .$$

Exercice 65
Montrer que dans un anneau intègre on peut simplifier pour la multiplication, c'est-à-dire : si $ax = ay$ alors $a = 0$ ou $x = y$.

Proposition
Si A est un corps alors A est intègre.

Démonstration. Soit A un corps, et soient $x, y \in A$ tels que $xy = 0$. Si $x \neq 0$ alors x est inversible et en multipliant par x^{-1} on obtient $y = 0$. $\square$

Exemples

- $\mathbb{Z}$ est un anneau intègre (qui n'est pas un corps). En effet, le produit de deux entiers non nuls est non nul, mais 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre (qui n'est pas un corps). En effet, le produit de deux polynômes (à coefficients réels) non nuls est non nul, mais X n'est pas inversible dans $\mathbb{R}[X]$.
- L'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas intègre. En effet, soit f la fonction indicatrice de l'intervalle $[0,1]$ et g la fonction indicatrice de l'intervalle $[2,3]$, on a $f \neq 0$, $g \neq 0$, mais $fg = 0$.
- Si $n \geqslant 2$ est un nombre composé, alors l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ n'est pas intègre. En effet, écrivons $n = ab$ avec $1 < a, b < n$, on a alors $\overline{a} \neq \overline{0}$, $\overline{b} \neq \overline{0}$, et $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab} = \overline{n} = \overline{0}$.

1. Le langage des anneaux et des corps

Produit d'anneaux

Soient A et B deux anneaux. On munit le produit cartésien $A \times B$ de lois $+$ et $\times$ par les formules :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \quad \text{et} \quad (x, y)(x', y') = (xx', yy')$$

Proposition

Muni de ces lois, $A \times B$ est un anneau.

- On vérifie que le zéro de $A \times B$ est $(0_A, 0_B)$ et que le un est $(1_A, 1_B)$. Si A et B sont commutatifs alors $A \times B$ l'est aussi.

Définition

*On appelle $A \times B$ l'**anneau produit** de A et B.*

Plus généralement...

- Plus généralement, pour une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'anneaux indexée par un ensemble I, on peut former le produit
$$\prod_{i\in I} A_i,$$
qui est un anneau où les lois se calculent "coordonnée par coordonnée".
- Si tous les anneaux A_i sont égaux au même anneau A, on le note A^I.

Remarque

Si $A \neq \{0_A\}$ et $B \neq \{0_B\}$ alors $A \times B$ n'est pas un anneau intègre. En effet on a :
$$(1_A, 0_B)(0_A, 1_B) = (0_A, 0_B).$$

Fonctions à valeurs dans un anneau

Soit A un anneau et I un ensemble. Rappelons que A^I peut être vu comme l'ensemble des applications $f : I \to A$. Avec ce point de vue, les loi $+$ et $\times$ se calculent, pour $f_1, f_2 : I \to A$, par les formules

$$(f_1 + f_2)(i) = f_1(i) + f_2(i) \quad \text{et} \quad (f_1 \times f_2)(i) = f_1(i) \times f_2(i)$$

Le zéro est la fonction nulle $\big(f(i) = 0_A$ pour tout $i \in I\big)$ et le un est la fonction constante égale à 1_A $\big(f(i) = 1_A$ pour tout $i \in I\big)$.

Exemple

1) Pour $I = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{R}$ on retrouve l'exemple déjà vu de l'anneau des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2) Pour $I = \mathbb{N}$ on obtient l'anneau $A^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de A (où l'addition et la multiplication des suites se calcule terme à terme).