Planche TD 0

Exercice 1 (Distance discrète) Soit X un ensemble et δ la distance discrète sur cet ensemble.

1. Vérifier que δ est une distance sur X.
2. Déterminer les boules ouvertes et fermées de (X, δ). Puis déterminer la topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée a δ.

Exercice 2 (Distance et normes) Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{N}$ une norme sur E, montrer que $d(x, y) = \mathcal{N}(y - x)$ est une distance sur E

Exercice 3 (Normes sur $\mathbb{R}^n$) Montrer que $\mathcal{N}_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $\mathcal{N}_\infty(x_1, \ldots, x_n) = max(|x_i|)$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et dessiner leurs boules unités lorsque $n = 2$.

Exercice 4 (Distance Fly Emirate) Soit (X, d) un espace métrique et Dubai=D un point de X, on défini d_{FE} par $d_{FE}(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d_{FE}(x, y) = d(x, D) + d(y, D)$ sinon.

1. Montrer que d_{FE} est une distance sur X.
2. On suppose que $(X, d) = (\mathbb{R}^2, euclidien)$ et $D = 0$. Pour $x \in X$, dessiner les boules ouvertes centrées en x.
3. Montrer que pour $x \neq D$, le singleton $\{x\}$ est ouvert.