Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2023-2024

HAX506X - Théorie des probabilités

Auto-évaluation sur le chapitre 1

ATTENTION : ce questionnaire ne doit être traité que si vous avez relu le cours, que vous connaissez les résultats principaux (définitions, propositions, théorèmes), et que vous avez refait les exemples.

Section 1 : Espace probabilisé

— Donner la définition d'une probabilité.

— Donner la définition d'un espace probabilisé.

— Montrer que δ_a (masse de Dirac en a) est une probabilité.

— Montrer que si $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont deux probabilités et $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda\mathbb{P}_1 + (1 - \lambda)\mathbb{P}_2$ est une probabilité.

— Donner l'espace probabilisé associé à un lancer de dé, à un lancer de pièce (avec Face $= 0$ et Pile $= 1$), à n lancers de dé.

— Donner la définition d'une probabilité $\mathbb{P}$ de densité f (et avoir compris la notation $\mathrm{d}\mathbb{P} = f\mathrm{d}\mu$)

— Pour $\mu = \lambda_1$ (mesure de Lebesgue), $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$, et $\mathrm{d}\mathbb{P} = f\mathrm{d}\mu$, donner l'expression sous forme d'intégrale de $\mathbb{P}(A)$ pour tout borélien A.

Section 2.1 : Loi d'une variable aléatoire

— Donner la définition d'une variable aléatoire. Quel type d'objet mathématique est une variable aléatoire ?

— Donner la définition de la loi d'une variable aléatoire. Quel type d'objet mathématique est la loi d'une variable aléatoire ?

— Montrer que toute variable aléatoire discrète (c'est-à-dire à valeurs dans un ensemble E discret) peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire (éventuellement infinie) de masses de Dirac.

Section 2.2 : Lois usuelles

— Donner la définition d'une loi uniforme sur un ensemble fini, d'une loi de Bernoulli, d'une loi binomiale, d'une loi géométrique, d'une loi de Poisson.

— Écrire ces lois soit sous la forme $\mathbb{P}(X = k) = \ldots$, soit sous la forme $\mathbb{P}_X =$ combinaison linéaire de masses de Dirac (et comprendre le lien entre ces deux écritures).

— Donner la définition d'une loi uniforme sur un borélien A de $\mathbb{R}^d$, d'une loi exponentielle, d'une loi normale.

Section 2.3 : Moments d'une variable aléatoire

- Donner la définition de l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$). Quel type d'objet mathématique est $\mathbb{E}[X]$? Savoir interpréter l'espérance comme la moyenne de X par rapport à la probabilité de départ $\mathbb{P}$.
- Énoncer le théorème de transfert pour une variable aléatoire $X : \Omega \to E$ et $h : E \to [0, \infty[$.
- Donner une autre expression de $\mathbb{E}[X]$ si X est à valeurs réelles à l'aide du théorème de transfert.
- Donner l'expression générale de l'espérance d'une loi discrète.
- Calculer l'espérance d'une loi uniforme, de Bernoulli, binomiale, de Poisson (voir aussi TD 3 - Exercice 1).
- Énoncer le résultat donnant la caractérisation de la loi de X à partir de quantités du type $\mathbb{E}[h(X)]$ (Proposition 1.18 du poly).
- Savoir utiliser ce résultat pour calculer la loi de Y quand Y est une fonction de X et qu'on connaît la loi de X (cf Exemple 1.19, voir aussi TD 5 - Exercice 3 - question 1).
- Donner la définition du moment d'ordre p (et son lien avec la norme dans les espaces $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, en bonus pour les bi-licences).
- Écrire les deux expressions du moment d'ordre p : la définition (intégrale sur Ω) et l'intégrale sur $\mathbb{R}$, et avoir compris qu'on passe de l'une à l'autre via le théorème de transfert.
- Énoncer l'inégalité de Markov et la démontrer (cela prend deux lignes si on part de la bonne inégalité).
- Donner la définition de la variance et de l'écart-type (et leur interprétation en terme de norme dans l'espace $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, en bonus pour les bi-licences). Savoir expliquer en quoi la variance mesure la dispersion autour de l'espérance
- Énoncer et démontrer la formule de Koenig-Huygens.
- Énoncer l'inégalité de Bienayme-Tchebychev et savoir l'interpréter (et avoir compris que c'est juste une conséquence de l'inégalité de Markov)
- Donner la définition de la covariance.
- Développer la variance de la somme (relation de Pythagore) pour deux variables aléatoires, puis pour n variables aléatoires.
- Donner la définition du coefficient de corrélation.
- Calculer la variance de certaines lois classiques : uniforme discrète, Bernoulli, binomiale, Poisson, uniforme sur $[a, b]$, exponentielle, normale.

Section 4.1 : Fonction de répartition

- Donner la définition de la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X à valeurs réelles (pourquoi se restreint-on à $\mathbb{R}$?). Quel type d'objet mathématique est F_X ?
- Donner l'expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète quelconque.
- Donner l'expression de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité quelconque (une fois qu'on a compris la notation $\mathrm{d}\mathbb{P} = f \mathrm{d}\lambda_1$ c'est direct).
- Donner les propriétés principales de la fonction de répartition.
- Énoncer le résultat donnant la caractérisation de la loi d'une variable aléatoire via sa fonction de répartition.

Section 4.2 : Fonction caractéristique

— Donner la définition de la fonction caractéristique φ_X dans le cas $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{R}$) : avec une intégrale soit sur Ω, soit $\mathbb{R}^d$ (respectivement $\mathbb{R}$). Quel type d'objet mathématique est φ_X. Montrer que φ_X est bien définie.

— Donner l'expression de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire discrète quelconque.

— Calculer la fonction caractéristique pour une variable aléatoire de loi de Bernoulli, binomiale, géométrique (voir aussi TD4 - Exercice 1).

— Donner l'expression de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire à densité quelconque.

— Calculer la fonction caractéristique pour une variable aléatoire de loi uniforme, exponentielle (voir aussi TD 4 - Exercice 1).

— Énoncer le résultat donnant le lien entre la régularité de φ_X et l'existence de moments de X. En particulier, donner une expression de l'espérance de X à partir de $\varphi'_X(0)$.

— Énoncer le résultat donnant la caractérisation de la loi d'une variable aléatoire via sa fonction caractéristique.

Section 4.3 : Fonction génératrice

— Donner la définition de la fonction génératrice G_X d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (et avoir compris que cela concerne uniquement les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$). Quel type d'objet mathématique est G_X ?

— Retrouver la loi de X à partir de G_X.

— Retrouver l'espérance de X à partir de G_X.

— Calculer les fonctions génératrices des lois discrètes classiques : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.

— Retrouver l'espérance des variables aléatoires précédentes à l'aide de G_X.