BIGEY
Raphaël

Exo 1.6.2 :

1) * $C = A^t A = (QS)^t QS$
$= S^t Q^t Q S$
$= S^t S$, car Q orthogonale.
$= S^2$

Donc $C^t = (S^2)^t = S^2 = C$, donc C est symétrique.

* $\det(C) = \det(A^t A) = \det(A^t)\det(A)$
$= \det(A)^2$
$= \det(Q)\det(S)\det(Q)\det(S)$
$= \underbrace{\det(Q)^2}_{\neq 0 \text{ car inversible}} \underbrace{\det(S)^2}_{\neq 0 \text{ car symétrique, donc inversible}}$

Donc $\det(C) = \det(A^2) > 0$.

* C est symétrique et est donc inversible, et n'a donc pas de valeur propre nulle.

* $\langle a, Cb \rangle = a^t C b = a^t A^t A b$
$= \langle Aa, Ab \rangle$

2) $((Bc_k) \otimes c_k)_{ij} = (Bc_k)_i \, c_{k_j}$
$= B_{ip} (c_k)_p \, (c_k)_j$
$= B_{ip} (c_k \otimes c_k)_{pj}$
$\underline{= B}$.

3) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$.

* $c_k \cdot Cc_k = \lambda_k (c_k \cdot c_k) = \lambda_k |c_k|^2$.
* $c_k \cdot Cc_k = (Ac_k) \cdot (Ac_k)$ par (1.6.6)

* $(Ac_k)\cdot(Ac_k) = |Ac_k|^2$ par déf.

Comme $\forall k \; c_k \neq 0$ (car C symétrique), on a
$\lambda_k = \dfrac{|Ac_k|^2}{|c_k|^2} > 0. \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$

4) $d_k = Ac_k$. Alors

$$\begin{aligned} d_i \cdot d_j &= (Ac_i)\cdot(Ac_j) \\ &= c_i^t A^t A c_j \\ &= c_i \cdot C c_j \\ &= c_i \cdot \lambda_j c_j \\ &= \lambda_j (c_i \cdot c_j) \\ &= \lambda_j \delta_{ij}, \text{ car } (c_1, \dots, c_n) \text{ base orthonormée.} \end{aligned}$$

Alors $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} d_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} d_n\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$:

Déjà on a $d_i \cdot d_j = \lambda_i \delta_{ij} = \lambda_j \delta_{ij}$
$\Rightarrow$ = les valeurs propres sont toutes les mêmes.

Donc $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} d_i \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} d_j = \frac{1}{\lambda} \times \lambda \delta_{ij} = \underline{\delta_{ij}}$

5) $$\begin{aligned} S_{ij}^t &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} (c_k \otimes c_k)_{ij}^t \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} (c_k \otimes c_k)_{ji} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_k} (c_k \otimes c_k)_{ij} = S_{ij} \end{aligned}$$

De même pour $\tilde{S}$ et Q.