Université de Montpellier

M1 MANU HAX804X

Analyse numérique pour les EDP
Projet

Il vous faudra déposer sur Moodle les réponses théoriques (photos de vos manuscrits papiers ou rapports rédigés), programmes et images des résultats numériques. Attention il n'est pas possible de charger de fichier .edp sur moodle. Utiliser un éditeur de texte pour sauvegarder vos codes au format de votre choix.

Exercice 1 en 1D :
On cherche à calculer une approximation de la solution $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ du problème suivant :

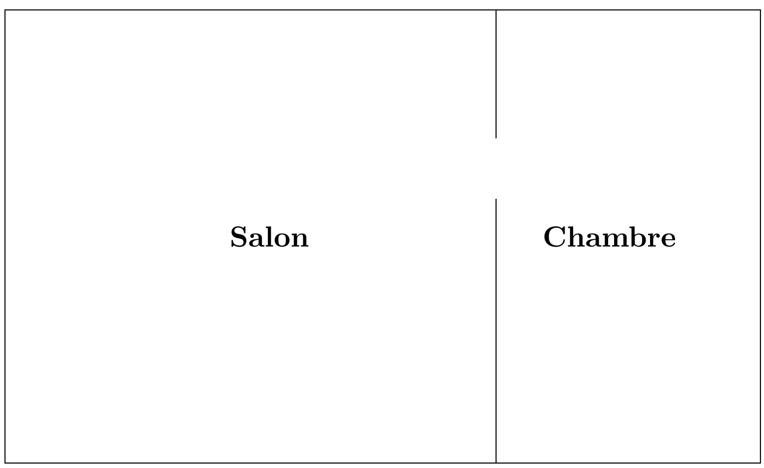
$$-\epsilon u''(x) + \lambda u'(x) = f(x)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

Cette équation peut modéliser la concentration d'une espèce chimique transportée dans un fluide de vitesse λ, le paramètre ϵ modélisant la diffusivité de l'espèce chimique. Le rapport λ/ϵ mesure l'importance des phénomènes de convection par rapport aux phénomènes de diffusion.

1. Ecrire la formulation variationnelle du problème.
2. Calculer la solution exacte du problème lorsque f=1.
3. Montrer que le problème variationnel approché par une méthode des EF P1 revient à résoudre un système linéaire impliquant la matrice $A_h = \epsilon B_h + \lambda C_h$. Donner les expressions générales de B_h et C_h. Montrer que B_h est définie positive. Montrer que C_h est anti symétrique. Montrer alors que $A_h v.v = \epsilon B_h v.v$ et en déduire que A_h est inversible.
4. <u>Partie numérique :</u> On prend $\epsilon = 0.1, \lambda = 1, f = 1$, faites varier le nombre de subdivisions n de 10 à 100 avec un pas de 10 et calculer l'erreur entre la solution exacte et la solution discrète. Evaluer l'ordre de convergence pour des éléments finis P_1 puis P_2.

Exercice 2 en 2D :
Vous logez dans un appartement de 2 pièces (un salon et une chambre) de longueur 7m et de largeur 5m, séparées par un mur d'épaisseur 0.2m. La largeur de la porte est de 0.8m. Pour les autres dimensions c'est vous qui choisissez.



Vous devez choisir un des 3 énoncés suivants :

<u>Enoncé 1 : Ondes wifi</u>
L'appartement est décomposé en deux domaines :

$$\Omega = \Omega_{\text{air}} \cup \Omega_{\text{mur}},$$

où Ω_{air} est l'intérieur de l'appartement, composé d'air (nous le supposerons vide de meubles), et Ω_{mur} contient le mur central.

Nous introduisons la fonction de contraste n définie par :

$$n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \Omega_{\text{air}} \text{ (i.e. } x \text{ est dans l'air)}, \\ 2.4, & \text{si } x \in \Omega_{\text{mur}} \text{ (i.e. } x \text{ est dans le mur)}. \end{cases}$$

Nous considérons l'équation suivante avec $k = 50$ rad/m :

$$\Delta E(x) + k^2 n(x)^2 E(x) = f(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

Le routeur est modélisé par un disque Ω_s de rayon $\varepsilon_s = 0.1$ et de centre $x_s = (0.7, 0.7)$. La fonction f est définie par :

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi \varepsilon_s^2} \left(1 - \frac{\|x_s - x\|}{\varepsilon_s}\right), & \text{si } x \in \Omega_s, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sur le bord extérieur de notre appartement, nous souhaitons que l'onde ne se réfléchisse pas. Pour cela, nous imposons la condition aux limites suivante :

$$\frac{\partial E(x)}{\partial n} - \mathrm{i}kn(x)E(x) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Simuler la propagation des ondes wifi dans votre appartement. Trouver un bon emplacement pour le routeur, pour obtenir du réseau Wifi partout.

<u>Enoncé 2 : diffusion thermique dans l'appartement</u>
Nous considérons le système suivant : $u = (u_1, u_2)$, u_1 représente la température principale de l'appartement, u_2 représente la température auxiliaire liée au système de ventilation. f_1 représente la source de chaleur interne située en x_1 dans le salon et f_2 correspond aux échanges thermiques avec l'extérieur située en x_2 dans la chambre.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 - u_2 = f_1, & \text{dans } \Omega, \\ -\Delta u_2 + u_2 + u_1 = f_2, & \text{dans } \Omega, \\ u_1 = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \nabla u \cdot n = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f = (f_1, f_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ est donnée comme suit :

$$f_1(x) = 100 \cdot \exp\left(-\|x - x_1\|^2\right),$$
$$f_2(x) = -50 \cdot \exp\left(-\|x - x_2\|^2\right).$$

Représenter la simulation de (u_1, u_2) dans l'appartement pour différentes valeurs x_1 et x_2 que vous aurez choisi.

<u>Enoncé 3 : une fuite dans l'appartement</u>
Un tuyau situé sur le mur extérieur du salon de l'appartement présente une fuite d'eau à la position (0, 0.7) et de largeur 0.1. L'eau s'écoule lentement à l'aide de l'équation de Stokes :

$$\begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous considérons les conditions aux bords suivantes :

— Condition d'adhérence pour les murs :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \partial\Omega_{\text{mur}}.$$

— Pour la partie fuite, on suppose un écoulement avec un débit imposé Q :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = Q, \quad \text{sur } \partial\Omega_{\text{fuite}}.$$

Simuler l'écoulement pour une petite fuite ($Q = 10^{-3} m^3/s$) et une grosse fuite ($Q = 0.1 m^3/s$). Représenter les champs de vitesse et de pression.