Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2024-2025

HAX506X - Probabilités

Examen terminal - 14/01/2025

- Durée : 2h (+40 min si tiers-temps)
- Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Rappels. Les résultats suivants peuvent être utilisés sans preuve.

1. *Critère de Bertrand.* La série à termes positifs

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2. La fonction de répartition Φ d'une loi normale $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ vérifie

$$1 - \Phi(x) = \mathbb{P}(N \geq x) = \int_x^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x\sqrt{2\pi}}\,.$$

Quelques valeurs : $\Phi(-1.96) = 0.025\,, \Phi(-1.64) = 0.05\,, \Phi(1.64) = 0.95\,, \Phi(1.96) = 0.975$.

Exercice 1 - Minimum de lois uniformes

Soit $U_1, \ldots, U_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $Y_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Donner (sans détailler les calculs) la fonction de répartition de U_1.
2. Montrer que pour $t \in [0,1]$,
$$\mathbb{P}(Y_n > t) = (1-t)^n\,.$$
3. Montrer que $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
4. (a) Montrer que si X est une variable aléatoire positive, alors
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[Y_n]$.
   (c) En déduire que $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0$, puis que pour tout $p \geq 1$, $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^p} 0$.
5. (a) Déterminer la fonction de répartition de nY_n.
   (b) Montrer que $(nY_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre à déterminer.

Exercice 2 - Lois normales

Soit $X_1, \dots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi normale.

1. On suppose dans cette question que pour tout $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec $\sigma > 0$.
   (a) Déterminer la limite presque sûre de
   $$\frac{X_1^2 + \cdots + X_n^2}{n}.$$
   (b) En déduire la limite presque sûre de
   $$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{X_1^2 + \cdots + X_n^2}.$$
2. On suppose maintenant que pour tout $n \geq 2$, $X_n \sim \mathcal{N}(0, 1/\ln(n))$.
   (a) Montrer, en utilisant la définition de la convergence en loi, que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \delta_0$.
   En déduire, sans calcul, que $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.
   (b) À partir des résultats donnés en rappel dans l'en-tête du sujet, montrer que
   $$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n \ln(n)}}.$$
   (c) En déduire que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq 1\}) = 1$.
   (d) En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 presque sûrement.

Exercice 3 - Pharmacovigilance

Une entreprise pharmaceutique souhaite contrôler ses médicaments. Chaque médicament a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être mal dosé. Un agent de contrôle teste n médicaments qui sortent de la chaîne de production. On note X_k la variable aléatoire valant 1 si le k-ème médicament testé est mal dosé, et 0 sinon. Enfin, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Donner la loi de S_n, puis son espérance et sa variance.
2. Montrer que $(S_n - np)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une loi normale de paramètres à préciser.
3. En déduire, en justifiant, la valeur de q telle que
   $$\mathbb{P}\Big(\frac{S_n}{n} - q\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p \leq \frac{S_n}{n} + q\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.95\,.$$
4. Donner un intervalle I_C ne dépendant que de n et de S_n, tel qu'asymptotiquement le paramètre inconnu p appartienne à l'intervalle I_C avec une probabilité d'au moins 95%. On précisera le centre de l'intervalle et sa longueur.
5. Comment évolue la longueur de intervalle I_C quand n augmente ? Interpréter le résultat.
6. On souhaite maintenant proposer un intervalle I'_C qui contienne asymptotiquement p avec un probabilité d'au moins 90%. Sans refaire tous les calculs, dire si l'intervalle I'_C sera plus grand ou plus petit que l'intervalle I_C. On justifiera la réponse.