Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

HAX506X - Théorie des probabilités

Auto-évaluation sur le chapitre 4

ATTENTION : ce questionnaire ne doit être traité que si vous avez relu le cours, que vous connaissez les résultats principaux (définitions, propositions, théorèmes), et que vous avez refait les exemples.

Section 1 : Convergence en loi

— Donner la définition de la convergence en loi. Pour quel type de variables aléatoires définit-on cette notion ?

— Avoir compris que la convergence en loi correspond à une convergence de mesures de probabilité (c'est le point central).

— Établir la convergence en loi sur des exemples simples (Exemples 4.3 et 4.4 du poly). Avoir compris les intuitions à l'aide de dessins.

— Connaître la caractérisation de la convergence en loi pour des lois discrètes et à densité (Propositions 4.5 et 4.7)

— Énoncer et démontrer l'approximation binomiale-Poisson.

— Savoir compléter le diagramme d'implication des différents modes de convergence en ajoutant la convergence en loi (convergence en probabilité implique convergence en loi).

— Énoncer la réciproque partielle (si la limite est une masse de Dirac, c'est-à-dire une variable aléatoire constante). Avoir une idée de la démonstration (on cherche une fonction "qui marche bien").

Section 2 : Caractérisation de la convergence en loi

— Connaître la caractérisation de la convergence en loi via les fonctions continues à support compact. Quel est le principal argument utilisé pour pouvoir se restreindre à cet ensemble de fonctions ?

— Énoncer la caractérisation de la convergence en loi via les fonctions de répartition (Proposition 4.14). Pour quel type de variables aléatoires ce résultat est-il vrai ?

— Énoncer le théorème de Lévy (Théorème 4.16).

Section 3 : Théorème central limite

- Énoncer le théorème central limite.
- Savoir le reformuler : avec les fonctions de répartition, avec $\bar{X}_n$, avec S_n, en mettant la variance σ^2 dans la limite.
- Avoir les principales idées de la preuve du théorème central limite (on s'appuie sur un développement limité de la fonction caractéristique de $S_n/(\sigma\sqrt{n})$, puis sur le théorème de Lévy).
- Comprendre qu'on cherche à étudier les fluctuations de $\bar{X}_n$ autour de $\mathbb{E}[X_1]$.
- Comprendre les idées de bases de la statistique : on dispose de données qu'on suppose provenir d'une suite d'expériences aléatoires et on souhaite obtenir des informations sur ces données.
- Comprendre le cadre statistique pour une loi de Bernoulli : on souhaite estimer le paramètre déterministe inconnu p à l'aide de la suite de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.
- Comprendre les deux étapes : estimation ponctuelle de p par $\bar{X}_n$ avec la loi forte des grands nombres, puis intervalle de confiance pour p avec le théorème central limite.