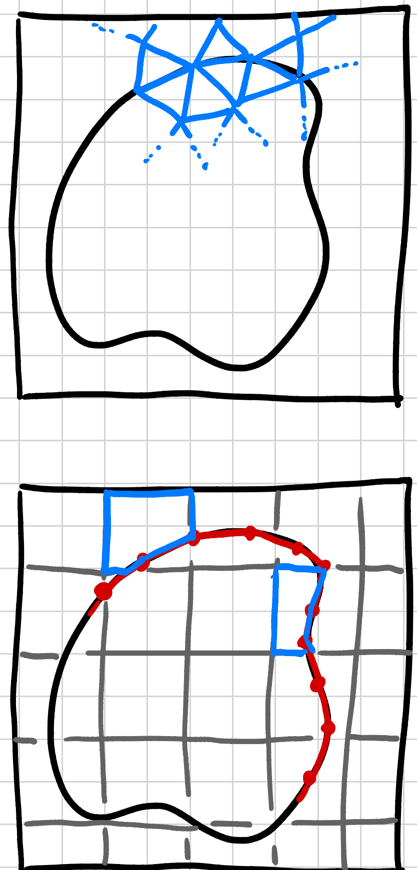
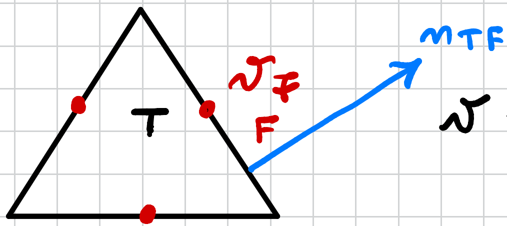


Un changement de point de vue



$$v \in \mathbb{P}^1(T)$$

$$v_F := \sigma_F\, v = \frac{1}{|F|} \int_F v$$

On cherche à décrire v en fonction de $(v_F)_{F \in \mathcal{F}_T}$.

On commence par ∇v. Soit $w \in \mathbb{P}^1(T)$,

$$\boxed{\int_T \nabla v \cdot \nabla w} \overset{\text{IPP}}{=} \cancel{-\int_T v\, \Delta w} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v\, \underbrace{(\nabla w \cdot n_{TF})}_{\in \mathbb{P}^0(F)}$$

$$\boxed{= \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_F\, (\nabla w \cdot n_{TF})} \qquad (1)$$

Remarque Si on choisit $w = x_i$ t.q. $\nabla w = e_i$ $i = 1, \dots, d$, avec e_i i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on trouve

$$\nabla v = \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} |F| \, v_F \, n_{TF}$$

v est donc de la forme

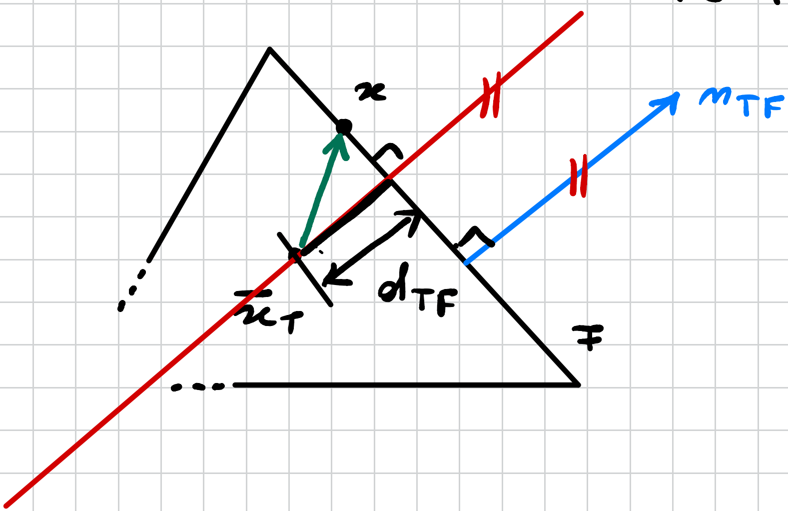
$$v = v_T + \nabla v \cdot (x - \overline{x}_T)$$

avec $v_T := \frac{1}{|T|} \int_T v$ et $\overline{x}_T := \frac{1}{|T|} \int_T x$. Il nous reste à exprimer v_T en fonction des $(v_F)_{F \in \mathcal{F}_T}$

$$|T|\, v_T = \int_T v = \frac{1}{d}\int_T v\, \mathrm{div}(x-\bar{x}_T)$$

$$= \frac{1}{d}\left[-\cancel{\int_T \underbrace{\nabla v_T}_{\in\,\mathbb{P}^0(T)^d}\cdot(x-\bar{x}_T)} + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F v\, \underbrace{(x-\bar{x}_T)\cdot n_{TF}}_{\in\,\mathbb{P}^0(F)} \right]$$

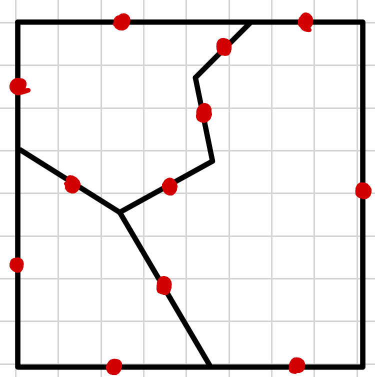
$$= \frac{1}{d}\sum_{F\in\mathcal{F}_T} d_{TF}\int_F v_F$$



$$\boxed{v_T = \frac{1}{|T|}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\frac{d_{TF}}{d}\int_F v_F} \qquad (2)$$

Remarque (!!) Les formules (1) et (2) restent vraies si T est un polytope (= polygone en 2d, polyèdre en 3d) quelconque !!

Soit maintenant $\mathcal{T}_h$ un maillage polytopal

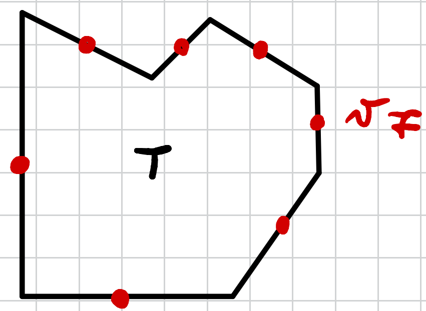


Un espace hybride d'ordre bas sur maillages généraux

$$\underline{V}_h^0 := \{ \underline{v}_h := (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h} : v_F \in \mathcal{P}^0(F) \ \forall F \in \mathcal{F}_h \}$$

La restriction de cet espace à un élément $T \in \mathcal{T}_h$ est

$$\underline{V}_T^0 := \{ \underline{v}_T := (v_F)_{F \in \mathcal{F}_T} : v_F \in \mathcal{P}^0(F) \ \forall F \in \mathcal{F}_T \}$$



On souhaite construire un opérateur $p_T^1 : \underline{V}_T^0 \longrightarrow \mathbb{P}^1(T)$ tel que, en posant

(interpolateur) $$\underline{I}_T^0 v := \left(\frac{1}{|F|} \int_F v \right)_{F \in \mathcal{F}_T} \in \underline{V}_T^0 \qquad \forall v \in H^1(T) \qquad (3)$$

on ait la consistance polynomiale suivante :

$$(p_T^1 \circ \underline{I}_T^0) v = v \qquad \forall v \in \mathbb{P}^1(T) \qquad (4)$$

On choisit p_T^1 t.q. $\forall \underline{v}_T = (v_F)_{F \in \mathcal{F}_T} \in \underline{V}_T^0$,

$$\boxed{\begin{aligned} \int_T \nabla p_T^1 \underline{v}_T \cdot \nabla w &= \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_F (\nabla w \cdot n_{TF}) \qquad \forall w \in \mathbb{P}^1(T) \\ \int_T p_T^1 \underline{v}_T &= \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v_F \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (5a) \\ (5b) \end{aligned}$$

Vérifions (4). Soit $v \in \mathbb{P}^1(T)$. On a, $\forall w \in \mathbb{P}^1(T)$,

$$\int_T \nabla p_T^1 I_T^0 v \cdot \nabla w \overset{(5a),(3)}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \left(\frac{1}{|F|} \int_F v \right) \underbrace{(\nabla w \cdot n_{TF})}_{\in \mathbb{P}^0(F)}$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v \, (\nabla w \cdot n_{TF}) \overset{\text{IPP}}{=} \int_T \nabla v \cdot \nabla w$$

$$\Rightarrow \nabla p_T^1 I_T^0 v = \nabla v \qquad (6)$$

$$\int_T p_T^1 I_T^0 v \overset{(5b),(3)}{=} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F \left(\frac{1}{|F|} \int_F v \right) = \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v \, (x - \bar{x}_T) \cdot n_{TF} = \frac{1}{d} \int_T v \, \mathrm{div}(x - \bar{x}_T)$$

$$= \int_T v \qquad (7)$$

(6) et (7) montrent (4)

$\varpi_T^1 := p_T^1 \circ I_T^0 : H^1(T) \longrightarrow \mathbb{P}^1(T)$ projecteur elliptique

- projecteur : $\varpi_T^1 \circ \varpi_T^1 = \varpi_T^1$

$$\forall v \in H^1(T), \quad \varpi_T^{k+1}(\underbrace{\varpi_T^{k+1} v}_{\in \mathbb{P}^1(T)}) \overset{(4)}{=} \varpi_T^{k+1} v$$

- elliptique:

$$\varpi_T^1 v = \arg \min_{\substack{w \in \mathbb{P}^1(T), \\ \int_T w = \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v}} \| \nabla w - \nabla v \|^2_{L^2(T)^d}$$

Est-ce qu'on peut approcher de façon optimale des fonctions régulières à l'aide de ϖ_T^1? oui

$$\| v - \varpi_T^1 v\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla(v - \varpi_T^1 v)\|_{L^2(T)^d} \lesssim h_T^2 |v|_{H^2(T)}$$

$$\| v - \varpi_T^1 v\|_{L^2(\partial T)} \lesssim h_T^{\frac{3}{2}} |v|_{H^2(T)}$$

$$a_h \approx a(w,v) := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v$$

restrictions de $\underline{w}_h$, $\underline{v}_h$ à T

$$a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \quad \text{avec}$$

$$a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := \int_T \nabla p_T^1 \underline{w}_T \cdot \nabla p_T^1 \underline{v}_T \quad + \text{stab.}$$

Généralisation à l'ordre arbitraire (la méthode "Hybrid High-Order" — HHO)

Soit $T \in \mathcal{T}_h$, $k \geq 0$ un entier et $v \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$

$\forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$,

$$\int_T \nabla v \cdot \nabla w \overset{\text{IPP}}{=} -\int_T v \underbrace{\Delta w}_{\in \mathbb{P}^{k-1}(T)} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v \underbrace{(\nabla w \cdot n_{TF})}_{\in \mathbb{P}^k(F)}$$

Soit $Y \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$ un élément ou une face, $\ell \geq 0$ un entier.

On définit le **projecteur L^2** $\pi_Y^\ell : L^2(Y) \longrightarrow \mathbb{P}^\ell(Y)$ t.q.

$$\int_Y \pi_Y^\ell v \; w = \int_Y v \, w \qquad \forall w \in \mathbb{P}^\ell(Y) \qquad (8)$$

Remarque (8) est l'équation d'Euler pour le problème de minimisation

$$\min_{w \in \mathcal{P}^{e}(Y)} \| v - w \|^2_{L^2(Y)}$$

$$\int_T \nabla v \cdot \nabla w \overset{(8)}{=} - \int_T \pi_T^{k-1} v \underbrace{\Delta w}_{\in \mathcal{P}^{k-1}(T)} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \pi_F^k v \underbrace{(\nabla w \cdot n_{TF})}_{\in \mathcal{P}^k(F)} \qquad (9)$$

Par conséquent, si je connais $\left(\pi_T^{k-1} v, (\pi_F^k v)_{F \in \mathcal{F}_T} \right)$, je peux reconstruire ∇v à l'aide de (9). De plus,

$$\int_T v = \begin{cases} \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v = \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F \pi_F^0 v & \text{si } k = 0 \\ \displaystyle\int_T \pi_T^{k-1} v & \text{si } k \geq 1 \end{cases} \qquad (10)$$

Cette construction nous suggère de définir la généralisation suivante de $\underline{V}_T^0$ à l'ordre arbitraire $k \geq 0$:

$$\underline{V}_T^k := \Big\{ \underline{v}_T := (v_T, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_T}) : \quad v_T \in \mathcal{P}^{k-1}(T) \text{ et } \quad v_F \in \mathcal{P}^k(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_T \Big\} \tag{11}$$

espace HHO

ainsi que la reconstruction de potentiel $p_T^{k+1} : \underline{V}_T^k \longrightarrow \mathcal{P}^{k+1}(T)$ t.q., $\forall \underline{v}_T \in \underline{V}_T^k$,

$$\int_T \nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T \cdot \nabla w = -\int_T v_T \Delta w + \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F v_F (\nabla w \cdot n_{TF}) \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T) \tag{12a}$$

$$\int_T p_T^{k+1}\underline{v}_T = \begin{cases} \displaystyle\sum_{F\in\mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v_F & k=0 \\ \displaystyle\int_T v_T & k \geq 1 \end{cases} \tag{12b}$$

J'aurai la consistance polynomiale

$$(p_T^{k+1} \circ \underline{I}_T^k)\, v = v \qquad \forall v \in \mathcal{P}^{k+1}(T) \qquad (13)$$

en définissant l'interpolateur $\underline{I}_T^k : H^1(T) \longrightarrow \underline{V}_T^k$ comme suit :

$$\underline{I}_T^k v := \left(\pi_T^{k-1} v,\ (\pi_F^k v)_{F \in \mathcal{F}_T} \right) \qquad \forall v \in H^1(T) \qquad (14)$$

Exercice Prouver (13).

$$\varpi_T^{k+1} := p_T^{k+1} \circ \underline{I}_T^k \qquad \text{projecteur elliptique}$$

Inégalité de Poincaré discrète pour l'espace HHO

$\boxed{L}$ $\operatorname{div} : H^1(\Omega)^d \longrightarrow L^2(\Omega)$ est surjective, c.-à-d.,
$\forall v \in L^2(\Omega)$, $\exists \tau \in H^1(\Omega)^d$ t.q.

$$\operatorname{div} \tau = v \qquad \text{et} \qquad \|\tau\|_{H^1(\Omega)^d} \lesssim \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\underline{V}_h^k := \{ \underline{v}_h := ((v_T)_{T\in\mathcal{T}_h}, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_h}) : v_T \in \mathcal{P}^{k-1}(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \text{ et } v_F \in \mathcal{P}^k(F) \ \forall F \in \mathcal{F}_h \}$$

$$\underline{V}_{h,0}^k := \{ \underline{v}_h \in \underline{V}_h^k : v_F \equiv 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b \}$$

Étant donnée $\underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$, on peut utiliser le lemme pour faire un relèvement dans $H^1(\Omega)^d$ de $v_h \in \mathcal{P}^{\max(0,k-1)}(\mathcal{T}_h)$ t.q.

$$(v_h)_{|T} := v_T \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

où

$$v_T := \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v_F \quad \text{si } k=0$$

On définit la seminorme H^1 discrète : $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_h^k$,

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h} := \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \right)^{1/2},$$

$$\|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 := \|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d}^2 + h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v_F - v_T\|_{L^2(F)}^2$$

et on cherche à prouver

$$\boxed{L} \qquad \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,h} \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$$

$$[h_T^{-1} \|v_F - v_T\|_{L^2(F)}^2] = L^{-1} L^{d-1} [v]^2 = L^d \frac{[v]^2}{L^2}$$

$$= [|T|]\, [\nabla v]^2 = [\|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d}^2]$$

$$\tau \in H^1(\Omega)^d \text{ t.q. } \operatorname{div} \tau = v_h \quad \text{et} \quad \|\tau\|_{H^1(\Omega)^d} \lesssim \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (15)$$

$$\|v_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega v_h^2 = \int_\Omega \operatorname{div} \tau \, v_h$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \operatorname{div} \tau \, v_T$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(- \int_T \tau \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_T (\tau \cdot n_{TF}) \right)$$

Formule magique $\tau \in H^1(\Omega)^d \Rightarrow \tau \in H(\operatorname{div}; \Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$

$(v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ est t.q. $v_F = 0 \ \forall F \in \mathcal{F}_h^b$

$$\Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_F (\tau \cdot n_{TF}) = 0$$

$$\|v_q\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left[-\int_T \tau\cdot\nabla v + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F (v_T - v_F)(\tau\cdot n_{TF})\right]$$

C-S, $(2,2,\infty)$-Hölder

$$\leq \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Big[\|\tau\|_{L^2(T)^d}\|\nabla v\|_{L^2(T)^d}$$

$$+ \sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1/2}\|v_T - v_F\|_{L^2(F)}\, h_T^{1/2}\|\tau\|_{L^2(F)^d}\underbrace{\|n_{TF}\|_{L^\infty(F)^d}}_{\leq 1}\Big]$$

$$\overset{C-S}{\leq}\left[\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|\nabla v\|^2_{L^2(T)} + h_T^{-1}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\|v_T - v_F\|^2_{L^2(F)}\right)\right]^{1/2}$$

$$\times\left[\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\|\tau\|^2_{L^2(T)^d} + h_T\|\tau\|^2_{L^2(\partial T)}\right)\right]^{1/2}$$

$$\lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,h}\,\|\tau\|_{H^1(\Omega)^d} \overset{(15)}{\lesssim} \|\underline{v}_h\|_{1,h}\,\|v_q\|_{L^2(\Omega)}$$

$h_T\|\tau\|^2_{L^2(\partial T)} \lesssim \|\tau\|^2_{L^2(T)^d} + h_T^2\|\nabla\tau\|^2_{L^2(T)^{d\times d}}$ inégalité de trace locale

On a donc prouvé

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,h} \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$$