HAX601X - Topologie des espaces métriques
Partie II

Laurent GUIEU[1]

Mars 2024

1. Département de Mathématiques, CC 051, Université de Montpellier Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. Mèl : Laurent.Guieu@umontpellier.fr

"A beginning is the time for taking the most delicate care that the balances are correct."

-Princess Irulan (Manual of Muad'Dib) - Dune

Table des matières

1 Complétude **5**
1.1 Suites de Cauchy. 5
1.2 Complétude et produit. 8
1.3 Complétude et sous-espaces. 9
1.4 Exemples fondamentaux. 9
1.4.1 Fonctions bornées sur un ensemble. 9
1.4.2 Fonctions continues sur un compact 10
1.4.3 Fonctions continues sur un intervalle fermé. 11
1.5 Le théorème du point fixe. 13

2 Espaces normés **15**
2.1 Généralités. 15
2.2 Structure induite - structure produit. 16
2.3 Premières propriétés. 17
2.4 Applications linéaires continues 21
2.5 Somme directe topologique et quotients 28
2.5.1 Rappels algébriques sur les espaces vectoriels quotients 28
2.5.2 Espaces normés quotients 30
2.5.3 Somme directe topologique 32
2.6 Dualité 34
2.6.1 Rappels algébriques 34
2.6.2 Caractérisation des formes linéaires continues 35
2.6.3 Hahn-Banach et ses conséquences 38
2.7 Dimension finie (ou non...). 40
2.8 Séries dans un espace normé. 44
2.9 Facultatif - L3/M1 : the New Frontier. 48

3 Espaces de Hilbert **51**
3.1 Applications et formes bilinéaires continues 51
3.2 Espaces préhilbertiens réels 53

3.2.1 Projecteurs orthogonaux 56
3.2.2 Minimisation de la distance à un sous-espace 58
3.2.3 Dualité et produit scalaire 58
3.2.4 Le théorème de projection 58
3.2.5 Bases hilbertiennes 58

4 Annexes **59**

CHAPITRE 1

Complétude

1.1 Suites de Cauchy.

Définition 1.1.1 Une suite (x_n) d'un espace métrique (X, d) sera dite *de Cauchy* si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ [n \geq N \ \textit{et}\ m \geq N] \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Une suite de Cauchy est donc une notion purement métrique. Intuitivement, cela signifie que les termes x_n et x_m de notre suite se rapprochent de plus en plus quand n et m deviennent de plus en plus grands. Enonçons déjà quelques propriétés utiles et immédiates :

Proposition 1.1.1

1. *Si d et δ sont deux distances équivalentes sur X, les espaces métriques (X, d) et (X, δ) ont les mêmes suites de Cauchy.*
2. *L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est une suite de Cauchy.*
3. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
4. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
5. *Toute suite de Cauchy possèdant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur.*

Preuve:

(1) Supposons donc l'existence de deux constantes strictement positives α et β telles que pour tout $x, y \in X$ on ait :

$$\alpha\, d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq \beta\, d(x, y).$$

Si (x_n) est une suite de Cauchy de (X, d), l'inégalité $\delta(x_m, x_n) \leq \beta d(x_m, x_n)$ va nous assurer que (x_n) est une suite de Cauchy de (X, δ). La réciproque est claire en considérant l'inégalité $d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{\alpha}\, \delta(x_m, x_n)$. ▼

(2) Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application uniformément continue et (x_n) une suite de Cauchy de points de X. Posons $y_n := f(x_n)$ et montrons que (y_n) est une suite de Cauchy dans Y. Soit donc $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$d(x, x') < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon.$$

Pour avoir $\delta(y_m, y_n) < \epsilon$, il suffit donc que $d(x_m, x_n) < \alpha$. Mais comme (x_n) est de Cauchy, cette dernière condition est remplie dès que m et n sont suffisamment grands (ie : supérieurs à un rang N qui ne dépend que de α). ▼

(3) Soit (x_n) une suite de Cauchy de points de X. Il existe donc un rang N au-delà duquel $d(x_m, x_n) \leq 1$. On aura en particulier $d(x_n, x_N) \leq 1$ pour tout $n \geq N$. Posons ensuite $R := \max(d(x_0, x_N), d(x_1, x_N), \ldots, d(x_{N-1}, x_N), 1)$. Notre suite est contenue dans la boule fermée de centre x_N et de rayon R ; elle est donc bornée. ▼

(4) Soit (x_n) une suite convergente de points de X. Notons a sa limite. Un réel $\epsilon > 0$ étant donné, on peut donc trouver un rang N au-delà duquel on aura $d(x_n, a) < \frac{\epsilon}{2}$. Par suite, dès que m et n seront supérieurs à N, on aura :

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(a, x_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

▼

(5) Soit (x_n) une suite de Cauchy de points de X admettant a comme valeur d'adhérence. Soit $\epsilon > 0$ et N un rang au-delà duquel $d(x_m, x_p) < \frac{\epsilon}{2}$. Le lemme 1.1.1 nous dit aussi que pour tout entier m il existe un entier $n_m \geq m$ tel que $x_{n_m} \in B(a, \frac{\epsilon}{2}[$. Si m est un entier $\geq N$, il vient donc :

$$d(a, x_m) \leq d(a, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

(puisque $n_m > m \geq N$). ■

Lemme 1.1.1 *Si (x_n) est une suite de points d'un espace métrique (X, d), les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *(x_n) admet une sous-suite convergeant vers a ;*
2. *a est une valeur d'adhérence de (x_n) ;*
3. *$\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n$ entier $\geq m,\ x_n \in V$;*
4. *$\forall \epsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n$ entier $\geq m,\ d(a, x_n) < \epsilon$.*

Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ **Hyp :** $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = a$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : k \mapsto n_k$ strictement croissante.

En traduisant un peu l'hypothèse, on obtient :

$$\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \exists K_V \in \mathbb{N}, \forall k \geq K_V,\ x_{n_k} \in V.$$

Soit donc V un voisinage de a et m un entier quelconque et posons $p := \max(K_V, m)$. Comme $p \geq K_V$ on a $x_{n_p} \in V$. De plus $p \geq m$ donne $n_p \geq n_m$ et finalement $n_p \geq m$ (puisque on a toujours $\varphi(k) \geq k$ pour une extractrice).▼

$\boxed{\Leftarrow}$ **Hyp :** $\forall V \in \mathcal{V}_a,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists n \geq m,\ x_n \in V$.

Posons $I_{m,k} := \{n \in \mathbb{N} \mid n > m \text{ et } d(a, x_n) < \frac{1}{k}\}$ puis définissons une application $\varphi : k \mapsto n_k$ de la manière suivante :

$$n_0 := 1 \qquad n_k := \min\left(I_{n_{k-1},k}\right) \text{ si } k \geq 1.$$

En prenant $V = B(a, 1/k[$, on constate que $I_{m,k}$ est une partie non-vide de $\mathbb{N}$, ce qui assure de l'existence de l'élément minimum. Par construction, φ est strictement croissante ; c'est donc une extraction. D'autre part, on a : $d(a, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$, ce qui démontre la convergence de la sous-suite (x_{n_k}) vers a.

■

Il existe des suites de Cauchy non convergentes ; considérons à titre d'exemple la suite de Héron d'Alexandrie :

$$\begin{cases} x_0 &= 2 \\ x_{n+1} &= x_n/2 + 1/x_n. \end{cases}$$

En tant que suite dans $\mathbb{R}$, elle converge vers $\sqrt{2}$ (exercice !) ; elle est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Comme tous les x_n sont rationnels, c'est aussi une suite de Cauchy dans le sous-espace $\mathbb{Q}$. En revanche, par unicité de la limite, elle ne converge pas dans le sous-espace $\mathbb{Q}$.

Définition 1.1.2 Un espace métrique sera dit *complet* si chacune de ses suites de Cauchy converge.

Nous venons de montrer, dans l'exemple précédent, que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En revanche :

Proposition 1.1.2 $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *est un espace complet.*

Preuve: Soit (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Toute suite de Cauchy étant bornée, le théorème de Bolzano-Weiertsrass nous assure de l'existence d'une valeur d'adhérence pour (x_n). Cette dernière est ainsi une suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence : donc, elle converge.■

La continuité d'une application ne suffit pas à préserver le caractère "Cauchy" d'une suite : la bonne notion est la continuité uniforme. Voyons cela de plus près :

Proposition 1.1.3 *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. L'image par une application uniformément continue $f : X \to Y$ d'une suite de Cauchy de X est une suite de Cauchy de Y.*

Preuve: Soit (x_n) une suite de Cauchy de X. Donnons-nous un $\epsilon > 0$, et soit $\alpha > 0$ tel que $d(x, x') < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(x')) < \epsilon$. Comme (x_n) est de Cauchy, il existe un rang N tel que pour tous $n, m > N$ on ait $d(x_n, x_m) < \alpha$. Finalement on aura $\delta(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon$ dès que $n, m > N$. ■

Corollaire 1.1.1 *Soit $h : X \to Y$ est un homéomorphisme tel que h et h^{-1} soient uniformément continues. On a alors :*

1. *une suite (x_n) est de Cauchy dans X si et seulement si sa suite image $(h(x_n))$ est de Cauchy dans Y ;*
2. *X est complet si et seulement si Y est complet.*

1.2 Complétude et produit.

Si (X,d) et (Y,δ) sont deux espaces métriques, il n'y a pas de distance privilégiée (ie : canonique) sur l'ensemble $X \times Y$. Néanmoins, nous pouvons quand même considérer la distance suivante :

$$D_\infty((x,y),(x',y')) := \max\{d(x,x'),\delta(y,y')\}$$

et convenir d'appeler espace métrique produit de (X,d) et (Y,δ) l'espace métrique $(X \times Y, D_\infty)$. Rappelons que nous avons montré en TD (planche 2) que la topologie associée à cette distance est la topologie produit.

Proposition 1.2.1 *La suite $((x_n,y_n))$ est de Cauchy dans l'espace métrique $(X\times Y, D_\infty)$ si et seulement si (x_n) et (y_n) sont de Cauchy dans leurs espaces respectifs.*

Preuve: Posant $z_n := (x_n,y_n)$, on a d'une part

$$d(x_n,x_m) \le D_\infty(z_n,z_m) \quad \text{et} \quad \delta(x_n,x_m) \le D_\infty(z_n,z_m)$$

ce qui nous montre que si (z_n) est de Cauchy, il en va de même pour (x_n) et (y_n). Et, d'autre part,

$$D_\infty(z_n,z_m) \le d(x_n,x_m) + \delta(x_n,x_m)$$

ce qui nous assure de la réciproque. ■

Rappelons que les normes suivantes sur $\mathbb{R}^2$:

$$\left\| \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right\|_p = (|s|^p + |t|^p)^{\frac{1}{p}}$$

sont toutes équivalentes à :

$$\left\| \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{|s|,|t|\}.$$

Par conséquent, D_∞ est fortement équivalente à n'importe laquelle des distances suivantes :

$$D_p((x,y),(x',y')) := \left\| \begin{bmatrix} d(x,x') \\ \delta(y,y') \end{bmatrix} \right\|_p .$$

Du coup, si nous remplaçons D_∞, par D_p, nous changeons la structure métrique sur $X\times Y$, mais sa topologie et ses suites de Cauchy restent inchangées. Ainsi, lorsque nous parlerons de "produit d'espaces métriques" sans plus de précisions , cela sous-entendra que l'on a équipé notre espace produit d'une des distances : $D_1, \cdots, D_p, \ldots, D_\infty$.

Corollaire 1.2.1 *Un produit d'espaces complets est complet.*

Théorème 1.2.1 $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *est complet.*

Remarque 1.2.1 Nous verrons bientôt que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ (et donc leurs distances associées) sont équivalentes. On peut donc préciser le résultat précédent en ajoutant que la complétude de $\mathbb{R}^n$ est en fait valable pour n'importe quel choix de norme.

1.3 Complétude et sous-espaces.

Proposition 1.3.1 *Soit A un sous-espace d'un espace métrique X.*

1. *Si (a_n) est une suite de points de A, alors (a_n) est une suite de Cauchy dans (X, d) si et seulement si (a_n) est une suite de Cauchy dans (A, d_A).*
2. *Si A est complet, il est fermé.*
3. *Si A est fermé et X est complet, A est complet.*
4. *Si A est compact, A est complet.*

Preuve: (1) Evident de par la définition : cela va sans dire mais c'est mieux en le disant. ▼

(2) Soit x un point adhérent à A et (a_n) une suite de points de A convergeant vers x. La suite (a_n) est aussi une suite de Cauchy dans l'espace métrique (A, d_A) et comme ce dernier est complet, la suite (a_n) converge dans (A, d_A). Par unicité de la limite, (a_n) converge nécessairement vers x. Donc $x \in A$. ▼

(3) Soit (a_n) une suite de Cauchy dans (A, d_A). C'est aussi une suite de Cauchy dans (X, d), et comme ce dernier est complet la suite (a_n) converge dans (X, d) vers un point $x \in X$. Mais, A étant fermé, le point x est aussi dans A. En conclusion, la suite (a_n) converge dans (A, d_A). ▼

(4) Si (a_n) est une suite de Cauchy dans (A, d_A), ce dernier étant compact, on peut extraire de (a_n) une sous-suite convergente. Du coup, la suite (a_n) converge. Sa limite reste dans A (car un compact dans un séparé est fermé). ■

1.4 Exemples fondamentaux.

1.4.1 Fonctions bornées sur un ensemble.

Soit X un **ensemble** non-vide et $l^\infty(X)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : X \to \mathbb{R}$ bornées sur X. Il est clair que $l^\infty(X)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(X)$ de toutes les fonctions sur X. On vérifie de plus que :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X}(|f(x)|)$$

définit une norme sur $l^\infty(X)$; notons d_∞ la distance associée.

Proposition 1.4.1 *$(l^\infty(X), d_\infty)$ est complet.*

Preuve: Soit donc (f_n) une suite de Cauchy dans $l^\infty(X)$:

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall, n, m \geq N,\ \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon.$$

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ Si $x_0 \in X$, la suite réelle $(f_n(x_0))$ est de Cauchy car :

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty ;$$

elle est donc convergente vu que $\mathbb{R}$ est complet. Notons $f(x_0)$ sa limite. On définit ainsi une fonction $f : X \to \mathbb{R}$. ▼

$\boxed{\text{Etape 2 :}}$ La fonction f est bien dans $l^\infty(X)$. En effet, comme (f_n) est de Cauchy dans $l^\infty(X)$, elle est aussi bornée et il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n\|_\infty \leq M$. Soit encore

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\ |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty \leq M.$$

Et en faisant tendre $n \to +\infty$ dans $|f_n(x)| \leq M$, on arrive à $|f(x)| \leq M$ pour tout x dans X. ▼

$\boxed{\text{Etape 3 :}}$ Il nous reste à vérifier que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ quand $n \to +\infty$. Déjà, pour un x, un n, et un m quelconque, on a

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & \leq & |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ |f_n(x) - f(x)| & \leq & \|f_n - f_m\|_\infty + |f_m(x) - f(x)|. \end{array}$$

Donnons-nous maintenant un réel $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang N (ne dépendant <u>que</u> de ϵ) tel que

$$\forall n, m \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \ \epsilon\ + |f_m(x) - f(x)|;$$

et si on fait tendre $m \to +\infty$ dans cette expression :

$$\forall n \geq N,\ \forall x \in X, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \ \epsilon.$$

On passe ensuite au sup sur les $x \in X$:

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n - f\| \leq \ \epsilon.$$

c.q.f.d. ■

Remarque 1.4.1 Si nous nous plaçons dans le cas particulier $X = \mathbb{N}$, nous tombons sur l'espace l^∞ des suites réelles bornées $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, avec $\|x\|_\infty = \sup_n(|x_n|)|)$. Notre résultat nous assure que cet espace de suites est complet.

1.4.2 Fonctions continues sur un compact

On suppose ici que X est un **espace topologique compact**. Toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ sur un compact étant bornée, l'espace $C^0(X)$ des fonctions continues sur X est donc un sous-espace vectoriel de l'espace complet $(l^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$.

Proposition 1.4.2 *$C^0(X)$ est fermé dans $(l^\infty(X), d_\infty)$.*

Preuve: Il suffit de vérifier que les limites de suites convergentes de points de $C^0(X)$ restent [1] dans $C^0(X)$. Soit donc f_n une suite convergente dans $l^\infty(X)$ dont les termes

1. En d'autres termes : que la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions continues reste continue : cela doit vous rappeler quelque chose...

$f_n : X \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Notons f sa limite. Il s'agit de montrer que f est continue.

$\boxed{\text{Etape 1 :}}$ L'hypothèse de convergence peut s'écrire

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_\epsilon,\ \|f_n - f\|_\infty < \frac{\epsilon}{3} \qquad (\clubsuit)$$

et l'hypothèse de continuité en un point a

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists V_\epsilon \in \mathcal{V}_a,\ \forall x \in X,\ x \in V_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (\blacklozenge)$$

▼

$\boxed{\text{Etape 2 :}}$ Pour tous n, x et a, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a))| \\ &\leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)| + \|f - f_n\|_\infty \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(a)|. \blacktriangledown \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Etape 3 :}}$ Soit a fixé dans X et faisons le choix d'un $\epsilon > 0$. L'hypothèse $(\clubsuit)$ nous fournit un rang N_ϵ tel que pour tout $x \in X$:

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\|f - f_{N_\epsilon}\|_\infty + |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(a)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + |f_{N_\epsilon}(x) - f_{N_\epsilon}(a)|.$$

L'hypothèse $(\blacklozenge)$ nous donne ensuite un voisinage V_ϵ de a tel que :

$$\forall x \in V_\epsilon,\ |f(x) - f(a)| \leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}$$

ce qui achève notre démonstration. ■

Corollaire 1.4.1 $(C^0(X), d_\infty)$ *est complet.*

1.4.3 Fonctions continues sur un intervalle fermé.

L'espace $C^0(I)$ des fonctions continues sur l'intervalle $I = [a, b]$ admet deux normes intéressantes : $\|\cdot\|_\infty$ déjà étudiée ci-dessus mais aussi :

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

On sait maintenant que $(C^0(I), d_\infty)$ est complet mais en revanche :

Proposition 1.4.3 *L'espace* $(C^0(I), d_1)$ *n'est pas complet.*

Preuve: Contentons-nous de prouver ce résultat dans le cas où $I = [0,2]$. Considérons la suite de fonctions (f_n) sur I définie par :

$$f_n(t) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ -nt+n+1 & \text{si} \quad t \in [1, 1+\frac{1}{n}] \\ 0 & \text{si} \quad t \in [1+\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$$

Chaque f_n est une application affine par morceaux et exempte de discontinuités aux points de raccordement : elle est donc continue. Si m est un entier $\geq n$, le nombre positif $d_1(f_n, f_m)$ est égal à l'aire du triangle (A, B_m, B_n) où

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B_n = \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{n} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calculons ce nombre :

$$d_1(f_n, f_m) = \frac{1}{2} \det\left(\overrightarrow{AB}_m, \overrightarrow{AB}_n\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Il est alors clair que (f_n) est de Cauchy. Supposons maintenant que notre suite admette une limite f dans $(C^0(I), d_1)$. Il vient

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f) &= \int_0^2 |f_n(t) - f(t)|\, dt \\ &= \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\, dt + \int_1^{1+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|\, dt + \int_{1+\frac{1}{n}}^2 |f_n(t) - f(t)|\, dt \\ &= \int_0^1 |1 - f(t)|\, dt + \int_1^{1+\frac{1}{n}} |f_n(t) - f(t)|\, dt + \int_{1+\frac{1}{n}}^2 |f(t)|\, dt \\ &= \qquad \alpha \qquad + \qquad \beta_n \qquad + \qquad \gamma_n. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\forall n \geq 1, \qquad 0 \leq \alpha + \beta_n + \gamma_n = d_1(f_n, f). \qquad (*)$$

avec α, β_n et γ_n tous positifs. On a de plus :

$$0 \leq \beta_n \leq \frac{1}{n}(1 + \sup_I |f|) \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = F(2) - F(1 + \frac{1}{n})$$

(où F désigne une primitive de $|f|$) ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = \int_1^2 |f(t)|\, dt.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$ dans la relation $(*)$, on arrive finalement à :

— $\alpha = 0$, ce qui implique que f vaut 1 sur $[0,1]$,

— puis que $\int_1^2 |f(t)|\, dt = 0$, ce qui implique que f vaut 0 sur $[1, 2]$;
mais ceci est contradictoire avec la continuité supposée de f. ■

Corollaire 1.4.2 *d_1 et d_∞ ne sont pas équivalentes sur $C^0(I)$.*

On retrouve ainsi un résultat obtenu d'une autre manière dans la planche de TD 2.

1.5 Le théorème du point fixe.

Définition 1.5.1 Une application d'un espace métrique dans lui-même sera dite *contractante* si elle est k-lipschitzienne avec $k \in [0, 1[$.

Théorème 1.5.1 *Toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède exactement un point fixe.*

Preuve: Soit $f : X \to X$ contractante de rapport k. Fixons un point a dans X et définissons une suite (x_n) en posant :

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & f(x_n) \quad \text{si } n \geq 0. \end{cases}$$

En d'autres termes : $x_n = f^n(a)$. Calculons :

$$\begin{aligned} d(x_{n+p}, x_n) & \leq \sum_{j=0}^{p-1} d(x_{n+j+1}, x_{n+j}) \\ & \leq \sum_{j=0}^{p-1} d(f^{n+j}(x_1), f^{n+j}(x_0)) \leq \sum_{j=0}^{p-1} k^{n+j} d(x_1, x_0) \\ & \leq \left(\sum_{j=0}^{p-1} k^{n+j} \right) d(x_1, x_0) \\ & \leq k^n \left(\sum_{j=0}^{p-1} k^j \right) d(x_1, x_0) \\ & \leq k^n \left(\frac{1 - k^p}{1 - k} \right) d(x_1, x_0) \leq k^n \frac{d(x_1, x_0)}{1 - k} \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq A\, k^n \qquad \text{où} \qquad A = \frac{d(x_1, x_0)}{1 - k}.$$

Comme $0 \leq k < 1$, la suite $k^n \to 0$ et (x_n) est une suite de Cauchy dans X ; elle est donc convergente. Notons l sa limite. Comme f est lipschitzienne, elle est aussi continue et nous pouvons passer à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$: on obtient $l = f(l)$. Le problème de l'existence d'un point fixe étant réglé, il reste à vérifier son unicité. Supposons que f admette un second point fixe l' dans X. Dans ce cas $d(l,l') = d(f(l), f(l')) \leq kd(l,l')$ d'où $d(l,l')(1-k) \leq 0$; mais, $1-k$ étant strictement positif, cette dernière inégalité n'est possible que si $d(l,l') = 0$. ■

CHAPITRE 2

Espaces normés

2.1 Généralités.

Tous les espaces vectoriels considérés auront pour corps des scalaires $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$. Par défaut nous travaillons avec des $\mathbb{R}$-espaces et il est sous-entendu que les résultats restent valables pour des $\mathbb{C}$-espaces si aucune précision n'est faite. En revanche, si un résultat ou une définition dépendent du choix du corps ou bien si la démonstration est différente suivant que l'on considére le cas réel ou bien le cas complexe, nous le préciserons toujours.

Définition 2.1.1 Une *norme* sur un espace vectoriel E est une fonction $x \mapsto \|x\|$ sur E astreinte à vérifier, pour tous x et y dans E et tout scalaire λ, les propriétés suivantes :

(P) $\|x\| \geq 0$ (positivité) ;
(S) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ (séparation) ;
(H) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ (homogénéité) ;
(T) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Le couple $(E, \|\cdot\|)$ est alors appelé *espace vectoriel normé* ou, plus brièvement, *espace normé*[1].

Comme conséquence immédiate de l'axiome **(T)**, nous avons la seconde inégalité triangulaire :

Proposition 2.1.1 *Pour tous x et y dans E, on a :*

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x - y\|\,.$$

Preuve: On a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \qquad \text{soit : } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|\,;$$

mais, en échangeant les notations x et y, on a aussi : $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. ■

1. ou encore plus brièvement : evn.

Remarque 2.1.1 Une fonction sur E vérifiant seulement les axiomes **(P)**, **(H)** et **(T)** sera appelée une *semi-norme.*

Tout espace normé est naturellement doté d'une structure d'espace métrique sous-jacente en posant $d(x,y) = \|x-y\|$. C'est un exercice facile que de s'assurer que d est bien une distance en partant des quatre propriétés de la norme [2]. Du coup, tout espace normé est naturellement muni d'une topologie : celle qui est associée à la distance d. Lorsque l'espace métrique sous-jacent est complet, on dira que E est un *espace de Banach.*

De manière analogue au cas métrique, on définit la notion d'équivalence de normes :

Définition 2.1.2 Deux normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sur un même espace vectoriel E sont dites *équivalentes* si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha\mathcal{N}' \leq \mathcal{N}(x) \leq \beta\mathcal{N}'(x).$$

Il est clair que deux normes sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont (fortement) équivalentes. Par conséquent, deux normes équivalentes donneront la même topologie. (Le cadre des espaces normés donnera en fait un résultat plus fort : nous verrons cela dans quelques pages.)

Exemple 2.1.1
1. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ avec les normes $\|\cdot\|_p$.
2. L'espace des fonctions bornées sur un ensemble muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. L'espace des fonctions continues sur un espace topologique compact muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ ou bien muni de $\|\cdot\|_1$.
4. Les espaces de suites $l^1 := \{x \in \mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \mid \sum x(n)$ est absolument convergente $\}$ (muni de $\|\cdot\|_1$) et l^∞ (muni de $\|\cdot\|_\infty$) .

Notons à ce stade que la dimension infinie va engendrer des phénomènes intéressants à étudier.

2.2 Structure induite - structure produit.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé E et notons $\|\cdot\|_F$ la restriction de la fonction $x \mapsto \|x\|$ à F. Il est clair que $\|\cdot\|_F$ définit une norme sur F.

Définition 2.2.1 L'espace normé $(F, \|\cdot\|_F)$ sera appelé sous-espace normé de E.

Bien entendu, F peut-être aussi vu comme sous-espace métrique de E, la distance induite sur F étant celle associée à $\|\cdot\|_F$. La topologie associée à cette distance coïncide avec la topologie induite sur F par celle de E. L'inclusion $j : F \hookrightarrow E : x \mapsto x$ est alors automatiquement continue (et linéaire). Profitons-en pour rappeler – car nous l'utiliserons souvent - une propriété fondamentale de la topologie induite :

Proposition[Rappel de Topologie] *Soit A une partie d'un espace topologique X, munie de la topologie induite et $j : A \hookrightarrow X : a \mapsto a$ l'inclusion. Alors, pour toute fonction $f : Y \to A$, on a :*

2. Notez bien que l'implication dans **(S)** est en fait une équivalence (grace à la propriété d'homogénéïté).

$$f \text{ est continue} \Leftrightarrow j \circ f \text{ est continue.}$$

Preuve: On rappelle que la topologie induite sur A rend j continue, puisque pour tout ouvert U de X, $j^{-1}(U) = A \cap U$ est –par définition– ouvert dans A.

$\boxed{\Rightarrow}$ est évident puisque f et j sont continues ▼

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit Ω un ouvert de A, alors $\Omega = A \cap U$ avec U ouvert dans X. Il vient ensuite

$$f^{-1}(\Omega) = f^{-1}(A \cap U) = f^{-1}\left(j^{-1}(U)\right) = (j \circ f)^{-1}(U)$$

et ce dernier est un ouvert de Y. ■

Nous utiliserons cette proposition dans le cas particulier où X est un espace normé et A un sous-espace vectoriel de X, muni de la norme induite.

Considérons à présent deux espaces normés $(X, \mathcal{N})$ et $(Y, \mathcal{N}')$. Il est facile de vérifier que la fonction

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_\infty := \max(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}'(y))$$

définit une norme sur l'espace vectoriel produit $X \times Y$,

Définition 2.2.2 On appellera *espace normé produit* de X et Y l'espace normé

$$(X \times Y, \|\cdot\|_\infty).$$

On notera (comme dans le cas métrique) qu'il n'y a pas de notion canonique d'espace normé produit. Nous faisons donc ici un choix particulier de norme pour étudier un tel espace. Toutefois (comme pour le cas métrique) si on, remplace $\|\cdot\|_\infty$ par une de celles-ci :

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_1 &= \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}'(y) \\ &\vdots \\ \|(x, y)\|_p &= (\mathcal{N}(x)^p + \mathcal{N}'(y)^p)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

la topologie associée restera inchangée (car toutes ces normes sont équivalentes entre-elles) et c'est la topologie produit.

Exemple 2.2.1 $(\mathbb{R}, |\cdot|) \times (\mathbb{R}, |\cdot|) = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

Ce que l'on vient de dire se généralise sans peine au cas du produit de k espaces normés.

2.3 Premières propriétés.

Proposition 2.3.1 *Dans un espace normé E,*

1. *la norme $x \mapsto \|x\|$ est une fonction lipschitzienne ;*
2. *l'application somme $\sigma : E \times E \to E : (x, y) \mapsto x + y$ est lipschitzienne ;*
3. *l'application produit externe $m : \mathbb{R} \times E \to E : (t, x) \mapsto tx$ est continue ;*

4. *toute translation $\tau_a : x \mapsto x + a$ est une isométrie de E ;*
5. *toute homothétie $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$ de rapport λ non-nul est un homéomorphisme de E sur lui-même.*

Preuve:

1. n'est qu'une ré-écriture de la seconde inégalité triangulaire. ▼
2. Notons $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$; il vient

$$\|\sigma(z) - \sigma(z')\| = \|(x - x') + (y - y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq 2\,\|z - z'\|_\infty .$$

▼

3. Notons $X = (t, x)$ et $X_0 = (t_0, x_0)$. Montrons que m est continue au point X_0. On a :

$$\begin{aligned}
\|m(X) - m(X_0)\| &= \|tx - t_0 x_0\| \\
&= \|(t - t_0)(x - x_0) + (t - t_0)x_0 + t_0(x - x_0)\| \\
&\leq |t - t_0|\,\|x - x_0\| + |t - t_0|\,\|x_0\| + |t_0|\,\|x - x_0\| \\
&\leq \|X - X_0\|^2 + \|x_0\|\,\|X - X_0\| + |t_0|\,\|X - X_0\| .
\end{aligned}$$

Dès lors, la continuité en X_0 est claire [3]. ▼

4. Toute translation τ_a conserve la distance associée à la norme. D'autre part τ_a est bijective d'inverse τ_{-a}. ▼
5. D'une part $h_\lambda = m \circ j_\lambda$ où $j_\lambda : E \to \mathbb{R} \times E : x \mapsto (\lambda, x)$, ce qui prouve la continuité de h_λ. D'autre part h_λ est bijective d'inverse $h_{1/\lambda}$. ■

La structure vectorielle simplifie beaucoup de choses :

Proposition 2.3.2 *Soit E un espace normé, a un point de E et r un réel > 0, :*

1. *l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r[$ est la boule fermée $B(a, r]$;*
2. *l'intérieur de la boule fermée $B(a, r]$ est la boule ouverte $B(a, r[$;*
3. *la frontière de $B(a, r[$ (resp. de $B(a, r]$) est la sphère $S(a, r)$;*
4. *toute boule est convexe (donc connexe par arcs) ;*
5. *si E est de dimension au-moins égale à 2, toute sphère est connexe par arcs.*

Preuve: Notons : $B = B(a, r[$, $B' = B(a, r]$ et $S = S(a, r)$.

1. L'inclusion $\overline{B} \subset B'$ est déjà vraie dans tout espace métrique [4]. Il nous reste à établir $B' \subset \overline{B}$. Soit donc $x \in B'$. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $x_n := (1 - \frac{1}{n})x + \frac{1}{n}a$. On obtient ainsi une suite de points se promenant sur le segment $[a, x]$ et vérifiant :

$$\|x_n - a\| = (1 - \frac{1}{n})\,\|x - a\| < r \quad (\text{ puisque } x \in B')$$

3. Rappelons qu'une norme est toujours continue.
4. Car $B \subset B'$ et une boule fermée d'un espace métrique est toujours fermée.

et
$$\|x_n - x\| = \frac{1}{n}\|x-a\| < \frac{r}{n}.$$
On en tire que que (x_n) est une suite de points de B tendant vers le point x, donc que x est adhérent à B. ▼

2. L'inclusion $B \subset \mathring{B}'$ est vraie dans tout espace métrique[5]. Il reste à établir que $\mathring{B}' \subset B$. Si x un point intérieur à B', il existe un $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho[\subset B'$. On veut montrer que x est dans B, c'est-à-dire que $\|x-a\| < r$. Or, on sait déjà que x est dans B', donc que $\|x - a\| \le r$. Nous aurons donc terminé si nous montrons que le cas $\|x-a\| = r$ n'arrive jamais. Supposons que ce soit le cas et posons, pour tout réel t strictement positif : $x_t := x + t(x-a)$. On a :
$$\|x_t - x\| = t\|x-a\| = t\,r \qquad \|x_t - a\| = (1+t)\|x-a\| = (1+t)r$$
Si on choisit $t = \frac{\rho}{2r}$, on a donc
$$\|x_t - x\| = \frac{\rho}{2} \qquad \|x_t - a\| = r + \frac{\rho}{2}$$
autrement dit : x_t est dans $B(x,\rho[$, mais n'est pas dans B', ce qui est contradictoire. ▼

3. Il vient :
$$\partial B' = \overline{B'} \backslash \mathring{B}' = B' \backslash B = S.$$
$$\partial B = \overline{B} \backslash \mathring{B} = B' \backslash B = S.$$
▼

4. Soit x_0 et x_1 deux points de $B(a,r]$. Montrons que le segment $I = [x_0, x_1]$ est contenu dans $B(a,r]$. Utilisons le paramétrage $x(t) := (1-t)x_0 + tx_1$ de I. On a :
$$\begin{aligned}\|x(t) - a\| &= \|(1-t)x_0 + tx_1 - a\| \\ &= \|(1-t)(x_0 - a) + t(x_1 - a)\| \\ &\le (1-t)\|x_0 - a\| + t\|x_1 - a\| \\ &\le (1-t)r + tr \\ &\le r\end{aligned}$$
c.q.f.d (preuve analogue pour la boule ouverte). ▼

5. Quitte à faire opérer une translation et une homothétie. On peut se restreindre à prouver la connexité par arcs de la sphère-unité S. Faisons maintenant entrer en jeu l'application
$$\varphi : E\backslash\{0\} \to S : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}.$$
Elle est continue car on peut écrire $j \circ \varphi = m \circ F$ où F désigne l'application continue : $F : E\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \times E : x \mapsto (\frac{1}{\|x\|}, x)$ et $j : S \hookrightarrow E$ est l'inclusion. Elle est également

5. Car $B \subset B'$ et une boule ouverte d'un espace métrique est toujours ouverte.

surjective puisque, pour tout $z \in S$ on a $z = \varphi(z)$. Il nous suffira donc de vérifier, dans le lemme suivant, que $E \backslash \{0\}$ est connexe par arcs pour montrer qu'il en est de même pour S. ∎

Lemme 2.3.1 $E \backslash \{0\}$ *est connexe par arcs*

Preuve: Soient a et b deux points distincts de 0, deux cas se présentent :
(1) $\boxed{b \neq \lambda\, a \text{ pour tout scalaire } \lambda < 0}$
En d'autres termes : soit a et b ne sont pas alignés avec l'origine, soit a et b sont alignés sur une même demi-droite issue de 0. Dans chacun de ces cas, le segment $[a, b]$ est inclus dans $E \backslash \{0\}$ et le paramétrage standard de $[a, b]$ nous fournit un arc continu de a à b. ▼
(2) $\boxed{\exists \lambda < 0,\ b = \lambda\, a}$
Dans ce cas a et b sont alignés avec l'origine mais situés de part et d'autre de cette dernière. C'est là que la dimension intervient : comme $\dim(E) \geq 2$, on peut trouver un point $c \neq 0$ dans un supplémentaire de la droite $\mathrm{Vect}(a)$. Dans ce cas les deux segments contigûs $[b, c]$ et $[c, a]$ sont dans $E \backslash \{0\}$ et nous laissons au lecteur la satisfaction de découvrir par lui-même un paramétrage continu explicite de $\gamma : [0, 1] \to [b, c] \cup [c, a]$. ∎

Proposition 2.3.3 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace normé E,*

1. *F est convexe (donc connexe par arcs);*
2. *l'adhérence de F est encore un sous-espace vectoriel de E;*
3. *si $F \neq E$, l'intérieur de F est vide et la frontière de F est égale à son adhérence.*

1. trivial. ▼
2. Comme σ est continue, $\sigma(\overline{F \times F}) \subset \overline{\sigma(F \times F)}$, ce qui s'écrit encore :

$$\begin{array}{rcl} \sigma(\overline{F} \times \overline{F}) & \subset & \overline{F + F} \\ \overline{F} + \overline{F} & \subset & \overline{F}. \end{array}$$

De la même manière, puisque m est continue :

$$\begin{array}{rcl} m(\overline{\mathbb{R} \times F}) & \subset & \overline{m(\mathbb{R} \times F)} \\ m(\mathbb{R} \times \overline{F}) & \subset & \overline{\mathbb{R} \cdot F} \\ m(\mathbb{R} \times \overline{F}) & \subset & \overline{F} \\ \mathbb{R} \cdot \overline{F} & \subset & \overline{F}. \end{array}$$

Donc $\overline{F}$ est stable par la somme et les dilatations. De plus, comme $0 \in F$, on a aussi $0 \in \overline{F}$.▼

3. Soit F un sous-espace strict de E. Soit donc $b \in E \backslash F$ et $a \in F$ puis posons $B = B(a, r[$ (avec $r > 0$). On va montrer que B n'est pas incluse dans F. Considérons pour cela un paramétrage de la demi-droite (épointée) issue de a et de vecteur directeur $\overrightarrow{ab}$:
$$t \in]0, +\infty[\quad \longmapsto \quad x_t := a + t(b - a).$$
Si on choisit $t = s$ ainsi :
$$0 < s < \frac{r}{\|b - a\|}$$
alors $\|x_s - a\| < r$. D'autre part, x_s n'est pas dans F, car sinon – b étant combinaison linéaire de x_s et de a – on aboutirait à $b \in F$, ce qui est exclu. Ainsi x_s est un point de B qui n'est pas dans F. L'espace F ne contient donc aucune boule ouverte de centre a. On en déduit qu'aucun point de F ne lui est intérieur.■

Il est important de retenir qu'un sous-espace **strict** de E n'est donc **jamais ouvert** et...n'est **pas toujours fermé** ! Au fil des pages suivantes, nous verrons pourquoi, dans la théorie des evn, on a une affection si particulière pour les sous-espaces vectoriels fermés.

Exercice 2.3.1 Donner une autre preuve du point (2) de la prop. 2.3.3 en utilisant la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

2.4 Applications linéaires continues

Proposition 2.4.1 *Si $u : E \to F$ est une application linéaire entre deux espaces normés, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est lipschitzienne*
2. *u est uniformément continue*
3. *u est continue*
4. *u est continue en 0*
5. *u envoit la boule unité fermée de E sur une partie bornée de F*
6. *il existe une constante positive C telle que, pour tout $x \in E$, on ait*
$$\|u(x)\| \leq C \|x\| .$$

Preuve:
Les implications (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) sont claires.

$\boxed{(4) \Rightarrow (5)}$ Si u est continue en l'origine, on peut trouver un $\alpha > 0$ tel que :
$$\forall x \in E, \ \|x\| \leq \alpha \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1.$$
Ce qui s'écrit encore,
$$\|x'\| \leq 1 \Rightarrow \|u(x')\| \leq \frac{1}{\alpha}.$$
Donc u est bornée sur la boule unité fermée. ▼

$\boxed{(5) \Rightarrow (6)}$ Supposons que $\|u(x)\| \leq C$ pour tout x dans $B(0, 1]$. Si $x \in E$, on a :

— soit $x = 0$ et $\|u(0)\| \leq C\,\|0\|$
— soit $x \neq 0$ et, comme $\frac{x}{\|x\|} \in B(0,1]$, il vient $\left\|u(\frac{x}{\|x\|})\right\| \leq C$, ce qui se ré-écrit $\|u(x)\| \leq C\,\|x\|$.

▼

$\boxed{(6) \Rightarrow (1)}$ On a $\|u(x-y)\| \leq C\,\|x-y\|$, soit encore, par linéarité,

$$\|u(x) - u(y))\| \leq C\,\|x-y\|\,.$$

■

Remarque 2.4.1 Dans (5) on peut changer "boule unité fermée" par :

1. "boule unité ouverte"
2. "sphère unité"

sans porter atteinte à la validité de la proposition.

Notons $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un sous-ensemble de l'espace vectoriel $\mathrm{L}(E,F)$ de toutes les applications linéaires $u : E \to F$. Par les théorèmes généraux sur la continuité, on a clairement la

Proposition 2.4.2 *$\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{L}(E,F)$.*

Lorsque $F = E$, l'espace $\mathcal{L}(E,E)$ des applications linéaires continues de E dans lui-même se note $\mathcal{L}(E)$: ses éléments sont appelés *endomorphismes* de E. Lorsque $F = \mathbb{R}$, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{R})$ des formes linéaires continues sur E se note E' et on l'appellera *dual topologique* de E. C'est bien entendu un sous-espace vectoriel du dual algébrique E^*.

Comme le noyau d'une application linéaire est la préimage de $\{0\}$, on a :

Proposition 2.4.3 *Le noyau d'une application linéaire continue est toujours un sous-espace fermé de son espace de départ.*

Attention : Si l'inverse d'une application linéaire bijective $u : E \to F$ est automatiquement linéaire, les choses ne se passent pas aussi bien pour ce qui est de la continuité : $u^{-1} : F \to E$ peut fort bien ne pas être continue ! On appellera donc *isomorphisme d'espaces normés* (ou, plus brièvement, *isomorphisme*) une application linéaire continue bijective $u : E \to F$ dont l'inverse est continue et on notera $\mathrm{Isom}(E,F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{L}(E,F)$ formé des isomorphismes de E sur F ; si un tel isomorphisme existe, on notera : $E \underset{evn}{\cong} F$. Notons que les isométries linéaires de E sur F sont des isomorphismes particuliers (on utilisera aussi l'expression synonyme "isomorphisme isométrique").

Lorsque $E = F$, on notera plus simplement $\mathrm{Isom}(E)$ (et on remarquera au passage que c'est un groupe pour la composition des applications et qu'il contient les isométries <u>linéaires</u>[6] de E comme sous-groupe) :

$$\text{Isométries linéaires de } E \quad \subset \quad \mathrm{Isom}(E) \quad \subset \quad \mathcal{L}(E).$$

On notera enfin que $\mathrm{Isom}(E,F)$ peut être vide alors que $\mathrm{Isom}(E)$ ne l'est jamais.

Mentionnons enfin le résultat évident suivant :

6. Par exemple, les translations de E sont des isométries NON-linéaires de E.

Proposition 2.4.4 *Si $E \underset{evn}{\cong} F$, alors E est un Banach si et seulement si F en est un.*

Preuve: Si $h : E \to F$ est un isomorphisme d'evn alors h et h^{-1} sont lipschitziennes, donc uniformément continues. Il ne reste plus qu'à appliquer le corollaire 1.1.1. ■

Munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a :

Proposition 2.4.5 *Toute application linéaire $u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|)$ est automatiquement continue.*

Preuve: Notons $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On a :

$$\|u(\mathbf{x})\| = \left\| u(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|u(\mathbf{e}_i)\| \leq C \, \|\mathbf{x}\|_\infty$$

où $C := \sum_{i=1}^n \|u(\mathbf{e}_i)\|$.
■

Remarquons que ce résultat ne dépend en fait pas du tout de la norme choisie sur $\mathbb{R}^n$ (plus d'explications bientôt...) Mais attention aux symétries trompeuses : une application linéaire $u : E \to \mathbb{R}^n$ n'est en revanche pas nécessairement continue ! En d'autres termes :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, E) = L(\mathbb{R}^n, E) \qquad \text{mais} \qquad \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n) \subset L(E, \mathbb{R}^n)$$

cette dernière inclusion pouvant éventuellement être stricte [7]
.

On va maintenant s'occuper de définir une norme sur l'espace des applications linéaires continues :

Proposition 2.4.6 *Si $u : E \to F$ est une application linéaire continue, la quantité.*

$$\|u\| := \sup_{x \in B'} \|u(x)\|$$

(où B' désigne la boule unité fermée de E) est un nombre réel positif et la fonction $u \mapsto \|u\|$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Cette norme satisfait l'inégalité :

$$\forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq \|u\| \, \|x\| \qquad (\lhd).$$

Preuve: Notons $I_u := \{\|u(x)\|\}_{x \in B'}$. Cet ensemble est une partie non-vide de $\mathbb{R}^+$ et est majoré car u est continue. Donc $\sup(I_u)$ existe dans $\mathbb{R}^+$. ▼
Etablisson d'abord l'inégalité ($\lhd$) : si $x \in E \backslash \{0\}$ alors $\frac{x}{\|x\|}$ est dans B' et

$$\left\| u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|u\|$$

7. Par exemple, si E est l'espace normé $(C^0(I), \|\cdot\|_1)$, l'application $\delta_0 : E \to \mathbb{R} : f \mapsto f(0)$ est dans $L(E, \mathbb{R})$ mais pas dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

ce qui nous donne l'inégalité ($\lhd$) (et il est clair que cette dernière reste valable pour $x = 0$).▼

Reste à vérifier que nous obtenons bien une norme :

(P) est claire.

(S) Si $\|u\| = 0$, l'inégalité ($\lhd$) démontrée ci-dessus nous assure que $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$, donc que u est nulle.

(H) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, comme $I_{\lambda u} = |\lambda| I_u$, il s'ensuit que $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$.

(T) Si u et v sont dans $\mathcal{L}(E, F)$, on a

$$\forall x \in B', \ \|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|$$

et en passant au sup sur le membre de gauche : $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

■

Définition 2.4.1 La norme $u \mapsto \|u\|$ est appelée *norme d'opérateur* (ou encore : norme subordonnée).

Notons que la norme d'opérateur dépend des normes choisies sur E et sur F.

Exercice 2.4.1 *Montrer que pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$*

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x \in B(0,1[} \|u(x)\| \\ &= \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ &= \inf\{C > 0 \mid \forall x \in E, \ \|u(x)\| \leq C \|x\|\}. \end{aligned}$$

Il est clair que la composée de deux applications linéaires continues reste linéaire et continue. Notons alors une propriété importante de la norme d'opérateur :

Proposition 2.4.7 *Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$*

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \, \|u\| .$$

Preuve: Pour tout $x \in B'$, on a

$$\|(v \circ u)(x)\| \leq \|v\| \, \|u(x)\| \leq \|v\| \, \|u\| \, \|x\| \leq \|v\| \, \|u\| .$$

et on obtient l'inégalité après passage au sup. ■

Exemple 2.4.1
- **Homothéties :** $\|h_\lambda\| = |\lambda|$ et en particulier $\|Id\| = 1$.
- **Inclusion d'un sous-espace :** Si F est un sous-espace vectoriel de E, l'inclusion $j : F \hookrightarrow E : x \mapsto x$ est une application linéaire continue de norme 1.

— **Projecteurs :** Un projecteur $P : E \to E$ n'est pas nécessairement continu. Quand c'est le cas l'identité $P^2 = P$ nous montre, si $P \neq 0$, que $\|P\| \geq 1$.

— **Produits tensoriels :** Soient deux espaces normés E et F. Fixons $\mathbf{a} \in F$ et $\mu \in E^*$. On définit alors l'application :

$$\mathbf{a} \otimes \mu : E \to F : x \mapsto \mu(x)\mathbf{a}.$$

Cette application est clairement linéaire [8] ; si, de plus, $\mathbf{a}$ et μ sont tous les deux non-nuls, $\mathbf{a} \otimes \mu$ admet pour noyau l'hyperplan $\ker(\mu)$ et pour image la droite $\mathrm{Vect}(\mathbf{a})$. On vérifie sans peine que $\mathbf{a} \otimes \mu$ est continue si et seulement si μ l'est. Dans ce cas, la norme d'opérateur vérifie l'inégalité :

$$\|\mathbf{a} \otimes \mu\| = \|\mathbf{a}\| \, \|\mu\| \, .$$

— **Isométries linéaires :** Si $u : E \to F$ est linéaire, bijective et vérifie $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x dans E, alors

1. u est continue ;
2. u est une isométrie de E sur F ;
3. $\|u\| = 1$.

Exemple 2.4.2 (Application linéaire discontinue) Notons E l'espace des fonctions continues sur $I = [0, 1]$ et F le sous-espace formé des fonctions de classe C^1 sur I. On place sur E une norme quelconque (par exemple $\|\cdot\|_\infty$) et sur F la norme induite. Alors l'application linéaire

$$\mathcal{D} : F \longrightarrow E : f \longmapsto f'$$

n'est pas continue. Supposons le contraire et considérons les fonctions suivantes :

$$e_\lambda : I \to \mathbb{R} : t \mapsto e^{\lambda t} \qquad (\lambda \text{ paramètre réel}).$$

Il vient :

$$\|\mathcal{D}\| \geq \frac{\|\mathcal{D}(e_\lambda)\|}{\|e_\lambda\|} = \frac{\|\lambda e_\lambda\|}{\|e_\lambda\|} = |\lambda|$$

ce qui est exclu, puisque $|\lambda|$ peut-être choisi aussi grand qu'on le veut.

Proposition 2.4.8 *Soit $\mathbf{a} \in E$ et notons $\tilde{\mathbf{a}}$ l'application linéaire (continue !)*

$$\tilde{\mathbf{a}} : \mathbb{R} \to E : t \mapsto t\mathbf{a}.$$

L'application :

$$\mathcal{J} : E \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) : \mathbf{a} \longmapsto \tilde{\mathbf{a}}$$

est une isométrie, d'inverse : $\gamma \longmapsto \gamma(1)$.

---

8. Notons que si $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$ la matrice de $\mathbf{a} \otimes \mu$ est le produit de la colonne $\mathbf{a}$ par la ligne μ, ce qui explique la syntaxe de la notation.

Preuve: L'application $\tilde{\mathbf{a}}$ est clairement linéaire. Elle est également continue, puisque

$$\|\tilde{\mathbf{a}}(t)\| = \|t\mathbf{a}\| = |t|\,\|\mathbf{a}\|\,.$$

Et on a aussi

$$\|\tilde{\mathbf{a}}\| = \sup_{t\neq 0} \frac{\|\tilde{\mathbf{a}}(t)\|}{|t|} = \|\mathbf{a}\|\,.$$

On a, pour tous $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans E et tout scalaire λ :

$$\widetilde{\mathbf{a}+\mathbf{b}} = \widetilde{\mathbf{a}} + \widetilde{\mathbf{b}} \quad \text{et} \quad \widetilde{\lambda\mathbf{a}} = \lambda\widetilde{\mathbf{a}}$$

ce qui assure de la linéarité de $\mathcal{J}$. On vérifie immédiatement que $\mathcal{J}$ est bijective :

$$\widetilde{\mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} = 0 \quad \text{et} \quad \gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, E) \Rightarrow \gamma = \widetilde{\gamma(1)}.$$

C'est aussi une isométrie puisque

$$\|\mathcal{J}(\mathbf{a}) - \mathcal{J}(\mathbf{b})\| = \left\|\widetilde{\mathbf{a}-\mathbf{b}}\right\| = \|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|\,.$$

Comme $\mathcal{J}$ est une isométrie, elle est continue et son inverse est automatiquement une isométrie. ■

On se rappelle que dans le cadre métrique, deux distances (fortement) équivalentes induisent la même topologie mais que la réciproque est fausse. Les choses se passent mieux dans le cas des espaces normés :

Proposition 2.4.9 *Deux normes sur un espace vectoriel sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie sur E.*

Preuve: La seule chose à vérifier est l'implication $\boxed{\Leftarrow}$. Soient donc deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ définies sur le même espace vectoriel E et supposons que les topologies associées $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ soient égales. L'application $\mathcal{I} : (E, \mathcal{T}_1) \to (E, \mathcal{T}_2) : x \mapsto x$ est donc continue ; mais elle est aussi linéaire, ce qui implique l'existence d'une constante strictement positive β telle que

$$\mathcal{N}_2(\mathcal{I}(x)) \leq \beta\mathcal{N}_1(x) \qquad \text{soit encore :} \qquad \mathcal{N}_2(x) \leq \beta\mathcal{N}_1(x).$$

Un raisonnement analogue pour $\mathcal{J} : (E, \mathcal{T}_2) \to (E, \mathcal{T}_1) : x \mapsto x$ aboutirait à l'inégalité

$$\mathcal{N}_1(x) \leq \alpha\mathcal{N}_2(x).$$

■

Théorème 2.4.1 *Si F est un espace de Banach, il en va de même de $\mathcal{L}(E, F)$.*

Preuve: Soit donc (u_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N_\epsilon, \quad \|u_n - u_m\| < \epsilon$$

Soit a un point fixé dans E, on a

$$\|u_n(a) - u_m(a)\| = \|(u_n - u_m)(a)\| \leq \|u_n - u_m\|\,\|a\|\,.$$

La suite $(u_n(a))$ étant de Cauchy dans l'espace de Banach F, elle converge vers une limite que l'on notera $u(a)$. On définit ainsi une application $u : E \to F$.

1. $\boxed{u \text{ est linéaire :}}$ Soient a, b deux points de E et λ un scalaire :

$$\begin{aligned} u(a+b) &= \lim_{n\to+\infty}(u_n(a+b)) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(u_n(a)+u_n(b)) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(u_n(a)) + \lim_{n\to+\infty}(u_n(b)) \\ &= u(a)+u(b) \end{aligned}$$

et de la même manière

$$\begin{aligned} u(\lambda a) &= \lim_{n\to+\infty}(u_n(\lambda a)) \\ &= \lim_{n\to+\infty}(\lambda u_n(a)) \\ &= \lambda \lim_{n\to+\infty}(u_n(a)) \\ &= \lambda u(a) \blacktriangledown \end{aligned}$$

2. $\boxed{u \text{ est continue :}}$ Comme (u_n) est de Cauchy et $\|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$ est uniformément continue, la suite $(\|u_n\|)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$; ce dernier étant complet $\|u_n\| \to C$. D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$

$$\|u_n(x)\| \leq \|u_n\| \, \|x\|$$

ce qui donne après passage à la limite :

$$\|u(x)\| \leq C \, \|x\| . \blacktriangledown$$

3. $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } u \text{ :}}$ On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \|u_n(x) - u(x)\| &\leq \|u_n(x) - u_m(x)\| + \|u_m(x) - u(x)\| \\ &\leq \|u_n - u_m\| \, \|x\| + \|u_m(x) - u(x)\| \end{aligned}$$

Fixons un $\epsilon > 0$ et soit N_ϵ le rang à partir duquel $\|u_n - u_m\| < \epsilon$. Il vient

$$\forall n, m \geq N_\epsilon, \ \forall x \in E, \quad \|u_n(x) - u(x)\| < \epsilon \, \|x\| + \|u_m(x) - u(x)\|$$

puis en faisant tendre $m \to +\infty$:

$$\forall n \geq N_\epsilon, \ \forall x \in E, \quad \|u_n(x) - u(x)\| < \epsilon \, \|x\| + 0$$

soit encore

$$\forall n \geq N_\epsilon, \ \forall x \in E - \{0\}, \quad \frac{\|u_n(x) - u(x)\|}{\|x\|} < \epsilon$$

et enfin en passant au sup sur les x :

$$\forall n \geq N_\epsilon, \quad \|u_n - u\| < \epsilon.$$

■

Corollaire 2.4.1 *Le dual topologique d'un espace normé est un espace de Banach.*

2.5 Somme directe topologique et quotients

2.5.1 Rappels algébriques sur les espaces vectoriels quotients

A tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E on peut associer la relation d'équivalence [9] suivante sur E :

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in F$$

ce qui se lit : "x est congru à y modulo F". Soit $[x] := \{y \in E \mid x \sim y\}$ la classe d'équivalence du vecteur x ; il est facile de voir que $[x] = x + F$, en d'autres termes que la classe de x est le sous-espace affine dirigé par F et passant par x. On notera E/F l'ensemble de ces classes d' équivalence :

$$\xi \in E/F \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in E,\ \xi = [x].$$

E/F est appelé *l'espace quotient* de E par le sous-espace F. On vérifie [10] ensuite que les deux opérations :

$$[x] + [y] := [x + y] \qquad \lambda[x] := [\lambda x] \qquad (Q)$$

sont bien définies et confèrent à E/F une structure d'espace vectoriel. Le vecteur nul $\mathbf{0}$ de ce nouvel espace est bien sûr la classe du vecteur nul de E : $\mathbf{0} = [0] = F$. L'application

$$\pi : E \to E/F : x \mapsto [x]$$

est appelée la *projection quotient*. Voici une compilation de tous les résultats élémentaires à retenir pour ce qui relève des espaces vectoriels quotients :

Proposition 2.5.1 *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E,*

1. $E/F = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad F = E$;
2. $F = \{0\} \quad \Rightarrow \quad E/F \cong E$;
3. *la projection $\pi : E \to E/F$ est une application linéaire surjective de noyau F ;*
4. *pour tout ξ dans E/F, $\pi^{-1}(\{\xi\}) = \xi$;*
5. *si $u : E \to G$ est une application linéaire de noyau F, il existe un unique isomorphisme d'espaces vectoriels $\hat{u} : E/F \to \mathrm{Im}(u)$ tel que*

$$u = j \circ \hat{u} \circ \pi$$

   (où $j : \mathrm{Im}(u) \hookrightarrow G$ est l'inclusion) ;
6. *si S est un supplémentaire algébrique de F, la restriction $\pi_{|S} : S \to E/F$ définit un isomorphisme de S sur E/F dont l'inverse est donné par la décomposition canonique de la projection $q : E \to S$.*
7. *si E est de dimension finie, E/F l'est aussi et* $\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$.

9. Exercice très facile.
10. Très facile aussi.

Preuve:

1. Dire que $E/F = \{0\}$ équivaut à dire qu'il y a une seule classe – celle du vecteur nul – donc que tous les vecteurs de E sont équivalents à 0 modulo F, donc que chaque vecteur de E est dans F. ▼
2. Si $F = \{0\}$, chaque classe est réduite à un singleton et l'application $x \mapsto [x]$ est alors une bijection. ▼
3. La linéarité de π est simplement la ré-écriture de (Q). La surjectivité est la traduction du fait que toute classe contient au-moins un représentant. Enfin $x \in \ker(\pi) \Leftrightarrow [x] = [0] \Leftrightarrow x \in F$. ▼
4. $x' \in \pi^{-1}([x]) \Leftrightarrow \pi(x') = [x] \Leftrightarrow x' \sim x$. ▼
5. On définit $\hat{u} : E/F \to \mathrm{Im}(u)$ en posant $\hat{u}([x]) := u(x)$. C'est bien une application bien définie et injective car
$$x \sim x' \Leftrightarrow x - x' \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x - x') = 0 \Leftrightarrow u(x) = u(x').$$
La relation $u = j \circ \hat{u} \circ \pi$ est vraie par construction. Pour ce qui est de la surjectivité,
$$\hat{u}(E/F) = \hat{u}(\pi(E)) = u(E) = \mathrm{Im}(u).$$
La linéarité est claire. Reste l'unicité : si $v : E/F \to \mathrm{Im}(u)$ vérifie aussi $u = j \circ v \circ \pi$, alors $v \circ \pi = \hat{u} \circ \pi$ et, par surjectivité de π, $v = \hat{u}$.▼
6. Supposons que $E = F \oplus S$ et soit $\pi_{|S} : S \hookrightarrow E/F$ la restriction à gauche de π à S. Si $s \in S$ est dans le noyau de $\pi_{|S}$, alors $s \in F$ et, puisque la somme est directe, $s = 0$; $\pi_{|S}$ est donc injective. De plus si $\xi = [x] \in E/F$, alors $x = s \oplus f$ avec $(s, f) \in S \times F$; ainsi $\xi = [s \oplus f] = [s]$ et $\pi_{|S}$ est surjective. Considérons la projection canonique $q : E \to S : s \oplus f \mapsto s$ associée à la somme directe $E = F \oplus S$:
   (a) q est linéaire
   (b) $\mathrm{Im}(q) = S$ et $\ker(q) = F$
   (c) $q \circ j = \mathrm{Id}_S$ si $j : S \hookrightarrow E$ désigne l'inclusion.

   La décomposition canonique $\hat{q} : E/F \to S$ de cette projection est : $q = \hat{q} \circ \pi$. Il vient alors
$$\hat{q} \circ \pi_{|S} = \hat{q} \circ \pi \circ j = q \circ j = \mathrm{Id}_S.$$
   ▼
7. Supposons que E soit de dimension finie et soit $E = F \oplus S$ une décomposition en somme directe de E. D'après le résultat précédent, E/F est de dimension finie puisque isomorphe à S. Il vient de plus : $\dim(E/F) = \dim(S) = \dim(E) - \dim(F)$. ■

Remarque 2.5.1 — On appellera *codimension* de F la dimension du quotient E/F.
— Dans (3), l'isomorphisme $\hat{u}$ est appelé décomposition canonique du morphisme u.
— Les résultats (3) et (5) permettent de démontrer de manière économique un résultat fondamental d'algèbre linéaire : le théorème du rang.

2.5.2 Espaces normés quotients

Revenons au cadre topologique et considérons un espace vectoriel normé E. Soit F un **sous-espace fermé** de E (nous verrons un peu plus loin en quoi cette hypothèse supplémentaire est en fait essentielle...). Nous allons construire une norme sur l'espace quotient E/F en posant :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{\|[x]\| := d(x,F) = \inf(I_x)}$$

où

$$I_x := \{\|x - \mathbf{f}\|\}_{\mathbf{f}\in F}.$$

Proposition 2.5.2 *La fonction $\xi \mapsto \|\xi\|$ est bien définie sur E/F et confère à l'espace quotient une structure d'espace normé. La projection $\pi : E \to E/F$ est alors linéaire, continue, surjective et de norme ≤ 1.*

Preuve:

$\|\xi\|$ est bien définie : Si $x \sim x'$, alors $x' = x + \mathbf{f}_0$ avec $\mathbf{f}_0$ dans F et on a

$$\forall \mathbf{f} \in F, \quad \|x' - \mathbf{f}\| = \|x + \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}\| \geq d(x,F)$$

ce qui donne

$$d(x',F) \geq d(x,F).$$

Par symétrie de $\sim$, on a aussi $d(x,F) \geq d(x',F)$. D'où : $\|[x]\| = \|[x']\|$. ▼

$\|\cdot\|$ est une norme : La positivité est claire. De plus, comme $\|\lambda x - \mathbf{f}\| = |\lambda| \left\|x - \frac{1}{\lambda}\mathbf{f}\right\|$ pour tout scalaire λ non-nul, il vient : $I_{\lambda x} = |\lambda| I_x$ d' où l'homogénéité. Soient maintenant x et y dans E, on a pour tout $f \in F$:

$$d(x+y,F) \leq \|x + y - 2\mathbf{f}\| \leq \|x - \mathbf{f}\| + \|y - \mathbf{f}\|;$$

et en passant à l'inf :

$$d(x+y,F) \leq d(x,F) + d(y,F).$$

La séparation est le point important : si $\|[x]\| = d(x,F) = 0$, alors, $x \in F$ (puisque F est fermé) et donc $[x] = 0$. ▼

π est linéaire et surjective : ceci a déjà été fait dans les rappels algébriques. ▼

π est continue de norme ≤ 1 : Soit $x \in E$:

$$\|\pi(x)\| = \|[x]\| = \inf_{\mathbf{f}\in F} \|x - \mathbf{f}\| \leq \|x - \mathbf{0}\| = \|x\|. \blacksquare$$

Définition 2.5.1 La norme $\|\cdot\|$ sur E/F construite ci-dessus sera appelée *norme quotient.*

Remarque 2.5.2 Notons que si x_0 est un représentant de la classe ξ, on a

$$\|\xi\| = \inf_{\mathbf{f}\in F} \|x_0 - f\| = \inf_{x\sim x_0} \|x\|$$

ca qui nous fournit une autre écriture équivalente de la norme quotient :

$$\boxed{\|\xi\| = \inf_{x\in\xi} \|x\|}.$$

Proposition 2.5.3 *La norme de la projection π est égale à 1 si F est un sous-espace strict de E.*

Preuve: Si $F \neq E$, le quotient E/F contient une classe ξ non-nulle. La continuité de π nous donne, pour tout $x \in \xi$, l'inégalité $\|\xi\| \leq \|\pi\| \, \|x\|$. En passant à la borne inférieure sur $x \in \xi$, on arrive à $\|\xi\| \leq \|\pi\| \, \|\xi\|$, d'où $1 \leq \|\pi\|$ puisque $\xi \neq 0$. ■

Lemme 2.5.1 *La projection π envoit la boule ouverte $B(a, r[$ de E sur la la boule ouverte $B([a], r[$ de E/F.*

Preuve: Notons : $\alpha = [a]$, $B = B(a, r[$ et $\tilde{B} = B(\alpha, r[$. On a déjà, par continuité,

$$\|\pi(x - a)\| \leq \|x - a\|$$

d' où :

$$\|x - a\| < r \Rightarrow \|\pi(x) - \alpha\| < r \quad \text{soit encore :} \quad \pi(B) \subset \tilde{B}.$$

Réciproquement, soit $\xi = [x] \in \tilde{B}$. Donc : $\|[x - a]\| < r$; comme r est strictement plus grand que $\inf_{\mathbf{f} \in F} \|x - a - \mathbf{f}\|$, il existe un $\mathbf{f}_0 \in F$ tel que $\|x - a - \mathbf{f}_0\| < r$. Ainsi $\xi = \pi(x - \mathbf{f}_0)$ avec $x - \mathbf{f}_0 \in B$. Autrement dit $\xi \in \pi(B)$. ■

Proposition 2.5.4 *Si on munit E/F de sa structure d'espace normé, la projection π : $E \to E/F$ est une application ouverte.*

Preuve: Un ouvert U de E est une réunion de boules ouvertes de E. Le lemme précédent nous assure que $\pi(U)$ est une réunion de boules ouvertes de E/F. ■

On dispose désormais de deux topologies sur E/F : la topologie associée à la norme quotient et la topologie quotient sur $E/\sim$ issue de la structure d'espace topologique de E. Mais comme la vie est bien faite, on a la

Proposition 2.5.5 *Sur E/F, la topologie associée à la norme quotient coïncide avec la topologie quotient associée à la relation $\sim$.*

Preuve: Notons $\mathcal{T}_n$ la topologie définie par la norme quotient et $\mathcal{T}_q$ la topologie quotient. Rappelons que cette dernière est la plus fine des topologies sur E/F rendant π continue ; on a donc immédiatement : $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_q$. Réciproquement, si $U \in \mathcal{T}_q$, alors $\pi^{-1}(U)$ est ouvert dans E. Comme $\pi : E \to (E/F, \mathcal{T}_n)$ est ouverte, $\pi(\pi^{-1}(U)) \in \mathcal{T}_n$. De plus, $U = \pi(\pi^{-1}(U))$, donc $U \in \mathcal{T}_n$. ■

A ce point, il est utile de rappeler une propriété fondamentale de la topologie quotient dont nous ferons fréquemment usage :

Proposition[Rappel de Topologie] *Soit X un espace topologique, $\sim$ une relation d'équivalence sur X et $\pi : X \to X/\sim$ la projection quotient. Si $X/\sim$ est équipé de la topologie quotient alors, pour toute application $f : X/\sim \to Y$ définie sur le quotient et à valeurs dans un espace topologique Y, on a :*

$$f \text{ est continue} \Leftrightarrow f \circ \pi \text{ est continue.}$$

Preuve:
$\boxed{\Rightarrow}$ clair : f et π sont continues. ▼
$\boxed{\Leftarrow}$ Si U est un ouvert de Y, $(f \circ \pi)^{-1}(U)$ est un ouvert de X, ce qui s'écrit aussi $\pi^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$ est un ouvert de X. Mais ceci, par définition de la topologie quotient, signifie : $f^{-1}(U)$ est ouvert dans $X/\sim$. ■

Adapté à notre cadre des espaces normés on aura :
Si $f : E/F \to Y$ est une application à valeurs dans un espace topologique Y, alors :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } E/F \Leftrightarrow f \circ \pi \text{ est continue sur } E.}$$

Proposition 2.5.6 *La décomposition canonique $\hat{u} : E/F \to \mathrm{Im}(u)$ d'une application linéaire continue $u : E \to F$ est continue et de même norme que u.*

Preuve: En effet : comme $j \circ \hat{u} \circ \pi = u$ est continue, on a aussi $\hat{u} \circ \pi$ continue (propriété de la topologie induite). Et comme E/F est muni de la topologie quotient, cela entraîne la continuité de $\hat{u}$. ▼

Passons aux normes : pour une classe donnée ξ de représentant x, on aura $\|\hat{u}(\xi)\| = \|u(x)\| \leq \|u\|\,\|x\|$. On passe à l'inf sur les $x \in \xi$, ce qui donne $\|\hat{u}(\xi)\| \leq \|u\|\,\|\xi\|$ et par suite $\|\hat{u}\| \leq \|u\|$. D'autre part, on a

$$\|u\| = \|j \circ \hat{u} \circ \pi\| \leq \|j\|\,\|\hat{u}\|\,\|\pi\| \leq \|\hat{u}\|$$

car $\|j\| = 1$ et $\|\pi\| \leq 1$. ■

Attention ! Il est important de noter que $\hat{u}^{-1}$ n'a aucune raison d'être continue... (Mais les choses vont s'arranger si on travaille avec des Banach).

Remarque 2.5.3 (Pour les curieux...) Si on fait sauter l'hypothèse de fermeture de F, le quotient E/F ne sera plus un espace normé mais seulement semi-normé. En particulier, l'espace topologique sous-jacent ne sera plus séparé.

2.5.3 Somme directe topologique

En algèbre linéaire, on sait que tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel admet toujours un supplémentaire algébrique, c'est-à-dire, un sous-espace vectoriel $S \subset E$ tel que $E = F \oplus S$. Considérons ensuite l'application :

$$\sigma : F \times S \to E : (x, y) \mapsto x + y.$$

Si on munit $F \times S$ de sa structure d'espace vectoriel produit, il est clair que σ est alors linéaire et bijective. Si on rajoute à $F \times G$ sa structure de sous-espace normé provenant de $E \times E$, il est également clair que σ est continue (comme restriction à $F \times G$ de l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$). En revanche, rien ne nous assure de la continuité de l'inverse :

$$\sigma^{-1} : E \to F \times S : z \mapsto (p(z), q(z))$$

(où $p : E \to F$ et $q : E \to S$ désignent les projections canoniques sur les facteurs de la somme).

Définition 2.5.2 On dit que la somme directe algébrique $E = F \oplus S$ est une *somme directe topologique*, et on notera

$$E = F \underset{top}{\oplus} S$$

lorsque σ est un homéomorphisme. Le sous-espace S est alors appelé *un supplémentaire topologique* de F.

Rappelons qu'en algèbre linéaire, on appelle *projecteur* un endomorphisme $P : E \to E$ tel que $P^2 = P$. L'endomorphisme $Q := Id - P$ est aussi un projecteur : c'est le *projecteur supplémentaire* de P. On montre que

$$P \circ Q = Q \circ P = 0, \quad \mathrm{Im} P = \ker Q, \quad \mathrm{Im} Q = \ker P, \quad E = \mathrm{Im} P \oplus \ker P.$$

Lemme 2.5.2 *Si $P : E \to E$ est un projecteur continu d'un espace normé E, alors la somme directe $E = \mathrm{Im} P \oplus \ker P$ est topologique.*

Preuve: Notons $F = \mathrm{Im} P$, $S = \mathrm{Im} Q$ et $i : F \hookrightarrow E$, $j : S \hookrightarrow E$ les inclusions. Les projecteurs P et Q sont reliés aux projections $p : E \to F$ et $q : E \to S$ par les relations $P = i \circ p$ et $Q = j \circ q$. La continuité de P entraînent alors celle de Q, p, q et, par suite celle de σ^{-1}. ■

Théorème 2.5.1 *Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace normé E et S un supplémentaire algébrique de F, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *S est un supplémentaire topologique de F ;*
2. *les projections $p : E \to F$ et $q : E \to S$ sont continues ;*
3. *F est fermé et la restriction de $\pi : E \to E/F$ à S est un isomorphisme d'espaces normés.*

Preuve:

$\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ Si σ^{-1} est continue, ses deux composantes $p = \mathrm{pr}_1 \circ \sigma^{-1}$ et $q = \mathrm{pr}_2 \circ \sigma^{-1}$ le sont aussi. ▼

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Puisque $\ker(q) = F$: d'une part F est fermé et d'autre part, on peut définir la décomposition canonique $\hat{q} : E/F \to S$ de la projection q. On se rappelle que $\hat{q}$ est l'inverse de la bijection continue $\pi_{|S} : S \to E/F$. De plus, par hypothèse, q est continue, et donc $\hat{q}$ l'est aussi. La bijection $\pi_{|S}$ est ainsi un isomorphisme d'espaces normés.▼

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Définissons $Q : E \to E$ en posant $Q := j \circ (\pi_{|S})^{-1} \circ \pi$ où $j : S \hookrightarrow E$ désigne l'inclusion. On vérifie aisément que :

$$Q^2 = Q \qquad \ker Q = F \qquad \mathrm{Im} Q = S$$

donc que Q est le projecteur sur S de direction F. On dispose par suite d'une somme directe algébrique $E = F \oplus S$. Soient, de plus : $P = Q - I$ le projecteur supplémentaire de Q, q la restriction à droite de Q à S, et p la restriction à droite de P à F. La continuité de Q entraîne celles de P,q, p et finalement celle de σ^{-1}. Notre somme est donc topologique.■

Remarque 2.5.4 Concernant le (2) : il suffit en fait que l'une des deux projections soit continue.

Corollaire 2.5.1 *Si le sous-espace F admet un supplémentaire topologique S, alors F* **et** *S sont tous les deux fermés.*

Exemple 2.5.1 Si E désigne l'espace des fonctions continues sur $[-1,1]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $\mathcal{P}$ le sous-espace des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires, nous verrons en TD que la somme directe $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$ est topologique.

Remarque 2.5.5 On pourrait s'attendre avec quelque espoir à ce que l'hypothèse de fermeture de F soit suffisante quant à l'existence d'un supplémentaire topologique. Il n'en est rien : on peut trouver des sous-espaces fermés ne possédant aucun supplémentaire topologique. Mais ce n'est pas facile de le montrer : un contre-exemple folklorique est le sous-espace c_0 des suites convergeant vers 0 dans l'espace de Banach l^∞ des suites bornées.

2.6 Dualité

2.6.1 Rappels algébriques

Un *hyperplan* d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel H de codimension 1. On montre [11] en algèbre linéaire que cette définition est équivalente à chacune des assertions suivantes :

1. Le quotient E/H est une droite.
2. H admet un supplémentaire algébrique de dimension 1.
3. H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle [12] $\mu : E \to \mathbb{R}$.
4. H est un sous-espace strict maximal : tout sous-espace F de E contenant H est égal soit à H, soit à E.

Si A est une partie de E, l'ensemble

$$A^\circ := \{\mu \in E^* \mid A \subset \ker(\mu)\} = \{\mu \in E^* \mid \mu_{|A} = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel du dual E^* ; on l'appelle *annulateur* de A et il possède les propriétés suivantes :

1. $\{0\}^\circ = E^*$ et $E^\circ = \{0\}$;
2. $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$;
3. $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$.

A toute application linéaire $u : E \to F$, on associe sa *transposée* ${}^t u : F^* \to E^*$ en posant :

$$\forall \nu \in F^*,\ {}^t u(\nu) := \nu \circ u;$$

11. Exercice !
12. On rappelle qu'une forme linéaire est surjective si et seulement si elle est non-nulle.

c'est encore une application linéaire vérifiant :

$$\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\circ \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\circ\,.$$

On remarquera en passant que $A^\circ = \ker({}^t J)$ si $J : \mathrm{Vect}(A) \hookrightarrow E$ est l'inclusion. La transposition $u \mapsto {}^t u$ est linéaire et vérifie ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$. En dimension finie, la matrice de ${}^t u$ dans une base donnée n'est autre que la transposée de la matrice de u.

Rappelons enfin l'existence d'une injection linéaire canonique de E dans son bidual :

$$\chi : E \to E^{**} : x \mapsto \hat{x}$$

où :

$$\hat{x} : E^* \to \mathbb{R} : \mu \mapsto \mu(x).$$

On remarquera que l'injectivité de χ s'écrit :

$$\bigcap_{\mu \in E^*} \ker(\mu) = \{0\}$$

ce qui se traduit par :

$$\mu(x_0) = 0 \text{ pour tous les } \mu \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$$

ou bien encore par :
- "Si un vecteur x_0 est non-nul, on peut toujours trouver une forme linéaire ne s'annulant pas sur x_0."
- "Les formes linéaires séparent les points de E ."

2.6.2 Caractérisation des formes linéaires continues

On passe maintenant du cadre algébrique au cadre topologique : E désigne désormais un espace normé.

Proposition 2.6.1 *Un hyperplan de E est soit fermé soit partout dense.*

Preuve: Puisque $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E vérifiant $H \subset \overline{H} \subset E$, la maximalité de H ne laisse que deux possibilités : soit $\overline{H} = H$, soit $\overline{H} = E$. ■

Lemme 2.6.1 *Une forme linéaire $\varphi : D \to \mathbb{R}$ sur un espace normé de dimension 1 est toujours continue. De plus, si $\mathbf{a}$ est un vecteur non-nul de D, on a*

$$\|\varphi\| = \frac{|\varphi(\mathbf{a})|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Preuve: Soit $\mathbf{a}$ un vecteur non-nul de D. Tout $x \in D$ s'écrit $x = t\mathbf{a}$ et

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} = \frac{|\varphi(t\mathbf{a})|}{\|t\mathbf{a}\|} = \mathrm{C}^{\mathrm{te}} = \frac{|\varphi(\mathbf{a})|}{\|\mathbf{a}\|}.$$

■

Théorème 2.6.1 *Une forme linéaire sur E est continue si et seulement si son noyau est fermé.*

Preuve: Si μ est continue, son noyau est évidemment fermé. Réciproquement, supposons que $H = \ker \mu$ soit un sous-espace fermé.

$\boxed{\text{Si } \mu = 0 :}$ alors $H = E$, $\mathrm{Im}\mu = \{0\}$ et μ est évidemment continue.

$\boxed{\text{Si } \mu \neq 0 :}$ H est un hyperplan et $\mathrm{Im}\mu = \mathbb{R}$; équipons alors le quotient E/H de sa structure d'espace normé et considérons la décomposition canonique $\hat{\mu} : E/H \to \mathbb{R}$ de μ via le quotient $\pi : E \to E/H$. L'application $\hat{\mu}$ est continue puisque linéaire sur un espace normé de dimension 1. La forme linéaire $\mu = \hat{\mu} \circ \pi$ est donc continue.■

Corollaire 2.6.1 *Une forme linéaire sur E est discontinue si et seulement si son noyau est partout dense.*

Preuve: Ceci est clair en utilisant la négation de l'équivalence précédente conjointement avec la proposition 2.6.1.■

Exercice 2.6.1 On se remet dans le contexte de la démonstration du théorème 2.6.1 ci-dessus.

1. Calculer la norme de la décomposition canonique $\hat{\mu}$.
2. En déduire que si a est un point de E, on a $d(a, H) = \frac{|\mu(a)|}{\|\mu\|}$.

Exemple 2.6.1 Considérons dans l^∞ le sous-espace [13] l^1 des suites réelles x telles que la série $\sum x(n)$ soit absolument convergente. On peut placer deux normes sur l^1 :

- la norme : $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|$;
- la norme induite par l^∞ : $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x(n)|$.

Considérons l'application "somme" :

$$\mathbf{s} : l^1 \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x(n).$$

On a immédiatement $|\mathbf{s}(x)| \leq \|x\|_1$, ce qui nous dit que $\mathbf{s}$ est une forme linéaire continue sur $(l^1, \|\cdot\|_1)$. En revanche $\mathbf{s}$ n'est pas une forme linéaire continue sur $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$. Pour le voir, considérons les suites $x_\epsilon \in l^1$ définies par $x_\epsilon(n) := \epsilon^n$ où ϵ est un paramètre évoluant dans $[0, 1[$. D'une part nous avons $\|x_\epsilon\|_\infty = \epsilon^0 = 1$, d'autre part :

$$|\mathbf{s}(x_\epsilon)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \epsilon^n = \frac{1}{1-\epsilon}$$

nombre qui peut-être choisi aussi grand qu'on le veut. En d'autres termes, $\mathbf{s}$ n'est pas bornée sur la sphère-unité de $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$. Notons H le noyau de $\mathbf{s}$: c'est l'hyperplan de l^1 constitué des séries $\sum x(n)$ de somme nulle ; on vient de montrer que :

- dans $(l^1, \|\cdot\|_1)$, l'hyperplan H est fermé ;
- dans $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$, ce même hyperplan H est partout dense.

13. Si une série numérique converge absolument, son terme général tend vers 0 et il est donc borné.

Annulateur et transposition : Nous allons adapter ces deux notions dans le cadre des espaces normés : si A est une partie d'un espace normé E, l'annulateur (topologique) de A, encore noté A°, sera un sous-espace du dual topologique E' :

$$A^\circ := \{\mu \in E' \mid A \subset \ker \mu\};$$

il est constitué des formes linéaires continues qui s'annulent sur A. Il vérifie les propriétés suivantes

Proposition 2.6.2 *1. $\{0\}^\circ = E'$ et $E^\circ = \{0\}$;*

2. A° est un sous-espace vectoriel de E'

3. $A \subset B \Rightarrow B^\circ \subset A^\circ$;

4. $A^\circ = (\mathrm{Vect}(A))^\circ$;

5. A° est fermé dans E' ;

6. $A^\circ = (\overline{A})^\circ$.

Preuve: La démonstration des points (1) à (4) est analogue à celle de la version algébrique. Les nouveautés topologiques résident dans les deux dernières assertions.

(5) Supposons en première approche que A soit un sous-espace vectoriel de E et soit $r : E' \to A' : \mu \to \mu \circ j_A$ l'application de restriction à A (ici $j_A : A \hookrightarrow E$ désigne l'inclusion). L'application r est linéaire et continue :

$$\|r(\mu)\| = \|\mu \circ j_A\| \leq \|\mu\| \, \|j_A\| \leq \|\mu\|$$

et $A^\circ = \ker r$ est donc fermé.

Supposons maintenant que A soit simplement une partie de E, alors (4) nous dit que A° est égal à $(\mathrm{Vect}(A))^\circ$ qui, lui, est fermé. ▼

(6) D'une part, on a $A \subset \overline{A}$ et donc $(\overline{A})^\circ \subset A^\circ$. D'autre part, soit $\mu \in A^\circ$ et $x \in \overline{A}$; x est limite d'une suite (a_n) de points de A. On a donc par continuité $\mu(x) = \mu(\lim_{n\to+\infty} a_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(a_n)$ et comme μ est dans l'annulateur de A, on a finalement $\mu(x) = 0$. Donc $\mu \in (\overline{A})^\circ$. ■

A toute application linéaire continue $u : E \to F$, on associe sa *transposée* ${}^t u : F' \to E'$ en posant :

$$\forall \nu \in F', \ {}^t u(\nu) := \nu \circ u;$$

Proposition 2.6.3 *1. Si u est continue, il en est de même pour ${}^t u$.*

2. La transposition $\mathcal{T} : \mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F',E') : u \mapsto {}^t u$ est une application linéaire continue.

3. Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$ on aura : ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$.

4. $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\circ$.

Preuve:

1. Supposons $u : E \to F$ continue. Si $\nu \in F'$, alors $\nu \circ u \in E'$. Ainsi ${}^t u : F' \to E'$ est bien définie et linéaire. De plus, on a pour tout $\nu \in F'$ et tout $x \in E$:
$$|{}^t u(\nu)(x)| = |\nu(u(x))| \leq \|\nu\| \, \|u\| \, \|x\|$$
ce qui nous donne $\|{}^t u(\nu)\| \leq \|\nu\| \, \|u\|$. ▼
2. La linéarité de $u \mapsto {}^t u$ est triviale. On reprend ensuite la dernière inégalité ci-dessus et on arrive à $\|{}^t u\| \leq \|u\|$, ce qui nous assure de la continuité de $\mathcal{T}$.▼
3. est un exercice facile. ▼
4. Si $\nu \in F'$, alors
$$\begin{aligned} \nu \in \ker({}^t u) &\Leftrightarrow {}^t u(\nu) = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu \circ u = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu_{|\mathrm{Im}(u)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \nu \in (\mathrm{Im}(u))^\circ . \end{aligned}$$

■

Remarque 2.6.1 On aimerait pourvoir écrire la formule jumelle de $\ker({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\circ$, mais non : les choses vont se révéler plus subtiles qu'il n'y paraît... Nous renvoyons le lecteur curieux au corollaire 2.9.5 situé en toute fin de ce chapitre, dans la partie dite "facultative".

2.6.3 Hahn-Banach et ses conséquences

Théorème 2.6.2 (Hahn-Banach) *Soit F un sous-espace d'un espace normé réel E et $\mu : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue sur E. Il existe une forme linéaire continue $\hat{\mu} : E \to \mathbb{R}$ prolongeant μ et ayant la même norme.*

Preuve: Il faudra patienter jusqu'en M1 car cette preuve, dans le cas où E n'est pas séparable [14], nécessite le lemme de Zorn (forme équivalente de l'axiome du choix)... Toutefois une des deux étapes clés de la démonstration est proposée en exercice à la fin de la planche de TD 4. ■

Lemme 2.6.2 *Si $\mathbf{a}$ est un vecteur non-nul d'un espace normé E, il existe une forme linéaire continue $\mu : E \to \mathbb{R}$ telle que $\|\mu\| = 1$ et $\mu(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|$.*

Preuve: Notons D la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{a}$ (munie de sa structure d'evn induite par celle de E) et posons
$$\alpha : D \to \mathbb{R} : t\mathbf{a} \mapsto t\,\|\mathbf{a}\| .$$
D'après le lemme 2.6.1, l'application α est une forme linéaire continue sur D, de norme $\|\alpha\| = \frac{|\alpha(\mathbf{a})|}{\|\mathbf{a}\|} = 1$. Le théorème HB nous assure alors de l'existence de $\mu \in E'$ prolongeant α et de même norme. Comme de plus $\mu(\mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\|$, μ est la forme recherchée. ■

14. Un espace topologique est dit *séparable* si il contient une partie au plus dénombrable et partout dense.

Corollaire 2.6.2 *Un espace normé non trivial possède des formes linéaires continues non-nulles.*

Preuve: La forme μ construite ci-dessus est un exemple de forme linéaire continue non-nulle sur E. ■

Corollaire 2.6.3 *Les formes linéaires continues d'un espace normé E séparent les points de E.*

Preuve: Par linéarité, cela revient à vérifier que si $\mathbf{a}$ est un vecteur non-nul, il existe μ dans E' telle que $\mu(\mathbf{a}) \neq 0$. Là encore, le lemme ci-dessus nous fournit un exemple d'une telle forme.■

Tout vecteur $x \in E$ définit une forme linéaire $\hat{x} : E' \to \mathbb{R}$ sur le dual topologique en posant $\hat{x}(\mu) := \mu(x)$. Cette forme linéaire est continue puisque :

$$|\hat{x}(\mu)| = |\mu(x)| \leq \|\mu\| \, \|x\| \qquad (\maltese).$$

Par conséquent $\hat{x}$ est dans le dual topologique de E', lequel est appelé *bidual topologique* de E et noté E''. On définit ainsi une application

$$\chi : E \to E'' : x \mapsto \hat{x}.$$

Corollaire 2.6.4 *L'application $\chi : E \to E''$ est linéaire, continue, injective et transporte la norme de E sur celle de E''.*

Preuve: La linéarité est claire. L'application χ est continue puisque l'inégalité ($\maltese$) ci-dessus se ré-écrit :

$$\|\hat{x}\| \leq \|x\| \, .$$

Montrons l'inégalité réciproque à l'aide de notre lemme : si x est non-nul, on peut trouver μ_x dans E' telle que $\|\mu_x\| = 1$ et $\mu_x(x) = \|x\|$. Il vient alors

$$\frac{|\hat{x}(\mu_x)|}{\|\mu_x\|} = \frac{\|x\|}{1} = \|x\|$$

autrement dit le sup est atteint pour $\mu = \mu_x$ et on a l'égalité : $\|\hat{x}\| = \|x\|$. L'injectivité est une conséquence de cette égalité. ■

Définition 2.6.1 χ est appelée *l'injection canonique* de E dans son bidual.

Corollaire 2.6.5 *La transposition $\mathcal{T} : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F', E') : u \mapsto {}^t u$ est une injection linéaire préservant les normes.*

Preuve: Commençons par montrer que $\|{}^t u\| = \|u\|$. On sait déjà que

$$\left\|{}^t u\right\| \leq \|u\| \qquad (*).$$

Reste à montrer l'inégalité $\|{}^t u\| \geq \|u\|$. Posons $v := {}^{tt} u : E'' \to F''$ et appliquons de nouveau le résultat $(*)$:

$$\|v\| \leq \left\|{}^t u\right\| \qquad (**).$$

Remarquons ensuite que pour tout x dans E, on a $v(\hat{x}) = \widehat{u(x)}$. Il vient donc pour tout $x \neq 0$

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \frac{\left\|\widehat{u(x)}\right\|}{\|\hat{x}\|} = \frac{\|v(\hat{x})\|}{\|\hat{x}\|} \leq \|v\|$$

Donc

$$\|u\| \leq \|v\| \qquad (***).$$

Les inégalités $(**)$ et $(***)$ nous donnent l'inégalité recherchée. L'injectivité découle de l'égalité $\|{}^t u\| = \|u\|$. ■

2.7 Dimension finie (ou non...).

Deux outils utiles :

$\boxed{\textbf{Pull-Back :}}$ Soit $u : E \to F$ une application linéaire injective et $\mathcal{N}$ une norme sur F. On définit [15] une norme sur E – notée $u^*\mathcal{N}$ et appelée *"pull-back"* de $\mathcal{N}$ par u – en posant :

$$u^*\mathcal{N}(x) := \mathcal{N}(u(x)).$$

Notons que si u est de plus surjective, l'application $u : (E, u^*\mathcal{N}) \longrightarrow (F, \mathcal{N})$ devient *ipso-facto* une isométrie linéaire.

$\boxed{\textbf{Repères :}}$ Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On associe à toute base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E l'application linéaire bijective suivante :

$$\underline{B} : \quad \mathbb{R}^n \longrightarrow E : \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i.$$

que l'on appellera parfois *repère associé à la base B*. On notera que

$$\underline{B}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} e_1 & \ldots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

et qu'une autre écriture possible est

$$\underline{B} = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \epsilon_i$$

si on désigne par $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ la base duale de B.

Lemme 2.7.1 *On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$:*

15. Vérification laissée en exercice.

1. *la sphère-unité S_∞ est compacte ;*
2. *toute application linéaire bijective de $\mathbb{R}^n$ sur un espace normé E est un isomorphisme.*

Preuve:

1. S_∞ est fermée dans $B(0,1] = \prod_{i=1}^n [-1,1]$, qui est compacte par Tychonov. ▼
2. Soit donc
$$u : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \mathcal{N})$$
une application linéaire continue bijective ($\mathcal{N}$ désignant la norme sur E). La proposition 2.4.5 nous assure de la continuité de u. Reste à établir la continuité de u^{-1}. La norme $u^*\mathcal{N} = \mathcal{N} \circ u$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$; elle est donc bornée sur le compact S_∞ et elle y atteint ses bornes. En particulier, il existe $\alpha = \mathcal{N} \circ u(\mathbf{x}_0) \geq 0$ tel que pour tout $\mathbf{x} \in S_\infty$, $\mathcal{N} \circ u(\mathbf{x}) \geq \alpha$. Comme $\mathbf{x}_0 \neq 0$ (il est sur la sphère) et puisque u est injective, notre α est en fait > 0. On obtient :
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},\ \mathcal{N}\left(u\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\right)\right) \geq \alpha$$
ce qui s'écrit aussi
$$\mathcal{N}(u(\mathbf{x})) \geq \alpha \|\mathbf{x}\|_\infty .$$
Cette inégalité étant valable également en $\mathbf{x} = 0$, elle est donc valable pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Soit maintenant $y \in E$ et posons $\mathbf{x} := u^{-1}(y)$; notre inégalité se ré-écrit :
$$\mathcal{N}(y) \geq \alpha \left\|u^{-1}(y)\right\|_\infty \quad \text{soit encore} \quad \left\|u^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha}\mathcal{N}(y) .$$

■

Théorème 2.7.1 *Toutes les normes sur un espace vectoriel de* ***dimension finie*** *sont équivalentes.*

Preuve: Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; faisons le choix d'une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Si $\mathcal{N}$ est une norme sur E, le repère associé à B
$$\underline{B} : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (E, \mathcal{N}) :$$
est un isomorphisme d'espaces normés. La fonction $\mathcal{N} \circ \underline{B}$ étant continue sur $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, elle est bornée et atteint ses bornes sur S_∞ :
$$\forall \mathbf{x} \in S_\infty, \qquad 0 < \alpha \leq \mathcal{N}(\underline{B}(\mathbf{x})) \leq \beta.$$
On en déduit que, pour tout $\mathbf{x} \neq 0$
$$\alpha \leq \ \mathcal{N}\left(\underline{B}\left(\tfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\right)\right) \ \leq \beta$$
$$\alpha \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \qquad \mathcal{N}(\underline{B}(\mathbf{x})) \qquad \leq \beta \|\mathbf{x}\|_\infty$$

puis que pour tout $y \in E$:

$$\alpha \left\|\underline{B}^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \quad \mathcal{N}(y) \quad \leq \beta \left\|\underline{B}^{-1}(y)\right\|_\infty$$

D'où, en notant $\mathcal{N}_\infty$ la norme pull-back de $\|\cdot\|_\infty$ par $\underline{B}^{-1}$:

$$\alpha\mathcal{N}_\infty(y) \leq \mathcal{N}(y) \leq \beta\mathcal{N}_\infty(y).$$

En d'autres termes : toute norme sur E est équivalente à $\mathcal{N}_\infty$. ■

Théorème 2.7.2 *Si E est un $\mathbb{R}$-espace normé de* ***dimension finie*** *égale à n alors :*

1. $E \underset{evn}{\cong} \mathbb{R}^n$ *;*
2. *E un espace de Banach ;*
3. *ses compacts sont exactement ses parties fermés et bornées ;*
4. *toute application linéaire de source E est continue ;*
5. *l'injection canonique $\chi : E \to E''$ est un isomorphisme isométrique et $E' = E^*$.*

Preuve: Soit B une base de E.

1. $\underline{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ est un isomorphisme possible. ▼
2. E est isomorphe à l'espace de Banach $\mathbb{R}^n$. (cf prop. 2.4.4) ▼
3. Dans un espace métrique, un compact est toujours fermé et borné [16]. On va donc s'intéresser à la réciproque. Faisons le choix d'une base B de E ; le repère $\underline{B}$: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to E$ est alors un isomorphisme. Si K est une partie fermée et bornée de E, la partie $K' := \underline{B}^{-1}(K)$ est fermée dans $\mathbb{R}^n$ (car $\underline{B}$ est continue) et bornée (car $\underline{B}^{-1}$ est linéaire et continue). Donc $K' \subset B(a, r]$; mais $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la boule $B(a, r]$ est compacte comme produit de n intervalles compacts. La partie K' est fermée dans un compact, c'est donc un compact et K l'est aussi, comme image continue d'un compact.▼
4. Si $u : E \to F$ est une application linéaire, alors $v := u\circ\underline{B} : \mathbb{R}^n \longrightarrow F$ l'est aussi. Or on sait que v est automatiquement continue ; donc $u = v\circ\underline{B}^{-1}$ est continue. ▼
5. De (4), on tire que $E' = E^*$ et que $E'' = E^{**}$. Du corollaire 2.6.4, on tire que $\chi : E \to E''$ est linéaire et injective. Mais E étant de dimension finie on a $\dim E = \dim E''$ et χ est un isomorphisme algébrique. Comme de plus $\|\chi(x)\| = \|x\|$, c'est aussi une isométrie. ■

Proposition 2.7.1 *Soit V un sous-espace de* ***dimension finie*** *d'un espace normé E, alors*

1. *V est fermé ;*
2. *si F est un sous-espace* ***fermé*** *de E, le sous-espace $V + F$ est fermé.*

Preuve:

16. Fermé car un espace métrique est un espace topologique séparé et borné car il est recouvrable par un nombre fini de boules.

1. Munissons V de sa structure normée induite. Comme c'est un espace normé de dimension finie, il est complet. Donc, il est fermé dans E.
2. Soit la projection $\pi : E \to E/F$. Il est facile de vérifier que $\pi^{-1}(\pi(V)) = V + F$. Comme $\pi(V)$ est de dimension finie, il est fermé dans E/F. Par continuité de π, $\pi^{-1}(\pi(V))$ est fermé dans E.

■

Remarque 2.7.1 On se souviendra, en particulier, qu'en dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé et que le seul sous-espace vectoriel dense de E est E lui-même.

Proposition 2.7.2 *Si un sous-espace F d'un espace normé E vérifie l'une des propriétés suivantes :*

1. *F est de dimension finie*
2. *F est fermé et de codimension finie*

alors F admet un supplémentaire topologique.

Preuve: $\boxed{\text{Cas où } F \text{ est de dimension finie :}}$ Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F et $B' = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ sa base duale. Chaque forme linéaire $\epsilon_i : F \to \mathbb{R}$ est continue sur F. Prolongeons-là par Hahn-Banach en une forme linéaire continue $\mu_i : E \to \mathbb{R}$. Notons H_i le noyau de cette forme. Posons ensuite

$$P := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes \mu_i$$

Comme $\mu_i(e_j) = \delta_{ij}$, on constate aprsès un petit calcul que $P^2 = P$. Par suite P est un projecteur sur F de direction $S = \bigcap_{i=1}^{n} H_i$. Comme de plus P est continu (grâce à la continuité des μ_i), la somme directe

$$E = \mathrm{Im} P \oplus \ker P = F \oplus S$$

est en fait topologique. ▼

$\boxed{\text{Cas où } F \text{ est fermé, de codimension finie :}}$ Soit S un supplémentaire algébrique de F. Il est donc de dimension finie. Si q est la projection de E sur S, sa décomposition canonique $\hat{q} : E/F \to S$ est continue car E/F est de dimension finie. Donc q est continue et la somme directe $E = F \oplus S$ est topologique. ■

Passons maintenant à un point important de la théorie : la caractérisation topologique de la dimension finie. Le théorème-phare est un résultat dû à Riesz.

Lemme 2.7.2 *Le seul espace normé compact est l'espace trivial $E = \{0\}$.*

Preuve: Si $E = \{0\}$, il est fermé et borné. Comme il est de dimension finie, il est compact. ▼

Si $E \neq \{0\}$, on peut y dénicher un vecteur non-nul a et E contient donc la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$. Comme D est fermé, si E était compact, D le serait également, ce qui est exclu, vu que D est homéomorphe à $\mathbb{R}$. ■

Définition 2.7.1 Un espace topologique sera dit *localement compact* si chacun de ses points admet un voisinage compact.

Théorème 2.7.3 (Riesz) *Un espace normé est de dimension finie si et seulement si il est localement compact.*

Preuve: En utilisant des homothéties (pour normaliser les rayons à 1) et des translations (pour ramener les centres en l'origine), il est facile de vérifier qu'un espace vectoriel est localement compact si et seulement si sa boule unité fermée B' est compacte.

$\boxed{\Rightarrow}$ **Hyp :** $\dim(E) < \infty$.

B' est fermée et bornée, et donc - puisque nous sommes en dimension finie - compacte.

▼

$\boxed{\Leftarrow}$ **Hyp :** B' est compacte.

Notons B_x la boule ouverte de centre x et de rayon $1/2$. Puisque $B' \subset \bigcup_{x\in B} B_x$, il existe - par hypothèse - un nombre fini de points $a_1, \ldots, a_n$ dans B' tels que

$$B' \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{a_i}.$$

Le sous-espace $F := \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$ est de dimension finie, donc fermé. Considérons la projection $\pi : E \to E/F$. Comme π est continue, $K := \pi(B')$ est compact dans E/F. Si $\xi \in K$, alors il existe un j tel que $\xi = [x]$ avec $x \in B_{a_j}$. Mais a_j étant dans F, on a : $\xi = [x] = [x - a_j]$ avec $\|x - a_j\| < 1/2$. En d'autres termes :

$$\xi = \pi(x - a_j) \text{ avec } x - a_j \in B(0, \frac{1}{2}[$$

ce qui se ré-écrit $\xi \in \pi(\frac{1}{2}B(0,1[) \subset \frac{1}{2}\pi(B')$. Nous venons de montrer que $K \subset \frac{1}{2}K$, soit encore : $2K \subset K$. On en déduit que $2^n K \subset K$ pour tout entier naturel n. Remarquons que

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n B' \quad \text{et donc que} \quad E/F = \pi(E) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n \pi(B') = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n K \subset K,$$

ce qui fait de E/F un espace normé compact, chose possible seulement si $E/F = \{0\}$, autrement dit si $E = F$. Notre espace E est donc de dimension finie. ■

2.8 Séries dans un espace normé.

Définition 2.8.1 Une *série* dans un espace normé E est la donnée d'un couple $((x_n), (s_n))$ de suites de points de E vérifiant la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} x_k.$$

x_n est appelé le *terme général* de la série et s_n est appelée *somme partielle à l'ordre* n. On dira que la série est *convergente* si la suite (s_n) l'est ; sa limite s est alors appelée *somme de la série* et on la note

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n.$$

Si la série est convergente vers la somme s, on appellera *reste à l'ordre* n de la série la suite $r_n := s - s_n$.

Remarque 2.8.1 1. Quand on travaille avec des séries, on préfère souvent la notation abrégée $\sum x_n$ à la notation plus lourde $((x_n), (s_n))$.

2. Dire que la série converge vers s est équivalent à dire que la suite réelle $\|s_n - s\|$ tend vers 0.
3. Une autre écriture du reste à l'ordre n est

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k.$$

Notons que l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des séries dans E s'identifie naturellement à l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ des suites (x_n) de E. Du coup, l'ensemble $\mathcal{S}(E)$ hérite de la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$, ce qui permet de définir la somme de deux séries ainsi que le produit d'une série par un scalaire ; la série nulle étant bien entendu la série de terme général égal à 0. D'où la

Proposition 2.8.1 *L'ensemble $\mathcal{S}_c(E)$des séries convergentes de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(E)$ et*

$$\sigma : \mathcal{S}_c(E) \to E : (x_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$$

est une application linéaire.

Preuve: Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries convergentes de sommes respectives s et s' et α un scalaire. Notons s_N et s'_N les sommes partielles associées respectivement à $\sum x_n$ et $\sum y_n$. On a alors :

— La somme partielle associée à la série $\sum(x_n + y_n)$ est $s_N + s'_N$ et cette dernière converge vers $s + s'$.

— La somme partielle associée à la série $\sum(\alpha x_n)$ est αs_N et cette dernière converge vers αs.

— La série nulle ($x_n = 0$ pour tout n) converge (vers 0).

■

Proposition 2.8.2 *Si une série converge alors son terme général ainsi que son reste à l'ordre n tendent vers 0.*

Preuve: En effet si $s_n \to s$, alors $x_n = s_n - s_{n-1} \to 0$ et $r_n = s - s_n \to 0$. ■

Exemple 2.8.1 (Série télescopique) La série $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge dans un espace normé E si et seulement si la suite (x_n) converge dans E et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(x_{n+1} - x_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) - x_0.$$

Proposition 2.8.3 *Une application linéaire continue $u : E \to F$ transforme une série convergente $\sum x_n$ en une série convergente $\sum u(x_n)$ et on a :*

$$u\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n).$$

Preuve: Soit $\sum x_n$ une série convergente de E. Notons s_N sa somme partielle à l'ordre N et s sa somme. Considérons la série $\sum u(x_n)$ dans F et notons S_N sa somme partielle à l'ordre N. On aura donc

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u(x_n) = u\left(\sum_{n=0}^{N} x_n\right) = u(s_N).$$

Comme u est continue la suite $u(s_N)$ converge dans F vers $u(s)$. Donc la série $\sum u(x_n)$ converge et a pour somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u(x_n) = u(s) = u\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x_n\right).$$

■

Proposition 2.8.4 (Critère de Cauchy) *Une série $\sum x_n$ d'un espace de Banach E est convergente si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| < \epsilon.$$

Preuve: Il s'agit simplement de la ré-écriture de "(s_n) est une suite de Cauchy dans E" en remarquant que $\|s_{n+p} - s_n\| = \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\|$. ■

Définition 2.8.2 La série $\sum x_n$ sera dite *normalement convergente* si la série à termes réels positifs $\sum \|x_n\|$ est convergente.

Théorème 2.8.1 *Dans un espace de Banach E, toute série normalement convergente est convergente.*

Preuve: Soit $\sum x_n$ une série normalement convergente dans E. La série à termes positifs $\sum \|x_n\|$ converge dans $\mathbb{R}$. Si ϵ est un réel > 0, il existe donc un rang N tel que pour tout $n > N$ et tout p on ait $\|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \epsilon$. En particulier

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall n > n, \qquad \|x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}\| \leq \|x_{n+1}\| + \cdots + \|x_{n+p}\| < \epsilon.$$

Le critère de Cauchy nous dit alors que notre série $\sum x_n$ converge dans E. ■

Remarque 2.8.2 1. En fait on pourrait démontrer un résultat plus fort : un espace normé est de Banach si et seulement si chacune de ses séries normalement convergentes est convergente.

2. Si E n'est pas un Banach, on peut construire de façon élégante une série normalement convergente mais non convergente de la manière suivante : puisque E n'est pas complet, il existe une suite de Cauchy (x_n) non-convergente. En utilisant la définition d'une suite de Cauchy, on peut extraire de (x_n) une sous-suite (x_{n_k}) telle que $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k-1}}\right\| < \frac{1}{2^k}$. La série de terme général $a_k := x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$ répond au cahier des charges. En effet : d'une part cette série est normalement convergente puisque $0 \leq \|a_k\| < \left(\frac{1}{2}\right)^k$; d'autre part la série $\sum a_k$ ne peut pas converger car sinon, vu que c'est une série télescopique, cela entraînerait la convergence de la suite (x_{n_k}), ce qui est exclu.

Exercice 2.8.1 Montrer qu'une application linéaire continue $u : E \to F$ entre deux espaces de Banach transforme une série normalement convergente $\sum x_n$ en une série normalement convergente $\sum u(x_n)$.

Exemple 2.8.2 (Exponentielle d'un endomorphisme) Soit E un espace de Banach. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, alors la série d'opérateurs $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge normalement dans l'espace de Banach $\mathcal{L}(E)$ puisque :

$$0 \leq \left\|\frac{u^n}{n!}\right\| = \frac{1}{n!}\|u^n\| \leq \frac{\|u\|^n}{n!}$$

et que la série $\sum \frac{t^n}{n!}$ converge vers e^t pour tout réel t. On notera

$$\exp(u) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$$

et on appelera cet endomorphisme *l'exponentielle de u*. La norme de $\exp(u)$ vérifie en outre

$$\|exp(u)\| \leq e^{\|u\|}.$$

Exercice 2.8.2 Une série $\sum x_n$ sera dite *commutativement convergente* si, pour tout permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum x_{\sigma(n)}$ est convergente. Montrer que dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est commutativement convergente.

Théorème 2.8.2 (Von Neumann) *Soit E un espace de Banach. Supposons que $v : E \to E$ soit dans la boule unité ouverte de $\mathcal{L}(E)$. Alors la série $\sum v^n$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ et*

$$I - v \in \mathrm{Isom}(E) \qquad \textit{avec} \qquad (I-v)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} v^n.$$

Preuve: La série $\sum v^n$ est normalement convergente dans $\mathcal{L}(E)$ puisque

$$0 \leq \|v^n\| \leq \|v\|^n \qquad \text{avec } \|v\| < 1.$$

Comme $\mathcal{L}(E)$ est un Banach, $\sum v^n$ converge vers un élément $s \in \mathcal{L}(E)$. Notons $s_N := v^0 + \cdots + v^N$, on a

$$\begin{aligned} v \circ s_N &= v^1 + \cdots + v^{N+1} \\ v \circ s_N &= s_N - v^0 + v^{N+1} \\ (I - v) \circ s_N &= I - v^{N+1}. \end{aligned}$$

La convergence de $\sum v^n$ entraîne que $v^N \to 0$ et la dernière égalité donne donc après passage à la limite

$$(I - v) \circ s = I.$$

Un calcul similaire donnerait $s \circ (I - v) = I$. On en déduit que $I - v$ est inversible et que son inverse $(I - v)^{-1} = s$ est continu. Ainsi $(I - v) \in \mathrm{Isom}(E)$. ■

Remarquons que, quitte à poser $u := I - v$, notre résultat s'écrit aussi :

$$\|u - I\| < 1 \Rightarrow u \in \mathrm{Isom}(E)$$

soit encore :

$$\boxed{B(I, 1[\subset \mathrm{Isom}(E)}.$$

Corollaire 2.8.1 *Si E est un espace de Banach, le groupe* $\mathrm{Isom}(E)$ *est ouvert dans* $\mathcal{L}(E)$.

Preuve: Soit $u_0 \in \mathrm{Isom}(E)$. On peut facilement vérifier que l'application

$$L_{u_0} : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) : w \longmapsto u_0 \circ w$$

est un isomorphisme d'evn préservant $\mathrm{Isom}(E)$. Elle envoit donc $B(I, 1[$ sur un voisinage ouvert V de u_0 contenu dans $\mathrm{Isom}(E)$:

$$I \in B(I, 1[\subset \mathrm{Isom}(E) \quad \xrightarrow{L_{u_0}} \quad u_0 \in V \subset \mathrm{Isom}(E).$$

$\mathrm{Isom}(E)$ est donc ouvert dans $\mathcal{L}(E)$, comme voisinage de chacun de ses points. ■

2.9 Facultatif - L3/M1 : the New Frontier.

Nous avons déjà admis un résultat que vous prouverez plus tard, en Analyse Fonctionnelle du Master 1, à savoir le théorème de Hahn-Banach. Dans cette dernière section, hors-programme, nous en admettons un second : le théorème de Banach-Schauder. A l'instar du théorème HB, ce nouveau résultat engendre une multitude de corollaires très utiles. Notons que ces derniers, pour pouvoir fonctionner, nécessitent de travailler dans des espaces de Banach.

Théorème 2.9.1 *Si F est un sous-espace fermé d'un espace de Banach E, l'espace quotient E/F est aussi un espace de Banach.*

Preuve: exercice tout-à-fait de votre niveau : c'est un petit travail pour les vacances d'été. ■

Théorème 2.9.2 (Banach-Schauder) *Si E et F sont deux espaces de Banach, toute application $u : E \to F$ linéaire continue et surjective est ouverte.*

Preuve: Aussi appelé "théorème de l'application ouverte". Admis en L3 ; (nécessite le théorème de Baire). ■

Corollaire 2.9.1 *Si E et F sont deux espaces de Banach, toute application linéaire $u : E \to F$ continue et bijective est un isomorphisme d'espaces normés.*

Preuve: Dire qu'une application bijective $u : E \to F$ est ouverte équivaut à dire que la bijection réciproque u^{-1} est continue. ■

Corollaire 2.9.2 *Si E et F sont deux espaces de Banach, toute application linéaire $u : E \to F$ continue injective à image fermée définit par restriction à droite un isomorphisme de E sur* $\mathrm{Im} u$.

Preuve: $\mathrm{Im} u$ est un Banach car fermé dans le Banach F. La restriction à droite $\tilde{u} : E \to \mathrm{Im} u : x \mapsto x$ est linéaire, continue et bijective entre deux Banach et on applique le corollaire 2.9.1. ■

Corollaire 2.9.3 *Si un espace de Banach E est somme directe algébrique de deux sous-espaces fermés F et S, cette somme est topologique.*

Preuve: Si F et S sont des sous-espaces fermés dans E (qui est complet) alors ils sont tous les deux complets. Un produit de Banach étant encore un Banach l'application linéaire, continue, bijective

$$\sigma : F \times S \to E : (f, s) \mapsto f + s.$$

est donc un homéomorphisme d'après le corollaire 2.9.1. ■

Corollaire 2.9.4 *Soient E et F deux espaces de Banach. Si $u : E \to F$ est une application linéaire continue à image fermée, sa décomposition canonique $\hat{u} : E/\ker u \to \mathrm{Im} u$ est un isomorphisme d'espaces normés.*

Preuve: On sait déjà que $\hat{u}$ est linéaire continue et bijective. De plus $E/\ker u$ est un Banach par le théorème 2.9.1 et $\mathrm{Im} u$ est un Banach comme fermé dans un complet. On peut alors appliquer encore une fois le corollaire 2.9.1. ■

Corollaire 2.9.5 *Soit $u : E \to F$ une application linéaire continue entre deux espaces de Banach telle que* $\mathrm{Im} u$ *soit fermé. Alors sa transposée ${}^t u : F' \to E'$ vérifie*

$$\mathrm{Im}\,{}^t u \text{ est fermé} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\,{}^t u = (\ker u)^\circ$$

Preuve: (Il est conseillé de tracer un diagramme pour mieux comprendre le raisonnement ainsi que les étapes.)

$\boxed{\mathrm{Im}^t u \subset (\ker u)^\circ}$

Si $\mu \in \mathrm{Im}^t u$, il existe $\nu \in F'$ tel que $\mu = \nu \circ u$ et, donc, μ s'annule sur $\ker u$. Autrement dit $\mu \in (\ker u)^\circ$.▼

$\boxed{(\ker u)^\circ \subset \mathrm{Im}^t u}$:

Soit $\mu : E \to \mathbb{R}$ dans $(\ker u)^\circ$. On cherche à construire $\nu : F \to \mathbb{R}$ linéaire et continue telle que $\mu = \nu \circ u$. Faisons intervenir la décomposition canonique de u :

$$E \underset{\pi}{\longrightarrow} E/\ker u \underset{\hat{u}}{\longrightarrow} \mathrm{Im} u \underset{j}{\hookrightarrow} F.$$

Par le corollaire 2.9.4, $\hat{u}$ est un isomorphisme d'espaces normés. De plus, comme μ s'annule sur le noyau de u, on a :

$$x \sim x' \quad \Leftrightarrow \quad u(x - x') = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(x - x') = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = \mu(x').$$

On peut donc construire[17] une forme linéaire $\hat{\mu}$ sur $E/\ker u$ en posant $\hat{\mu}([x]) := \mu(x)$.

$$E \underset{\pi}{\longrightarrow} E/\ker u \underset{\hat{\mu}}{\longrightarrow} \mathbb{R}.$$

La forme linéaire $\hat{\mu}$ vérifie donc la relation $\hat{\mu} \circ \pi = \mu$, ce qui montre qu'elle est aussi continue.

Posons ensuite $\hat{\nu} := \hat{\mu} \circ \hat{u}^{-1}$: c'est une forme linéaire continue sur $\mathrm{Im} u$,

$$\mathrm{Im} u \underset{\hat{u}^{-1}}{\longrightarrow} E/\ker u \underset{\hat{\mu}}{\longrightarrow} \mathbb{R}$$

que l'on peut étendre par Hahn-Banach en une forme linéaire continue ν sur F :

$$\mathrm{Im} u \underset{j}{\hookrightarrow} F \underset{\nu}{\longrightarrow} \mathbb{R} \qquad \nu \circ j = \hat{\nu}.$$

Vérifions que c'est bien le ν recherché :

$$\nu \circ u = \nu \circ j \circ \hat{u} \circ \pi = \hat{\nu} \circ \hat{u} \circ \pi = \hat{\mu} \circ \hat{u}^{-1} \circ \hat{u} \circ \pi = \hat{\mu} \circ \pi = \mu.$$

Enfin, on remarque que $\mathrm{Im}^t u$ est fermé puisque $(\ker u)^\circ$ l'est. ■

Exercice 2.9.1 Soit F un sous-espace fermé dans un espace de Banach E. Montrer que

$$(E/F)' \underset{evn}{\cong} F^o.$$

(Indice : considérer la transposée de la projection quotient $\pi : E \to E/F$, puis utiliser les corollaires 2.9.2 et 2.9.5...)

17. On dit que μ "descend" sur le quotient.