Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2022-2023

HAX506X - Théorie des probabilités

Corrigé de l'Examen terminal - 03/01/2023

Durée : 2h.
Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

Rappels.

1. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire X de loi normale centrée réduite vaut
$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itX}] = \mathrm{e}^{-t^2/2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$
2. La fonction $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est croissante sur $[0, \infty[$.
3. Critère de Bertrand. La série à termes positifs
$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$
converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 1 - Questions de cours.

1. Énoncer la loi forte des grands nombres.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées, et telle que $X_k \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Alors
$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} \mathbb{E}[X_1].$$

2. Donner la définition de la convergence en loi.
Une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ converge en loi vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ si pour toute fonction continue bornée $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[h(X_n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[h(X)].$$

Exercice 2 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} X_k, \quad n \geq 1.$$

1. Expliquer pourquoi on ne peut pas appliquer la loi forte des grands nombres.
   Les variables aléatoires $\sqrt{k}X_k$ n'ont pas la même loi donc la loi forte des grands nombres ne s'applique pas.
2. Pour tout $k \geq 1$, donner la loi de $\sqrt{k}X_k$.
   Comme X_k suit une loi normale centrée réduite, $\sqrt{k}X_k$ suit également une loi normale. Son espérance $\mathbb{E}[\sqrt{k}X_k] = \sqrt{k}\mathbb{E}[X_k] = 0$ et de variance $\mathrm{Var}(\sqrt{k}X_k) = k\,\mathrm{Var}(X_k) = k$.
3. En déduire la loi de Y_n, puis la fonction caractéristique φ_{Y_n} de Y_n.
   La variable aléatoire Y_n correspond à la moyenne de variables aléatoires indépendantes de loi normale, donc Y_n suit une loi normale d'espérance
   $$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k\Big] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[\sqrt{k}X_k] = 0\,,$$
   et de variance
   $$\mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}X_k\Big) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(\sqrt{k}X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n+1}{2n}\,.$$
   Ainsi, $Y_n \sim \mathcal{N}(0, \frac{n+1}{2n})$.
   Posons alors
   $$U_n = \frac{Y_n}{\sqrt{\frac{n+1}{2n}}}$$
   qui suit une loi normale centrée réduite. On en déduit d'après le rappel 1. que pour $t \in \mathbb{R}$,
   $$\varphi_{Y_n}(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itY_n}] = \mathbb{E}\Big[\mathrm{e}^{it\sqrt{\frac{n+1}{2n}}U_n}\Big] = \exp\left(-\frac{\Big(t\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\Big)^2}{2}\right) = \exp\Big(-\frac{t^2(n+1)}{4n}\Big)\,.$$
4. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y de loi à préciser.
   La question précédente implique que $\varphi_{Y_n}(t) \to \mathrm{e}^{-t^2/4}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
   Rappelons que si $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $U = N/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$ et le rappel 1. donne
   $$\varphi_N(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{itN}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{it\sigma U}] = \mathrm{e}^{-t^2\sigma^2/2}\,.$$
   Ainsi, la limite $\mathrm{e}^{-t^2/4}$ correspond à la fonction caractéristique d'une loi normale centrée de variance $1/2$. On en déduit donc que la suite (Y_n) converge en loi une variable aléatoire Y de loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

Exercice 3 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
   On trouve facilement $\mathbb{E}[X_k] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_k) = 2/3$. On en déduit alors par linéarité de l'espérance et par indépendance des X_k que
   $$\mathbb{E}[S_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(S_n) = \frac{2n}{3}\,.$$

2. En déduire que

$$\sqrt{\frac{3}{2n}}\, S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z\,,$$

où Z est une variable aléatoire de loi à préciser.

C'est une conséquence du théorème central limite appliqué aux variables aléatoires X_k qui sont iid par hypothèse et de variance finie :

$$\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}(S_n)}} = \sqrt{\frac{3}{2n}}\, S_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Z\,,$$

où Z suit une loi normale centrée réduite : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n \leq 0)$.

Comme la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est continue, la convergence en loi précédente se réécrit

$$\mathbb{P}(S_n \leq x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \leq x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

En $x = 0$ on obtient alors

$$\mathbb{P}\Big(\sqrt{\frac{3}{2n}}\, S_n \leq 0\Big) = \mathbb{P}(S_n \leq 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(Z \leq 0) = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 4 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire X_n a pour loi

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \mathbb{P}(X_n = -n) = \frac{1}{2n\ln(n+1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\,.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

La variable aléatoire X_n prend les valeurs $-n$, 0, et n, donc

$$\mathbb{E}[X_n] = -n \times \frac{1}{2n\ln(n+1)} + 0 \times \Big(1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\Big) + n \times \frac{1}{2n\ln(n+1)} = 0\,,$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_n) &= \mathbb{E}[X_n^2] \\ &= (-n)^2 \times \frac{1}{2n\ln(n+1)} + 0^2 \times \Big(1 - \frac{1}{n\ln(n+1)}\Big) + n^2 \times \frac{1}{2n\ln(n+1)} \\ &= \frac{n}{\ln(n+1)}\,.\end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\mathbb{E}[S_n] = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[S_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(k+1)} \,.$$

Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = 0 \,.$$

De plus, les variables aléatoires X_n sont centrées et indépendantes donc

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(k+1)} \,.$$

3. En déduire que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$, puis que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Il suffit d'écrire

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{S_n}{n}\Big|^2\Big] = \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\ln(k+1)} \,.$$

Le rappel 2. permet de majorer tous les termes de la somme par $\frac{n}{\ln(n+1)}$, d'où

$$\mathbb{E}\Big[\Big|\frac{S_n}{n}\Big|^2\Big] \le \frac{1}{n^2}\frac{n^2}{\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \,,$$

ce qui prouve la convergence $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$.

Pour la convergence en probabilité, il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov : pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big| \ge \epsilon\Big) \le \frac{\mathbb{E}[(S_n/n)^2]}{\epsilon^2}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 d'après la question précédente. Ainsi, $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$.

(On vient de redémontrer une propriété du cours : la convergence dans L^p implique la convergence en probabilité.)

4. On souhaite montrer que, presque sûrement, la suite $(S_n/n)_{n\ge1}$ ne converge pas.

   (a) On considère les événements $A_n = \{X_n \ge n\}$, pour $n \ge 1$. Montrer que

   $$\mathbb{P}\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1 \,.$$

   Les événements A_n sont indépendants car les variables aléatoires X_n le sont. Par ailleurs, comme X_n ne prend que les valeurs $-n$, 0, et n, on obtient

   $$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_n \ge n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\ln(n+1)} \,.$$

   Cette série diverge par le critère de Bertrand (cf Rappel 3.) donc le lemme de Borel-Cantelli assure que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$.

(b) Montrer l'inclusion d'événements

$$\Big\{(S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}\Big\} \subset \Big\{\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\} \bigcap \Big\{\frac{S_n}{n(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}.$$

Si la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge vers Y, alors

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} Y - Y = 0\,,$$

et

$$\frac{S_n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \times Y = 0\,,$$

d'où les inclusions.

(c) En simplifiant la différence $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1}$, montrez que

$$\big\{(S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}\big\} \subset \Big\{\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}.$$

On écrit

$$\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} = \frac{(n+1)S_n - nS_{n+1}}{n(n+1)} = \frac{S_n}{n(n+1)} - \frac{X_{n+1}}{n+1}.$$

Si $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge, alors d'après la question précédente $\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n+1}}{n+1} \to 0$ et $\frac{S_n}{n(n+1)} \to 0$, donc $(\frac{X_{n+1}}{n+1})$ converge vers 0, d'où l'inclusion demandée.

(d) Conclure que, presque sûrement, la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.

D'après les questions précédentes, on a l'inclusion

$$\big\{(S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}\big\} \subset \Big\{\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\}.$$

Or si $X_n/n \to 0$, alors $X_n/n \geq 1$ un nombre fini de fois, et donc

$$\Big\{\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big\} \subset \{X_n \geq n \text{ un nombre fini de fois}\} = \{\limsup_{n\to\infty} A_n\}^c\,.$$

On utilise alors la question 5.(a) pour conclure que

$$\mathbb{P}((S_n/n)_{n\geq 1} \text{ converge}) \leq \mathbb{P}\Big(\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\Big) \leq \mathbb{P}((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = 0\,.$$

Ainsi, presque sûrement, la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ ne converge pas.