Année 2022-2023 HAX601X Topologie
L3 — Mathématiques

Examen session 2 (28 juin 2023)
durée : 3h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. **(1 point)** Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que si une suite de Cauchy de X possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.

Exercice 2. **(2 points)** **On admet** que les espaces vectoriels normés de dimension finie sont complet. Soit E un espace vectoriel normé (de dimension quelconque), et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 3. **(3 points)** Soit (X,d) un espace métrique complet. Montrer que si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides de X telle que $\lim_{n\to\infty}\mathrm{diam}(F_n)=0$, alors l'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}}F_n$ n'est pas vide.

Construire une suite de Cauchy...

Exercice 4. **(3 points)** Soit X un ensemble non vide. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappeler la définition de $\|\cdot\|_\infty$ et montrer que l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Bien détailler les étapes.

Partie 2. Exercices

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique. Soient A,B deux parties bornées de X telles que $A\cap B\neq\emptyset$. Montrer que $\mathrm{diam}(A\cup B)\leq\mathrm{diam}(A)+\mathrm{diam}(B)$.

Exercice 6. Soit (X,d) un espace métrique. On considère une application $f:X\to X$ telle que $d(f(x),f(y))=d(x,y)$ quels que soient $x,y\in X$.

1. Montrer que f est continue et injective. Donner un exemple pour lequel f n'est pas surjective.

   On suppose désormais que (X,d) est **compact**.

2. Si f n'est pas surjective, soit $a\in X$ tel que $a\notin f(X)$. On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0:=a$ et $a_{n+1}:=f(a_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   a) Montrer qu'il existe un réel $r>0$ tel que $f(X)\cap B(a,r)=\emptyset$.
   b) Montrer que $d(a,a_n)\geq r$ pour tout entier $n\geq 1$.
   c) En déduire une minoration de $d(a_n,a_p)$ lorsque n,p sont des entiers distincts.
   d) Quelle contradiction obtient-on ? Que peut-on en conclure sur f ?

Exercice 7.
1. Si (X,d) est un espace métrique complet et si $f:X\to X$ est une application vérifiant
$$\exists k\in[0,1[,\forall x,y\in X,d(f(x),f(y))\leq kd(x,y),$$
que dit le théorème du point fixe de Banach ?
2. Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par
$$f(s,t)=\left(1+\frac{1}{3}\cos(s+t),2-\frac{3}{5}\sin(s-t)\right)$$
possède un unique point fixe. Si vous utilisez un résultat du cours, veillez à vérifier toutes ses hypothèses.

Exercice 8. On considère $E=C^0([-1,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On définit $u:E\to\mathbb{R}$ par $u(f):=\int_0^1 f(t)dt-\int_{-1}^0 f(t)dt$.

1. Rappeler la définition de $\|f\|_\infty$ pour $f\in E$.
2. Montrer que u est une forme linéaire continue sur E et donner une majoration de $|||u|||$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $f_n:[-1,1]\to\mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x):=\begin{cases}-1 & \text{si } x\in[-1,-\frac{1}{n}]\\ nx & \text{si } x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\\ 1 & \text{si } x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}$$
Déterminer $\|f_n\|_\infty$ et $u(f_n)$. En déduire la valeur de $|||u|||$.