# HAX501X – Groupes et anneaux 1

# Contrôle continu 2

Clément Dupont

- Durée : 2h.
- Tout matériel électronique est interdit ainsi que les documents de cours.
- Une partie du barème sera consacrée à la clarté de la rédaction ainsi qu'à la propreté/lisibilité de la copie.

### Questions de cours (5 pts).

1) Démontrer qu'un anneau intègre $A$ est soit de caractéristique zéro soit de caractéristique un nombre premier $p$.
2) Soit $K$ un corps, soit $a \in K$. Montrer que pour tout polynôme $f \in K[X]$ on a l'équivalence :
$$f(a) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X - a \text{ divise } f.$$
3) Soient $A, B$ des anneaux commutatifs, $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux, et $J$ un idéal de $B$. Montrer que l'image réciproque $f^{-1}(J)$ est un idéal de $A$.
4) Dans $\mathbb{R}^2$, soit $r$ la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et soit $s$ la réflexion par rapport à l'axe des abscisses $\mathbb{R}(1, 0)$. Décrire précisément la composée $r \circ s$. (On ne demande pas de démonstration.)
5) Donner (sous la forme compréhensible de votre choix) la liste des éléments d'ordre 2 dans le groupe diédral $D_6$.

**Exercice 1 : sur les axiomes des groupes (5 pts).** Les deux questions de cet exercice sont indépendantes. Dans la première question on montre qu'on peut simplifier l'axiomatique des groupes en demandant seulement l'existence d'un “neutre à gauche” et d'“inverses à gauche”. Dans la deuxième question on voit que ça ne fonctionne pas si l'on mélange gauche et droite.

1) Soit $G$ un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ qui vérifie les axiomes :
   (i) Associativité : pour tous $x, y, z \in G$, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
   (ii) Neutre à gauche : il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $x \in G$, $e * x = x$.
   (iii) Inverses à gauche : pour tout $x \in G$, il existe $x^{-1} \in G$ tel que $x^{-1} * x = e$.

   a) Soit $y \in G$ tel que $y * y = y$. Montrer que $y = e$.
   b) En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $x \in G$ on a $x * x^{-1} = e$.
   c) En déduire que pour tout $x \in G$ on a $x * e = x$.
2) Soit $G$ un ensemble non vide dont on note $e$ un des éléments. On définit une loi de composition interne $*$ sur $G$ par la formule : $x * y = y$.

a) Montrer que cette loi vérifie les axiomes (i) et (ii) ci-dessus ainsi que l'axiome :
(iv) Inverses à droite : pour tout $x \in G$, il existe $x^{-1} \in G$ tel que $x * x^{-1} = e$.

b) Montrer que si $G$ a au moins deux éléments alors $(G, *)$ n'est pas un groupe.

**Exercice 2 : inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ (10 pts).** On définit :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}\ ,\ a, b \in \mathbb{Z}\}\ .$$

On rappelle (vu en TD) que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

1) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ défini par $\varphi(a, b) = a + b\sqrt{2}$ est un isomorphisme de groupes.

2) Montrer que les anneaux $\mathbb{Z}^2$ et $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ne sont pas isomorphes.

3) a) Pour un élément $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on définit son *conjugé* $c(x) = a - b\sqrt{2}$. Montrer qu'on a la formule, pour $x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ : $c(xx') = c(x)c(x')$.

   b) Pour un élément $x = a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on définit sa *norme* $N(x) = a^2 - 2b^2$. Montrer qu'on a les formules :

$$\forall x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ N(x) = x\, c(x)$$

$$\forall x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}],\ N(xx') = N(x)N(x')\ .$$

4) Montrer qu'un élément $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est inversible si et seulement si $N(x) \in \{-1, 1\}$.

Le but de la suite de l'exercice est de montrer l'égalité :

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \left\{\varepsilon(1 + \sqrt{2})^n\ ,\ \varepsilon \in \{-1, 1\},\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5) Démontrer l'inclusion $\supset$.

6) Soit un élément $a + b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ qui vérifie : $1 \leqslant a + b\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$.

   a) Montrer qu'on a l'inégalité : $-1 \leqslant a - b\sqrt{2} \leqslant 1$.

   b) En déduire qu'on a nécessairement $a = 1$ puis $b = 0$.

7) Déduire de la question précédente que tout inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ qui est $\geqslant 1$ est de la forme $(1 + \sqrt{2})^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

8) En déduire l'égalité annoncée.