Ex 1

1) Soient x les coordonnées de M, a celles de A.

Alors $g(x) = \|x-a\|_2$

g est dérivable sur $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$

g est convexe (norme) mais pas strict^t convexe.

On a $g'(x).h = \frac{x-a}{\|x-a\|}.h$

d'où $g'(M).H = \frac{(\vec{AM}, \vec{OH})}{AM}$

et $g'(M) = \frac{\vec{AM}}{AM}$

2) g est coercive et continue sur $\mathbb{R}^n$ (fermé)

donc $\exists$ un min.

3) Si $M \notin (ABC)$, alors $H = P_{(ABC)}(M)$ (project. orthogonale)

est tel que $AH < AM$, $BH < BM$

et $CH < CM$

donc $g(H) < g(M)$ contradict^t

4) L'inégalité triangulaire de $\|.\|$ est une égalité ssi

A, M_1, M_2 sont alignés

$(\|tM_1 + (1-t)M_2\| \leq t\|M_1\| + (1-t)\|M_2\|)$

La même propriété est vraie pour B et C.

Comme A, B, C ne sont pas alignés, au moins une des $\leq$ est stricte.

5) f est dérivable (voir 1)
et $f'(\underline{M}) = 0$ (condit° d'Euler)
d'où $$\underbrace{\frac{1}{A\underline{M}} \overrightarrow{A\underline{M}} + \frac{1}{B\underline{M}} \overrightarrow{B\underline{M}} + \frac{1}{C\underline{M}} \overrightarrow{C\underline{M}}}_{f'(\underline{M})} = 0$$

Exercice 2 -

1) $\mathcal{M}$ est compact, f est $\mathcal{C}^0$; les bornes sont donc atteintes

2) $\nabla g(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $u = v = 0$

or $(0,0) \notin \mathcal{M}$ donc la contrainte est qualifiée en tout point. Ainsi, le Th. des extrema liés donne : si (u,v) est extremum, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $f'(u,v) = \lambda g'(u,v)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4-\lambda)u + 6v = 0 \\ 6u - (1+\lambda)v = 0 \end{cases}$$

Ce système admet une solution $\neq (0,0)$ ssi $\det = 0$ ie
$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ 6 & -(1+\lambda) \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow -(4-\lambda)(1+\lambda) - 36 = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda - 40 = 0$$

3) Les solut° sont $\lambda = 8$, $\lambda = -5$

Si $\lambda = 8$, $(u,v) \in \{(3,2), (-3,-2)\}$

et $f(u,v) = -65$

Si $\lambda = -5$, $(u,v) \in \{(2,-3), (-2,3)\}$

et $f(u,v) = 104$

Nous avons trouvé le min et le max.

Ex 1 _ Gradient à pas fixe.

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v)$$

1) On a $J'(v) = Av - b$

Ainsi, on a

$$u_{n+1} = u^n - \mu(Au^n - b)$$
$$= u^n - \mu Au^n + \mu b$$

d'où $u_{n+1} - u = (I - \mu A)u^n + \mu b - u$

or $b = Au$ donc

$$u_{n+1} - u = (I - \mu A)u^n + \mu Au - u$$
$$= (I - \mu A)(u_n - u)$$
$$= (I - \mu A)^2(u_{n-1} - u)$$

d'où $u_n - u = (I - \mu A)^n(u_0 - u)$

et $\|u_n - u\| \leq \|I - \mu A\|^n \|u_0 - u\|$

Les val. p de $I - \mu A$ sont $1 - \mu\lambda_i$

La méthode est CV dès que $\forall i$, $0 < |1 - \mu\lambda_i| < 1$

c'est à dire $\max(|1 - \mu\lambda_1|, |1 - \mu\lambda_n|) < 1$

si on a $-\lambda_n \leq -\lambda_{n-1} \leq \dots \leq -\lambda_1 < 0$
d'où
$$1-\mu\lambda_n \leq 1-\mu\lambda_1$$

et on doit donc avoir
$$-1 < 1-\mu\lambda_n \leq \dots \leq 1-\mu\lambda_1 < 1$$

$$\Big(\qquad |1-\mu\lambda_1| < 1$$
$$\iff \quad 1-\mu\lambda_1 < 1 \text{ et } \mu\lambda_1 - 1 < 1$$
c'est à dire $1-\mu\lambda_1 > -1$ $\Big)$

On a bien entendu $1-\mu\lambda_1 < 1$ dès que $\mu > 0$
et on a $-1 < 1-\mu\lambda_n$
$$\iff -2 < -\mu\lambda_n \iff \mu < \frac{2}{\lambda_n}$$
Ainsi, la méthode est convergente dès que
$$0 < \mu < \frac{2}{\lambda_n}$$

2) Afin de maximiser la cv, on veut rendre $\max(|1-\mu\lambda_1|, |1-\mu\lambda_n|)$ le plus petit possible.

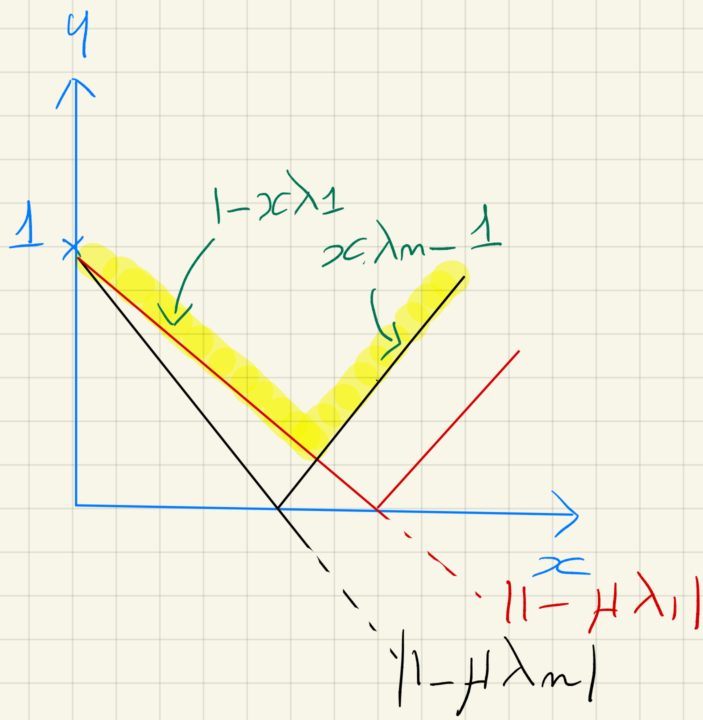
Traçons le graphe de

$$x \longmapsto \max(|1-x\lambda_1|, |1-x\lambda_m|)$$

avec $x \in \left]0, \frac{2}{\lambda_m}\right[$.

On suppose $\lambda_1 < \lambda_m$, donc $-\lambda_1 > -\lambda_m$

et $1-\mu\lambda_1 > 1-\mu\lambda_m$:



Le max est surligné

(les deux sont prolongeables par continuité en $x=0$ et valent 1)

$\min_x \left(\max(|1-\mu\lambda_1|, |1-\mu\lambda_m|)\right)$

est obtenu comme intersection de

$1-x\lambda_1$ avec $x\lambda_m - 1$

Ainsi, on a μ solution de $1-\mu\lambda_1 = \mu\lambda_m - 1$

d'où $\mu(\lambda_1+\lambda_m) = 2$

et $\mu_1 = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$

On a alors $1 - \mu_1 \lambda_1 = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} - \dfrac{2\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_n} = \dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$

et $\| u^n - u \| \leq \left(\dfrac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1} \right)^n \| u^0 - u \|$