TD I : Rappels

1 Rappels

Exercice 1. Déterminer les ensembles suivants :

1. $I_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]0, \frac{1}{n}]$, $I_2 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]0, \frac{1}{n}[$, $I_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}]$ et $I_4 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}[$. Puis $L_1 =]0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}]$, $L_2 =]0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[$, $L_3 = [0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}]$ et $L_4 = [0, \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}[$.
2. $U_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1-\frac{1}{n}]$, $U_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]0, 1-\frac{1}{n}[$, $U_3 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-\frac{1}{n}]$ et $U_4 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [0, 1-\frac{1}{n}[$. Puis $V_1 =]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}]$, $V_2 =]0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}[$, $V_3 = [0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}]$ et $V_4 = [0, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}[$.

Exercice 2. Soit X un ensemble et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathscr{P}(X)$ indexée par un ensemble I quelconque (fini ou infini, dénombrable ou non). Montrer les assertions suivantes :

1. Pour tout $A, B \in \mathscr{P}(X)$ on a $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
2. Distributivités : pour tout $B \in \mathscr{P}(X)$,

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B).$$

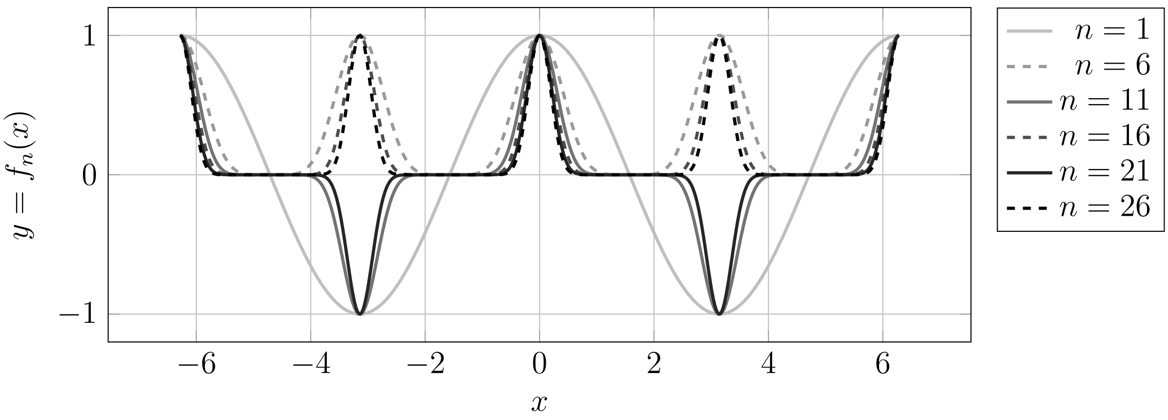
Exercice 3. Images et images réciproques d'ensembles Soient X et Y deux ensembles, et soit $f : X \to Y$ une application. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? pour chacune d'entre elles, donner une preuve ou un contre-exemple :

1. Image directe : soit $A, B \in \mathscr{P}(X)$,
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ et $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (b) $f(A^c) = f(A)^c$.
2. Image réciproque : soit $C, D \in \mathscr{P}(Y)$,
   (a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ et $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
   (b) $f^{-1}(C^c) = f^{-1}(C)^c$.

Une suite réelle admet *toujours* une limite supérieure et une limite inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si ces deux quantités sont finies et égales alors elle est convergente.

Exercice 4. Limites supérieures et inférieures de suites et fonctions

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $x_n = \left(\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)e^n$, où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la fonction *partie entière*. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} x_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} x_n$.
2. Calculer $\liminf_{n\to+\infty} f_n$ et $\limsup_{n\to+\infty} f_n$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = \cos^n(x)$.



Il existe un moyen simple de relier "ensembles" et "fonctions" : les fonctions indicatrices (ou fonction caractéristique). Ce sont des fonctions à valeurs réelles qui ne prennent que les valeurs 0 ou 1. On les retrouve aussi en théorie de probabilités avec les variables aléatoires de Bernoulli.

Exercice 5. Fonctions indicatrices Soit X un ensemble et $A \in \mathscr{P}(X)$. La fonction indicatrice de A est l'application $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mathbb{1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Exprimer $\mathbb{1}_{A^c}$, $\mathbb{1}_{A\cap B}$ et $\mathbb{1}_{A\cup B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\mathscr{P}(X)$ et $\{0,1\}^X$ sont équipotents.

Les notions de limites supérieures et limites inférieures peuvent être étendues aux ensembles via les indicatrices. C'est en théorie des probabilités que ces définitions seront particulièrement utiles. Attention aux notations ici, on utilise les mêmes notations pour les limites de suites d'objets différents (réels, fonctions, ensembles...)

Exercice 6. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$. Montrer qu'il existe deux parties $B, C \in \mathscr{P}(X)$ telles que $\liminf\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_B$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} f_n = \mathbb{1}_C$. Exprimer B et C en fonction des parties A_n. Interpréter les ensembles B et C.

2 Pour s'entrainer, pour aller plus loin

Exercice 7. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles. Montrer les assertions suivantes :

1. $\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$ et $\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcap\limits_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
2. $B \setminus \left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i\in I}(B \setminus A_i)$ et $B \setminus \left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I}(B \setminus A_i)$.

Exercice 8. Soient X, Y et Z des ensembles, et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Montrer les assertions suivantes :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3. f est injective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $h \circ f = \mathsf{Id}_X$.
4. f est surjective si et seulement si il existe une application $h : Y \to X$ telle que $f \circ h = \mathsf{Id}_Y$.

Exercice 9. Soit E un ensemble et $A, B \in \mathscr{P}(E)$ deux parties fixées. On considère l'application $\varphi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ définie par

$$\varphi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

1. Calculer $\varphi(\emptyset)$ et $\varphi(E \setminus (A \cup B))$. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle injective ?
2. Déterminer $\varphi^{-1}\Big(\big\{(\emptyset, B)\big\}\Big)$. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle surjective ?
3. À quelle condition sur A et B l'application φ est-elle bijective ?

Exercice 10. Soit X un ensemble non vide. Pour deux parties $A, B \in \mathscr{P}(X)$, la différence symétrique de A et B est définie par

$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Montrer que $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$. Exprimer $\mathbb{1}_{A \vartriangle B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$.
2. Montrer que $\vartriangle$ est associative sur $\mathscr{P}(X)$.
3. Montrer qu'il existe une unique partie $E \in \mathscr{P}(X)$ telle que, pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on ait $A \vartriangle E = E \vartriangle A = A$.
4. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$ il existe un unique $A' \in \mathscr{P}(X)$ tel que $A \vartriangle A' = A' \vartriangle A = E$.

Exercice 11. On note $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels et $\mathbb{Q}_n[X]$ l'ensemble de ceux qui sont de degré au plus n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable. En déduire que $\mathbb{Q}[X]$ est aussi dénombrable.
2. Les nombres algébriques sont les nombres complexes qui sont racine d'un polynôme à coefficients rationnels. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.