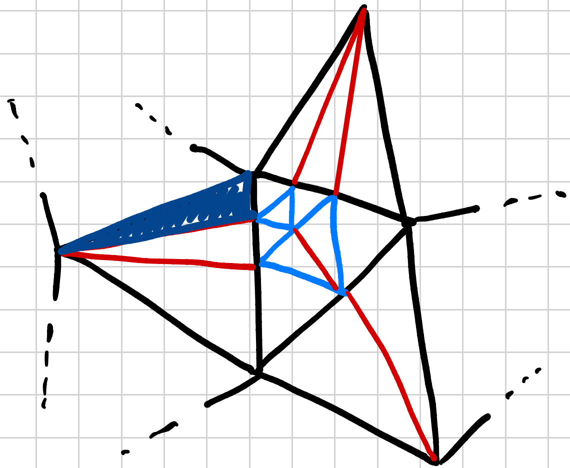
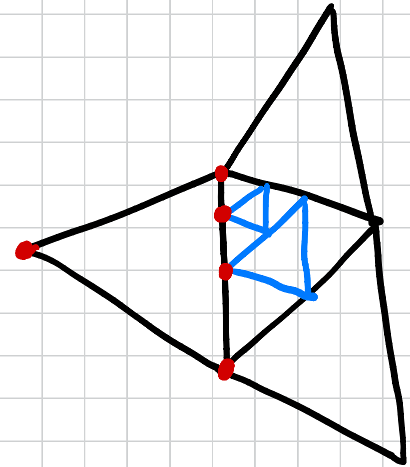




Hybrid High-Order (HHO), [Di Pietro, Ern, Lemaire, 2014]

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ polytope ouvert avec bord $\partial\Omega$

Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (\Pi)$$

Celle-ci est une formulation faible de : Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$

t.q.

$$-\operatorname{div}(\nabla u) = -\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Le caractère bien posé de (Π) est garanti par l'inégalité de Poincaré : Il existe $C_\Omega > 0$ qui dépend uniquement de Ω t.q.

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

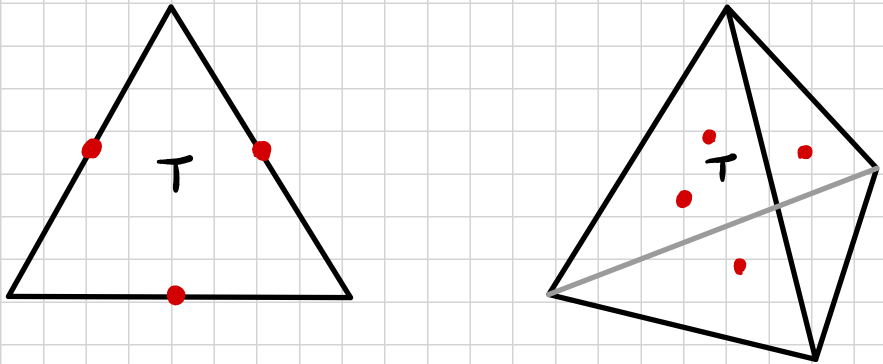
Approximation EF conforme

On remplace $H_0^1(\Omega)$ par un sous-espace $U_{h,0} \subset H_0^1(\Omega)$ de dimension finie. Une méthode EF conforme consiste donc à : Trouver $u_h \in U_{h,0}$ t.q.

$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in U_{h,0}.$$

Pour les méthodes non-conformes, on n'a plus $U_{h,0} \subset H_0^1(\Omega)$!

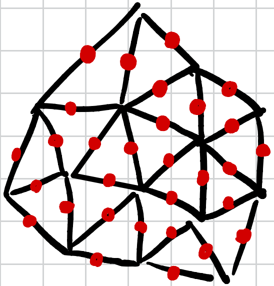
L'élément fini de Crouzeix-Raviart



L'élément fini de CR est le triplet $(T, \mathbb{P}^1(T), \sigma_T)$

- $T :=$ triangle (2d) ou tétraèdre (3d)
- $\mathbb{P}^1(T) :=$ fonctions affines sur T
- $\sigma_T := (\sigma_{TF})_{F \in \mathcal{F}_T}$ avec $\mathcal{F}_T =$ ensemble des faces de T et, $\forall F \in \mathcal{F}_T$,

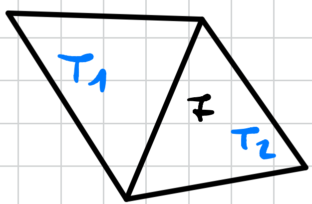
$$\sigma_{TF} : \mathbb{P}^1(T) \ni v \longmapsto v_F := \frac{1}{|F|} \int_F v \in \mathbb{R}$$



$\mathcal{T}_h$ = maillage simplicial conforme

$\mathcal{F}_h$ = ensemble des faces de $\mathcal{T}_h$

V_h espace de CR global := espace de fonctions v_h qui sont affines dans chaque $T \in \mathcal{T}_h$ et telles que, pour tout $F \in \mathcal{F}_h$ t.q. $\exists\, T_1 \neq T_2$, $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$,



$$\sigma_{T_1 F}(v_h|_{T_1}) = \sigma_{T_2 F}(v_h|_{T_2})$$

$$V_h \not\subset H^1(\Omega)$$

$$V_{h,0} := \left\{ v_h \in V_h \ : \ \int_F v_h = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b \right\} \not\subset H_0^1(\Omega)$$

$\mathcal{F}_h^b := \{ F \in \mathcal{F}_h : F \subset \partial\Omega \}$ ensemble des faces de bord

Espace $H^1(\mathcal{T}_h)$ et gradient brisé

$$H^1(\mathcal{T}_h) := \{ v \in L^2(\Omega) \ : \ v_{|T} \in H^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$$

__NB__ $V_h \subset H^1(\mathcal{T}_h)$!

On définit le gradient brisé $\nabla_h : H^1(\mathcal{T}_h) \longrightarrow L^2(\Omega)^d$ t.q.

$$(\nabla_h v)_{|T} := \nabla v_{h|T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

Nous allons nous intéresser à la méthode :

Trouver $u_h \in V_{h,0}$ t.q.

$$a_h(u_h, v_h) := \int_\Omega \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_{h,0}.$$

Nous allons nous intéresser à la stabilité de cette méthode, qui demande à prouver une inégalité de Poincaré discrète :

$\boxed{L}$ $\exists\, C_{CR} > 0$ indépendant de h t.q.

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{CR} \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall v_h \in V_{h,0}.$$

NB Cette inégalité est uniforme en h !

La preuve de ce lemme est basée sur 2 ingrédients :

1) Une formule magique

2) L'élément fini de Raviart-Thomas-Nédélec

1) Une formule magique

$$H(\mathrm{div}\,;\Omega) := \left\{ \tau \in L^2(\Omega)^d \quad : \quad \mathrm{div}\,\tau \in L^2(\Omega) \right\}$$

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_d \end{pmatrix} \qquad \mathrm{div}\,\tau = \sum_{i=1}^{d} \partial_i \tau_i$$

si $d=3$, $\quad \mathrm{div}\,\tau = \partial_1 \tau_1 + \partial_2 \tau_2 + \partial_3 \tau_3$

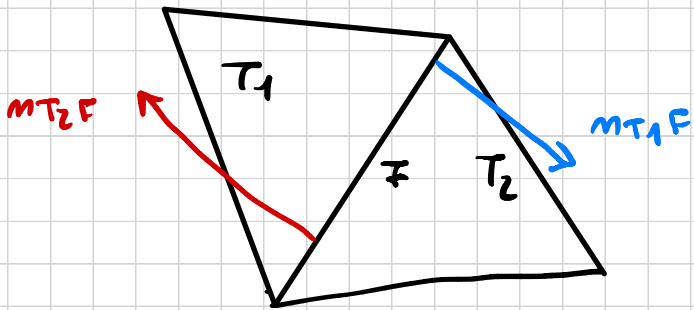
$$\|\tau\|_{H(\mathrm{div}\,;\Omega)} := \left(\|\tau\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathrm{div}\,\tau\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}$$

R (Continuité des traces normales)

Si $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$, alors $\forall F \in \mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^b$ t.q.

$F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$,

$$\tau|_{T_1} \cdot n_{T_1F} + \tau|_{T_2} \cdot n_{T_2F} = 0 \quad \text{sur } F$$



$\mathcal{F}_h^b$:= ensemble des faces de bord

$\mathcal{F}_h \setminus \mathcal{F}_h^b$:= ensemble des faces internes

$\boxed{L}$ (Formule magique)

Soit $(v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ une famille de fonctions $v_F \in L^2(F)$ t.q. $v_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b$. Soit $\tau \in H(\mathrm{div}; \Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$.

Alors,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau \cdot n_{TF}) v_F = 0.$$

<u>Dém.</u> Pour tout $F \in \mathcal{F}_h$, $\mathcal{T}_F :=$ ensemble des éléments qui partagent F.

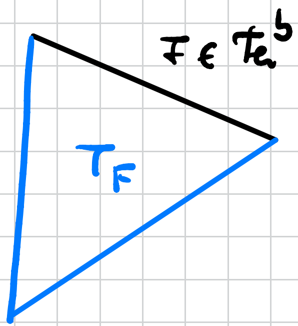
$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau \cdot n_{TF}) v_F = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \int_F (\tau \cdot n_{TF}) v_F$$

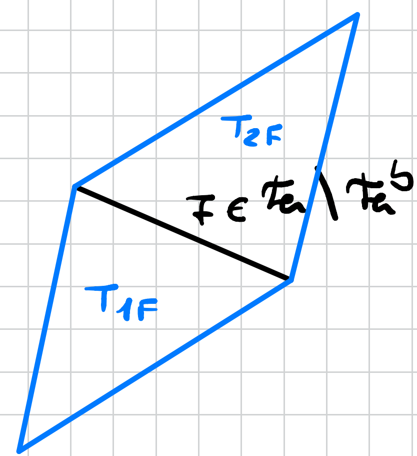
$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\tau \cdot n_{T_F F}) v_F$$

$\mathcal{T}_F = \{T_F\}$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\ \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F (\tau\cdot n_{TF})\,v_F = \sum_{F\in\mathcal{F}_h}\ \sum_{T\in\mathcal{T}_F}\int_F (\tau\cdot n_{TF})\,v_F$$

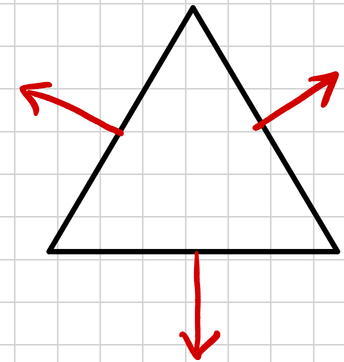
$$= \cancel{\sum_{F\in\mathcal{F}_h^b}\int_F (\tau\cdot n_{T_F F})\,v_F} + \sum_{F\in\mathcal{F}_h^i}\int_F \cancel{\left[(\tau|_{T_{1F}}\cdot n_{T_{1F}F})\,v_F + (\tau|_{T_{2F}}\cdot n_{T_{2F}F})\,v_F\right]} = 0$$





2) L'élément fini de Raviart-Thomas-Nédélec

$$(T, RTN^1(T), \sigma_T) \quad \text{avec}$$



- T triangle (si $d=2$) ou tétraèdre (si $d=3$)
- $RTN^1(T) := P^0(T)^d + (x - x_T) P^0(T)$

  avec $x_T \in T$

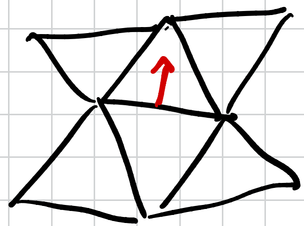
<u>Exemple</u>

$$\tau(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (x - x_T)\, 5 \in RTN^1(T)$$

- $\sigma_T = (\sigma_{TF})_{F \in \mathcal{F}_T}$ t.q.

$$\sigma_{TF} : RTN^1(T) \ni \tau \longmapsto \frac{1}{|F|} \int_F \tau \cdot n_{TF} \in \mathbb{R}$$

$$\Sigma_a := \{ \tau \in H(\mathrm{div};\Omega) \; : \; \tau|_T \in \mathcal{RTN}^1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_a \}$$



On peut montrer que

$$\mathrm{div} : \Sigma_a \longrightarrow \underbrace{\mathcal{P}^0(\mathcal{T}_a)}_{}$$

espace de fonctions constantes par morceaux sur $\mathcal{T}_a$

est surjectif

$\boxed{L}$ (Surjectivité de la divergence de $RTN^1(T_h)$ dans $\mathcal{P}^0(T_h)$)

Pour tout $v_h \in \mathcal{P}^0(T_h)$, il existe $\tau_h \in RTN^1(T_h)$ t.q.

$$\operatorname{div} \tau_h = v_h \quad \text{et} \quad \|\tau_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} \leq C \, \|v_h\|_{L^2(\Omega)}$$

avec C indépendante de h.

$\boxed{D}$ $\quad a \lesssim b \quad := \quad a \leq Cb$ avec $C>0$ qui ne dépend pas de h ni de l'élément ou de la face si on considère des inégalités locales.

Preuve de l'inégalité de Poincaré pour l'espace CR

On doit montrer que

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \forall v_h \in V_{h,0}.$$

Soit $v_h \in V_{h,0}$. On pose

$$\begin{aligned} v_T &:= \frac{1}{|T|}\int_T v_h \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \\ v_F &:= \frac{1}{|F|}\int_F v_h \qquad \forall F \in \mathcal{F}_h \end{aligned} \tag{1}$$

Le lemme précédent nous dit qu'il existe $\tau_h \in RT\mathcal{N}^1(\mathcal{T}_h)$ t.q.

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} \tau_h)_{|T} &= v_T \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \\ \|\tau_h\|_{H(\operatorname{div};\Omega)} &\lesssim \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|v_T\|^2_{L^2(T)}\right)^{1/2} = \|\bar{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned} \tag{2}$$

Par brévité, on introduit la fonction $\bar{v}_h \in \mathbb{P}^0(\mathcal{T}_h)$

t.q. $\quad (\bar{v}_h)_{|T} := v_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \qquad (3)$

$$\operatorname{div} \tau_h = \bar{v}_h$$

$$\|\bar{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \operatorname{div} \tau_h \, \bar{v}_h$$

$$\overset{(3)}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \tau_h \, v_T$$

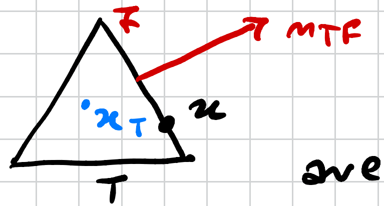
$$\overset{(1)}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \tau_h \, v_h \qquad (\operatorname{div} \tau_h)_{|T} \in \mathbb{P}^0(T)$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_T \tau_h \cdot \nabla v_h + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau_h \cdot n_{TF}) \, v_h \right]$$

$$= - \int_\Omega \tau_h \cdot \nabla_h v_h + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \underbrace{(\tau_h \cdot n_{TF})}_{\in \mathbb{P}^0(F)} v_h$$

On remarque que, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, $\tau_a|_T = \overline{\tau}_T + (x - x_T)\, q_T$

avec $\overline{\tau}_T \in \mathbb{P}^0(T)^d$ et $q_T \in \mathbb{P}^0(T)$

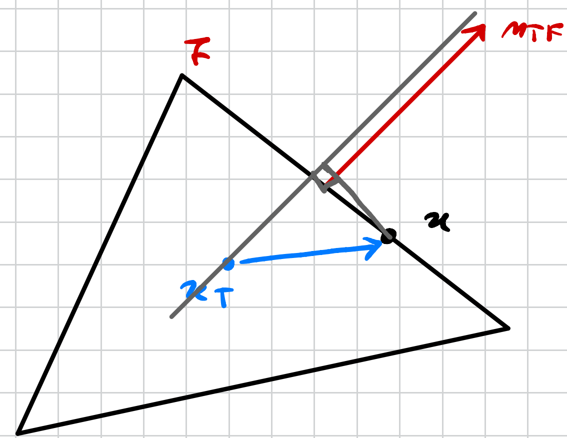


$$\tau_a|_T \cdot n_{TF} = \overbrace{\overline{\tau}_T \cdot n_{TF}}^{\in \mathbb{P}^0(F)} + \overbrace{\left[(x - x_T)\cdot n_{TF}\right]}^{\in \mathbb{P}^0(F)} q_T$$

avec $x \in F$

ce qui montre que, $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$\tau_a|_T \cdot n_{TF} \in \mathbb{P}^0(F) \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T$$



$$\|\bar{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)} = -\int_\Omega \tau_h \cdot \nabla_h v_h + \underbrace{\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F (\tau_h \cdot n_{TF})\, v_F}_{}$$

$= 0$ (formule magique)

C–S

$$\Rightarrow \|\bar{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\tau_h\|_{L^2(\Omega)^d} \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d}$$

$$\leq \|\tau_h\|_{H(\mathrm{div};\Omega)} \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \quad \text{(déf. } \|\cdot\|_{H(\mathrm{div};\Omega)}\text{)}$$

$$\lesssim \|\bar{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d}$$

$$\Rightarrow \|\bar{v}_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)^d} \qquad (4)$$

Soit $T \in \mathcal{T}_h$. On a que

inégalité triangulaire

$$\|v_h\|^2_{L^2(T)} \leq \left(\|v_h - v_T\|_{L^2(T)} + \|v_T\|_{L^2(T)}\right)^2$$

$$\lesssim \left(h_T \|\nabla v_{h|T}\|_{L^2(T)^d} + \|v_T\|_{L^2(T)}\right)^2 \quad \text{Poincaré-Wirtinger}$$

$$\leq 2\left(h_T^2 \|\nabla v_{h|T}\|^2_{L^2(T)^d} + \|v_T\|^2_{L^2(T)}\right) \quad (a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$$

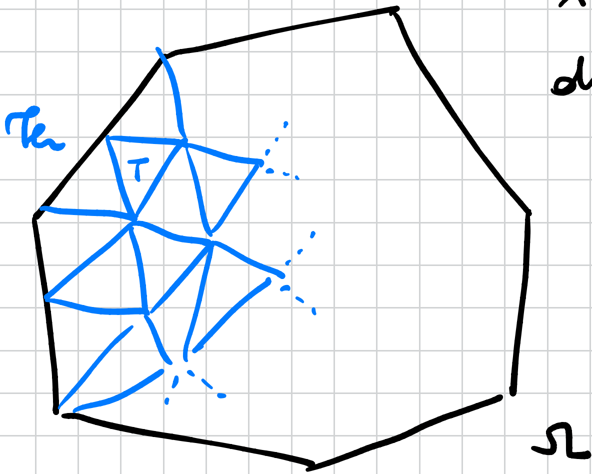
(5)

$$\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_h\|^2_{L^2(T)}$$

$$\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^2 \|\nabla v_{h|T}\|^2_{L^2(T)^d} + \|v_T\|^2_{L^2(T)}\right)$$

$$\leq \operatorname{diam}(\Omega)^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_{h|T}\|^2_{L^2(T)^d} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v_T\|^2_{L^2(T)}$$

$$\lesssim \|\nabla_h v_h\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \|\overline{v}_h\|^2_{L^2(\Omega)} \overset{(4)}{\lesssim} \|\nabla_h v_h\|^2_{L^2(\Omega)^d} \quad \square$$



$X \subset \mathbb{R}^d$

$$\mathrm{diam}(X) := \sup_{x, y \in X} \mathrm{dist}(x, y)$$

$$h_T = \mathrm{diam}(T) \leq \mathrm{diam}(\Omega)$$

$[C_\Omega] = L$

Poincaré $\quad \underline{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \leq C_\Omega \underline{\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}}$

$$[\|v\|_{L^2(\Omega)}] = [(\int_\Omega v^2)^{1/2}] = (L^d [v]^2)^{1/2}$$

$$[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}] = [(\int_\Omega |\nabla v|^2)^{1/2}] = \left(L^d \frac{[v]^2}{L^2}\right)^{1/2}$$