HAX501X – Groupes et anneaux 1

Contrôle continu 2

- Durée : 1h.
- Tout matériel électronique est interdit ainsi que les documents de cours.
- Une partie du barème sera consacrée à la clarté de la rédaction ainsi qu'à la propreté/lisibilité de la copie.

Exercice 1 : anneaux noethériens, et non noethériens. On rappelle une définition entrevue en cours : un anneau commutatif A est dit *noethérien* si toute suite croissante d'idéaux de A est stationnaire, c'est-à-dire si pour toute suite croissante

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots$$

d'idéaux de A, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $I_n = I_N$.

1) On redémontre le fait, vu en cours, qu'un anneau principal est noethérien. Soit A un anneau principal, et soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de A comme ci-dessus.
   a) Rappeler la définition de la notion d'anneau principal.
   b) On pose $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Montrer que I est un idéal de A.
   c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2) On considère l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour E une partie de $\mathbb{R}$, on note $I(E)$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in E,\ f(x) = 0$.
   a) Montrer que $I(E)$ est un idéal de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
   b) Montrer que c'est un idéal principal.
   c) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas noethérien.

Exercice 2 : automorphismes de groupes. Pour un groupe G, on note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de G.

1) Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(G)$, le groupe des permutations de G.
2) Pour un élément $g \in G$ on définit une application

$$\gamma_g : G \to G\ ,\ x \mapsto gxg^{-1}.$$

   Montrer que γ_g est un automorphisme de G. On l'appelle la *conjugaison* par g dans G.
3) Montrer que l'application

$$C : G \to \mathrm{Aut}(G)\ ,\ g \mapsto \gamma_g$$

   est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?