TD 1 - ALGORITHMES UNIDIMENSIONNELS

Exercice 1. Minimisation d'une fonction par dichotomie

Soit $f \in C^0([a,b],\mathbb{R})$. On dit que f est unimodale sur l'intervalle $[a,b]$ si il existe un point $\bar{x} \in [a,b]$, telle que f soit strictement décroissante sur $[a,\bar{x}[$ et strictement croissante sur $]\bar{x},b]$.

Pour chercher $\bar{x}$, nous allons générer une suite strictement décroissante d'intervalles dont le diamètre tend vers zéro et qui encadrent le minimum cherché.

Supposons connus cinq points $a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b$. Cinq situations se présentent :

i) $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\bar{x}$ appartient alors à $]x_1,x_2[$,

ii) $f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\bar{x}$ appartient alors à $]x_1,x_3[$,

iii) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$, $f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\bar{x}$ appartient alors à $]x_2,x_4[$,

iv) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$, $f(x_4) < f(x_5)$: $\bar{x}$ appartient alors à $]x_3,x_5[$,

v) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5)$: $\bar{x}$ appartient alors à $]x_4,x_5[$.

(1) Utiliser ces propriétés pour construire un algorithme permettant de génèrer une suite d'intervalles $([a_k,b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

- $\bar{x} \in [a_k,b_k]$
- $b_k - a_k = \dfrac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$,
- mis à part pour le premier pas, 2 évaluations de f sont nécessaires à chaque itérations,

(2) Montrer que $a_k \to \bar{x}$ et $b_k \to \bar{x}$.

Exercice 2. Méthode de la section dorée

Nous reprenons le principe de la méthode de dichotomie précédente mais à chaque itération, nous allons maintenant chercher à diviser l'intervalle d'approximation en 3 parties (au lieu de 4 pour la dichotomie). Plus précisément, nous allons construire une suite décroissante d'intervalles $[a_k; b_k]$ qui contiennent tous le minimum $\bar{x}$. Pour passer de $[a_k; b_k]$ à $[a_{k+1}; b_{k+1}]$, on introduit deux nombres x_2^k et x_3^k de l'intervalle $[a_k; b_k]$. Puis, on calcule les valeurs $f(x_2^k)$ et $f(x_3^k)$. Deux possibilités se présentent alors :

i) si $f(x_2^k) \leq f(x_3^k)$, alors, le minimum se trouve nécessairement à gauche de x_3^k. Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_3^k$,

ii) si $f(x_2^k) \geq f(x_3^k)$, alors, le minimum se trouve nécessairement à droite de x_2^k. Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant $a_{k+1} = x_2^k$ et $b_{k+1} = b_k$.

La question suivante se pose : comment choisir x_2^k et x_3^k en pratique ? On privilégie deux aspects :

i) on souhaite que le facteur de réduction γ, qui représente le ratio de la longueur du nouvel intervalle, notée L_{k+1}, par rapport à la longueur du précédent, notée L_k, soit constant:

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} = \gamma,$$

ii) on désire, comme pour la méthode de dichotomie, réutiliser le point qui n'a pas été choisi dans l'itération précédente afin de diminuer les coûts de calcul : ceci permettra en effet de n'évaluer f qu'une fois par itération au lieu de deux (sauf pour la première itération, où deux évaluations sont nécessaires). Rappelons que pour la dichotomie, il est nécessaire d'évaluer f deux fois par itération.

(1) traduire ces contraintes permettant de choisir x_2^k, x_3^k, a_{k+1}, b_{k+1}, proposer un algorithme et montrer qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour γ,

(2) montrer que pour tout k, $b_k - a_k = \gamma^k(b - a)$. Conclure.