# HAX501X – Groupes et anneaux 1

# Contrôle continu 2 – Correction

**Exercice 1 : anneaux noethériens, et non noethériens.** *On rappelle une définition entrevue en cours : un anneau commutatif $A$ est dit* noethérien *si toute suite croissante d'idéaux de $A$ est stationnaire, c'est-à-dire si pour toute suite croissante*

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n \subset I_{n+1} \subset \cdots$$

*d'idéaux de $A$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $I_n = I_N$.*

1) *On redémontre le fait, vu en cours, qu'un anneau principal est noethérien. Soit $A$ un anneau principal, et soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'idéaux de $A$ comme ci-dessus.*

   a) *Rappeler la définition de la notion d'anneau principal.*

   Voir le cours.

   b) *On pose $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Montrer que $I$ est un idéal de $A$.*

   Voir le cours.

   c) *En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.*

   Voir le cours.

2) *On considère l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $E$ une partie de $\mathbb{R}$, on note $I(E)$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in E,\ f(x) = 0$.*

   a) *Montrer que $I(E)$ est un idéal de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

   - ▷ Clairement, la fonction nulle $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est dans $I(E)$.
   - ▷ Soient $f, g \in I(E)$. Alors pour tout $x \in E$ on a $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$, donc $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$. On en déduit que $f + g \in I(E)$.
   - ▷ Soit $f \in I(E)$. Alors pour tout $x \in E$ on a $f(x) = 0$, donc $(-f)(x) = -f(x) = 0$. On en déduit que $-f \in I(E)$.
   - ▷ Soit $f \in I(E)$, et soit $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ quelconque. Alors pour tout $x \in E$ on a $f(x) = 0$, et donc $(fg)(x) = f(x)g(x) = 0$. On en déduit que $fg \in I(E)$.

   b) *Montrer que c'est un idéal principal.*

   On note $\chi_{\mathbb{R}\setminus E}$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus E$, définie par

$$\chi_{\mathbb{R}\setminus E} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E; \\ 1 & \text{si } x \notin E. \end{cases}$$

   Clairement, $\chi_{\mathbb{R}\setminus E} \in I(E)$, et donc, comme $I(E)$ est un idéal, on a l'inclusion

$$(\chi_{\mathbb{R}\setminus E}) \subset I(E).$$

Réciproquement, on voit qu'une application $f \in I(E)$ vérifie $f = \chi_{\mathbb{R}\setminus E} f$, et donc appartient à $(\chi_{\mathbb{R}\setminus E})$. On a donc l'inclusion :

$$I(E) \subset (\chi_{\mathbb{R}\setminus E}).$$

Conclusion : on a l'égalité

$$I(E) = (\chi_{\mathbb{R}\setminus E}),$$

et donc $I(E)$ est un idéal principal, engendré par $\chi_{\mathbb{R}\setminus E}$.

c) *Montrer que l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas noethérien.*

Pour des ensembles $E \subset F \subset \mathbb{R}$, on a l'inclusion $I(F) \subset I(E)$. De plus :

$$\text{si } E \subsetneq F \text{ alors } I(F) \subsetneq I(E),$$

où $\subsetneq$ symbolise une inclusion stricte. En effet, la fonction indicatrice $\chi_{\mathbb{R}\setminus E}$ est alors dans $I(E)$ mais pas dans $I(F)$, car pour un $x \in F \setminus E$ on a $\chi_{\mathbb{R}\setminus E}(x) = 1$.
Soit une partie *strictement* décroissante (pour l'inclusion) de parties de $\mathbb{R}$ :

$$E_0 \supsetneq E_1 \supsetneq E_2 \supsetneq \cdots \supsetneq E_{n-1} \supsetneq E_n \supsetneq \cdots .$$

(Par exemple, on peut définir $E_n = [0, 1 + \frac{1}{n+1}]$ pour tout $n$.) Alors par la discussion qui précède, on a une suite *strictement* croissante (pour l'inclusion) d'idéaux de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ :

$$I(E_0) \subsetneq I(E_1) \subsetneq I(E_2) \subsetneq \cdots \subsetneq I(E_{n-1}) \subsetneq I(E_n) \subsetneq \cdots .$$

Conclusion : l'anneau $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas noethérien.

**Exercice 2 : automorphismes de groupes.** *Pour un groupe $G$, on note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de groupes de $G$.*

1) *Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Bij}(G)$, le groupe des permutations de $G$.*

On rappelle que $\mathrm{Aut}(G)$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{Bij}(G)$ qui sont des morphismes de groupes.

- ▷ L'élément neutre de $\mathrm{Bij}(G)$, qui est l'identité $\mathrm{id}_G$, est bien un morphisme de groupe, donc est dans $\mathrm{Aut}(G)$.
- ▷ Soient $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G)$. Comme la composée de morphismes de groupes est un morphisme de groupes, on a que $\varphi \circ \psi \in \mathrm{Aut}(G)$.
- ▷ Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Comme la réciproque d'un morphisme de groupes bijectif est un morphisme de groupes, on a que $\varphi^{-1} \in \mathrm{Aut}(G)$.

2) *Pour un élément $g \in G$ on définit une application*

$$\gamma_g : G \to G \ , \ x \mapsto gxg^{-1}.$$

*Montrer que $\gamma_g$ est un automorphisme de $G$. On l'appelle la* conjugaison *par $g$ dans $G$.*

- ▷ On montre que $\gamma_g$ est un morphisme de groupes. Pour $x, y \in G$, on a :

$$\gamma_g(xy) = gxyg^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_g(x)\gamma_g(y) = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = gx(g^{-1}g)yg^{-1} = gxyg^{-1}.$$

- ▷ On montre que $\gamma_g$ est une bijection. On peut montrer à la main que $\gamma_g$ est injectif et bijectif, ou remarquer qu'on a :

$$\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}} = \mathrm{id}_G \quad \text{et} \quad \gamma_{g^{-1}} \circ \gamma_g = \mathrm{id}_G.$$

  En effet, pour la première égalité par exemple, on calcule, pour $x \in G$ :

$$(\gamma_g \circ \gamma_{g^{-1}})(x) = \gamma_g(g^{-1}xg) = g(g^{-1}xg)g^{-1} = x.$$

3) *Montrer que l'application*

$$C : G \to \mathrm{Aut}(G)\ ,\ g \mapsto \gamma_g$$

*est un morphisme de groupes. Quel est son noyau ?*

Soient $g, h \in G$. On veut montrer que $\gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h$. On calcule, pour $x \in G$ :

$$\gamma_{gh}(x) = (gh)x(gh)^{-1} = ghxh^{-1}g^{-1} \quad \text{et} \quad (\gamma_g \circ \gamma_h)(x) = \gamma_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1}.$$

On a donc bien $\gamma_{gh} = \gamma_g \circ \gamma_h$, c'est-à-dire $C(gh) = C(g) \circ C(h)$. Donc $C$ est un morphisme de groupes.
Le noyau de $C$ est l'ensemble des $g \in G$ tels que $\gamma_g = \mathrm{id}_G$. Dit autrement :

$$g \in \ker(C) \iff \forall x \in G,\ gxg^{-1} = x.$$

Ou encore :

$$g \in \ker(C) \iff \forall x \in G,\ gx = xg.$$

Conclusion : le noyau de $C$ est le centre de $G$, qu'on a vu en TD et qu'on a noté $Z(G)$.