HAX501X – Groupes et anneaux 1

CM6 28/09/2023

Clément Dupont

Retour sur les exercices du cours

Exercice 27
Soit $(G, *)$ un groupe et soit $x \in G$. On suppose qu'il existe $y \in G$ tel que $x * y = e$. Montrer que $y = x^{-1}$.

- En multipliant l'égalité $x * y = e$ par x^{-1} à gauche on obtient :

$$x^{-1} * (x * y) = x^{-1} * e.$$

En utilisant l'associativité et le fait que $x^{-1} * x = e$ et $x^{-1} * e = x^{-1}$ on obtient :

$$y = x^{-1}.$$

Exercice 28

Écrire la table de multiplication du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

- Même si l'on parle de "table de multiplication", la loi du groupe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est l'addition...

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Exercice 29

Démontrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est abélien si $n \leqslant 1$ et ne l'est pas si $n \geqslant 2$.

- $\mathrm{GL}_0(\mathbb{R}) = \{( )\}$ est le groupe trivial, qui est abélien.
- $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$, une matrice de taille 1×1 étant identifiée avec un scalaire. Comme $\times$ dans $\mathbb{R}$ est commutative, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ est un groupe abélien.
- $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe abélien car les matrices suivantes ne commutent pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet on a

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Multiplier à gauche par A échange les 2 lignes ; multiplier à droite par A échange les deux colonnes.)

- Pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe abélien car les matrices suivantes de commutent pas :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30

Lister les éléments de $\mathfrak{S}_2$. Écrire la table de multiplication de $\mathfrak{S}_2$.

Élément de $\mathfrak{S}_2$...	... qu'on peut aussi écrire sous la forme :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	id
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1\ 2)$

$\circ$	id	$(1\ 2)$
id	id	$(1\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	id

Exercice 30

Lister les éléments de $\mathfrak{S}_3$. Écrire la table de multiplication de $\mathfrak{S}_3$.

Élément de $\mathfrak{S}_3$...	... qu'on peut aussi écrire sous la forme :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	id
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$(1\ 2)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$(1\ 3)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$(2\ 3)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$(1\ 2\ 3)$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$(1\ 3\ 2)$

On écrit les produits “ligne $\circ$ colonne”.

$\circ$	id	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
id	id	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$
$(1\ 2)$	$(1\ 2)$	id	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3)$
$(1\ 3)$	$(1\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	id	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2)$	$(2\ 3)$
$(2\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 2\ 3)$	id	$(1\ 3)$	$(1\ 2)$
$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 2\ 3)$	$(1\ 3)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	id
$(1\ 3\ 2)$	$(1\ 3\ 2)$	$(2\ 3)$	$(1\ 2)$	$(1\ 3)$	id	$(1\ 2\ 3)$

Exercice 30

Lister les éléments de $\mathfrak{S}_4$.

Les 24 éléments de $\mathfrak{S}_4$ sont :

- L'identité

$$\mathrm{id}\,.$$

- Les 6 transpositions :

$$(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4).$$

- Les 8 cycles de longueur 3 :

$$(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3).$$

- Les 6 cycles de longueur 4 :

$$(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2).$$

- Les 3 produits de transpositions à supports disjoints :

$$(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3).$$

Exercice 30

Démontrer que $\mathfrak{S}_n$ est abélien si $n \leqslant 2$ et ne l'est pas si $n \geqslant 3$.

- On a $\mathfrak{S}_0 = \{\mathrm{id}_\varnothing\}$ et $\mathfrak{S}_1 = \{\mathrm{id}_{\{1\}}\}$ qui sont des groupes triviaux donc abéliens.
- $\mathfrak{S}_2 = \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}$ est aussi abélien.
- Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien pour $n \geqslant 3$ car $(1\ 2)$ et $(2\ 3)$ ne commutent pas :

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3) \quad \text{et} \quad (2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2).$$

Exercice 31

Écrire la table de multiplication du groupe $((\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times, \times)$.

$\times$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

Exercice 32

Vérifier que $(\mathbb{Z}, \times)$ est un monoïde. Quel est le groupe $(\mathbb{Z}^\times, \times)$?

- La multiplication est une loi de composition interne dans $\mathbb{Z}$. Elle est associative et a un élément neutre qui est 1. Donc $(\mathbb{Z}, \times)$ est un monoïde.
- L'ensemble des inversibles de $(\mathbb{Z}, \times)$ est $\mathbb{Z}^\times = \{-1, 1\}$: on obtient donc le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Exercice 33

Montrer qu'en général la table de multiplication d'un groupe fini contient chaque élément du groupe dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Soit G un groupe fini.

- Dire que la table de multiplication de G contient chaque élément $a \in G$ dans chaque **ligne** (correspondant à un élément $x \in G$) veut dire que :

$$\forall a \in G, \forall x \in G, \exists y \in G, xy = a.$$

  C'est vrai : $xy = a \iff y = x^{-1}a$.

- Pareil avec les **colonnes**.

Exercice 34

Écrire la table de multiplication du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

$+$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$
$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$
$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$
$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(\overline{1},\overline{0})$	$(\overline{0},\overline{1})$	$(\overline{0},\overline{0})$

2. Sous-groupes

2.1 Définition

2.2 Exemples

2.3 Sous-groupe engendré par une partie

2.4 Rappel sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

3. Morphismes de groupes

3.1 Définitions

3.2 Exemples

Définition de sous-groupe

Définition

Soit G un groupe. Un **sous-groupe** *de G est un sous-ensemble $H \subset G$ qui vérifie les conditions suivantes :*

1) $e \in H$;
2) H *est stable par produit :* $\forall x, y \in H,\ xy \in H$;
3) H *est stable par passage à l'inverse :* $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$.

Un sous-groupe... est un groupe

Proposition

Soit G un groupe, soit H un sous-groupe de G. Alors H, muni de la restriction de la loi de composition interne de G, est un groupe.

Démonstration. Comme par l'hypothèse 2) H est stable par produit, la loi de composition interne de G induit bien une loi de composition interne sur H. Celle-ci est associative car elle l'est dans G. Elle a un élément neutre car par l'hypothèse 1) $e \in H$. Enfin, tout élément de H a un inverse dans H pour cette loi par l'hypothèse 3). □

Remarque

C'est une manière pratique de montrer que quelque chose est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe déjà connu.

Et un exercice

Exercice 35

Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-ensemble de G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

1') $H \neq \varnothing$;

2') $\forall x, y \in H,\ xy^{-1} \in H$.

Exemples de sous-groupes

- Pour tout groupe G on a les sous-groupes $\{e\}$ et G.
- On a déjà étudié les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, tout sous-espace vectoriel $W \subset V$ est notamment un sous-groupe de V. De même en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps $\mathbb{K}$. Il y a d'autres sous-groupes d'un espace vectoriel : par exemple $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ mais pas un sous-espace vectoriel (car $\mathbb{Z}$ n'est pas stable par multiplication par $\frac{1}{2}$, par exemple).

Exemples de sous-groupes, suite et fin

- On note
$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = 1\}$$
le cercle unité dans le plan complexe, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}^* \mid z^n = 1\}$$
l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. On a des inclusions
$$\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{C}^*$$
et $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{C}^*$. On a le cas particulier important de $\mathbb{U}_2$, qui est le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

- On rappelle la notation
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$
C'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, qu'on appelle le **groupe spécial linéaire** de degré n sur $\mathbb{R}$. De même en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps $\mathbb{K}$.

Des exercices

Exercice 36
Représenter dans le plan complexe les groupes $\mathbb{U}$, puis $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$, $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_5$, $\mathbb{U}_6$.

Exercice 37
Montrer que $\mathbb{U}_n$ et $\mathbb{U}$ sont des sous-groupes de $\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Des non-exemples de sous-groupes

- $H = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{4}\}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ car $\overline{3} + \overline{4} = \overline{1} \notin H$.
- $\mathbb{N}$ n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ car il n'est pas stable par passage à l'opposé : $7 \in \mathbb{N}$ mais $-7 \notin \mathbb{N}$.

Intersection de sous-groupes

Proposition

Soit G un groupe, soit $(H_i)_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G indexée par un ensemble I. Alors l'intersection

$$H = \bigcap_{i\in I} H_i$$

est un sous-groupe de G.

On rappelle la définition :

$$\bigcap_{i\in I} H_i = \{x \in G \mid \forall i \in I,\, x \in H_i\}.$$

- Notamment, si H et H' sont deux sous-groupes de G, alors l'intersection $H \cap H'$ est un sous-groupe de G.

Démonstration

1) Pour tout $i \in I$, H_i est un sous-groupe de G, donc $e \in H_i$. On en déduit que $e \in H$.

2) Soit $x, y \in H$. Alors pour tout $i \in I$, $x \in H_i$ et $y \in H_i$, et donc $xy \in H_i$ car H_i est un sous-groupe de G. On en déduit que $xy \in H$.

3) Soit $x \in H$. Alors pour tout $i \in I$, $x \in H_i$ et donc $x^{-1} \in H_i$ car H_i est un sous-groupe de G. On en déduit que $x^{-1} \in H$.

Sous-groupe engendré par une partie

Soit G un groupe et soit $S \subset G$ un sous-ensemble (pas nécessairement un sous-groupe).

Définition
Le **sous-groupe de G engendré par S**, *noté $\langle S \rangle$, est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S.*

- C'est bien un sous-groupe de G par la proposition précédente.
- On a clairement $S \subset \langle S \rangle$, et pour tout sous-groupe H de G on a l'équivalence :
$$S \subset H \quad \Longleftrightarrow \quad \langle S \rangle \subset H.$$
- On dit donc que $\langle S \rangle$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-groupe de G qui contient S.

Sous-groupe engendré par une partie... mais concret !

Proposition

Le sous-groupe $\langle S \rangle$ est l'ensemble des éléments de G qu'on peut obtenir en multipliant un certain nombre d'éléments de S et de leurs inverses, c'est-à-dire l'ensemble des produits

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in S \cup S^{-1}$.

(On a noté S^{-1} l'ensemble des inverses des éléments de S.)

Démonstration

Notons H_0 le sous-ensemble de G décrit par la proposition et montrons que $\langle S \rangle = H_0$. On montre d'abord que H_0 est un sous-groupe de G.

1) $e \in H_0$ (c'est le cas $n = 0$: par convention le produit de 0 élément dans un groupe est l'élément neutre e).
2) H_0 est clairement stable par produit.
3) H_0 est stable par passage à l'inverse car l'inverse d'un produit $x_1 \cdots x_n$ est $x_n^{-1} \cdots x_1^{-1}$.

De plus, il est clair que $S \subset H_0$. Comme $\langle S \rangle$ est l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent S, on a donc l'inclusion $\langle S \rangle \subset H_0$.

Pour montrer l'inclusion réciproque $H_0 \subset \langle S \rangle$, il faut montrer que H_0 est inclus dans tous les sous-groupes de G qui contiennent S. Soit donc H un tel sous-groupe. Comme $S \subset H$ et que H contient e, est stable par produit et passage à l'opposé, tous les éléments $x_1 \cdots x_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $x_i \in S \cup S^{-1}$ sont dans H. Donc $H_0 \subset H$. Comme cette inclusion est vraie pour tout sous-groupe H de G qui contient S, on en déduit que $H_0 \subset \langle S \rangle$. On a donc montré que $\langle S \rangle = H_0$.

Plus de vocabulaire

Définition
On dit que G est **engendré par** *S si $\langle S \rangle = G$. (On dit aussi que S* **engendre** *G ou que S est une* **partie génératrice** *de G.)*

- D'après la proposition précédente, dire que G est engendré par S revient à dire que tout élément de G peut s'écrire comme un produit d'éléments de S et de leurs inverses.
- Lorsque $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ est finie, on note simplement.

$$\langle S \rangle = \langle s_1, \ldots, s_k \rangle$$

Exercice 38
Montrer que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ est engendré par les transpositions $(1\ 2)$ et $(1\ 3)$:

$$\mathfrak{S}_3 = \langle (1\ 2), (1\ 3) \rangle.$$

Groupes cycliques

Un cas important, qu'on étudiera en détail plus bas, est celui d'une partie à un élément s. Dans ce cas on a, d'après la proposition précédente :

$$\langle s \rangle = \{s^n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Remarque

En notation additive, cela s'écrit $\langle s \rangle = \{ns,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

- Pour le groupe $\mathbb{Z}$, on retrouve donc les sous-groupes

$$\langle a \rangle = a\mathbb{Z}.$$

- Pour le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on retrouve les sous-groupes

$$\langle \overline{a} \rangle = \{\overline{ka},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition

Un groupe G est **cyclique** *(on dit aussi* **monogène***) s'il est engendré par un élément, c'est-à-dire s'il existe $s \in G$ tel que $G = \langle s \rangle$.*

Exemples

- $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$ est cyclique, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \overline{1} \rangle$ est cyclique.
- On verra, quand on aura développé la notion d'isomorphisme de groupes, que ce sont les seuls groupes cycliques à isomorphisme près.

Exercice 39
Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique.

Exercice 40
Montrer que $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ n'est pas un groupe cyclique. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ n'est pas un groupe cyclique si $n \geqslant 3$.

Exercice 41
Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un groupe cyclique, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque
Dans certains ouvrages, la notion de groupe cyclique est réservée aux groupes finis, ce qui exclut $\mathbb{Z}$.

Rappels

Proposition

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$H = \langle n \rangle = n\mathbb{Z}.$$

- Notons que l'unicité vient du fait qu'on a imposé que n soit dans $\mathbb{N}$: on a $\langle -n \rangle = \langle n \rangle$.
- Notamment, $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle = \langle -1 \rangle$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Il existe un unique diviseur positif d de n tel que

$$H = \langle \overline{d} \rangle = \{\overline{kd},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

- Notons que l'unicité vient du fait qu'on a imposé que d soit un diviseur positif de n : on a $\langle \overline{a} \rangle = \langle \overline{d} \rangle$ pour tout $\overline{a}$ tel que $a \wedge n = d$.
- Notamment, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \overline{a} \rangle$ pour tout $\overline{a}$ tel que $a \wedge n = 1$.

Morphismes de groupes

Définition

Soient deux groupes $(G, *)$ *et* $(H, \#)$. *Un* **morphisme de groupes** *de* G *dans* H *est une application* $f : G \to H$ *qui vérifie :*

$$\forall x, y \in G,\ f(x * y) = f(x) \# f(y).$$

Remarque

En notation multiplicative, on écrit plutôt $f(xy) = f(x)f(y)$.

Définition

Un **endomorphisme** *d'un groupe* G *est un morphisme de groupes de* G *dans* G.

Propriétés de base des morphismes de groupes

Proposition

Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupes.

1) *Si l'on note e_G et e_H les élément neutres respectifs de G et H, on a $f(e_G) = e_H$.*
2) *Pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.*

Proposition

Soient $f : G \to H$ et $g : H \to K$ deux morphismes de groupes. Alors la composée $g \circ f : G \to K$ est un morphisme de groupes.

Exemples de morphismes de groupes

- L'application constante $f : G \to H$ définie par $f(x) = e_H$ pour tout $x \in G$, où e_H désigne l'élément neutre de H, est un morphisme de groupes. On l'appelle le **morphisme trivial**.
- L'identité d'un groupe G dans lui-même est un morphisme de groupes.
- Le déterminant des matrices est un morphisme de groupes

$$\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \ , \ A \mapsto \det(A).$$

  En effet, on a pour tous $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la formule

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

- La signature des permutations est un morphisme de groupes

$$\mathrm{sgn} : \mathfrak{S}_n \to \{-1, 1\} \ , \ \sigma \mapsto \mathrm{sgn}(\sigma),$$

  c'est-à-dire qu'on a, pour deux permutations $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$:

$$\mathrm{sgn}(\sigma\sigma') = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma').$$

Exemples de morphismes de groupes

- La fonction exponentielle induit un morphisme de groupes

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \ , \ x \mapsto e^x.$$

(La loi de groupe dans $\mathbb{R}$ est $+$, la loi de groupe dans $\mathbb{R}^*$ est $\times$.) En effet, on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

- La fonction logarithme induit un morphisme de groupes

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto \ln(x).$$

($\mathbb{R}_+^*$ est un groupe pour la multiplication parce que c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$... prouvez-le !) En effet on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

- Soient V, W deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Toute application linéaire $f : V \to W$ est un morphisme de groupes (où l'on rappelle que la loi de groupe dans V et W est $+$).