TD 4 - Algorithmes

Exercice 1. Méthode du gradient à paramètre optimal: fonctions quadratiques

Soit J une fonction convexe de $C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Partant d'un point de u_0, on engendre la suite

$$u^{k+1} = u^k - \alpha_k \nabla J(u^k),$$

où α_k minimise la fonction d'une variable réelle $\psi(\alpha) = J(u^k - \alpha\nabla J(u^k))$. Nous étudions ici le cas où J est quadratique :

$$J(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (b, u),$$

où A est une matrice symétrique réelle définie positive et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

(1) Déterminer α_k.

(2) On note λ_i la valeur propre de A de rang i avec $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_i \leq \ldots \leq \lambda_n$. Démontrer l'inégalité

$$\forall u \in \mathbb{R}^n, \quad u \neq 0, \quad \frac{(Au, u)(A^{-1}u, u)}{\|u\|^4} \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n}.$$

On considérera une base de vecteurs propres de A, et on montrera l'inégalité

$$\lambda_i + \frac{\lambda_1\lambda_n}{\lambda_i} \leq \lambda_1 + \lambda_n.$$

(3) On note $g^k = \nabla J(u^k)$, et on pose $B = \sqrt{A}$ (justifier qu'un tel B existe) et $J(\bar{u})$ le minimum de $J(u)$. Montrer que

$$\left\|B(u^{k+1} - \bar{u})\right\|^2 = \left\|B(u^k - \bar{u})\right\|^2 + \alpha_k^2 \left\|Bg^k\right\|^2 - 2\alpha_k(B(u^k - \bar{u}), Bg^k).$$

(4) Montrer que

$$(A(u^{k+1} - \bar{u}), u^{k+1} - \bar{u}) \leq \frac{(r-1)^2}{(r+1)^2}(A(u^k - \bar{u}), u^k - \bar{u}),$$

où r est le conditionnement de A.

(5) Que peut-on en déduire sur la qualité de cet algorithme ?