Année 2022-2023 HAX601X Topologie
L3 — Mathématiques

Examen session 1 (24 mai 2023)
durée : 3h

N.B. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits. La qualité de la rédaction et de la présentation sera prise en compte dans la notation. Les exercices sont indépendants. Vous pouvez admettre le résultat d'une question pour traiter les suivantes.

Partie 1. Démonstrations de cours

N.B. En *italiques* : consignes pour la rédaction des démonstrations. Bien faire apparaître où et comment ces consignes sont utilisées.

Exercice 1. **(2 points)** Soit (X,d) un espace métrique.

1. Montrer que toute suite de Cauchy de X est bornée.
2. Montrer que si une suite de Cauchy de X possède une valeur d'adhérence, alors elle est convergente.
3. Montrer que si X est compact, alors X est complet.

Utiliser les définitions : suite de Cauchy, valeur d'adhérence d'une suite, compacité (séquentielle).

Exercice 2. **(2 points)** Soit E un espace vectoriel réel, et soient N, N' deux normes sur E. Montrer que si N et N' définissent la même topologie sur E, alors elles sont équivalentes.

Exercice 3. **(1 point)** Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, et soient $u : E \to F$ et $v : F \to G$ des applications linéaires continues. Montrer que $|||v \circ u||| \leq |||v|||\,|||u|||$, pour les normes triples associées.

Exercice 4. **(4 points)** Soit X un ensemble non vide. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Rappeler la définition de $\|\cdot\|_\infty$ et montrer que l'espace vectoriel normé $(\mathscr{B}(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

Bien détailler les étapes.

Partie 2. Exercices

Exercice 5. Soient (X,d) un espace métrique, et A une partie non vide compacte de X. Pour $r>0$, on pose

$$K_r := \bigcup_{a\in A} D(a,r),$$

où $D(a,r)$ désigne la boule fermée de centre a et de rayon r.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K_r. Montrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(x_n,a_n)\le r$ pour tout n.
2. Montrer que K_r est une partie fermée de X.
3. On suppose de plus que, pour chaque point $x\in X$, la boule fermée $D(x,1)$ est compacte. Montrer qu'alors $K_{1/2}$ est compact. *On peut utiliser la compacité séquentielle.*

Exercice 6. Le but de cet exercice est de donner une démonstration du théorème du point fixe de Banach différente de celle vue en cours.

On se donne donc un espace métrique complet non vide (X,d) et une application $f:X\to X$ contractante (c'est-à-dire k-lipschitzienne avec $0\le k<1$). Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$A_n := \{x\in X\,;\, d(x,f(x))\le 1/n\}$$

1. Montrer que chaque A_n est fermé
2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $x\in X$ un point quelconque. Montrer qu'il existe un $p\in\mathbb{N}$ tel que $f^p(x)\in A_n$.
3. Montrer que $d(x,y)\le d(f(x),f(y))+2/n$ quels que soient $x,y\in A_n$. En déduire une majoration du diamètre de A_n.
4. Quel résultat du cours permet de conclure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ n'est pas vide ?
5. En déduire que f possède un point fixe.

Exercice 7. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ nulles à partir d'un certain rang. On munit E du produit scalaire $\langle u,v\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ et de la norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire. *On admet que $\langle u,v\rangle$ est bien un produit scalaire.*

On considère l'application $\phi:E\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(u) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$$

1. Montrer que ϕ est bien définie (il y a une somme infinie...), linéaire et continue.
2. Montrer que $|||\phi||| = \pi/\sqrt{6}$. *N.B. On rappelle que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.*
3. **(question hors-barème)** Existe-t-il un élément $a\in E$ tel que $\langle a,u\rangle=\phi(u)$ pour tout $u\in E$? Que peut-on en déduire sur E muni de ce produit scalaire ?