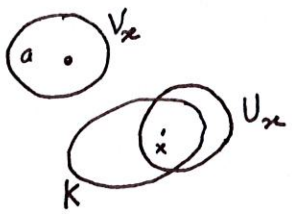
Ex 1 : 1) F fermé $\subset X$ compact. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F.

Posons $V = \complement_X F$. $(U_i)_{i\in I} \cup \{V\}$ est un recouvrement ouvert de X. Comme X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, d'où :

$X = \bigcup_{i \in J} U_i \cup V$ avec J fini $\subset I$. Comme $F \cap V = \emptyset$ on en tire que $(U_i)_{i\in J}$ est un recouvrement de F. F est donc compact. □

2) K compact $\subset X$ Hausdorff.



Soit $\Omega := \complement_X K$. On veut montrer que K est fermé donc que Ω est ouvert.

Soit donc $a \in \Omega$. $\forall x \in K$, $\exists\, U_x, V_x$ ouverts tels que $x \in U_x$, $a \in V_x$, $U_x \cap V_x = \emptyset$. (hypothèse Hausdorff)

Par compacité de K, $\exists\, x_1 \dots x_n \in K$, $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$.

Posons $V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. V contient a et est ouvert comme intersection finie d'ouverts. Montrons que $V \subset \Omega$. Comme $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$

il vient $\complement_X \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \subset \complement_X K$ donc $\bigcap_{i=1}^{n} \complement_X U_{x_i} \subset \Omega$.

Mais $V_{x_i} \cap U_{x_i} = \emptyset \implies V_{x_i} \subset \complement_X U_{x_i}$ donc $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset \Omega$.

Ω est ouvert comme voisinage de chacun de ses points. □

Ex 2 A fermé $\subset (X, d)$ complet. Montrons que (A, d_A) est complet.

Soit $(a_n) \subset A$ une suite de Cauchy. C'est aussi une suite de Cauchy dans X. X étant complet (a_n) converge dans X vers $P \in X$.

Mais A est fermé, donc $P \in A$. (a_n) converge donc vers $P \in A$. □

Ex 3 $E = F \underset{alg}{\oplus} S$ $\qquad \sigma : F \times S \longrightarrow E$ est une bijection linéaire continue
$\qquad (x, y) \longmapsto x+y$

et $\sigma^{-1} : E \longrightarrow F \times S : z \longmapsto (p(z), q(z))$

Donc : $E = F \underset{top}{\oplus} S \iff \sigma$ homéo. $\iff \sigma^{-1}$ continue $\iff p$ et q continues. $\square$

Ex 4 $V \underset{sev}{\subset} E$ normé $\qquad \dim V = n < \infty$

V est donc, quand on le munit de la norme induite, un evn de dim finie n. Il est par conséquent isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$

$$V \underset{evn}{\cong} \mathbb{R}^n$$

Comme $\mathbb{R}^n$ est complet, V aussi. V est complet ds E, donc fermé dans E. $\square$

Ex 5 X, Y connexe par arcs. Soit (a,b) et $(a',b') \in X \times Y$

Comme X est connexe par arcs $\quad \exists\ \alpha : I \to X$ continue / $\alpha(0) = a \quad \alpha(1) = a'$

—— Y —————— $\quad \exists\ \beta : I \to Y$ —— $\quad \beta(0) = b \quad \beta(1) = b'$

Posons $\gamma : I \to X \times Y : t \longmapsto (\alpha(t), \beta(t))$ $\quad \gamma$ continue et connecte (a,b) à (a',b'). $\square$

Ex 6 1) • $\sim$ est réflexive : $\quad z = \lambda^0 z$

• $\sim$ est symétrique : $\quad z \sim z' \iff \exists n \quad z' = \lambda^n z \Rightarrow z = \lambda^{-n} z' \Rightarrow z' \sim z$

• $\sim$ est transitive :

$$\left.\begin{array}{l} z \sim z' \iff \exists\, n \quad z' = \lambda^n z \\ z' \sim z'' \iff \exists\, m \quad z'' = \lambda^m z' \end{array}\right\} \Rightarrow z'' = \lambda^{m+n} z \quad \text{et} \quad z \sim z''$$

cqfd $\square$

$X = \mathbb{C}^*/_\sim$ muni de la top. quotient :

U ouvert ds $X \iff p^{-1}(U)$ ouvert dans $\mathbb{C}^*$

2) On veut montrer que $p_A : A \longrightarrow X$ est surjective.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[d, "p"'] & A \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[dl, "p_A"] \\ X & \end{tikzcd}$$

__Méthode 1__ : Soit $\xi = [z] \in X$

avec $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ $(r \neq 0)$

$r > 0 \Rightarrow \exists\, n \quad \lambda^n \leqslant r \leqslant \lambda^{n+1}$

Posons $z' := \lambda^{-n} . z = \lambda^{-n} r\, e^{i\theta}$

D'une part $[z'] = [z] = \xi$. D'autre part : $|z'| = \lambda^{-n} r \in [1, \lambda]$

Donc $z' \in A$. Autrement dit p_A est surjective. $\square$

__Méthode 2__ : Soit $\xi = [z] \in X$. Il suffit de trouver $n \in \mathbb{Z}$

tel que $\lambda^{-n} z \in A$ càd tel que $1 \leqslant \lambda^{-n} r \leqslant \lambda$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda^n \leqslant r \leqslant \lambda^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \ln \lambda \leqslant \ln r \leqslant (n+1) \ln \lambda$$

$$\Longleftrightarrow \quad n \leqslant \frac{\ln r}{\ln \lambda} \leqslant n+1$$

Il suffit donc de choisir : $n := E\left(\dfrac{\ln r}{\ln \lambda}\right)$. $\square$

---

3) • A est fermé dans $\mathbb{C}^*$ car $A = f^{-1}([1, \lambda])$

avec $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{R} : z \longmapsto |z|$ continue

et $[1, \lambda]$ fermé.

• A est borné car $A \subset B(0, \lambda]$

• A est donc compact. (on est en dim. finie !)

• D'autre part : $p(A) = X$ d'après (2) et p continue.

X est donc compact.

---

4) $\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^1 \times S^1$ $\qquad \phi(z) = (u(z), v(z))$

avec $u : \mathbb{C}^* \to S^1 \quad u(z) = e^{2i\pi \frac{\ln|z|}{\ln\lambda}}$

$v : \mathbb{C}^* \to S^1 \quad v(z) = \frac{z}{|z|}$

---

a) $\begin{cases} u \text{ continue car } z \mapsto |z|, \ \ln \text{ et } t \mapsto e^{2i\pi t} \text{ continues.} \\ v \text{ continue car } z \mapsto |z| \text{ continue et } |z| \neq 0. \end{cases}$

- ϕ est donc continue car ses deux composantes le sont.

- Surjectivité : Soit $(e^{i\alpha}, e^{i\beta}) \in S^1 \times S^1$

on cherche $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ $(r \neq 0)$ tel que $\begin{cases} u(re^{i\theta}) = e^{i\alpha} \\ v(re^{i\theta}) = e^{i\beta} \end{cases}$ $(*)$

$(*) \iff \begin{cases} e^{2i\pi \frac{\ln r}{\ln\lambda}} = e^{i\alpha} \\ e^{i\theta} = e^{i\beta} \end{cases}$ $\longrightarrow$ il suffit de choisir : $\boxed{\theta := \beta}$

et r tel que : $2\pi \frac{\ln r}{\ln\lambda} = \alpha$

soit : $\ln r = \frac{\alpha \ln\lambda}{2\pi}$ $\longrightarrow$ $\boxed{r := \exp\left(\frac{\alpha \ln\lambda}{2\pi}\right) > 0}$ $\square$

---

b) $z = re^{i\theta}$; $z' = r'e^{i\theta'}$

$\phi(z) = \phi(z') \iff u(z) = u(z')$ et $v(z) = v(z')$

$\iff e^{2i\pi \frac{\ln r}{\ln\lambda}} = e^{2i\pi \frac{\ln r'}{\ln\lambda}}$ et $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$

$\iff \frac{\ln r}{\ln\lambda} - \frac{\ln r'}{\ln\lambda} \in \mathbb{Z}$ et $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$

$\iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad \ln(r) - \ln(r') = n\ln(\lambda)$ et $\theta - \theta' \in 2\pi\mathbb{Z}$

$\iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad r = \lambda^n r'$ et $\theta \equiv \theta' \ [2\pi]$

$\iff \exists n \in \mathbb{Z} \quad \underline{re^{i\theta} = \lambda^n r'e^{i\theta'}} \iff z' \sim z$ $\square$

c)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^* \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & S^1 \times S^1 \\ X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

• Comme $z \sim z' \Rightarrow \phi(z) = \phi(z')$ (b)

ϕ passe au quotient et :

$$h([z]) := \phi(z)$$

est bien définie.

• h est surjective : $h(X) = h(p(\mathbb{C}^*)) = \phi(\mathbb{C}^*) \underset{a}{=} S^1 \times S^1$

• h est injective car $\phi(z) = \phi(z') \Rightarrow z \sim z'$ (b)

autrement dit : $h([z]) = h([z']) \Rightarrow [z] = [z']$. □

d) • h est continue car $h \circ p = \phi$ l'est → ppté de la top quotient.

• h est continue, bijective, avec X compact et $S^1 \times S^1$ séparé.

Donc (cours) h est un homéomorphisme. □

5) S^1 est connexe par arcs (sphère dans E de dim ≥ 2)

$S^1 \times S^1$ est connexe par arcs (exo 5).

$X \underset{top}{\cong} S^1 \times S^1 \Rightarrow X$ connexe par arcs $\Rightarrow X$ connexe. □

Autre méthode : $\mathbb{C}^*$ connexe (vu en TD) et $\phi(\mathbb{C}^*) = S^1 \times S^1$

avec ϕ continue donc $S^1 \times S^1$ connexe.

Enfin $X \underset{top}{\cong} S^1 \times S^1$ donc X connexe. □

$\boxed{\text{Ex7}}$ 1) u et v linéaires $\Rightarrow u \circ v - v \circ u$ aussi
—— continues $\Rightarrow$ ——
} donc $[u, v] \in \mathcal{L}(E)$. □

2) RpA : $[u, v] = I$

a) $(\mathcal{P}_n)$: $[u, v^{n+1}] = (n+1) v^n$ $(n \geq 0)$

$(\mathcal{P}_0)$ est vraie : $[u, v^{0+1}] = [u, v] = I = (0+1) v^0$

HR : $(\mathcal{P}_n)$ vraie : $[u, v^{n+1}] = (n+1)v^n$

Montrons $(\mathcal{P}_{n+1})$: $[u, v^{n+2}] = u \circ v^{n+2} - v^{n+2} \circ u$

$$= \left([u, v^{n+1}] + v^{n+1} \circ u\right) \circ v - v^{n+2} \circ u$$

HR

$$= \left[(n+1)v^n + v^{n+1} \circ u\right] \circ v - v^{n+2} \circ u$$

$$= (n+1)v^{n+1} + v^{n+1} \circ u \circ v - v^{n+2} \circ u$$

$$= (n+1)v^{n+1} + v^{n+1} \circ \underbrace{[u, v]}_{= I}$$

$$= (n+1)v^{n+1} + v^{n+1}$$

$$= (n+2)v^{n+1} \quad . \qquad \square$$

b) Soit $n \geqslant 0$ $\quad \| [u, v^{n+1}] \| = \| u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u \| \leqslant \|u\| \|v^{n+1}\| + \|v^{n+1}\| \|u\|$

et $\quad \| [u, v^{n+1}] \| \leqslant \|u\| \|v\| \|v^n\| + \|v^n\| \|v\| \|u\| = 2 \|u\| \|v\| \|v^n\|$ $\square$

c) (a) et (b) donnent : $\forall n \geqslant 0 \quad \| (n+1) v^n \| \leqslant 2 \|u\| \|v\| \|v^n\|$

soit : $\forall n \geqslant 0 \quad (n+1) \|v^n\| \leqslant 2 \|u\| \|v\| \|v^n\| \qquad (*)$

Cas 1 : $\forall n \geqslant 0 \quad v^n \neq 0$

alors $\|v^n\| > 0$ et $(*) \Rightarrow \quad n+1 \leqslant 2 \|u\| \|v\| \quad \forall n$

ce qui est exclu. ∇

Donc : cas 2 : $\exists N \geqslant 0 , \quad v^N = 0$

mais $N = 0$ n'est pas possible $\quad (v^0 = I\ !)$

Donc : $\boxed{\exists N \geqslant 1 \quad v^N = 0} \quad (**)$

d) Soit $n \geqslant 1$, supposons $v^n = 0$

Comme $[u, v^n] = n v^{n-1}$ on a : $0 = \underset{\neq 0}{n} v^{n-1}$ donc $v^{n-1} = 0$ $\square$

On a donc : $v^N = 0$ avec $N \geqslant 1$

et $v^n = 0 \Rightarrow v^{n-1} = 0$ pour $n \geqslant 1$

de proche en proche : $v^N = 0 \Rightarrow v^{N-1} = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow v^{N-(N-1)} = 0$

Donc $v = 0$ □

MAIS : $[u,v] = I \Rightarrow 0 = I$ ce qui est exclu. □

$\boxed{\text{Méthode alternative}}$ si $v^N = 0$ avec $N \geqslant 1$ alors on peut pousser jusqu'au dernier cran : $v^{N-N} = 0$ donc $v^0 = 0$ donc $I = 0$ contradiction □

$\boxed{\text{Ex 8}}$ $u : E \xrightarrow[\text{lin.}]{} F$ $\quad$ Imu de dim finie.

1) u continue $\Rightarrow$ Ker$u$ fermé.

clair puisque $\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{0\})$. □

2) Hyp : Ker u fermé.

(a) • $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} u = \dim (E/\operatorname{Ker} u) = \underbrace{\dim \operatorname{Im} u}_{\text{finie}}$ $\quad$ (puisque $E/\operatorname{Ker} u \cong \operatorname{Im} u$)

□

• Ker u fermé et de codim finie $\Rightarrow$ Ker u admet un suppl. topologique S :

$$E = \operatorname{Ker} u \underset{\text{top}}{\oplus} S$$

b) S est aussi un suppl. algébrique de Ker$u$.

Donc $S \underset{\text{alg}}{\cong} E/\operatorname{Ker} u$ et $\dim S < \infty$. $\quad$ ($\dim S = \dim \operatorname{Im} u$).

□

c)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \\ S \arrow[u, "j"] \arrow[ur, "u_S"'] & \end{tikzcd}$$

• u_S linéaire : restriction d'une appl. linéaire à un SEV.

• u_S injective : Soit $s \in S$

$u_S(s) = 0 \Rightarrow s \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow s \in \operatorname{Ker} u \cap S$

$\Downarrow$

$s = 0$.

- $u_S : S \to F$ <u>linéaire</u> avec S de <u>dimension finie</u>

D'après le cours : u_S est automatiquement continue. $\square$

---

d) $\begin{cases} q : E \to S & \text{projection sur } S \\ p : E \to \operatorname{Ker} u & \text{——————— } \operatorname{Ker} u \end{cases}$

$\forall x \in E \qquad x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Ker} u} \oplus \underbrace{q(x)}_{\in S}$

- $$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "j"'] \arrow[dr, "u_S"] & \\ E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "q"'] & & F \\ & S \arrow[ur, "u_S"'] & \end{tikzcd}$$

Soit $x \in E$

$$u(x) = u\left(p(x) + q(x)\right)$$
$$= \underbrace{u(p(x))}_{0} + u(\underbrace{q(x)}_{\in S})$$
$$= u_S(q(x))$$

Donc $u = u_S \circ q$. $\square$

- q est continue : car la somme $E = \operatorname{Ker} u \oplus S$ est topologique.
- u_S est continue : par (c)

Donc u est continue. $\square$

---

3) Effectuons la décomposition canonique (algébrique) de u :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ E/\operatorname{Ker} u \arrow[r, "\hat{u}"] & \operatorname{Im} u \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

i continue : top. induite sur $\operatorname{Im} u$
π continue : top. quotient
$\hat{u}$ continue : car $\hat{u}$ <u>linéaire</u> et $\dim(E/\operatorname{Ker} u) < \infty$

<u>Donc</u> : $u = i \circ \hat{u} \circ \pi$ est continue. $\square$