Université de Montpellier

M1 MANU HAX804X

ANALYSE NUMÉRIQUE 3
TP : pratique de Freefem++

C'est un logiciel écrit en C++, dédié à la modélisation par éléments finis.
Freefem++ a un mailleur intégré.

Les fichiers freefem ont une extension en .edp.
Pour faire des commentaires dans Freefem++, on utilise `//` avant le commentaire.
Une documentation est accessible sur `www.freefem.org`

1 Rappels

Chaque nouvelle variable introduite doit être précédée de son type (`int, real, ...`)

`cout<<''err=''<<erreur<<endl;` permet d'effectuer des sorties textes de la variable erreur.

Structure des boucles :

```
for (int i=0;i<n;i++) {...;}
if (expression booléenne) {...;} else {...;}
while (expression booléenne) {...;}
```

2 Eléments finis en 1D

Taper ce programme et commenter chaque ligne. Quel problème a t'on résolu ?

```
int np=100;
mesh Th = square(np,1,[x,y/50]);

plot(Th,wait=1);

fespace Vh(Th,P1);
Vh u,v;
func f=1.;

solve Laplace1D(u,v) = int2d(Th)(dx(u)*dx(v)) - int2d(Th)(v*f) + on(2,4,u=0.);

plot(u,wait=1,fill=1);
```

Opérateur	Description
`border`	définit une frontière
`buildmesh`	crée un maillage
`square`	retourne un maillage structuré d'un carré suivant les nombres de nœuds et la paramétrisation
`savemesh`	sauvegarde de maillage dans un fichier de sortie
`plot`	affiche des résultats
`fespace`	définit un type d'éléments finis sur un maillage
`solve`	résolution d'une formulation variationnelle
`problem`	définit un problème variationnel
`on`	prise en compte des conditions de Dirichlet
`adaptmesh`	permet d'adapter le maillage

Pour construire la matrice A de la partie bilinéaire de la forme variationnelle a du type `varf` :
`matrix A=a(Vh,Vh)`

Pour construire la forme linéaire à partir de `varf` : `varf l(unused,v)`
Pour construire un vecteur second membre :
`B[]=l(0,Vh)`
Résoudre le problème précédent par résolution matricielle

3 Eléments finis en 2D

On s'intéresse au problème suivant : déterminer u tel que :

$$-\Delta u = f \qquad \text{dans } \Omega =]0,1[^2$$
$$u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

```
int Nbnoeuds=10;
mesh Th=square(Nbnoeuds,Nbnoeuds,[x,y]);
func f=x*y;
fespace Vh(Th,P1);
Vh uh,vh;
problem chaleur(uh,vh,solver=LU)=int2d(Th)(dx(uh)*dx(vh)+dy(uh)*dy(vh))
-int2d(Th)(f*vh)+on(1,2,3,4,uh=0);
chaleur;
plot(uh,wait=1);
```

Exercice 1 **1.** Effectuer une étude de convergence en semi norme H^1 et en norme L^2 en évaluant le taux de convergence lorsqu'on double la taille du maillage avec les éléments finis de Lagrange P_1. On prendra $u(x,y) = sin(2\pi x)sin(2\pi y)$ comme solution exacte. On calculera le membre de droite f correspondant.
2. Faire la même chose avec les éléments finis P_2.
3. Comparer les temps pour chaque type d'éléments en utilisant
`real cpu=clock()` et en l'affichant à la fin.

Exercice 2 Résoudre à l'aide des éléments finis P_1 le problème suivant : Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que :

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{sur } \Omega$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

où Ω est le carré $[-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = xy$

Exercice 3 Résoudre à l'aide des éléments finis P_1 le problème suivant : Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur } \Omega$$

$$\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

où Ω est le carré $[-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = xy$, α est un réel strictement positif.

Exercice 4 Résoudre

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega - \bar{\omega}$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \text{ et sur } \partial\omega$$

où Ω est le carré unité et ω est un disque dans Ω
Remarque : Pour faire le maillage d'un carré troué, il suffit de combiner le carré et le cercle dans le `buildmesh` avec un nombre négatif pour le cercle.

Exercice 5 Résoudre sur le domaine $\Omega =]0,1[^2 - [\frac{1}{2},1]^2$ le problème suivant : trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que :

$$-\Delta u = 1 \quad \text{sur } \Omega$$

4 Un exemple avec des complexes : résolution en électromagnétisme

On veut illustrer l'effet de peau dans un fil de cuivre avec une section circulaire. La propagation des ondes planes électromagnétiques sont modélisées par l'équation complexe de Helmholtz pour le champ électrique complexe E_C :

$$-\nabla.\left(\frac{1}{\mu}\nabla E_C\right) + \left(i\omega\sigma - \omega^2\epsilon\right) E_C = 0 \quad \text{dans } C = \text{ cercle de rayon } 0.1$$

$$E_C = \frac{1}{\sigma} \quad \text{sur } \delta C$$

où $\sigma = 57 \times 10^6$ est la conductivité, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$ est la perméabilité magnétique, $\epsilon = 8.8 \times 10^{-12}$ est le coefficient diélectrique, $\omega = 100\pi$ est la fréquence angulaire.

Ecrire la formulation variationnelle et tracer la solution. Pourquoi parle t'on d'effet de peau ?

5 Résolution de l'élasticité linéarisée

Opérateur	Description
`macro`	définit une macro (par exemple le epsilon ou la divergence)
`movemesh`	permet de visualiser un maillage déformé avec un coeffficient d'exagération

On va résoudre le problème vectoriel suivant : l'élasticité linéaire sur une poutre de longueur L =4 et de largeur unité fixée à son extrémité gauche, soumise à des forces volumiques f. Pour les autres bords on considère une condition de Neumann homogène.

La formulation variationnelle est la suivante

$$\int_\Omega (2\mu e(u_h) : e(v_h) + \lambda div(u_h) div(v_h)) d\Omega = \int_\Omega f v_h d\Omega$$

où e est le tenseur métrique linéarisé $e(v_h) = (\nabla v_h + (\nabla v_h)^t)/2$ et μ, λ sont les coefficients de Lamé du matériau.
On choisira $\mu = 5.56, \lambda = 13, f = [0,-1]$ et des éléments finis P_2. Illustrer la déformation de

notre poutre.

Le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\sigma_{i,j}(u) = \lambda\delta_{i,j} trace(\epsilon) + 2\mu\epsilon_{i,j}, \qquad 1 \leq i,j \leq 2$$

La contrainte de Von Mises est fréquemment utilisé en ingénierie et est définie par :

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\sigma_{12}^2}$$

Tracer la contrainte de Von-Mises dans une figure.

6 Résolution de Stokes

On veut résoudre Stokes incompressible :

$$-\Delta u + \nabla p = 0 \quad \text{sur } \Omega =]0,1[^2$$

$$\nabla.u = 0 \quad \text{sur } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega - \partial\Omega_3$$

$$u = (1,0) \quad \text{sur } \partial\Omega_3$$

La formulation classique est : trouver $u \in H^1(\Omega)^2$ en rajoutant les conditions de Dirichlet et $p \in L^2(\Omega) - \mathbb{R}$ tels que :

$$\int_\Omega (\nabla u : \nabla v - p\nabla v - q\nabla u) d\Omega = 0$$

Pour programmer on considérera $p \in L^2(\Omega)$ et $\epsilon = 10^{-10}$:

$$\int_\Omega (\nabla u : \nabla v - p\nabla v - q\nabla u + \epsilon pq) d\Omega = 0$$

Pour résoudre ce problème on utilisera des éléments finis P_1 bulle pour le déplacement et P_1 pour la pression.

7 Un exemple en 3D

Opérateur	Description
`buildlayers`	construit un maillage
`P13d`	définit les éléments finis P1 en 3d

On veut résoudre le problème suivant :

$$-\Delta u = f \quad \text{sur le cube unité } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0.25(25 - u) \quad \text{sur la face x=1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{ailleurs}$$

Penser à écrire `load''msh3''` au début du programme et utiliser `mesh3` pour définir le maillage.
Tracer la solution.