Université de Montpellier
- Faculté des Sciences -
Département de Mathématiques

2023-2024 - L3 - Sem. 6
UE HAX601X
Topologie des espaces métriques

# Examen session 1 - Vendredi 17 mai 2024 - Durée : 3 heures.

(Resp : H. Akrout et L.Guieu.)

**N.B:** *Calculatrices, documents et objets connectés sont interdits. Ce sujet comporte 8 exercices répartis sur 2 pages. Tous ces exercices sont indépendants sauf –éventuellement– le (5) et le (6).*

---

**Exercice 1.** [Cours]

1. Montrer que toute partie fermée d'un espace **topologique** compact est compacte.
2. Montrer que toute partie compacte dans un espace **topologique** Hausdorff est fermée.

**Exercice 2.** [Cours] Montrer qu'un sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.

**Exercice 3.** [Cours] Soit $E = F \oplus S$ une décomposition en somme directe algébrique d'un espace normé $E$. Soient $p : E \to F$ et $q : E \to S$ les projections associées. Montrer que cette somme directe est topologique si et seulement si $p$ et $q$ sont continues.

**Exercice 4.** [Cours] Montrer qu'un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé est fermé.

---

**Exercice 5.** Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes par arcs est connexe par arcs

**Exercice 6.** [Action d'un groupe cyclique] On se place sur $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$, muni de la topologie induite par la topologie usuelle de $\mathbb{C}$. On note

$$S^1 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C} \mid |\mathbf{z}| = 1\} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

le cercle trigonométrique. Soit $\lambda$ un **réel fixé** strictement supérieur à 1, on considère, sur $\mathbb{C}^*$, la relation

$$\mathbf{z} \sim \mathbf{z}' \qquad \text{si} \qquad \exists n \in \mathbb{Z}, \quad \mathbf{z}' = \lambda^n \mathbf{z}.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{C}^*$. Dans la suite, on note $X = \mathbb{C}^*/\sim$, que l'on munit de la topologie quotient.
2. Montrer que la restriction à l'anneau $A = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^* \mid 1 \leq |\mathbf{z}| \leq \lambda\}$ de la projection canonique $p : \mathbb{C}^* \to X$ est surjective. Indication : on pourra utiliser sans le démontrer (exo de vacances) le fait que
$$\mathbb{R}_+^* = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\lambda^n, \lambda^{n+1}].$$
3. Montrer que $X$ est compact. Indication : utiliser la restriction $p_{|A} : A \to X$ étudiée à la question précédente.
4. On définit l'application
$$\phi : \mathbb{C}^* \longrightarrow S^1 \times S^1 : \mathbf{z} \longmapsto \left( e^{2i\pi \frac{\ln(|\mathbf{z}|)}{\ln(\lambda)}}, \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \right)$$
   (a) Montrer que $\phi$ est **continue** et **surjective**. Indication pour la surjectivité : trouver une solution de l'équation $\phi(re^{i\theta}) = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ d'inconnues $r$ et $\theta$.
   (b) Montrer que pour tous $\mathbf{z}$ et $\mathbf{z}'$ dans $\mathbb{C}^*$, on a l'équivalence $\mathbf{z} \sim \mathbf{z}' \Leftrightarrow \phi(\mathbf{z}) = \phi(\mathbf{z}')$.
   (c) En déduire qu'il existe une **bijection** $h : X \to S^1 \times S^1$ telle que $h \circ p = \phi$.
   (d) Montrer que $h$ est un **homéomorphisme** de $X$ sur $S^1 \times S^1$.
5. Montrer, par exemple en utilisant un des résultats précédents, que $X$ est connexe.

---

**T.S.V.P.**

**Exercice 7.** [Commutateur] Soit $E$ un espace normé. Rappelons que $L(E)$ désigne l'espace des endomorphismes de $E$ et $\mathcal{L}(E)$ le sous-espace des endomorphismes **continus** de $E$. Si $u$ et $v$ sont dans $L(E)$, on définit leur *commutateur*, noté $[u, v]$, en posant : $[u, v] = u \circ v - v \circ u$.

Notons $I$ l'identité de $E$. On se propose de montrer

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \forall v \in \mathcal{L}(E), \quad [u, v] \neq I.$$

1. Montrer que si $u$ et $v$ sont dans $\mathcal{L}(E)$, leur commutateur est aussi dans $\mathcal{L}(E)$.
2. On raisonne par l'absurde : supposons donc qu'il existe $u$ et $v$ dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $[u, v] = I$.
   (a) Montrer, par récurrence sur l'entier $n \geq 0$, que $[u, v^{n+1}] = (n+1)v^n$.
   (b) Etablir, pour tout entier $n \geq 0$, l'inégalité $\left\|[u, v^{n+1}]\right\| \leq 2\,\|u\|\,\|v\|\,\|v^n\|$.
   (c) En utilisant (a) et (b), montrer qu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $v^N = 0$.
   (d) En utilisant de nouveau (a), montrer que $v^n = 0 \Rightarrow v^{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. En déduire que $v = 0$. Mettre en évidence une contradiction.

---

**Exercice 8.** [Applications linéaires de rang fini] Soit $u : E \to F$ une application linéaire de **rang**[1] **fini** entre deux espaces normés $E$ et $F$. On se propose de montrer :

$u$ est **continue** $\Leftrightarrow$ son noyau est **fermé**.

1. Montrer que si $u$ est continue, son noyau est fermé.
2. On se propose ici de montrer la réciproque. Supposons donc que $\ker(u)$ soit fermé.
   (a) Montrer que le noyau de $u$ est de codimension[2] finie. En déduire, grâce à un résultat du cours, que $\ker(u)$ admet un supplémentaire topologique, que l'on notera $S$.
   (b) Montrer que $S$ est de dimension finie.
   (c) Montrer que la restriction $u_S : S \to F$ de $u$ à $S$ est linéaire, injective et continue.
   (d) Soit $q : E \to S$ la projection sur $S$. Montrer que $u = u_S \circ q$. En déduire la continuité de $u$.
3. Bonus : Donner une preuve plus rapide de (2) utilisant **uniquement** la décomposition canonique de $u$.

---

[1] Rappel : le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

[2] Rappel : la codimension d'un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ est la dimension de l'espace vectoriel quotient $E/G$. De manière équivalente, la codimension de $G$ peut aussi être définie comme la dimension d'un supplémentaire algébrique de $G$.