5 Connexité

Introduction

Intuition : un espace topologique est « connexe » s'il est constitué d'un seul « morceau ». Par exemple, $[0,1]$ muni de la topologie usuelle semble constitué d'un seul morceau (on dira donc qu'il est connexe), alors que $[0,1] \cup [2,3]$ semble constitué de deux morceaux (on dira donc qu'il n'est pas connexe). Ou encore : l'ensemble $\{a,b,c\}$ muni de la topologie grossière est connexe (les points a,b,c sont en quelque sorte indiscernables par la topologie grossière et forment un tout) alors que le même ensemble muni de la topologie discrète n'est pas connexe (chaque singleton est ouvert et semble former un morceau).

Qu'est-ce qu'un « morceau » du point de vue de la topologie ? Tout ensemble constitué d'au moins 2 points peut se décomposer en deux parties non vides disjointes. Par exemple, on peut écrire $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$, mais cette décomposition *ensembliste* en deux parties disjointes ne rend pas justice à la topologie : elle ne voit pas que le point 1 est « collé », c'est à dire adhérent, à $[0,1[$. On n'a donc pas envie de dire que $[0,1] = [0,1[\cup \{1\}$ est une décomposition *topologique* de $[0,1]$.

On peut ainsi proposer la définition suivante : l'espace topologique X est **topologiquement décomposé** en deux parties non vides $A, B \subseteq X$ si :

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad A \cap \overline{B} = \varnothing, \quad B \cap \overline{A} = \varnothing \tag{5.1}$$

Les deux premières conditions disent que la décomposition est ensembliste, les deux dernières précisent que la décomposition est topologique : aucune des deux parties ne contient un point adhérent à l'autre. En fait, la condition (5.1) est équivalente à :

$$X = A \cup B, \quad A \cap B = \varnothing, \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ fermés non vides de } X \tag{5.2}$$

En effet : si (5.1) est vérifiée, alors $A \subseteq \overline{A} \subseteq X \backslash B = A$ et ainsi $A = \overline{A}$ et donc A est fermé, et de même pour B. Réciproquement, (5.2) implique (5.1) puisque $A \cap B = \varnothing$ s'écrit aussi $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$ lorsque A et B sont fermés.

Mais dire qu'il existe des parties A et B vérifiant (5.2) revient à dire qu'il existe une partie A qui est non vide et différente de X, et qui est à la fois ouverte et fermée. Nous sommes arrivés à la définition classique de la connexité.

5.1 Espaces topologiques connexes

Définition. Un espace topologique $(X, \mathcal{O})$ est **connexe** si X et $\varnothing$ sont les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées dans X. Une partie A de X est dite **connexe** si elle est connexe en tant qu'espace topologique pour la topologie induite.

Comme on l'a vu dans l'introduction :

$(X, \mathcal{O})$ est connexe $\Leftrightarrow$ il n'existe pas d'ouverts disjoints non vides U, V tels que $X = U \cup V$
$\Leftrightarrow$ il n'existe pas de fermés disjoints non vides F, G tels que $X = F \cup G$

Exemples

1. L'ensemble vide est connexe !
2. Un singleton est connexe.
3. Un espace topologique discret n'est pas connexe dès qu'il contient plus de deux éléments. Par exemple si $X = \{a, b\}$ avec la topologie discrète et $a \neq b$, alors $X = \{a\} \cup \{b\}$ est une décomposition en deux ouverts disjoints non vides.
4. Les espaces $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ usuels ne sont pas connexes : leur topologie est discrète.
5. L'espace $\mathbb{Q}$ usuel n'est pas connexe. Par exemple :
$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap \,]-\infty, \sqrt{2}[\,) \cup (\mathbb{Q} \cap \,]\sqrt{2}, +\infty[\,)$$
est une décomposition de $\mathbb{Q}$ en deux ouverts disjoints non vides.
6. $\mathbb{R}^*$ n'est pas connexe, car $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ est une décomposition en deux ouverts non vides disjoints.

Proposition. *Soient X et Y des espaces topologiques homéomorphes. lors X est connexe si et seulement si Y est connexe.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme. Si Y n'est pas connexe, c'est qu'il existe deux ouverts V, V' de Y, disjoints non vides, tels que $Y = V \cup V'$. lors $U := f^{-1}(V)$ et $U' := f^{-1}(V')$ sont des ouverts de X car f est continue, ils ne sont pas vides car f est surjective, ils sont disjoints car V et V' le sont, et $X = U \cup U'$ car $Y = V \cup V'$. Donc X n'est pas connexe. De même dans l'autre sens, en utilisant la réciproque f^{-1}. □

Les parties connexes de $\mathbb{R}$ On va voir que $\mathbb{R}$ usuel est connexe, et que ses parties connexes sont les intervalles.

Proposition. *L'espace $\mathbb{R}$ usuel est connexe.*

Démonstration. Soient A, B deux fermés non vides tels que $A \cup B = \mathbb{R}$. Il s'agit donc de montrer que $A \cap B$ n'est pas vide.

1. Comme A et B sont supposés non vides, on peut choisir $a \in A$ et $b \in B$. Quitte à échanger les rôles de A et B, on suppose que $a \leqslant b$. L'idée est maintenant d'aller trouver le plus grand élément de A contenu dans $[a, b]$ et de montrer qu'il appartient aussi à B. On aura alors un élément de $A \cap B$, qui sera ainsi non vide.
2. Considérons donc $A \cap [a, b]$: il s'agit d'une partie de $\mathbb{R}$ qui est non vide (elle contient a) et majorée (par b). Donc elle admet une borne supérieure m, qui forcément appartient à l'adhérence de A, donc qui appartient à A (supposé fermé). insi en fait m est le plus grand élément de $A \cap [a, b]$.

3. Si $m = b$, on a obtenu ce qu'on voulait : m appartient à A et à B, donc $A \cap B$ n'est pas vide
4. Si m est strictement inférieur à b, alors $]m, b] \cap A = \emptyset$ puisque m est le plus grand élément de $A \cap [a, b]$. Donc $]m, b] \subseteq B$, puisque $A \cup B = \mathbb{R}$. Et donc, comme plus haut, m appartient à l'adhérence de B, donc appartient à B (supposé fermé). Donc là encore m appartient à A et à B, donc $A \cap B$ n'est pas vide

□

En fait, le même raisonnement fonctionne pour tous les intervalles de $\mathbb{R}$:

Proposition. *Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

Démonstration. On raisonne exactement de la même manière, en remplaçant $\mathbb{R}$ par un intervalle I (que l'on peut supposer non vide sinon il n'y a rien à faire). □

Proposition. *Les intervalles sont les seuls connexes de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. Il existe donc $a < b < c$ tels que $a, c \in A$ et $b \notin A$. lors $A = (A \cap] - \infty, c[) \cap (A \cap]c, +\infty[)$ est une décomposition de A en deux ouverts disjoints non vides, donc A n'est pas connexe. □

pplications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$ Dans cette section, $\{0, 1\}$ est muni de sa topologie discrète. Ses ouverts sont donc $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ et $\{0, 1\}$. On peut aussi voir $\{0, 1\}$ comme sous-espace de $\mathbb{R}$ avec sa distance usuelle.

Soit X un espace topologique. quelle condition une application $f : X \to \{0, 1\}$ est-elle continue ? Dire que f est continue, c'est dire que l'image réciproque par f de tout ouvert de $\{0, 1\}$ est un ouvert de X. Mais $\{0, 1\}$ ne possède que quatre ouverts, et clairement $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\{0, 1\}) = X$ sont des ouverts de X, donc la seule contrainte est que $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ soient des ouverts de X. Or évidemment $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont des parties de X qui sont disjointes et leur réunion est X tout entier. On sent qu'il y a un rapport avec la connexité de X...

Proposition. *Soit X un espace topologique. lors X est connexe si et seulement si toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Démonstration. Par double implication.

1. $\Rightarrow$ On suppose X connexe et on se donne $f : X \to \{0, 1\}$ continue. Comme on vient de le voir, $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(1)$ sont alors deux ouverts disjoints de X sont la réunion est X. Par connexité, l'un des deux doit être vide. Si $f^{-1}(0) = \emptyset$, alors $X = f^{-1}(1)$ et donc f est constante égale à 1. De même, si $f^{-1}(1) = \emptyset$ alors f est constante égale à 0.
2. $\Leftarrow$ Par contraposée. On suppose que X n'est pas connexe, il existe donc deux ouverts A, B de X disjoints non vides tels que $A \cup B = X$. Définissons alors $f : X \to \{0, 1\}$ en posant $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$. Cette application est bien définie puisque $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = X$. De plus f est continue puisque $f^{-1}(0) = A$ et $f^{-1}(1) = B$ sont des ouverts de X. De plus f n'est pas constante, puisque A et B ne sont pas vides.

□

Propriétés de la connexité La caractérisation de la connexité en termes d'applications continues à valeurs dans $\{0, 1\}$ est souvent très facile à utiliser dans les démonstrations.

Proposition. *Soit X un espace topologique.*

1. *Si A, B sont deux parties connexes de X telles que $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A \cup B$ est une partie connexe de X.*
2. *Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes de X telle que $\cap_{i \in I} A_i \neq \varnothing$, alors $\cup_{i \in I} A_i$ est une partie connexe de X.*
3. *Si A, B sont deux parties de X telles que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ et si A est connexe, alors B est connexe.*
4. *Si A est une partie connexe de X, alors $\overline{A}$ est connexe.*

Démonstration. 1. On suppose que A et B sont connexes et que $A \cap B \neq \varnothing$, et on considère $f : A \cup B \to \{0, 1\}$ une fonction continue. lors les restrictions $f_{\restriction A} : A \to \{0, 1\}$ et $f_{\restriction B} : B \to \{0, 1\}$ sont également continues. Par connexité, ces deux restrictions sont constantes. Et comme $A \cap B$ n'est pas vide, ces deux constantes sont les mêmes. Donc f est constante.

2. Généralisation directe.
3. Soit $f : B \to \{0, 1\}$ continue. lors la restriction $f_{\restriction A} : A \to \{0, 1\}$ est continue, donc constante par connexité. Supposons par exemple que $f(x) = 0$ pour tout $x \in A$, et soit $b \in B$. Montrons que nécessairement $f(b) = 0$ en raisonnant par l'absurde. Si $f(b) = 1$, alors b appartient à $f^{-1}(1)$ qui est un ouvert de B, donc qui peut s'écrire $f^{-1}(1) = B \cap U$ avec U ouvert de X. insi U est un voisinage de b dans X, et B est contenu dans l'adhérence de A, donc U doit contenir un point $a \in A$. Mais $A \subseteq B$, donc $a \in B$, donc $a \in B \cap U$, d'où à la fois $f(a) = 1$ et $f(a) = 0$, ce qui est la contradiction voulue. Donc $f : B \to \{0, 1\}$ est bien constante.
4. C'est un cas particulier du point précédent : prendre $B := \overline{A}$.

□

Proposition. *Soient X, Y deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$ une application continue. Si X est connexe, alors $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\;: f(X) \to \{0, 1\}$ une application continue. lors $\;\circ f : X \to \{0, 1\}$ est composée d'applications continues, donc est continue. Par connexité de X, elle est constante. Donc est constante. □

Dans la démonstration qui précède, on a utilisé le fait que si $f : X \to Y$ est une application continue, alors la « restriction au but » $X \to f(X)$ est également continue, où $f(X)$ est muni de la topologie induite comme sous-espace de Y.

Coroll ire. *Soient X, Y deux espaces topologiques, soit $f : X \to Y$ une application continue et soit $A \subseteq X$. Si A est une partie connexe de X, alors $f(A)$ est une partie connexe de Y.*

Démonstration. Il suffit de considérer la restriction $f_{\restriction A} : A \to Y$, qui est encore continue, et d'appliquer la proposition précédente. $\square$

Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème. *(théorème des valeurs intermédiaires) Soit X un espace topologique connexe, et soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue. Soient $a, b \in X$. lors pour tout réel $k \in [f(a), f(b)]$, il existe un point $x \in X$ tel que $f(x) = k$.*

Démonstration. D'après la proposition 5.1, $f(X)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Donc c'est un intervalle ! Or $f(a)$ et $f(b)$ appartiennent à $f(X)$, donc tout réel $k \in [f(a), f(b)]$ appartient également à $f(X)$, donc est de la forme $k = f(x)$ pour un certain $x \in X$. $\square$

Exemple 8. On note S^1 le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel. L'application $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(t) = (\cos t, \sin t)$ est continue, son image est S^1 et son domaine de définition est connexe. Donc S^1 est connexe.

Exercice 9. Montrer qu'il n'existe pas d'application continue injective $S^1 \to \mathbb{R}$.

Produit d'espaces connexes

Proposition. *Soient X et Y des espaces topologiques connexes. lors $X \times Y$ est connexe (pour la topologie produit).*

Démonstration. Si X ou Y est vide, alors $X \times Y$ est vide aussi et donc est bien connexe. On peut donc supposer que X et Y sont tous deux non vides, et on choisit un point $x_0 \in X$ et un point $y_0 \in Y$. Soit $f : X \times Y \to \{0, 1\}$ continue. On va montrer que $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in X \times Y$.

- La restriction de f à $X \times \{y\}$ est continue. Or $X \times \{y\}$ est homéomorphe à X donc est connexe, donc $f_{\restriction X \times \{y\}}$ est constante, donc $f(x, y) = f(x_0, y)$.
- La restriction de f à $\{x_0\} \times Y$ est continue, or $\{x_0\} \times Y$ est homéomorphe à Y donc est connexe, donc $f_{\restriction \{x_0\} \times Y}$ est constante, donc $f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$.
- insi $f(x, y) = f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ comme on voulait montrer.

$\square$

Plus généralement, on démontre de même que le produit d'un nombre fini d'espaces est connexe si et seulement si chacun des facteurs est connexe.

Coroll ire 10. *$\mathbb{R}^n$ est connexe pour tout $n \geqslant 2$.*

5.2 Composantes connexes

Lorsqu'un espace topologique n'est pas connexe, on peut le décomposer en plusieurs « morceaux » connexes, que l'on appelle ses composantes connexes. Par exemple, muni de la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}$, l'espace $X = [0, 1] \cup [3, 4[\cup \{4\}$ possède trois composantes connexes.

Soit X un espace topologique. Pour chaque $x \in X$, notons C_x la réunion de toutes les parties connexes de X qui contiennent x. Remarquons tout d'abord que C_x n'est pas vide puisque $\{x\}$ est connexe (singleton) et contient x ; donc $x \in C_x$. De plus C_x est connexe d'après la proposition 5.1 puisque c'est la réunion d'une famille de connexes dont l'intersection n'est pas vide.

Proposition. *vec les notations précédentes :*

1. *C_x est la plus grande partie connexe de X qui contient x.*
2. *C_x est fermé dans X.*
3. *Si $x, y \in X$, alors ou bien $C_x = C_y$ ou bien $C_x \cap C_y = \varnothing$.*

Démonstration. 1. Par définition, C_x contient tout connexe auquel x appartient. Or on vient de voir que x appartient à C_x et que C_x est connexe. Donc C_x est bien le plus grand connexe contenant x.

2. L'adhérence $\overline{C_x}$ contient x et est connexe, donc $\overline{C_x} \subseteq C_x$, donc $\overline{C_x} = C_x$ autrement dit C_x est fermé.
3. Si $C_x \cap C_y$ n'est pas vide, alors la réunion $C_x \cup C_y$ est encore connexe, or elle contient x et y, donc $C_x \cup C_y \subseteq C_x$ et $C_x \cup C_y \subseteq C_y$, d'où finalement $C_x = C_y$.

□

Définition 11. On dit que C_x est la **compos nte connexe** de x dans X.

Comme on vient de le voir, les composantes connexes forment une partition de X en sous-ensembles fermés.

Exemples

1. $X = [0, 1] \cup [2, 3[\cup \{4\}$ possède trois composantes connexes : $[0, 1]$, $[2, 3[$ et $\{4\}$.
2. Les composantes connexes d'un espace discret (par exemple $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$) sont ses singletons.
3. Les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont ses singletons.

5.3 Connexité par arcs

Soit X un espace topologique. Par définition, un chemin de X est une application continue $\gamma : [0, 1] \to X$. On dit que γ « va de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$ ».

Définition. Un espace topologique X est **connexe p r rcs** si deux points quelconques $x, y \in X$ peuvent être reliés par un chemin $\gamma : [0, 1] \to X$ au sens où $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Exemple. Tout espace vectoriel normé est connexe par arcs. Plus généralement, toute partie convexe d'un evn est connexe par arcs. Encore plus généralement, toute partie étoilée d'un evn est connexe par arcs.

Proposition. *Si X est connexe par arcs, alors X est connexe.*

Démonstration. On suppose que X est connexe par arcs. Soit $f : X \to \{0,1\}$ une application continue : on cherche à montrer qu'elle est constante. Pour cela, soient $x, y \in X$ quelconques. Il existe alors un chemin γ de x à y. Mais alors la composée $f \circ \gamma : [0,1] \to \{0,1\}$ est continue, donc elle est constante par connexité de $[0,1]$. D'où $f(x) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(y)$, ce que l'on voulait montrer. □

⚠ La réciproque est fausse en général. Par exemple, on montre que

$$(\{0\} \times [0,1]) \cup \{(x, \sin 1/x) \,;\, 0 < x \leqslant 1\}$$

est connexe mais pas connexe par arcs.

Exercice 12. Montrer qu'un *ouvert* d'un espace vectoriel normé est connexe si et seulement si il est connexe par arcs.