Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2024-2025

HAX506X - Probabilités

Contrôle continu 1 & 2 - 29/11/2024

- Durée : 1h (+15 min si tiers-temps)

- Les documents et appareils électroniques ne sont pas autorisés.

- Le contrôle continu 1 correspond aux deux premiers exercices, tandis que le contrôle continu 2 correspond au troisième exercice. Cette division est purement artificielle et découle d'une contrainte administrative.

- Vous indiquerez sur votre copie vos nom, prénom, numéro d'étudiant, et groupe de TD (A / B / C / Bi-licence / CUPGE). Pour chacune de ces informations manquantes, un point sera retiré à la note finale.

Exercice 1 - Questions diverses

Les trois questions sont indépendantes.

1. Énoncer l'inégalité de Markov.
2. Calculer la fonction caractéristique d'une variable aléatoire de loi binomiale.
3. Donner (en justifiant) un exemple de deux variables aléatoires X et Y de même loi qui vérifient $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.

Exercice 2 - Fonction génératrice et parité

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Donner la définition de la fonction génératrice G_X de X et rappeler la valeur de $G_X(1)$.
2. Soit A l'événement "X est paire". Exprimer $\mathbb{P}(A)$ en fonction de $G_X(-1)$.
3. On suppose maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Calculer la fonction génératrice de X et en déduire la probabilité que X soit paire.

Exercice 3 - Loi de Pareto

Soit $\alpha > 0$. On considère une variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X est donnée par

$$F_X(t) = (1 - t^{-\alpha})\mathbb{1}_{]1,\infty[}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

On dit alors que X suit une loi de Pareto de paramètre α.

1. Déterminer la densité de X.
2. Donner une condition sur α pour que X admette une espérance finie. Calculer $\mathbb{E}[X]$ dans ce cas.
3. Donner une condition sur α pour que X admette un moment fini d'ordre $p \in \mathbb{N}$.
4. On pose $Y = \sqrt{X}$. Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y. En déduire la loi de Y.
5. On pose $Z = \ln(X)$. Calculer $\mathbb{E}[h(Z)]$ pour toute fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. En déduire la loi de Z.