TD 5 - Optimisation sous contraintes

Exercice 1. On définit la fonction $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$P(x,y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000.$$

(1) Etudier la convexité de P.

(2) On considère la fonction $h(x,y) = x + y - 20$ et le problème d'optimisation sous contrainte égalité suivant :

$$\sup_{h(x,y)=0} P(x,y).$$

Montrer que ce problème à une solution et énoncer les conditions d'optimalité. Résoudre ce problème.

Exercice 2. Déterminer les points les plus proches et les plus éloignés de l'origine (s'ils existent) de la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$.

Exercice 3. On considère le problème de la minimisation de la fonction

$$f : (x,y) \mapsto x + y^2,$$

sous la contrainte

$$x^3 - y^2 = 0.$$

(1) Quels sont les points vérifiant les conditions de minimalité du 1er ordre ?

(2) Peut-on résoudre le problème ?

Exercice 4. On souhaite déterminer les minima de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

sur le domaine

$$\mathcal{K} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x + y + z + 3 \leq 0, \ x \leq 0\right\}.$$

(1) Montrer l'existence et l'unicité du minimum de f sur K.

(2) Déterminer tous les candidats possibles pour être minimum.

(3) Déterminer le minimum de f.

Exercice 5. Soit $s \neq 0$ fixé dans $\mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$, et H_r l'hyperplan d'équation $(s, x) = r$. Etant donné $v \in \mathbb{R}^n$, on se propose de déterminer la projection orthogonale $\bar{v}_r$ de v sur H_r.

(1) Déterminer $\bar{v}_r$ à partir de l'observation suivante : $\bar{v}_r$ est la solution du problème de minimisation convexe suivant :

$$(P_r) \quad \begin{cases} \min \frac{1}{2} \|x - v\|^2 , \\ x \in H_r. \end{cases}$$

(2) Posons

$$d(r) = \frac{1}{2} \|\bar{v}_r - v\|^2 .$$

Vérifier que d est une fonction dérivable de r et que sa dérivée $d'(r)$ est, au signe près, le multiplicateur de Lagrange dans le problème (P_r).