Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023-2024
UE HAX601X - Topologie
Licence 3ème année - Semestre 6

Planche TD 2.

Exercice 1. Notons E l'espace vectoriel des fonctions f continues sur $I = [0,1]$ puis posons :

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt \quad ; \quad \|f\|_\infty := \sup_{t\in I}|f(t)|.$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes et qu'elles vérifient l'inégalité $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.
2. Notons E_1 l'espace normé $(E, \|\cdot\|_1)$ et B_1 sa boule unité ouverte. De même, E_∞ désignera l'espace normé $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et B_∞ sa boule unité ouverte.
   (a) Montrer que B_1 est ouverte dans E_∞.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{R} : t \mapsto t^n$ converge vers la fonction nulle dans E_1 tout en restant sur la sphère-unité de E_∞. En déduire que B_∞ n'est pas ouverte dans E_1.
   (c) Que dire des distances associées à nos deux normes ? Et de leurs topologies respectives ?

Exercice 2. Soit X un espace topologique, et A, B deux parties de X.

1. Vérifier que $A \subset B$ implique $\overline{A} \subset \overline{B}$ et $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.
2. Etablir les égalités: $\complement_X(\overline{A}) = \overset{\circ}{\complement_X(A)}$, $\complement_X(\mathring{A}) = \overline{\complement_X(A)}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
3. Etablir les inclusions $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ puis construire des exemples où ces inclusions sont strictes.

Exercice 3. Dans un espace métrique X, notons B la boule ouverte de centre a et de rayon r et B' la boule fermée correspondante.

1. Rappeler pourquoi on a toujours $\mathring{B} = B$ et $\overline{B'} = B'$.
2. Montrer que $B \subset \mathring{B}'$ et $\overline{B} \subset B'$. Trouver un espace métrique où ces inclusions sont strictes.
3. Montrer que si X est un espace normé, les inclusions ci-dessus sont toujours des égalités.

Exercice 4. Soit A une partie non-vide d'un espace métrique (X, d). On définit :

$$\forall x \in X, \quad \mathbf{d}(x, A) := \inf_{a\in A}(d(x,a)).$$

1. S'assurer que la définition ci-dessus est valide et donne un nombre positif. On l'appellera distance du point x à la partie A.
2. Vérifier que $\mathbf{d}_A : x \mapsto \mathbf{d}(x, A)$ définit une fonction lipschitzienne sur X.
3. Montrer que pour tout $x \in X$, on a $\mathbf{d}(x, A) = \mathbf{d}(x, \overline{A})$.
4. Montrer que $\overline{A}$ est l'ensemble des points à distance nulle de A..
5. On se place dans $\mathbb{R}$ muni de sa structure métrique usuelle. Calculer $\mathbf{d}(x, A)$ dans les cas suivants : $A = \mathbb{Q}$, $A = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $x = 2$, $A = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $x = 0$.
6. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la droite affine A d'équation $t = s + 1$. Calculer $\mathbf{d}(0, A)$ d'abord avec d_2 puis avec d_∞.

Exercice 5. Un espace topologique est dit *séparable* s'il possède une partie au-plus dénombrable partout dense. Montrer qu'un espace métrique est séparable si et seulement si il possède une base d'ouverts au plus dénombrable. Etablir que $\mathbb{R}^n$ est séparable et exhiber une base d'ouverts dénombrable.

Exercice 6. Deux espaces métriques (X, d) et (Y, δ) étant donnés, définissons:

$$D_1((x,y),(x',y')) := d(x,x') + \delta(y,y') \quad ; \quad D_\infty((x,y),(x',y')) := \max\{d(x,x'), \delta(y,y')\}.$$

Montrer que D_1 et D_∞ définissent deux distances équivalentes sur $X \times Y$, puis que la topologie associée à D_1 n'est autre que la topologie produit.

Exercice 7. X et Y étant deux espaces topologiques, équipons $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$. En déduire que $A \times B$ est fermé si et seulement si A et B le sont.
2. Montrer que les projections canoniques sont des applications ouvertes.

Exercice 8. Soit A une partie d'un espace topologique X.

1. Montrer que la topologie de sous-espace sur A est la moins fine des topologies sur A rendant continue l'inclusion $j : A \hookrightarrow X$. Montrer qu'une application $f : Y \to A$ est continue si et seulement si $j \circ f$ l'est.
2. Montrer que A est ouvert dans X si et seulement si pour tout ouvert Ω de A, Ω est aussi ouvert dans X.
3. Si $\Omega \subset A$, notons $\mathrm{adh}_A(\Omega)$ l'adhérence de Ω dans le sous-espace A. Montrer que $\mathrm{adh}_A(\Omega) = \overline{\Omega} \cap A$.
4. Soit $f : X \to Y$ une application continue à valeurs dans un autre espace topologique Y. Montrer que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ En déduire que si A est dense dans X, alors $f(A)$ est dense dans $f(X)$.

Exercice 9. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ et $g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un espace topologique X.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X \mid f(x) < a\}$ est ouvert et que les ensembles $\{x \in X \mid f(x) \leq a\}$ et $\{x \in X \mid f(x) = a\}$ sont fermés .
2. Montrer que $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est fermé dans X. En déduire que si f et g coïncident sur une partie dense de X, alors elles sont égales.
3. Montrer facilement par un argument de continuité que toute sphère d'un espace métrique est fermée.
4. Munissons l'espace vectoriel des matrices M carrées réelles d'ordre n de la norme : $\|M\| = \max(m_{ij})$. Montrer par un argument de continuité que le sous-ensemble des matrices inversibles est ouvert.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \to X$ une application vérifiant la condition $d(f(x), f(x')) = \alpha \cdot d(x, x')$ (avec α constante strictement positive). Montrer que la restriction à droite $\hat{f} : X \to f(X)$ est un homéomorphisme ($f(X)$ étant équipé de la topologie induite par celle de X).

Exercice 11. Soit X un espace topologique et $\sim$ une relation d' équivalence sur X. On munit $X/\sim$ de la topologie quotient et on note $\pi : X \to X/\sim$ la projection quotient.

1. Vérifier que la topologie quotient est la plus fine des topologies sur $X/\sim$ parmi celles rendant la projection quotient continue.
2. Montrer qu'une application $g : X/\sim \to Y$ est continue si et seulement si $g \circ \pi$ est continue.
3. Soit $f : X \to Y$ une application continue surjective vérifiant, pour tous x et x' dans X, la condition : $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) = f(x')$. Montrer qu'il existe alors une unique application continue bijective $\tilde{f} : X/\sim \to Y$ telle que $f = \tilde{f} \circ \pi$. En déduire que **si, de plus,** f est ouverte, alors $\tilde{f}$ est un homéomorphisme.
4. Application : montrer que $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, équipé de sa topologie quotient, est homéomorphe au cercle-unité S^1.

Exercice 12. Montrer que tout intervalle ouvert $]a, b[$ est homéomorphe à $\mathbb{R}$. Est-ce aussi le cas si on considère un intervalle fermé ?