UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER | **L3 Mathématiques**
HAX502X | **Année 2023-2024**
Calcul différentiel et équations différentielles

Contrôle continu 8 novembre

durée 1h
documents et calculatrices interdits
barème : 3 points par question

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Est-ce que f est différentiable en $(0,0)$? Si oui, déterminer sa différentielle.
2. Déterminer la jacobienne de f en tout point où ça a du sens.

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{-ty} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On veut en faire une étude qualitative.

3. Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution maximale.

On note maintenant $u :]c,d[\to \mathbb{R}$ l'unique solution maximale du problème de Cauchy.

4. Montrer que u est impaire.
5. Déterminer le sens de variation de u sur $[0,d[$.
6. Montrer que u est une solution globale.

7.* Montrer que u admet une limite finie en $+\infty$, et proposer un minorant strictement positif pour cette limite.

---

1. En notant $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ la norme euclidienne, on a

$$\left| \frac{f(x,y) - 0 - 0}{\|(x,y)\|} \right| = \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\leqslant \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\leqslant (x^2+y^2)^{1/2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Comme $f(0,0)=0$, on en déduit que f est différentiable en $(0,0)$, de différentielle l'application linéaire nulle de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Par définition, la jacobienne est :

$$J_f(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Par le calcul, on a, pour $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2} - \frac{2x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$$

En $(0,0)$, on a $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$

$$= \lim_{t \to 0} 0 = 0$$

et de même

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Finalement,

$$J_f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \begin{bmatrix} y^3 & x^3 \end{bmatrix} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les questions 3, 5 et 6 sont résolues dans le poly à la section 6.4 "Exemple d'étude qualitative".

4. Montrons que la solution maximale $u:]c,d[\to \mathbb{R}$ du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = e^{-ty} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ est impaire.

Considérons la fonction $v:]-d,-c[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(t) = -u(-t)$. Comme $0 \in]c,d[$, on a aussi $0 \in]-d,-c[$, et $v(0) = -u(0) = 0$. Donc v vérifie la condition initiale $y(0) = 0$ du problème de Cauchy. De plus, on a :

$$\forall t \in]-d,-c[, \quad v'(t) = u'(-t)$$
$$= e^{-(-t)u(-t)}$$
$$= e^{-t(-u(-t))}$$
$$= e^{-t\,v(t)}$$

donc v est solution du pbm de Cauchy.

Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, v se prolonge en l'unique solution maximale u, donc

$$]-d,-c[\subset]c,d[\text{ et}$$

$$\forall t\in]-d,-c[,\ v(t)=u(t).$$

On en déduit : $-c=d$, et

$$\forall t\in]-d,d[,\ -u(-t)=u(t)$$

donc, que u est impaire.

7. Dans la section 6.4 du poly, on a montré

$$\forall t\geqslant 0,\qquad 0\leqslant u(t)\leqslant t$$

Par conséquent, on a

$$-t^2\leqslant -tu(t)\leqslant 0$$

et donc

$$e^{-t^2}\leqslant u'(t)\leqslant 1$$

En intégrant, on en déduit :

$$\int_0^t e^{-s^2}\,ds \leqslant u(t) \leqslant t$$

Comme l'intégrale de gauche converge lorsque $t \to +\infty$ vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, on en déduit que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty} u(t)$, si elle existe, est supérieure ou égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour voir que la limite existe, on peut noter que, comme u est strictement croissante, on a

$\forall t \geq 1, \qquad u(t) \geqslant u(1) > 0,$

donc $\qquad u'(t) = e^{-tu(t)} \leqslant e^{-tu(1)}$

En intégrant entre 1 et t, on a :

$$u(t) - u(1) \leqslant \int_1^t e^{-su(1)}\,ds = \left[\frac{e^{-su(1)}}{-u(1)}\right]_1^t$$

Donc $$u(t) \leqslant u(1) + \frac{e^{-u(1)}}{u(1)} - \frac{e^{-tu(1)}}{u(1)}$$

$$\leqslant u(1) + \frac{e^{-u(1)}}{u(1)}$$

Finalement, u est croissante et majorée sur $[0,+\infty[$, donc converge vers une limite finie en $+\infty$.