



**UNIVERSITÉ DE
MONTPELLIER**

**Lien entre solutions de viscosité et
entropiques pour des flux discontinus :
Application au trafic routier**

Master MANU

Auteur

BIGEY Raphaël

Encadrants

GUERAND Jessica
SEGUIN Nicolas

9 septembre 2025

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Définitions mathématiques	2
1.2	Contexte historique	2
1.3	Mise en équation circulation	3
1.4	Présentation du rapport	4
2	Hamilton-Jacobi	6
2.1	Les conditions de flux limité	6
2.2	Existence et unicité	9
2.3	Schéma numérique	9
3	Loi de Conservation Scalaire	11
3.1	Germe et solution entropique	11
3.2	Schéma numérique	16
4	Lien entre les solutions	18
5	Résultats numériques	20
5.1	La solution de la loi de conservation	20
5.2	La solution de l'équation Hamilton-Jacobi	21
5.3	La dérivée de la solution d'Hamilton-Jacobi	22
5.4	Le schéma volumes finis	23
6	Conclusion	26

1 Introduction

Les équations d'Hamilton-Jacobi et les lois de conservation scalaire constituent deux grandes classes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires qui apparaissent dans de nombreux domaines de la physique, des mathématiques appliquées et de l'ingénierie. Bien que provenant à l'origine de contextes différents (la mécanique classique pour les premières, la conservation de grandeurs physiques pour les secondes), elles partagent aujourd'hui un lien profond, tant théorique que numérique.

1.1 Définitions mathématiques

Sur la droite réelle (c'est-à-dire dans le cas à une dimension d'espace), une équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit de la forme suivante

$$\partial_t u(t, x) + H(\partial_x u(t, x)) = 0 \quad (1)$$

où $u(t, x)$ est une fonction réelle inconnue, et $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *Hamiltonien*. Cette équation décrit l'évolution temporelle d'une « fonction de valeur », comme dans les problèmes de contrôle optimal ou en mécanique classique.

Une loi de conservation scalaire en une dimension s'écrit généralement

$$\partial_t \rho(t, x) + \partial_x f(\rho(t, x)) = 0, \quad (2)$$

où $\rho(t, x)$ est une quantité conservée, et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est le flux associé à cette grandeur. Elle exprime le fait qu'une quantité ne peut être créée ni détruite, seulement transportée. Par exemple, celles-ci peuvent être utilisées pour modéliser la circulation routière et la densité de véhicule sur une route.

1.2 Contexte historique

Un lien remarquable entre ces deux types d'équations est apparu dans les années 1980. En effet, la dérivée spatiale de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi peut satisfaire sous les bonnes conditions une loi de conservation scalaire.

Prenons par exemple une fonction u solution de (1) et H une fonction continue. On a

$$\begin{aligned} \partial_t u + H(\partial_x u) = 0 &\implies \partial_t u + H(\rho) = 0, \quad \text{en posant } \partial_x u = \rho. \\ &\implies \partial_x \partial_t u + \partial_x H(\rho) = 0, \\ &\implies \partial_t \partial_x u + \partial_x H(\rho) = 0, \\ &\implies \partial_t \rho + \partial_x H(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ainsi, $\partial_x u$ est solution d'une loi de conservation scalaire où le flux associé est précisément donné par l'Hamiltonien de l'équation initiale. Ce lien structurel permet notamment de relier les théories des solutions de viscosité (pour Hamilton-Jacobi) et des solutions d'entropie (pour les lois de conservation).

Les équations d'Hamilton-Jacobi et les lois de conservation sont souvent étudiées sous l'hypothèse que l'Hamiltonien ou le flux associé est régulier, typiquement de classe C^1

ou du moins continu. Toutefois, de nombreux phénomènes physiques ou applications concrètes, comme la circulation routière ou le contrôle optimal avec obstacles, conduisent naturellement à considérer des cas où ces fonctions présentent des discontinuités spatiales.

Un exemple typique est celui d'un changement brutal dans les conditions de circulation : pour le trafic routier, un feu rouge, un péage, ou un rétrécissement de voie, entraîne une rupture dans la vitesse maximale autorisée et donc une discontinuité dans l'Hamiltonien ou le flux associé. Ce contexte nécessite de repenser la notion classique de solution et de développer des conditions de jonction adaptées à la discontinuité, notamment à travers des conditions de flux limité ou des germes entropiques.

1.3 Mise en équation circulation

Comme introduit précédemment, les équations aux dérivées partielles du premier ordre peuvent modéliser efficacement le trafic routier, en particulier à l'échelle macroscopique. Deux approches coexistent :

1. **L'approche macroscopique**, qui considère le comportement global d'un ensemble de véhicules sur une voie.
2. **L'approche microscopique**, qui se penche sur la dynamique individuelle de chaque véhicule.

C'est cette dernière que nous adoptons, en suivant le modèle classique proposé par Lighthill, Whitham, et Richards (1955-1956), qui repose sur les lois de conservation en dynamique des fluides. Étudier la circulation sous ces deux angles est essentiel pour optimiser, par exemple, la dimension des voies et le réglage des cycles vert/rouge des feux de circulation afin de minimiser le temps de circulation sur la route des véhicules.

Dans le cadre du stage nous travaillons sur une route infinie coïncidant avec l'axe des abscisses. Nous souhaitons étudier l'évolution de la densité ρ de voiture sur cette route au cours du temps. Étant donné que les véhicules se déplacent indéfiniment le long de cette route, la densité en un point donné est susceptible de varier avec le temps. Ainsi, la fonction ρ dépendra de deux variables, le temps $t > 0$ et la position spatiale $x \in \mathbb{R}$.

Nous introduisons à présent deux paramètres clés : V_{\max} , la vitesse maximale autorisée et ρ_{\max} la densité maximale de véhicules sur la route. Dans notre modèle, tous les véhicules respectent les limitations de vitesse, ce qui justifie naturellement l'introduction de V_{\max} . De même, chaque route admet une capacité maximale d'accueil de véhicule d'où la nécessité de fixer une borne supérieure ρ_{\max} de densité.

Les véhicules sur la route ne se déplacent pas tous à la même vitesse. Il est d'ailleurs intuitif de supposer que leur vitesse dépend de la densité de circulation. En effet, lorsque la densité est maximale (comme dans un embouteillage), les voitures sont à l'arrêt et leur vitesse est nulle. À contrario, lorsqu'un conducteur est seul sur la route, il peut rouler à la vitesse maximale autorisée. Il est donc pertinent de modéliser la vitesse comme une fonction décroissante de la densité.

Nous déduisons que

$$V(\rho) = V_{\max} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\max}} \right). \quad (4)$$

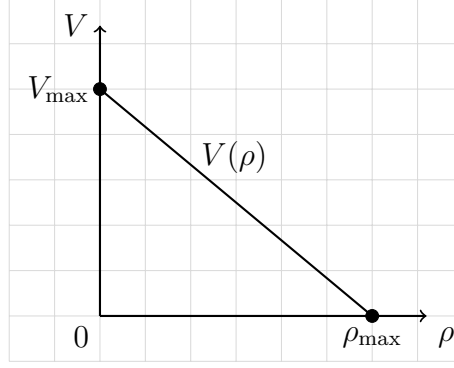


FIGURE 1 – Expression de la vitesse en fonction de la densité.

Le modèle de Lighthill-Whitham-Richards est décrit par la loi de conservation scalaire suivante

$$\rho_t + (\rho V(\rho))_x = 0.$$

Ainsi, en posant $\rho_{\max} = 1$ et $V_{\max} = 1$ le problème de circulation routière revient à résoudre

$$\rho_t + H(\rho)_x = 0,$$

avec

$$H(\rho) = \rho(1 - \rho).$$

Ce modèle ne prend toutefois pas encore en compte les irrégularités telles que les obstacles fixes (ie. péages, feux etc). Pour cela, nous considérerons dans les différentes parties des discontinuités localisées dans le flux. Par exemple en imposant une contrainte de type $H(\rho) \leq F_{\text{obs}}$ en un point donné. Cela revient à introduire un flux discontinu ou un Hamiltonien discontinu dans l'équation d'Hamilton-Jacobi associée.

On définit alors le problème d'Hamilton-Jacobi avec discontinuité

$$\begin{cases} u_t + H(u_x) = 0, & \text{si } x \neq 0. \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5)$$

et la loi de conservation scalaire avec discontinuité suivante

$$\begin{cases} \rho_t + H(\rho)_x = 0, & \text{si } x \neq 0. \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6)$$

On s'intéressera dans le rapport aux conditions de jonctions que l'on imposera en $x = 0$.

1.4 Présentation du rapport

Ce rapport s'appuie sur deux articles récents publiés en 2024, que nous désignerons par [5] et [4]. Ces travaux établissent, respectivement dans le cas convexe puis dans le cas général, un lien rigoureux entre la dérivée d'une solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi et une solution entropique d'une loi de conservation scalaire, en présence d'un Hamiltonien discontinu en un point fixe. Ces deux articles s'appuient sur les

travaux récents en théorie des solutions de viscosité et entropiques avec discontinuité, en lien avec les notions de germe et de conditions d'interface.

L'objectif de ce stage est d'approfondir ces résultats, aussi bien sur le plan théorique que numérique, en les appliquant au cas concret du trafic routier. Nous analysons donc les deux formulations (Hamilton-Jacobi et conservation scalaire) lorsque le flux ou l'Hamiltonien présente une discontinuité, que nous plaçons sans perte de généralité en $x = 0$. Nous cherchons à l'issue du rapport à établir que la dérivée partielle en espace du problème d'Hamilton-Jacobi (5) coïncide avec la solution de la loi de conservation (6).

Ce rapport est donc la synthèse de tous nos travaux réalisés au cours du stage. Dans la première partie nous travaillerons sur l'équation d'Hamilton-Jacobi avec l'Hamiltonien discontinu du trafic routier (5). On commencera par développer une bonne notion de condition de flux limité en l'origine afin d'assurer le bon sens de la condition de jonction. Ensuite nous définissons un schéma numérique convergeant vers l'unique solution du problème. Dans la seconde partie du rapport nous étudierons directement la loi de conservation scalaire (6). À l'aide de la notion de germe, nous définissons une condition de jonction garantissant l'existence et l'unicité d'une solution entropique forte. Nous proposerons également un schéma numérique stable. Enfin, dans la dernière partie, nous montrerons que la dérivée spatiale de la solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi (5) coïncide avec la solution entropique de la loi de conservation (6). Cette correspondance est démontrée via une analyse de convergence des schémas numériques.

2 Hamilton-Jacobi

2.1 Les conditions de flux limité

Nous étudions le problème d'Hamilton-Jacobi posé sur la droite réelle avec une discontinuité en l'origine

$$\begin{cases} u_t + H(u_x) = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (7)$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} H: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto p(1-p) \end{aligned}$$

est une fonction concave sur \mathbb{R} .

On souhaite appliquer à (7) une condition flux limité en $x = 0$. Une telle condition s'exprime sous la forme

$$u_t + F_0(u_x(t, 0^-), u_x(t, 0^+)) \quad \text{si } x = 0,$$

où F_0 est une fonction particulière. Pour la définir, nous utilisons les résultats de l'article [5] qui étudie ce problème dans le cas d'un Hamiltonien convexe. Ce choix est justifié par une correspondance naturelle entre les problèmes : si u est solution du problème avec un Hamiltonien concave, alors la fonction opposée $-u$ vérifie une équation analogue avec un Hamiltonien convexe bien identifié. Cette transformation permet de transposer les résultats obtenus dans le cadre convexe au cas concave, et donc en particulier, à notre problème.

Proposition 1. Soit $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction concave, et $u(t, x)$ une solution de l'équation

$$u_t + H(u_x) = 0.$$

On définit la fonction $v(t, x) := -u(t, x)$. Alors v est solution du problème suivant

$$\begin{cases} v_t + G(v_x) = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ v(0, x) = v_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où :

- $G(p) = -H(-p)$, est une fonction convexe,
- $v_0(x) = -u_0(x)$, pour une condition initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

Démonstration. Soit u une solution de

$$u_t + H(u_x) = 0.$$

Posons $v = -u$. Alors on a

$$v_t = -u_t, \quad v_x = -u_x.$$

Ainsi, l'équation devient

$$u_t + H(u_x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -v_t + H(-v_x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_t + (-H(-v_x)) = 0.$$

On définit

$$G(p) := -H(-p).$$

Comme H est concave, alors $-H$ est convexe, donc G est bien une fonction convexe. Ainsi, v vérifie

$$v_t + G(v_x) = 0,$$

avec condition initiale

$$v(0, x) = -u(0, x) = -u_0(x) =: v_0(x).$$

□

On définit dans la suite la fonction

$$\begin{aligned} G: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto -H(-p) = p(1+p) \end{aligned}$$

qui est bien une fonction convexe. Ainsi, si u est solution de (7) alors $v = -u$ est solution de

$$\begin{cases} v_t + G(v_x) = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ v(0, x) = v_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (8)$$

avec

$$v_0(x) = -u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'article [5] étudiant le cas convexe définit la condition de flux limité ainsi

$$v_t + \overline{F}_0(v_x(t, 0^-), v_x(t, 0^+)) = 0, \quad \text{si } x = 0, \quad (9)$$

où la fonction \overline{F}_0 est définie par

$$\begin{aligned} \overline{F}_0: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p_L, p_R) &\mapsto \max\{0, G^+(p_L), G^-(p_R)\} \end{aligned} \quad (10)$$

Ici, la fonction G^+ (respectivement G^-) définit l'enveloppe croissante (respectivement décroissante) de G . C'est-à-dire

$$G^-(p) = \begin{cases} G(p) & \text{si } p \leq -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \text{si } p \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}, \quad G^+(p) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{si } p \leq -\frac{1}{2} \\ G(p) & \text{si } p \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

On définit de même l'enveloppe croissante (respectivement décroissante) de H

$$H^-(p) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \\ H(p) & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}, \quad H^+(p) = \begin{cases} H(p) & \text{si } p \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \text{si } p \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Remarque. Le nombre $-\frac{1}{4}$ (respectivement $\frac{1}{4}$) est le minimum (respectivement maximum) de la fonction G (respectivement H). Il est atteint en $-\frac{1}{2}$ (respectivement $\frac{1}{2}$).

Proposition 2. Nous avons les deux égalités suivantes

$$H^-(p) = -G^-(-p) \quad \text{et} \quad H^+(p) = -G^+(-p).$$

Démonstration. Il suffit de multiplier l'une des deux fonctions par -1 puis de remplacer p par $-p$. \square

Soit v solution du problème avec un Hamiltonien convexe

$$\begin{cases} v_t + G(v_x) = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ v_t + \overline{F}_0(v_x(t, 0^-), v_x(t, 0^+)) = 0, & \text{si } x = 0, \\ v(0, x) = v_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (11)$$

On construit la condition flux limité du problème (7) à partir de celle vérifiée par v

$$\begin{aligned} v_t + \overline{F}_0(v_x(t, 0^-), v_x(t, 0^+)) = 0 &\iff v_t + \max\{0, G^+(v_x(t, 0^-)), G^-(v_x(t, 0^+))\} = 0 \\ &\iff -\left[v_t + \max\{0, G^+(v_x(t, 0^-)), G^-(v_x(t, 0^+))\}\right] = 0 \\ &\iff -v_t - \max\{0, G^+(v_x(t, 0^-)), G^-(v_x(t, 0^+))\} = 0 \\ &\iff u_t + \min\{0, -G^+(v_x(t, 0^-)), -G^-(v_x(t, 0^+))\} = 0 \\ &\iff u_t + \min\{0, H^+(u_x(t, 0^-)), H^-(u_x(t, 0^+))\} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition de jonction en $x = 0$ du problème (7) s'écrit

$$u_t + F_0(u_x(t, 0^-), u_x(t, 0^+)) = 0,$$

avec

$$F_0(p_L, p_R) = \min\{0, H^+(p_L), H^-(p_R)\}.$$

Le problème que l'on étudie devient alors

$$\begin{cases} u_t + H(u_x) = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ u_t + F_0(u_x(t, 0^-), u_x(t, 0^+)) = 0, & \text{si } x = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (12)$$

Lemme 1. F_0 vérifie les propriétés suivantes

$$\begin{cases} F_0 \text{ est une fonction } L_0\text{-Lipschitzienne,} \\ p_L \mapsto F_0(p_L, p_R) \text{ est croissante,} \\ p_R \mapsto F_0(p_L, p_R) \text{ est décroissante,} \\ F_0(p) \rightarrow +\infty \text{ quand } (p_L)_+ + (p_R)_- \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Démonstration. Admise. \square

2.2 Existence et unicité

On commence par rappeler la notion de solution de viscosité qui est une notion de solution faible pour les équations d'Hamilton-Jacobi. On considère l'ensemble de fonctions test sur $J_T :=]0, T[\times \mathbb{R}$:

$$C_\wedge^1 := \{\varphi \in C^0(J_T), \text{ la restriction de } \varphi \text{ à }]0, T[\times]-\infty, 0] \text{ et à }]0, T[\times [0, +\infty[\text{ est } C^1\}$$

Nous rappelons également la définition des enveloppes semi-continues supérieure et inférieure u^* et u_* d'une fonction (localement bornée) u définie sur $[0, T[\times \mathbb{R}$, données par

$$u^*(t, x) = \limsup_{(s, y) \rightarrow (t, x)} u(s, y) \quad \text{et} \quad u_*(t, x) = \liminf_{(s, y) \rightarrow (t, x)} u(s, y).$$

Définition 1 Solution de viscosité forte. Soit $u : J_T \rightarrow \mathbb{R}$.

- i) On dit que u est une **sous-solution de viscosité forte** de (12) si, pour tout point $(t_0, x_0) \in J_T$ et toute fonction test $\varphi \in C_\wedge^1(J_T)$ telle que $u^* - \varphi$ admette un maximum local en (t_0, x_0) , on a :

$$\begin{cases} \varphi_t(t_0, x_0) + H(\varphi_x(t_0, x_0)) \leq 0, & \text{si } x_0 \neq 0, \\ \varphi_t(t_0, 0) + F_0(\varphi_x(t_0, 0^-), \varphi_x(t_0, 0^+)) \leq 0, & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que u est une F_0 -sous-solution forte.

- ii) On dit que u est une **sur-solution de viscosité forte** de (12) si, pour tout point $(t_0, x_0) \in J_T$ et toute fonction test $\varphi \in C_\wedge^1(J_T)$ telle que $u_* - \varphi$ admette un minimum local en (t_0, x_0) , on a :

$$\begin{cases} \varphi_t(t_0, x_0) + H(\varphi_x(t_0, x_0)) \geq 0, & \text{si } x_0 \neq 0, \\ \varphi_t(t_0, 0) + F_0(\varphi_x(t_0, 0^-), \varphi_x(t_0, 0^+)) \geq 0, & \text{si } x_0 = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, on dit que u est une F_0 -sur-solution forte.

- iii) On dit que u est **solution de viscosité forte** de (12) si u est à la fois F_0 -sur-solution forte et F_0 -sous-solution forte de (12). On appelle u F_0 -solution forte.

Théorème 1. Il existe une unique F_0 -solution forte au problème (12).

Démonstration. L'article [5] assure de l'existence et de l'unicité de la solution dans le cas où la condition de jonction est de la même forme que la nôtre. \square

2.3 Schéma numérique

On souhaite maintenant approcher l'unique F_0 -solution forte de (12). On fixe le pas de temps $\Delta t > 0$ et le pas d'espace $\Delta x > 0$. On note $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ le temps discret et $x_j = j\Delta x$ les points du maillage pour $j \in \mathbb{Z}$. On notera enfin u_j^n l'approximation numérique $u(t^n, x_j)$.

Afin de discrétiser (12), on introduit l'Hamiltonien numérique de Godunov

$$g^H(p^-, p^+) = \begin{cases} \min_{p \in [p^-, p^+]} H(p) & \text{si } p^- \leq p^+, \\ \max_{p \in [p^+, p^-]} H(p) & \text{si } p^+ \leq p^-. \end{cases} \quad (14)$$

Remarque. Tout comme F_0 , la fonction g^H est croissante en sa première variable et décroissante en sa seconde.

Nous reprenons le schéma numérique donné dans l'article [4]. Il est défini par

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t f_j \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right), \quad (15)$$

où

$$f_j(a, b) = \begin{cases} g^H(a, b) & \text{si } j \neq 0, \\ F_0(a, b) & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

que l'on initialise ainsi

$$u_j^0 = u_0(j\Delta x), \quad j \in \mathbb{Z}.$$

On souhaite montrer que le schéma précédent converge vers l'unique solution de viscosité de (12). Pour cela, on veut montrer que ce schéma est monotone, stable et consistant au sens défini par G. Barles et P.E. Souganidis dans [2]. On introduit alors l'opérateur suivant

$$H_j(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) = u_j^n - \Delta t f_j \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)$$

Proposition 3. L'opérateur H_j précédent est croissant en chacune de ses variables sous la condition CFL

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{2L_0}. \quad (16)$$

Démonstration. On ne détaillera pas la preuve ici. Seul la croissance en la deuxième variable nécessite cette condition. La croissance en les deux autres variables se démontre avec les propriétés de monotonie de g^H et de F_0 . \square

Il est intéressant de définir une fonction u_Δ comme l'interpolation linéaire créée à partir des points (x_j, u_j^n) . On écrit alors

$$u_\Delta(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{1}_{[t_n, t_{n+1})}(t) \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1})}(x) \left[u_j^n + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} (x - x_j) \right].$$

Théorème 2. Soit $\Delta x, \Delta t$ vérifiant la condition CFL (16). La fonction u_Δ converge localement uniformément vers l'unique F_0 -solution de viscosité u du problème (12) lorsque $\Delta x \rightarrow 0$.

Démonstration. La monotonie du schéma est assurée par la condition CFL. On admet ici la preuve de consistance et de stabilité. Elles sont détaillées dans la section 4 de l'article [4]. Ainsi, le théorème 2.1 de l'article de Barles et Souganidis assure que la convergence du schéma vers l'unique F_0 -solution de viscosité. \square

3 Loi de Conservation Scalaire

3.1 Germe et solution entropique

On étudie à présent la loi de conservation scalaire modélisant la circulation routière (6) toujours avec une discontinuité en 0. En posant F_{obs} la valeur de limitation de notre flux en 0 et on choisit $\rho_0 = (u_0)_x$. On a

$$\begin{cases} \rho_t + H(\rho)_x = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ H(\rho) \leq F_{\text{obs}} & \text{si } x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (17)$$

Remarque. On remarque que si $F_{\text{obs}} < 0$ alors il n'existera aucune densité solution de notre problème. Mais si $F_{\text{obs}} > \frac{1}{4}$ alors toute densité vérifiera cette propriété (car $H(\rho) \leq \frac{1}{4}$) et notre condition ne sera jamais prise en compte. Pour que notre condition de flux limité ait un sens et soit prise en compte il faut donc $F_{\text{obs}} \in [0, \frac{1}{4}]$.

Afin de s'assurer du caractère bien posé de notre problème, nous souhaitons traduire la condition flux limité en une condition mêlant traces de la solution et un germe bien précis. En effet, il est bien connu d'après les travaux de AKR dans [1] qu'un germe vérifiant les propriétés suivantes permet d'assurer l'existence et l'unicité d'une solution entropique.

Définition 2 Germe et propriétés. Soit $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^2$.

- i) On dit que \mathcal{G} est un **germe** si tout élément de \mathcal{G} satisfait la condition de Rankine-Hugoniot, c'est-à-dire :

$$\forall k = (k_L, k_R) \in \mathcal{G}, \quad H(k_L) = H(k_R).$$

- ii) On dit que \mathcal{G} est **L^1 -dissipatif** si, pour toute paire d'éléments $k = (k_L, k_R), k' = (k'_L, k'_R) \in \mathcal{G}$, on a :

$$\text{sgn}(k_L - k'_L) (H(k_L) - H(k'_L)) \geq \text{sgn}(k_R - k'_R) (H(k_R) - H(k'_R)).$$

où sgn correspond à la fonction signe.

- iii) Un germe L^1 -dissipatif \mathcal{G} est dit **maximal** s'il n'existe aucun germe L^1 -dissipatif $\bar{\mathcal{G}}$ contenant strictement \mathcal{G} (i.e. $\mathcal{G} \subsetneq \bar{\mathcal{G}}$).
- iv) Un germe L^1 -dissipatif \mathcal{G}_A est dit **complet** (sur l'ensemble Q) si, pour tout $k = (k_L, k_R) \in Q$, il existe une solution entropique forte associée au germe \mathcal{G}_A du problème :

$$\rho_t + H(\rho)_x = 0$$

avec donnée initiale

$$\rho(0, x) = \begin{cases} k_L & \text{si } x < 0, \\ k_R & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Nous rappelons d'abord qu'une solution à une loi de conservation scalaire pour $x \in (0, +\infty)$ avec un flux fortement concave possède une trace forte en $x = 0$ (voir théorème 2.4 de Panov [6]). Pour toute fonction $f \in L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$, nous notons f_- , f_+ les traces fortes à gauche et à droite de f en $x = 0$, lorsqu'elles existent. Par exemple, pour la trace à gauche, cela signifie que

$$\operatorname{ess\,lim}_{x \rightarrow 0^-} \int_0^T |f(t, x) - f_-(t)| dt = 0.$$

Définition 3 Solution entropique. On dit que $\rho \in L^\infty(]0, T[\times \mathbb{R})$ est une \mathcal{G}_0 -solution entropique si :

1. Pour toute fonction test $\phi_L \in C_c^\infty([0, T[\times (-\infty, 0))$ (resp. $\phi_R \in C_c^\infty([0, T[\times (0, +\infty))$), non négative, et pour tout $k_L, k_R \in [0, 1]$, les inégalités d'entropie suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} & * \iint_{]0, T[\times \mathbb{R}} |\rho - k_L| (\phi_L)_t + \operatorname{sgn}(\rho - k_L) (H(\rho) - H(k_L)) (\phi_L)_x dt dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^-} |\rho_0(x) - k_L| \phi_L(0, x) dx \geq 0. \\ & * \iint_{]0, T[\times \mathbb{R}} |\rho - k_R| (\phi_R)_t + \operatorname{sgn}(\rho - k_R) (H(\rho) - H(k_R)) (\phi_R)_x dt dx \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^+} |\rho_0(x) - k_R| \phi_R(0, x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

2. Les traces fortes satisfont la condition de germe :

$$(\rho_-(t), \rho_+(t)) \in \mathcal{G}_0 \quad \text{pour presque tout } t \in]0, T[.$$

Dans l'article du cas convexe [5], il est démontré dans le cas où $F_{\text{obs}} = 0$ que l'ensemble

$$\overline{\mathcal{G}}_0 := \{(k_L, k_R) \in [-1, 0]^2, G(k_L) = G(k_R) = \max\{0, G^+(k_L), G^-(k_R)\}\}$$

constitue un germe L^1 -dissipatif, maximal et complet. Ainsi, le problème

$$\begin{cases} \bar{\rho}_t + G(\bar{\rho})_x = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ (\bar{\rho}_-, \bar{\rho}_+) \in \overline{\mathcal{G}}_0 & \text{si } x = 0, \\ \bar{\rho}(0, x) = \bar{\rho}_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (18)$$

est un problème bien posé.

Comme dans le cas des équations d'Hamilton-Jacobi, il y a en fait équivalence entre le cas convexe et concave.

Proposition 4. Soit $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, et $\bar{\rho}(t, x)$ une solution du problème (18). On définit la fonction

$$\rho(t, x) = -\bar{\rho}(t, x).$$

Alors ρ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \rho_t + H(\rho)_x = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ (\rho_-, \rho_+) \in \mathcal{G}_0 & \text{si } x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

où

- $H(p) = -G(-p)$, est une fonction concave,
- $\rho_0(x) = -\bar{\rho}_0(x)$, pour une condition initiale $\bar{\rho}(0, x) = \bar{\rho}_0(x)$.
- $\mathcal{G}_0 = \{(k_L, k_R) \in [0, 1]^2, H(k_L) = H(k_R) = \min\{0, H^+(k_L), H^-(k_R)\}\}$.

Démonstration. Soit $\bar{\rho}$ une solution de

$$\bar{\rho}_t + G(\bar{\rho})_x = 0.$$

Posons $\rho = -\bar{\rho}$.

Alors l'équation initiale devient

$$\bar{\rho}_t + G(\bar{\rho})_x = 0 \iff -\bar{\rho}_t - G(\bar{\rho})_x = 0 \iff \rho_t - (G(-\rho))_x = 0.$$

On définit

$$H(p) = -G(-p).$$

Comme G est une fonction convexe, alors $-G$ est concave, donc H est bien une fonction concave. Ainsi, ρ vérifie

$$\rho_t + H(\rho)_x = 0,$$

avec condition initiale

$$\rho(0, x) = -\bar{\rho}(0, x) = -\bar{\rho}_0(x) = \rho_0(x).$$

Il reste à montrer que

$$(\bar{\rho}_-, \bar{\rho}_+) \in \overline{\mathcal{G}_0} \iff (\rho_-, \rho_+) \in \mathcal{G}_0$$

Soit $(\bar{\rho}_-, \bar{\rho}_+) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} & (\rho_-, \rho_+) \in \overline{\mathcal{G}_0} \\ \iff & G(\bar{\rho}_-) = G(\bar{\rho}_+) &= \max\{0, G^+(\bar{\rho}_-), G^+(\bar{\rho}_+)\} \\ \iff & -G(\bar{\rho}_-) = -G(\bar{\rho}_+) &= -\max\{0, G^+(\bar{\rho}_-), G^+(\bar{\rho}_+)\} \\ \iff & H(-\bar{\rho}_-) = H(-\bar{\rho}_+) &= \min\{0, -G^+(\bar{\rho}_-), -G^+(\bar{\rho}_+)\} \\ \iff & H(\rho_-) = H(\rho_+) &= \min\{0, -H^+(\rho_-), G^+(\rho_+)\} \\ \iff & (\rho_-, \rho_+) \in \mathcal{G}_0. \end{aligned}$$

Et on conclut en rappelant que

$$(\bar{\rho}_-, \bar{\rho}_+) \in [-1, 0]^2 \iff (\rho_-, \rho_+) \in [0, 1]^2.$$

□

Le problème (17) devient alors

$$\begin{cases} \rho_t + H(\rho)_x = 0, & \text{si } x \neq 0, \\ (\rho(t, 0^-), \rho(t, 0^+)) \in \mathcal{G}_0, & \text{si } x = 0, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (19)$$

avec

$$\mathcal{G}_0 := \left\{ (k_L, k_R) \in [0, 1]^2, H(k_L) = H(k_R) = F_0(k_L, k_R) \right\}.$$

Proposition 5. L'ensemble \mathcal{G}_0 est un germe L^1 -dissipatif, maximal et complet.

Démonstration.

- i) La condition de Rankine-Hugoniot étant vérifiée par définition de \mathcal{G}_0 , c'est bien un germe.
- ii) Soit $k = (k_L, k_R), k' = (k'_L, k'_R) \in \mathcal{G}$, on doit montrer

$$\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) (H(k_L) - H(k'_L)) \geq \operatorname{sgn}(k_R - k'_R) (H(k_R) - H(k'_R)). \quad (\star)$$

On étudie le signe de

$$\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) (H(k_L) - H(k'_L)) - \operatorname{sgn}(k_R - k'_R) (H(k_R) - H(k'_R)).$$

Puisque \mathcal{G}_0 vérifie la condition de Rankine-Hugoniot, on a

$$\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) (F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R)) - \operatorname{sgn}(k_R - k'_R) (F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R)).$$

On factorise et on obtient

$$(F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R)) \times [\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) - \operatorname{sgn}(k_R - k'_R)]$$

On souhaite utiliser les propriétés (13) et faire une disjonction de cas :

- * Si $k_L \geq k'_L$ et $k_R \geq k'_R$ alors

$$\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) - \operatorname{sgn}(k_R - k'_R) = 0.$$

et nous avons bien (\star) .

- * Le cas $k_L \leq k'_L$ et $k_R \leq k'_R$ est identique au précédent.
- * Si $k_L \geq k'_L$ et $k_R \leq k'_R$ alors

$$\operatorname{sgn}(k_L - k'_L) - \operatorname{sgn}(k_R - k'_R) = 2 \geq 0.$$

Il faut donc montrer que

$$F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R) \geq 0.$$

Par croissance de F_0 en sa première variable, on a

$$F_0(k_L, k_R) \geq F_0(k'_L, k_R),$$

et par décroissance en sa seconde on a

$$F_0(k'_L, k_R) \geq F_0(k'_L, k'_R).$$

On en déduit que

$$F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R) \geq 0.$$

Donc (\star) est vérifiée.

* Si $k_L \leq k'_L$ et $k_R \geq k'_R$ alors par le même raisonnement que pour le cas précédent on obtient

$$\text{sgn}(k_L - k'_L) - \text{sgn}(k_R - k'_R) = -2 \leq 0.$$

et

$$F_0(k_L, k_R) - F_0(k'_L, k'_R) \leq 0.$$

Donc (\star) est bien vérifiée. Ainsi, \mathcal{G}_0 est bien un germe L^1 -dissipatif.

- iii) On souhaite montrer que le germe L^1 -dissipatif \mathcal{G}_0 est maximal. On prend un élément $k = (k_L, k_R) \in \mathbb{R}^2$ tel que $H(k_L) = H(k_R)$ et qui vérifie (\star) avec tout $k' = (k'_L, k'_R) \in \mathcal{G}_0$. On montre que cet élément appartient forcément à \mathcal{G}_0 . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &:= \{(k_L, k_R) \in \mathbb{R}^2, H(k_L) = H(k_R) = F_0(k_L, k_R)\} \\ &= \left\{ (k_L, k_R) \in \mathbb{R}^2, H(k_L) = H(k_R) \leq 0 \text{ et } \right. \\ &\quad \left. \left[\text{soit } H(k_R) = 0, \text{ ou } H(k_R) = H^-(k_R), \text{ ou } H(k_L) = H^+(k_L) \right] \right\} \end{aligned}$$

On montre dans un premier temps que $H(k_L) = H(k_R) \leq 0$. Par l'absurde supposons que

$$H(k_L) = H(k_R) > 0.$$

Soit $k' \in \mathbb{R}^2$ tel que

1. k'_L est le plus grand élément de $(H)^{-1}(\{0\})$.
2. k'_R est le plus petit élément de $(H)^{-1}(\{0\})$.

Alors $k' \in \mathcal{G}_0$ et

$$k_L < k'_L \quad \text{et} \quad k_R > k'_R.$$

Alors nous avons par concavité de H

$$\begin{cases} 0 = H(k'_L) < H(k_L), \\ 0 = H(k'_R) < H(k_R). \end{cases}$$

Ce qui contredit (\star) . Ainsi, $H(k_L) = H(k_R) \leq 0$. Maintenant on prouve que

$$H(k_R) = 0, \text{ ou } H(k_R) = H^-(k_R), \text{ ou } H(k_L) = H^+(k_L) \quad (\star\star)$$

Par l'absurde supposons que

$$H(k_L) < 0, \text{ ou } H(k_R) < H^-(k_R), \text{ ou } H(k_L) < H^+(k_L)$$

Soit $k' \in \mathcal{G}_0$ tel que $H(k'_L) = H^+(k'_L) = 0$ et $H(k'_R) = H^-(k'_R) = 0$. Alors par concavité de H et par hypothèse on a

$$\begin{cases} H^+(k_L) = \max H \geq 0 = H^+(k'_L), \\ H^-(k_R) = \max H \geq 0 = H^-(k'_R). \end{cases}$$

Ce qui implique par croissance de H^+ et décroissance de H^-

$$k_L \geq k'_L \quad \text{et} \quad k_R \leq k'_R.$$

ce qui contredit encore une fois (\star) . Ainsi k vérifie $(\star\star)$ et appartient à \mathcal{G}_0 . Cela montre la maximalité de \mathcal{G}_0 .

- iv) Nous admettons ici la preuve de la complétude de \mathcal{G}_0 . L'existence d'une solution est prouvé dans [5] par la convergence du schéma numérique que nous allons définir plus bas.

□

Théorème 3. Le problème (19) admet une unique solution entropique au sens de la définition 3 où la condition initiale ρ_0 vérifie

$$\rho_0([-\infty, 0[) \times \rho_0(]0, +\infty]) \subset [0, 1] \times [0, 1]. \quad (20)$$

Démonstration. Notre germe \mathcal{G}_0 est L^1 -dissipatif, maximal et complet. Il est prouvé dans [1] qu'il existe une unique solution forte entropique au problème (19). □

3.2 Schéma numérique

Nous souhaitons à présent approcher l'unique \mathcal{G}_0 -solution entropique de (19). Nous reprenons le schéma numérique proposé dans l'article [5].

On fixe le pas de temps $\Delta t > 0$ et le pas d'espace $\Delta x > 0$. On note $t^n = n\Delta t$ pour $n \in \mathbb{N}$ le temps discret et $x_j = j\Delta x$ les points du maillage pour $j \in \mathbb{Z}$. On notera enfin $\rho_{j+\frac{1}{2}}^n$ la valeur dans la maille $[x_j, x_{j+1}]$.

Le schéma numérique est défini par

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \rho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+1}(\rho_{j+\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{3}{2}}^n) - f_j(\rho_{j-\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{1}{2}}^n) \right) \quad (21)$$

où

$$f_j(a, b) = \begin{cases} g^H(a, b) & \text{si } j \neq 0, \\ F_0(a, b) & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

On initialise ce schéma ainsi

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^0 = \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{\Delta x}. \quad (22)$$

Remarque. On utilise ici le même $g^H(a, b)$ que dans la section précédente défini par l'équation (14).

Comme pour le schéma numérique d'Hamilton-Jacobi, il est intéressant de définir la fonction ρ_Δ constante par morceau définie à partir des valeurs des mailles

$$\rho_\Delta(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \rho_{j+\frac{1}{2}}^n \mathbb{1}_{[t^n, t^{n+1}[}(t) \mathbb{1}_{[x_j, x_{j+1}[}(x) \quad (23)$$

Théorème 4. Soit $\Delta x, \Delta t$ vérifiant la condition CFL (16) et soit ρ_0 vérifiant (20). Alors la fonction ρ_Δ converge fortement dans $L_{\text{loc}}^1([0, +\infty[\times \mathbb{R})$ vers l'unique \mathcal{G}_0 -solution entropique ρ de (19) lorsque $\Delta x \rightarrow 0$.

Démonstration. Nous admettons ici la preuve de ce théorème. Elle est détaillée dans la section 5.5 de l'article [4]. □

4 Lien entre les solutions

Dans cette partie nous allons démontrer le résultat principal de ce rapport : la dérivée de la F_0 -solution de viscosité de (12) coïncide avec la \mathcal{G}_0 -solution entropique forte de (19).

Théorème 5. Soit u la solution de (12). Soit ρ la solution entropique forte de (19). Alors

$$u_x = \rho.$$

Démonstration. Nous allons montrer que la dérivée discrète de la solution de (12) est égale à tout temps à la solution de (19).

Soit $\Delta x, j \in \mathbb{Z}$ fixés. On écrit $(u_\Delta)_x$ la dérivée discrète de u_Δ que l'on calcule ainsi

$$(u_j^n)_x = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

Montrons dans un premier temps par récurrence que

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

* Initialisation : Par définition de $\rho_{j+\frac{1}{2}}^0$ (22), on a bien l'égalité.

* Hérédité : Supposons que l'égalité est vraie au rang n . Montrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$.

D'après le schéma numérique (12) on a

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \Delta t f_j \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right).$$

Ce qui donne

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - \Delta t f_{j+1} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{\Delta x} \right).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \times \left[u_{j+1}^n - \Delta t f_{j+1} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - u_j^n + \Delta t f_j \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \right] \\ &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f_{j+1} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n}{\Delta x} \right) \right. \\ &\quad \left. - f_j \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}, \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \right] \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence, on sait que

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x},$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} &= \rho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{j+1}(\rho_{j+\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{3}{2}}^n) - f_j(\rho_{j-\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{1}{2}}^n) \right) \\ &= \rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}.\end{aligned}$$

* Conclusion : La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème 2 nous assure que $u_\Delta \rightarrow u$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$. Cela nous assure que $(u_\Delta)_x \rightarrow u_x$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$.

De plus, le théorème 4 nous assure que $\rho_\Delta \rightarrow \rho$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$. Nous venons de montrer que $(u_\Delta)_x = \rho_\Delta$ pour tout $\Delta x, \Delta t$. Par unicité de la limite, on conclut que

$$u_x = \rho.$$

□

Voici un schéma récapitulatif de la preuve

u_x	Théorème 2 $\xleftarrow{\Delta x \rightarrow 0}$	$(u_\Delta)_x$	Récurrence $=$	ρ_Δ	Théorème 4 $\xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0}$	ρ
-------	---	----------------	-------------------	---------------	--	--------

5 Résultats numériques

Dans cette section nous présentons les résultats numériques obtenus grâce aux deux schémas présentés plus haut. Nos codes et nos simulations sont disponibles sous formes de vidéos sur le dépôt GitHub du stage¹. Nous recommandons vivement au lecteur d'aller voir les vidéos de simulations qui permettent une meilleure visualisation des résultats.

5.1 La solution de la loi de conservation

On commence par présenter l'approximation de la solution ρ de la loi de conservation scalaire (19). L'implémentation du schéma (21) nous a permis de tracer ρ_Δ sur l'intervalle $[-10, 10]$. Nous présentons pour l'instant la présence d'une unique discontinuité en $x = 0$. Cette discontinuité représente donc un feu rouge dans le cadre de la circulation routière. Notre simulation est faite avec 100 mailles.

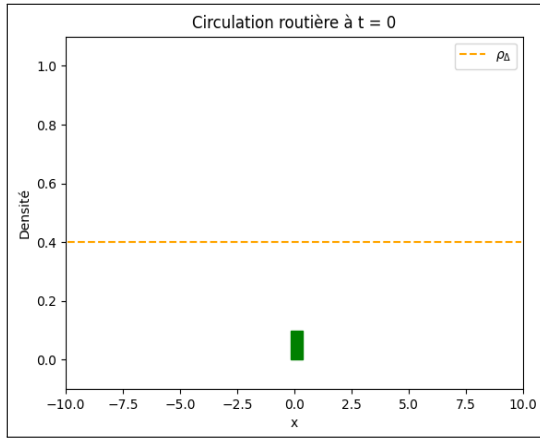


FIGURE 2 – Densité initiale, ρ_0

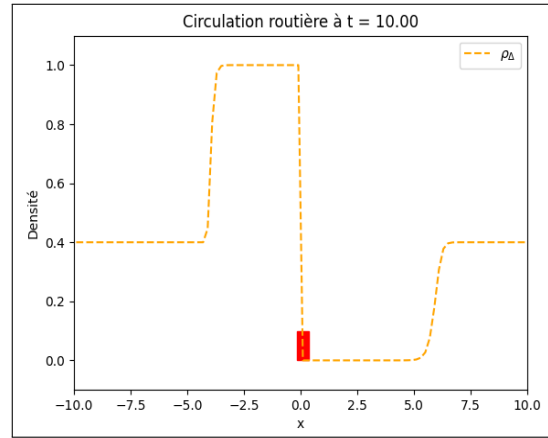


FIGURE 3 – Le feu est rouge.

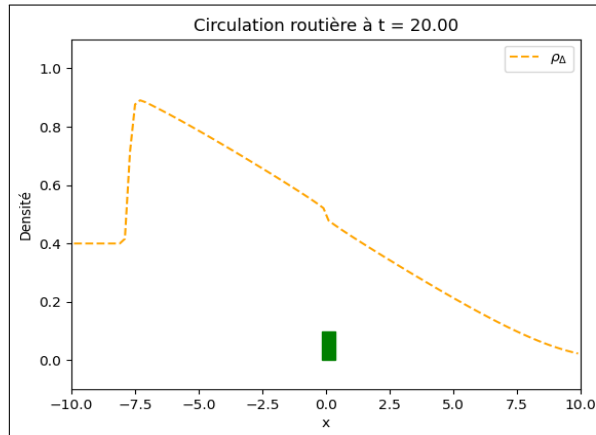


FIGURE 4 – Le feu passe au vert.

Dans la Figure 2, on présente la densité initiale $\rho_0 = 0,4$. La Figure 3 illustre l'évolution de cette densité lorsque le feu reste rouge pendant toute la durée de la simulation (soit

1. https://github.com/Bon-Monsieur/M1-MANU/tree/main/Stage_M1

10 secondes). On observe alors une accumulation de véhicules à gauche du feu, ce qui se traduit par une augmentation de la densité dans cette zone : les voitures s'arrêtent et s'entassent. En revanche, à droite du feu, la densité tend vers zéro. Ce comportement est cohérent avec ce que l'on constate dans la réalité : les voitures qui ont franchi le feu continuent leur route, si bien qu'après un certain temps, il ne reste plus de véhicule en aval du feu.

Enfin, la dernière figure modélise un feu rouge actif de $t = 0$ à $t = 10$, puis passant au vert. On observe alors une diminution progressive de la densité sur la route, signe que les voitures ont repris leur circulation.

Remarque. On voit sur la Figure 4 la présence d'une « cassure » en la discontinuité. Cela vient directement de la formulation de notre schéma numérique. On remarquera sa présence par la suite dans les autres figures et dans les vidéos sur le dépôt GitHub.

Nous avons ensuite fait une simulation avec 3 feux de circulations disjoint. La densité initiale et le nombre de maille sont les mêmes.

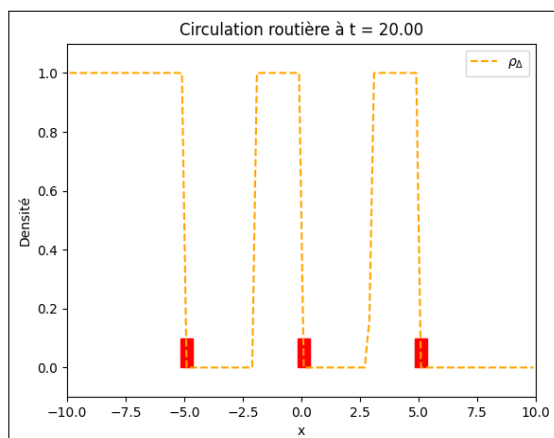


FIGURE 5 – Les trois feux sont rouges

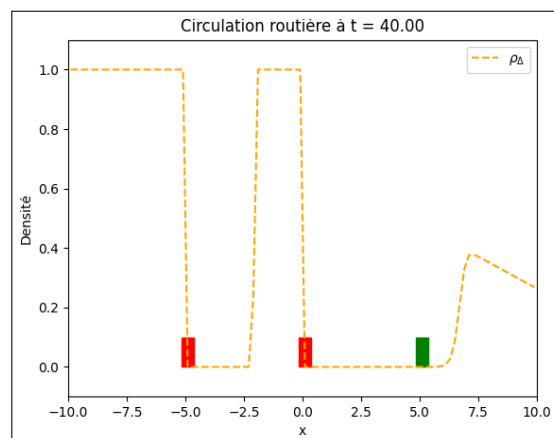


FIGURE 6 – Seul le feu de droite passe au vert

La présence de plusieurs discontinuité dans cette simulation n'apporte en réalité aucune difficulté. En effet, le schéma numérique est en fait le même pour toutes les discontinuités. La première figure montre que les voitures stationnent entre les feux. Elles sont toutes à l'arrêt. La seconde figure montre que les voitures à gauche des deux premiers feux restent à l'arrêt, tandis que les voitures qui attendaient au dernier feu ont repris leur route lorsqu'il est passé au vert au temps $t = 30$.

5.2 La solution de l'équation Hamilton-Jacobi

Présentons maintenant l'approximation u_Δ de la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Puisque nous avons sélectionné pour densité initiale $\rho_0 = 0.4$ sur $[-10, 10]$, nous devons prendre $u_0 = 0.4x$ pour $x \in [-10, 10]$ afin de respecter la condition $(u_0)_x = \rho_0$. Nous étudions toujours le problème avec 3 feux.

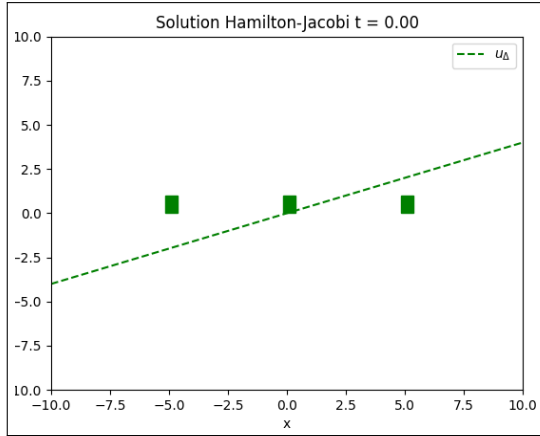


FIGURE 7 – u_0 .

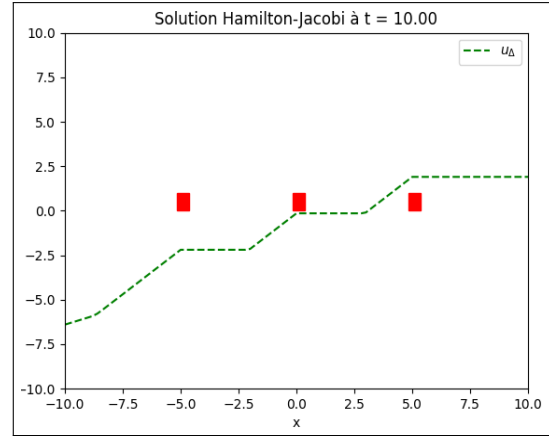


FIGURE 8 – Les feux sont rouges.

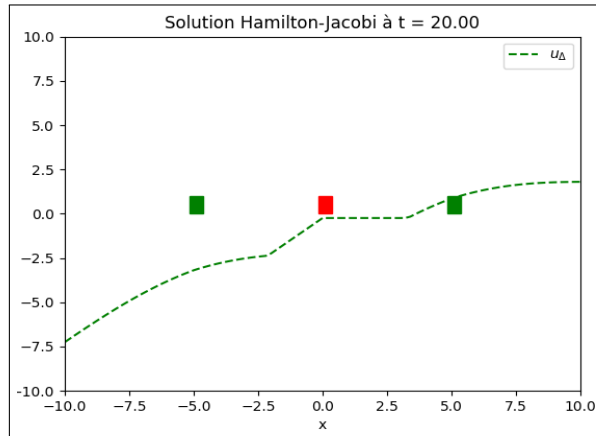


FIGURE 9 – Seul le feu central reste rouge.

Sur la Figure 8 les feux sont rouges tout le long de la simulation. Sur la Figure 9 les deux feux sur les côtés sont passés au vert à $t = 15$. Les valeurs de la solution vont baissées au cours du temps.

Remarque. Il est difficile de donner un sens physique ou un lien direct avec la circulation routière à cette simulation.

5.3 La dérivée de la solution d'Hamilton-Jacobi

Nous regardons à présent la conséquence du théorème (5) du rapport. On trace ici la superposition de la dérivée discrète de la solution d'Hamilton-Jacobi et celle de la loi de conservation. Nous travaillons toujours sur 100 mailles.

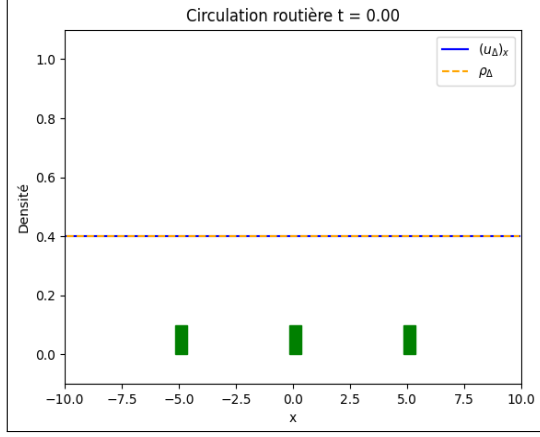


FIGURE 10 – $(u_0)_x = \rho_0$.

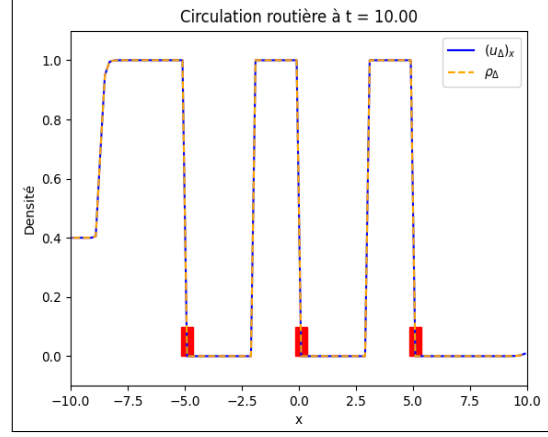


FIGURE 11 – Les feux sont rouges.

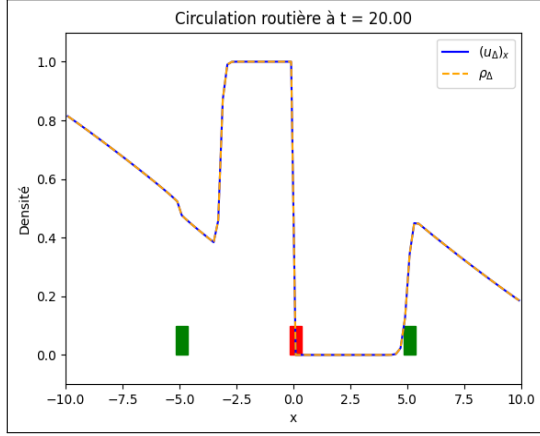


FIGURE 12 – Seul le feu central reste rouge.

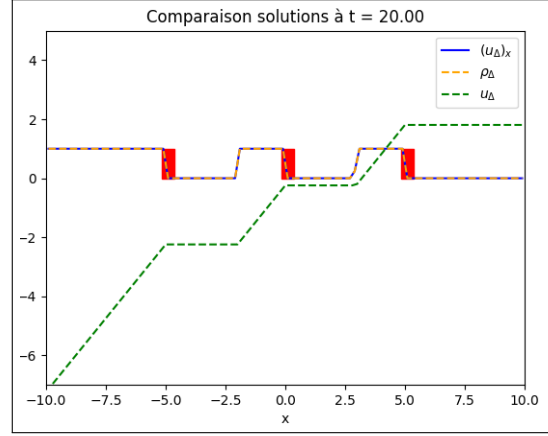


FIGURE 13 – Visualisation avec u .

Nous voyons bien que la dérivée discrète en espace de la solution d'Hamilton-Jacobi (en bleu sur les figures) coïncide avec la solution de la loi de conservation scalaire (pointillés jaune sur les figures). Ce qui correspond bien au résultat attendu.

5.4 Le schéma volumes finis

Nous présentons dans cette partie un autre schéma numérique qui nous a permis d'obtenir des résultats positifs pour le problème de circulation routière à flux limité. Il s'agit d'un schéma volumes finis « classique ». Cette approche est très populaire dans le cadre d'approximation de loi de conservation scalaire. C'est ce qui a motivé son implémentation pour ce problème. On le définit ainsi

Le schéma numérique est défini par

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \rho_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathcal{F}_{j+1}(\rho_{j+\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{3}{2}}^n) - \mathcal{F}_j(\rho_{j-\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{1}{2}}^n) \right) \quad (24)$$

où

$$\mathcal{F}_j(a, b) = \begin{cases} f(\rho_{j-\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{1}{2}}^n) & \text{si } j \neq 0, \\ \min\{F_{\text{obs}}, f(\rho_{j-\frac{1}{2}}^n, \rho_{j+\frac{1}{2}}^n)\} & \text{si } j = 0. \end{cases}$$

avec le flux de Rusanov

$$f(a, b) = \frac{H(a) + H(b)}{2} - \frac{1}{2}(b - a).$$

On initialise ce schéma ainsi

$$\rho_{j+\frac{1}{2}}^0 = \frac{u_{j+1}^0 - u_j^0}{\Delta x}.$$

On travaille sur l'intervalle $[-8, 8]$ décomposé en 100 mailles. Comparons la solution obtenue avec le schéma de l'article et celle obtenue avec ce schéma volumes finis.

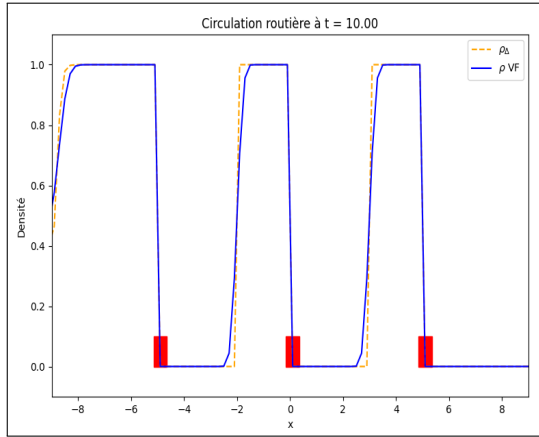


FIGURE 14 – Les 3 feux sont rouges.

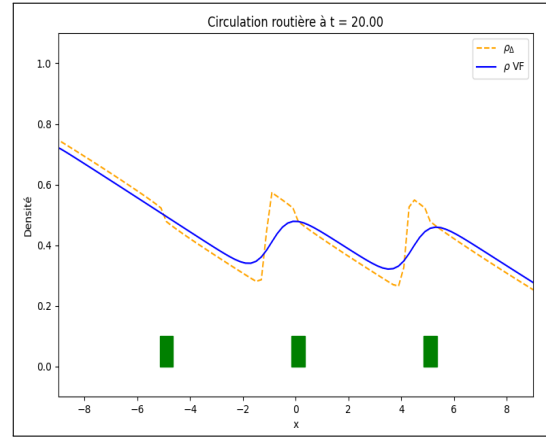


FIGURE 15 – Les trois feux passent au vert.

On remarque dans la Figure 14 que les deux solutions ont bien le même comportement autour des discontinuités lorsque les feux sont rouges. On observe tout de même que la solution donnée par le schéma volumes finis est plus arrondie. Cela se répercute dans la Figure 15 où l'on voit bien la différence entre les deux solutions.

Cette différence entre les deux solutions est naturelle et même normale car les deux schémas d'approximation ne sont pas les mêmes. Cependant, lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ cette différence se réduit. Cela est normal car les schémas convergent tous les deux vers la même solution entropique.

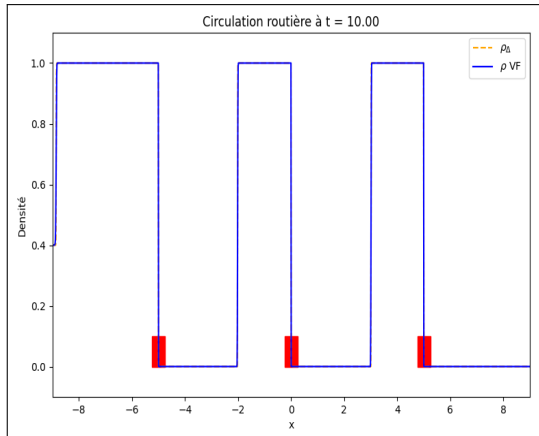


FIGURE 16 – 3 feux rouges, 2000 mailles.

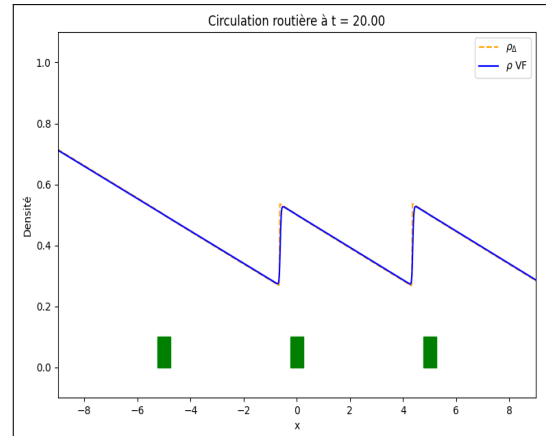


FIGURE 17 – Les trois feux passent au vert, 2000 mailles.

On observe bien que les solutions se « rapprochent » lorsque le nombre de mailles augmente. On voit encore une légère différence graphique sur la Figure 17.

6 Conclusion

Ce travail de stage s'est inscrit dans l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre, en particulier les équations d'Hamilton-Jacobi et les lois de conservation scalaire en une dimension, dans un contexte présentant une discontinuité. En s'appuyant sur des modèles issus de la modélisation du trafic routier, l'objectif a été d'analyser ces EDP tant d'un point de vue théorique que numérique, en mettant en évidence les liens profonds qui existent entre elles. Plus précisément, nous avons cherché à montrer que la dérivée spatiale d'une solution de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi avec Hamiltonien discontinu coïncide avec la solution entropique associée à une loi de conservation scalaire.

En nous appuyant sur les résultats d'un article récent dans le cas d'un Hamiltonien convexe, nous avons introduit une condition de jonction de flux limité à l'équation d'Hamilton-Jacobi, permettant de donner un sens à la solution au point de discontinuité. Nous avons ensuite établi l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité forte en utilisant cette condition. Un schéma numérique monotone et convergent a été proposé pour approcher cette solution, sous une condition CFL adaptée, assurant sa stabilité et sa précision.

Nous avons étudié la loi de conservation scalaire associée, en considérant cette fois la densité de véhicules comme variable principale. L'introduction d'un germe entropique, construit de manière rigoureuse, a permis de garantir l'existence et l'unicité d'une solution entropique forte, même en présence d'un flux discontinu. Ce germe vérifie les propriétés de Rankine-Hugoniot, de L^1 -dissipativité, de maximalité et de complétude. Un schéma numérique explicite a été construit dans ce cadre, et nous avons montré sa convergence vers la solution entropique sous hypothèses raisonnables sur les données initiales.

Enfin, nous avons montré que les solutions obtenues dans les deux cadres sont cohérentes : la dérivée discrète de la solution d'Hamilton-Jacobi coïncide avec la solution entropique obtenue pour la loi de conservation. Ce résultat a été validé en utilisant la convergence des schémas numériques.

Ce stage m'a permis d'explorer avec rigueur des problématiques mathématiques complexes. L'étude des équations d'Hamilton-Jacobi et des lois de conservation, ainsi que des développements théoriques récents qui les concernent, a marqué pour moi une première véritable expérience dans le monde de la recherche en mathématiques.

Ce travail ouvre plusieurs perspectives intéressantes. Une première direction naturelle serait d'étendre les résultats obtenus à des réseaux de routes, c'est-à-dire des graphes composés de plusieurs branches et jonctions, comme c'est le cas dans un carrefour ou une autoroute. Une autre perspective serait d'étudier la présence de différents Hamiltoniens de part et d'autre de la discontinuité. Ces Hamiltoniens pourraient notamment avoir des convexités différentes.

Références

- [1] B. Andreianov, K. H. Karlsen, and N. H. Risebro, *A theory of L^1 -dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux*, Arch. Ration. Mech. Anal., 201 (2011), pp. 27–86.
- [2] G. Barles and P. E. Souganidis, *Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations*, Asymptotic Anal., 4 (1991), pp. 271–283.
- [5] P. Cardaliaguet, N. Forcadel, T. Girard, and R. Monneau, *Conservation law and hamilton-jacobi equations on a junction : the convex case*, 2023.
- [4] Nicolas Forcadel, Cyril Imbert, Regis Monneau. *Germes for scalar conservation laws : the Hamilton-Jacobi equation point of view*. 2024. hal-04635094.
- [5] C. Imbert and R. Monneau, *Flux-limited solutions for quasi-convex Hamilton-Jacobi equations on networks*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup er. (4), 50 (2017). 357-448.
- [6] E. Y. Panov, *Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional conservation laws*, J. Hyperbolic Differ. Equ., 4 (2007), 729-770.