Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2022-2023

HAX506X - Théorie des probabilités

Contrôle Continu - 24/11/2022

Durée : 1h.

Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Vous indiquerez sur votre copie vos nom, prénom, numéro d'étudiant, groupe de TD et vous numéroterez vos copies. Pour chaque information manquante, un point sera retiré à la note finale.

Rappels.

1. La fonction $\tan :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est strictement croissante et bijective. Sa bijection réciproque $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$
2. La fonction $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ est bijective. Sa bijection réciproque est notée arccos. On a l'équivalence, pour tout $x \in [0, \pi]$ et $u \in [-1, 1]$,
$$u = \cos(x) \iff \arccos(u) = x\,.$$
La fonction arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ de dérivée
$$\arccos'(u) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,.$$
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a la formule bien connue $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Exercice 1 Les deux questions sont indépendantes.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_X d'une variable aléatoire X de loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On rappelle qu'une telle variable aléatoire vérifie
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}\,, \quad k \in \mathbb{N}^*\,.$$
2. Rappeler la définition de la fonction génératrice G_Z d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$. Donner sans preuve le lien entre la dérivée de G_Z et $\mathbb{E}[Z]$.

Exercice 2 Les deux questions sont indépendantes.

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On rappelle que pour tout $0 \le a \le b \le 1$,
$$\mathbb{P}(a \le U \le b) = b - a\,. \qquad (\star)$$

1. On pose $X = \tan(\pi(U - 1/2))$. Calculer la fonction de répartition de X. En déduire que X suit une loi à densité par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1. On précisera la densité.
2. On pose $Y = \lfloor nU \rfloor + 1$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Déterminer la loi de Y.

Exercice 3 On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur $]0, \pi[$.

1. Donner la densité de X par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1.
2. Calculer $\mathbb{E}[X]$ puis $\mathbb{E}[\cos(X)]$.
3. On pose $Y = \cos(X)$. Déterminer $\mathbb{E}[h(Y)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable positive. En déduire la loi de Y.
4. Retrouver la valeur de $\mathbb{E}[\cos(X)]$ à partir de la loi de Y.
5. On considère à présent le vecteur aléatoire $Z = (\cos(X), \sin(X)) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de densité f_T par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d. Montrer que pour tout borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de mesure de Lebesgue nulle, on a $\mathbb{P}(T \in A) = 0$.
   (b) En déduire que Z n'admet pas de densité par rapport à λ_2.