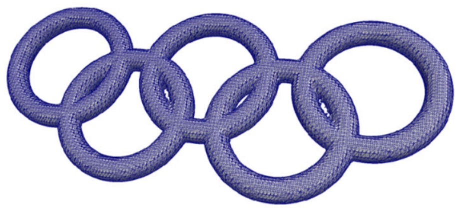
Université de Montpellier

M2 HAX007X

DS UNFITTED METHOD

Exercice 1 **1.** Les jeux olympiques auront bientôt lieu en France. On souhaite résoudre le problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogène sur les anneaux olympiques :



Sachant qu'en 3D, un anneau est donné par la level set (R et r étant connus) :

$$\phi(x, y, z) = (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2.$$

Comment feriez vous pour définir votre domaine Ω des anneaux olympiques à l'aide de plusieurs level sets ?
2. On se restreint désormais à un seul anneau. Dessiner les maillages utilisés pour les 3 méthodes (CutFEM, SBM et phiFEM direct).
3. Donner les 3 formulations variationnelles discrètes pour les 3 méthodes précédentes pour des éléments finis P1 (détailler tous les ensembles, espaces qui interviennent dans les formulations variationnelles).
4. Quelle est la méthode que vous préférez et justifiez pourquoi.
5.a Rappeler l'estimation d'erreur H^1 commise avec la méthode phiFEM pour des éléments finis P^k.
5.b Pour montrer cette estimation d'erreur, on obtient le résultat suivant :

$$|\phi w - \phi_h I_h w|_{1,\Omega_h} \leq Ch^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{k+1,\Omega_h}$$

Démontrer ce résultat avec les outils d'éléments finis classiques que vous connaissez et que vous pouvez utiliser sur Ω_h, sachant que $I_h w$ correspond à l'interpolation de Lagrange de w et $w \in H^{k+1}(\Omega_h)$.

Exercice 2 On s'intéresse désormais au problème suivant avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$-\Delta u + u = f \text{ dans } \Omega$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u = g \text{ sur } \Gamma$$

1 A quelle(s) condition(s) au bord cela correspond il ?
2. On souhaite résoudre le problème à l'aide de la méthode phiFEM. Ecrire les espaces discrets et la formulation variationnelle discrète du problème ci dessus en justifiant son écriture.
3. Comment programmeriez vous la formulation matricielle correspondante sur votre logiciel préféré ?