GROUPES ET ANNEAUX 2
CONTRÔLE CONTINU N°1

Exercice 1. Soit G un groupe, $K \triangleleft G$ un sous-groupe distingué, et $H < G$ un sous-groupe. Montrer que :

(i) $K \cap H$ est un sous-groupe distingué de H ;

(ii) $KH = \{kh \mid k \in K, h \in H\}$ est un sous-groupe de G ;

(iii) $H/(K \cap H) \cong KH/K$.

Exercice 2. Soit $H < G$ un sous-groupe d'un groupe G. Le *centralisateur de H dans G* est $\mathrm{C}_G(H) := \{g \in G \mid gh = hg \,\forall\, h \in H\} < G$, et le *normalisateur de H dans G* est $\mathrm{N}_G(H) := \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} < G$.

(i) Montrer que $\mathrm{C}_G(H) \triangleleft \mathrm{N}_G(H)$.

(ii) Déterminer $\mathrm{C}_G(H)$ et $\mathrm{N}_G(H)$ lorsque $G = \mathfrak{S}_3$ et $H = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$.

(iii) Montrer que $\mathrm{C}_G(gHg^{-1}) = g\mathrm{C}_G(H)g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et en déduire que, si $H \triangleleft G$, alors $\mathrm{C}_G(H) \triangleleft G$.

(iv) Montrer que $[G : \mathrm{N}_G(H)]$ est égal au nombre de sous-groupes de G conjugués à H. *Indication :* étudier l'action par conjugaison de G sur l'ensemble X de ses sous-groupes.

Exercice 3. Soit G un groupe fini d'ordre $n \in \mathbb{N}$, et soit $p \in \mathbb{N}$ le plus petit nombre premier divisant n. Montrer que, si $H \triangleleft G$ et $|H| = p$, alors $H \subset \mathrm{Z}(G)$. *Indication :* étudier l'action par conjugaison de G sur H, ainsi que le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(H)$.