Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024
UE HAX601X - Topologie
Licence 3ème année - Semestre 6

Planche de TD 3

Exercice 1. [Lemme du cours] Montrer que, si (x_n) est une suite dans un espace métrique (X, d), les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. (x_n) admet une sous-suite convergeant vers a;
2. a est une valeur d'adhérence de (x_n);
3. $\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n$ entier $\geq m,\ x_n \in V$;
4. $\forall \epsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n$ entier $\geq m,\ d(a, x_n) < \epsilon$.

Exercice 2. [S^1] Montrer que l'application $p : \mathbb{R} \to S^1 : t \mapsto e^{2i\pi t}$ est continue et surjective. En déduire que S^1 est connexe par arcs et compact.

Exercice 3. [espaces projectifs] On munit l'espace projectif $X = \mathbb{P}\mathbb{R}^n$ (=quotient de $\mathbb{R}^{n+1}$ par $\sim$ avec ($X \sim X'$ si et seulement si $X = \lambda X'$ avec $\lambda \neq 0$)) de la topologie quotient.

1. Montrer que X est homéomorphe au quotient de S^n par la relation ($X \sim X'$ si et seulement si $X = X'$ ou $X = -X'$).
2. En déduire que X est connexe et compact.
3. Montrer que $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$ est homéomorphe à S^1.

Exercice 4. [composantes connexes] Soit $I = [0, 1]$ et considérons les deux parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left(\left\{ \frac{1}{n} \right\} \times I \right) \qquad X = \overline{A} \cup (I \times \{0\}).$$

Montrer que A possède une infinité de composantes connexes et que X est connexe. Faire un dessin résumant la situation.

Exercice 5. [$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$] Montrer que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, déterminer la composante connexe de α. En déduire que les composante connexes ne sont pas ouvertes, puis que aucun point n'admet de voisinage connexe.

Exercice 6. [composantes connexes du complémentaire d'un sev] Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. A quelle condition $\mathbb{R}^n \backslash E$ est-t-il connexe ?

Exercice 7. [union de compacts] Montrer qu'une réunion finie de compacts est compacte.

Exercice 8. [sous-espaces de matrices] On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées d'ordre n. On admet, pour l'instant, que toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes et on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la topologie associée. Parmi les parties suivantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, y-en-a-t-il qui soient compactes ?

1. l'ensemble des matrices inversibles;
2. l'ensemble des matrices diagonales;
3. l'ensemble des matrices de déterminant 1;
4. l'ensemble des matrices idempotentes et symétriques.

Exercice 9. [La fourche double] Soit $X = \mathbb{R} \times \{-1\} \cup \mathbb{R} \times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$. On définit la relation $\sim$ sur X par $(x, y) \sim (x', y')$ si $(x, y) = (x', y')$ ou $x = x' < 0$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur X. On note $F = X/\sim$, $\pi : X \to F$ la projection canonique et on munit F de la topologie quotient.

2. Montrer que $\pi([-1,1] \times \{1\})$ est compact non fermé dans F. En déduire que F n'est pas Hausdorff.

3. Trouver deux points de F qui ne peuvent pas être séparés par des ouverts.

4. Trouver deux compacts de F dont l'intersection n'est pas compacte.

Exercice 10. [intersection de compacts] Montrer que dans un espace Hausdorff, toute intersection de compacts est compacte.

Exercice 11. [Tychonoff] Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Tychonoff :
$X \times Y$ compact si et seulement si X et Y le sont.

1. Montrer que $X \times Y$ compact implique que X et Y le sont.

2. On supppose maintenant que X et Y sont compacts et on se donne un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $X \times Y$

   (a) On fixe $x \in X$, justifier, pour chaque $y \in Y$, d'un ouvert V_y de X, un ouvert W_y de Y et d'un élént $i_y \in I$ tels que $(x, y) \in V_y \times W_y \subset U_{i_y}$.

   (b) Montrer que $\{x\} \times Y$ peut-être recouvert par un nombre fini de $V_{y_1} \times W_{y_1} \cup \ldots \cup V_{y_n} \times W_{y_n}$. On pose alors $V_x = V_{y_1} \cap \ldots \cap V_{y_n}$

   (c) Montrer que $V_x \times Y$ est recouvert par un nombre fini de U_i.

   (d) Montrer que $X \times Y$ est recouvert par un nombre fini de $V_x \times Y$.

   (e) Conclure.

Exercice 12. [séparabilité] Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Exercice 13. [Compacité de $O(n)$ et $SO(n)$] Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrice carrées d'ordre n, on munit $\mathbb{R}^n$ du produit euclidien canonique. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $||A|| = \sup_{||\mathbf{x}|| \leq 1} ||A\mathbf{x}||$.

1. Montrer que $A \mapsto ||A||$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si une suite A_n converge vers A pour cette norme, alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $A_n\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$.

3. Montrer que le groupe orthonal $\mathrm{O}(n)$ est contenu dans la boule unité de $||.||$.

4. En déduire que $\mathrm{O}(n)$ et $\mathrm{SO}(n) = \mathrm{O}(n) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sont compacts.

Exercice 14. [Compactifié d'Alexandroff] Soit X un espace topologique Hausdorff et ω un point n'appartenant pas à X. On pose $\hat{X} = X \cup \{\omega\}$.

1. Montrer que l'ensemble formé par les ouverts de X et les ensembles de la forme $\{\omega\} \cup (X \backslash K)$ avec K compact de X est une topologie sur $\hat{X}$. $\hat{H}$ est appelé le compactifié d'Alexandroff de X.

2. Quel est le compactifié d'Alexandroff d'un espace compact ?

3. Montrer que $\hat{X}$ est compact pour cette topologie.

4. Montrer que $\hat{X}$ est Hausdorff si et seulement si tout point de X admet un voisinage compact.

5. On suppose que $X = \mathbb{N}$, montrer que $\hat{X}$ est homéomorphe à $\overline{\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}}$.

6. On suppose que $X = \mathbb{R}^n$, montrer que $\hat{X}$ est homéomorphe à S^n.

Exercice 15. [Un début de complétude] Soit X un **ensemble** non-vide et $l^\infty(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ bornées sur X. On munit $l^\infty(X)$ de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $l^\infty(X)$ est complet.

2. On suppose maintenant que X est un espace topologique compact. Montrer que le sous-espace $C^0(X)$ des fonctions continues est fermé. Que peut-on en déduire ?

Exercices facultatifs:

Exercice 16. [Topologie bizarre I] Soit $\mathcal{T} = \{\{1,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}^*\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note X l'espace topologique $(\mathbb{N}^*, \mathcal{T})$.
2. Montrer que deux points de X ne ne sont jamais séparés.
3. Montrer que $K \subset X$ est compact si est seulement si K est fini. En déduire que X n'est pas compact.
4. Montrer que aucun compact de X n'est fermé et qu'aucun fermé non vide de X est compact. En dëduire que l''adhérence d'un compact de X n'est jamais compacte.

Exercice 17. [Adhérence de $sin(1/x)$] Soit $A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ \sin(1/x) \end{bmatrix} \right\}_{x>0}$, montrer que $\overline{A} = A \cup (\{0\} \times [-1,1])$, puis que $\overline{A}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 18. [Topologie bizarre II] Soit X un espace topologique dans lequel tout ouvert est fermé. Montrer que X est réunion disjointe d'espaces grossiers.

Exercice 19. [Asticieux et difficile ; matrices diagonalisables] Soit A une matrice carré d'ordre 2 à coefficients réels. Montrer que A est diagonalisable ssi sa classe de similitude est connexe. (Indication : dans un sens, utiliser $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; dans l'autre, en les démontrant comme exercice, utiliser les faits, que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto b-c$ est continue, que toute matrice est semblable à sa transposée et que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable)

Exercice 20. [Très difficile ; projecteurs] Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des matrices idempotentes de taille $n \times n$. Monter que $\mathcal{P}$ est compact ssi $n = 1$, est fermé, d'intérieur vide. Etudier les composantes connexes (Indication : trace(P) = rang(P) (montrez le) est constant sur les classes de similitude).