Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

HAX506X - Théorie des probabilités

Auto-évaluation sur le chapitre 2

ATTENTION : ce questionnaire ne doit être traité que si vous avez relu le cours, que vous connaissez les résultats principaux (définitions, propositions, théorèmes), et que vous avez refait les exemples.

Section 1 : Indépendance d'événements

- Donner la définition de la probabilité conditionnelle d'un événement B sachant un événement A. Quelle hypothèse faut-il faire sur A ?
- Montrer que $\mathbb{P}_A$ est une probabilité sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$.
- Énoncer la formule de Bayes qui donne $\mathbb{P}(B \mid A)$ en fonction de $\mathbb{P}(A \mid B)$.
- Énoncer la formule des probabilités totales et la formule de Bayes (cas général), puis dans le cas particulier d'une partition du type (A, A^c) (et savoir montrer qu'un tel couple forme bien une partition de Ω).
- Donner la définition de l'indépendance de deux événements, de n événements, d'une famille quelconque d'événements.
- Montrer que l'indépendance peut s'établir en étudiant le complémentaire (Proposition 2.7).

Section 2 : Indépendance de variables aléatoires

- Donner la définition de l'indépendance de sous-tribus.
- Avoir compris l'idée du lemme de regroupement par paquets (Corollaire 2.10) : si des sous-tribus sont indépendantes et qu'on les "fusionne", alors les nouvelles tribus sont encore indépendantes.
- Savoir définir la tribu engendrée par une variable aléatoire. Quel type d'objet mathématique est $X^{-1}(A)$ avec $A \in \mathcal{E}$ et $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire ?
- Donner la définition de l'indépendance de variables aléatoires à partir de l'indépendance de sous-tribus.
- Comprendre que l'indépendance de n variables aléatoires signifie que

  $$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A_1 \times \cdots \times A_n) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1) \cdots \mathbb{P}(X_n \in A_n)\,.$$

  pour tout $A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n$, ou encore

  $$\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)} = \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}\,,$$

  Quel type d'objet mathématique est $(X_1, \dots, X_n)$? A_1 ? $\mathbb{P}(X_1 \in A_1)$? $\mathbb{P}_{(X_1,\dots,X_n)}$? $\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n}$?

- Énoncer la caractérisation de l'indépendance avec les quantités du type $\mathbb{E}[h(X_j)]$ (Proposition 2.13).
- Énoncer la conséquence de l'indépendance X et Y pour leur covariance, puis pour la variance de $X+Y$. Quelle hypothèse faut-il faire sur X et Y pour définir leur covariance ?
- Énoncer la caractérisation de l'indépendance dans le cas de variables aléatoires discrètes et à densité.
- Énoncer la caractérisation de l'indépendance avec les fonctions de répartition, avec les fonctions caractéristiques.

Section 3 : Résultats asymptotiques

- Donner la définition de $\limsup_{n\to\infty} A_n$ et $\liminf_{n\to\infty} A_n$. Quel type d'objet mathématique est $\limsup_{n\to\infty} A_n$? $\liminf_{n\to\infty} A_n$?
- Savoir interpréter ces événements et donner leur lien en passant au complémentaire.
- Énoncer le lemme de Borel-Cantelli.
- Donner un contre-exemple à la réciproque si les A_n ne sont pas indépendants.
- Donner la définition de la tribu asymptotique et son interprétation.
- Montrer que $\{(X_n)_{n\geq 0} \text{ converge}\}$ est dans la tribu asymptotique associée à $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$. Quel type d'objet mathématique est $\{(X_n)_{n\geq 0} \text{ converge}\}$?
- Énoncer la loi du 0-1 de Kolmogorov.