

Maillages polytopaux

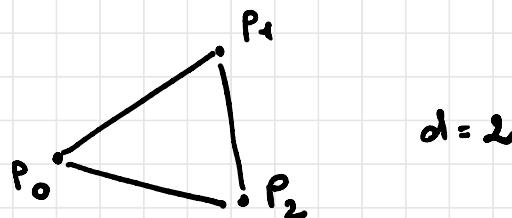
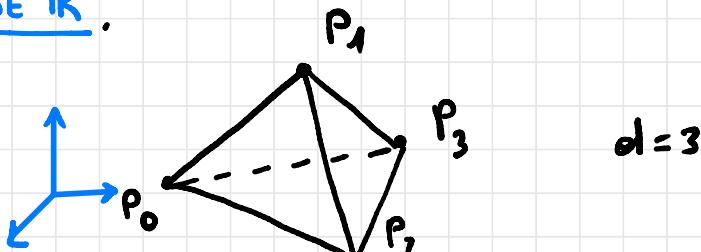
D Soit $d \geq 2$ un entier. Soit

$$P := \{P_0, P_1, \dots, P_d\} \subset \mathbb{R}^d$$

t.q. la famille $\{P_1 - P_0, \dots, P_d - P_0\}$ est libre.

L'intérieur de l'enveloppe convexe de P est un

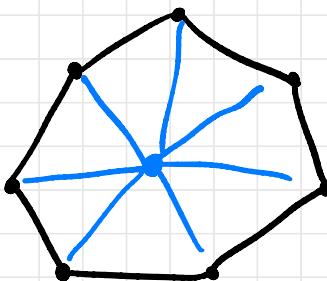
SIMPLEXE DE \mathbb{R}^d .



Pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$, l'enveloppe convexe de $P \setminus \{P_i\}$ est une FACE SIMPLICIALE.

On appelle un POLYTOPE un ensemble connexe qui est l'intérieur d'une union finie de simplices.

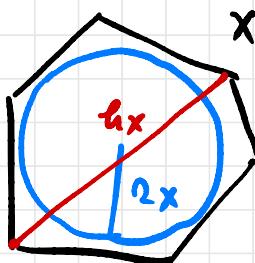
$d = 2$



Étant donné un polytope X , on définit son diamètre ℓ_X par le formule

$$\ell_X := \sup \{ \text{dist}(x, y) : x, y \in X \}$$

On appelle r_X le rayon de la plus grande boule contenue dans X



$$[r_X \leq \ell_X]$$

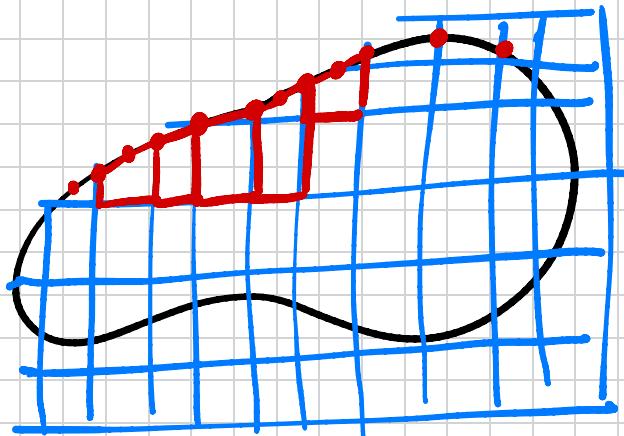
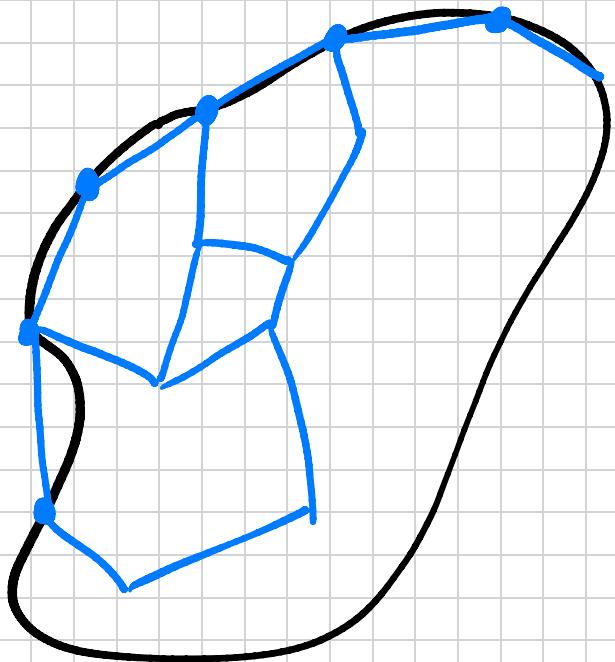
$$\ell_X \gg r_X$$

élément "écarté"

Définition (Domaine Ω)

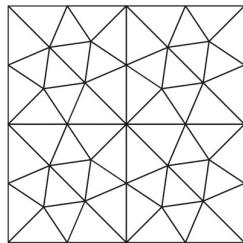
Étant fixée une dimension d'espace $d \geq 2$, Ω est un polytope de \mathbb{R}^d .

[par d'erreur d'approximation géométrique]

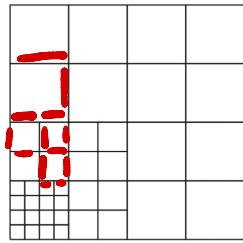


Maillage polytopal

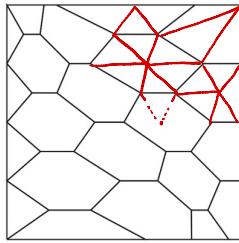
maillage
non-conforme



(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 1.1 Examples of polytopal meshes in two and three space dimensions. The triangular and nonconforming meshes are taken from the FVCA5 benchmark [207], the polygonal mesh from [152, Section 4.2.3], and the agglomerated polyhedral mesh from [154]. (a) Matching triangular. (b) Nonconforming. (c) Polygonal. (d) Agglomerated

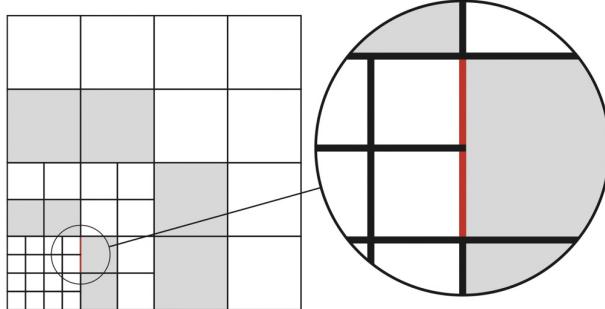


Fig. 1.2 Treatment of a nonconforming junction (red) as multiple coplanar faces. Gray elements are pentagons, white elements are squares

D

Un MAILLAGE POLYTOPAL de Ω est un couple

$$\text{elt}_{\Omega} = (\mathcal{B}_{\Omega}, \mathcal{F}_{\Omega})$$

avec :

- \mathcal{B}_{Ω} ensemble des éléments, une famille finie de polytopes non-vides disjoints T avec bord ∂T et diamètre e_T telle que

$$\boxed{e_{\Omega}} = \max_{T \in \mathcal{B}_{\Omega}} e_T$$

et on a

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{B}_{\Omega}} \overline{T}.$$

- \mathcal{F}_{Ω} ensemble des faces est une famille finie de sous-ensembles de $\overline{\Omega}$ non vides, connexes chacun appartenant à un hyperplan de \mathbb{R}^d et tels que la mesure de Hausdorff de $\overline{T} \setminus F$ est égale à 0. Pour toute $F \in \mathcal{F}_{\Omega}$, on note e_F le diamètre de F .

On suppose, de plus, que :

a) Pour toute face $F \in \mathcal{F}_a$

- soit il existe $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_a$, $T_1 \neq T_2$ t.q.

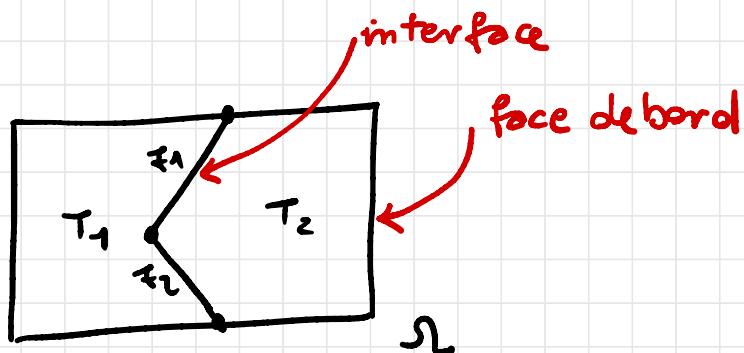
$$F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$$

et on appelle F une INTERFACE

- soit il existe $T \in \mathcal{T}_a$ t.q.

$$F \subset \partial T \cap \partial S$$

et on appelle F une FACE DE BORD



b) $\bigcup_{T \in \mathcal{T}_a} \partial T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}_a} \overline{F}$

- On note \mathcal{F}_h^i l'ensemble des interfaces et \mathcal{F}_h^b l'ensemble des faces de bord, de telle sorte à avoir

$$\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^b$$

- Pour tout élément $T \in \mathcal{T}_h$, on note

$$\mathcal{F}_T := \{ F \in \mathcal{F}_h : F \subset \partial T \}$$

l'ensemble des faces de T

- De la même façon, pour toute face $F \in \mathcal{F}_h$, on note

$$\mathcal{T}_F := \{ T \in \mathcal{T}_h : F \subset \partial T \}$$

l'ensemble des éléments qui partagent F .

- Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et toute $F \in \mathcal{F}_T$, m_{TF} est le vecteur unitaire normalisé à F sortant de T :



$$\|m_{TF}\|_2 = 1$$

Suite de maillages régulières

$H \subset \mathbb{R}_+^*$ ensemble dénombrable ayant 0 comme unique point d'accumulation

$(M_\alpha)_{\alpha \in H}$: suite de maillages

Définition (Maillage simplicial)

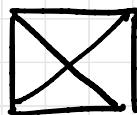
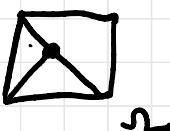
$M_\alpha = (T_\alpha, F_\alpha)$ est un MAILLAGE SIMPLICIAL

DE Ω si pour tout $T \in T_\alpha$, T est un al-simplice.

M_α est un MAILLAGE SIMPLICIAL CONFORME si :

(i) $\forall T, T' \in T_\alpha, T' \neq T, \partial T \cap \partial T'$ est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble (éventuellement vide) de sommets de T

(ii) F_α est l'ensemble des faces simpliciales des éléments de T_α .



maillage simplicial

maillage simplicial conforme (7)

Définition (sous-maillage simplicial conforme)

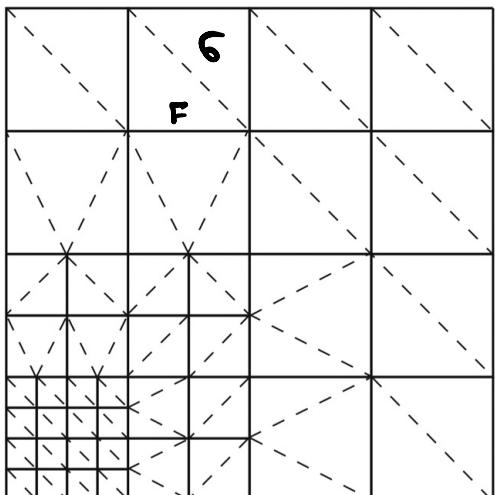
Soit $\mathcal{M}_h = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)$ un maillage polytopal de Ω . On dit que $\tilde{\mathcal{M}}_h = (\tilde{\mathcal{T}}_h, \tilde{\mathcal{F}}_h)$ est un sous-maillage simplicial de \mathcal{M}_h si :

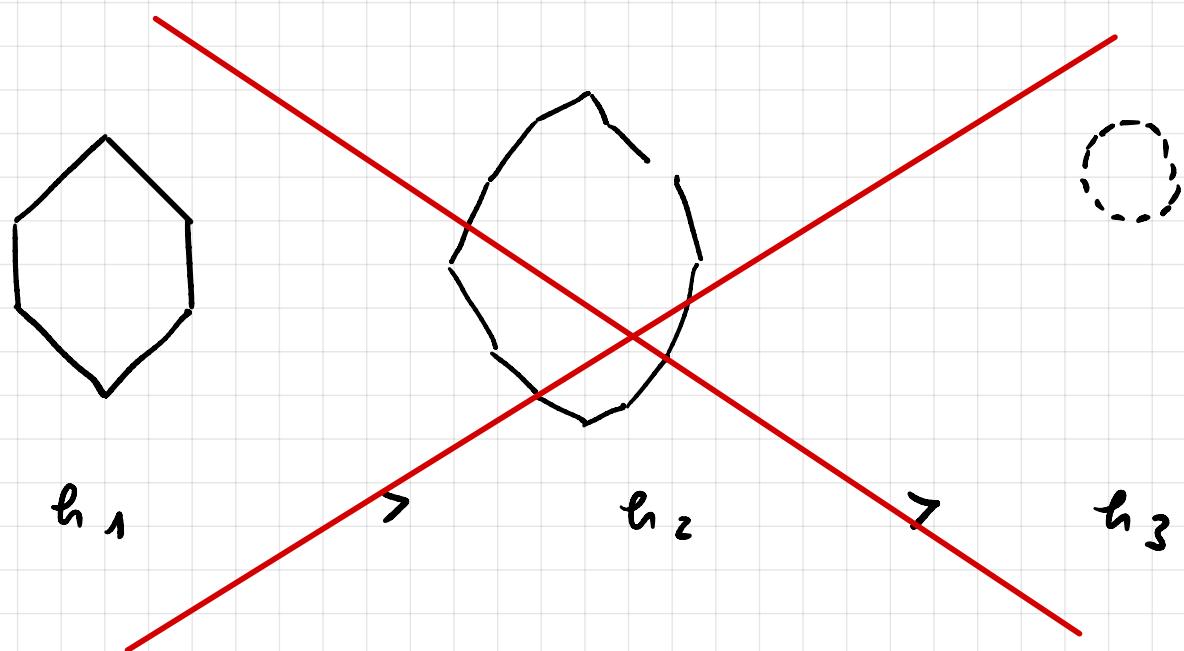
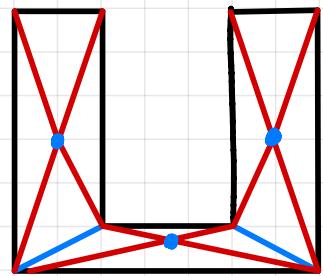
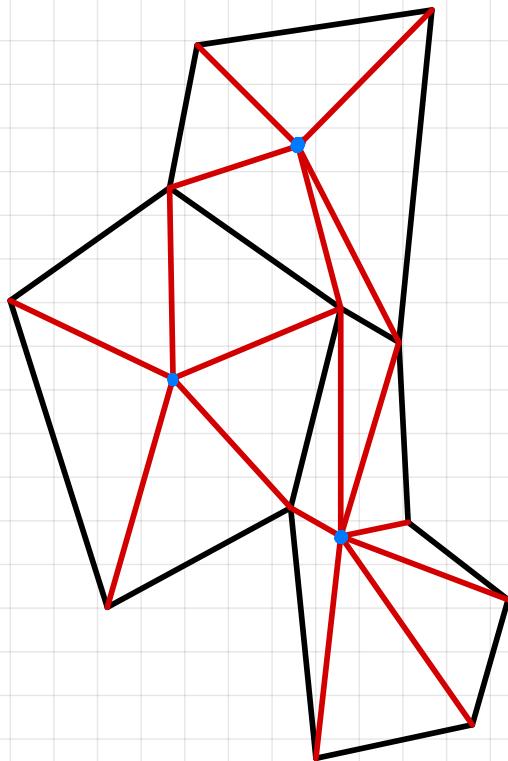
(i) $\tilde{\mathcal{M}}_h$ est un maillage simplicial conforme de Ω

(ii) $\forall z \in \tilde{\mathcal{T}}_h, \exists ! \tau \in \mathcal{T}_h, z \subset \tau$

(iii) $\forall g \in \tilde{\mathcal{F}}_h, \forall f \in \mathcal{F}_h, \text{ soit } g \cap f = \emptyset,$
soit $g \subset f$

Fig. 1.3 Example of a matching simplicial submesh (dashed lines) of the non-conforming mesh in Fig. 1.1b





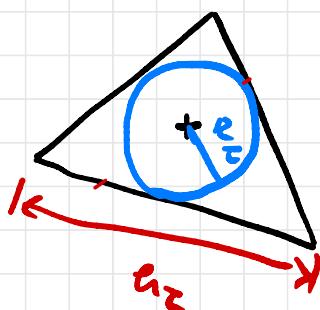
Définition (Famille de mailles par régularité)

Soit $\mathcal{H} \subset (0, +\infty)$ dénombrable ayant 0 comme unique point d'accumulation. Une famille $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}} = ((\tilde{\gamma}_h, \tilde{\tau}_h))_{h \in \mathcal{H}}$ est dite **RÉGULIÈRE** s'il existe un réel $\varrho \in (0, 1)$ t.q. $\forall h \in \mathcal{H}$, il existe un sous-maille ^{conforme} simplicial $\tilde{\mathcal{M}}_h = (\tilde{\gamma}_h, \tilde{\tau}_h)$ de \mathcal{M}_h qui vérifie les conditions suivantes :

1) **RÉGULARITÉ DE FORTE** : $\forall z \in \tilde{\gamma}_h$ de diamètre ρ_z , en notant r_z le rayon de la plus grande boule contenue dans z , on a :

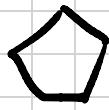
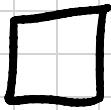
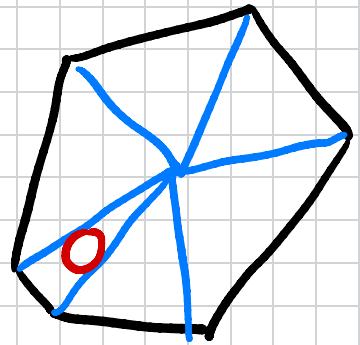
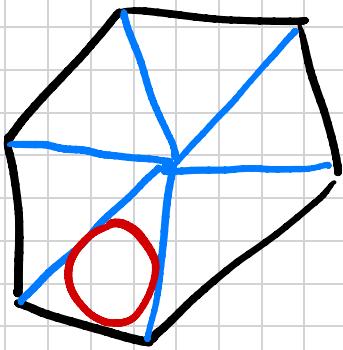
$$\varrho \rho_z \leq r_z$$

$$[r_z \leq \rho_z]$$



$$\frac{r_z}{\rho_z} \leq \frac{1}{\varrho}$$





...

2) RÉGULARITÉ DE CONTACT : $\forall \tau \in T_a, \quad$

$\forall \tau \in \tilde{T}_a, \quad \tau \subset T, \text{ on a } \exists$

$$\varrho_{\ell_{\tau}} \leq \ell_{\tau}.$$

$[\ell_{\tau} \leq \ell_T]$

Throughout this book, many geometric or functional estimates are written in terms of inequalities that hold up to a multiplicative quantity depending on some parameters and independent of others. We therefore write

" $A \lesssim B$ (resp. $A \gtrsim B$) with hidden constant depending only on $X, Y, \text{ etc.}$ "

to mean that there exists C depending only on $X, Y, \text{ etc.}$ such that $A \leq CB$ (resp. $A \geq CB$). Similarly,

" $A \lesssim B$ (resp. $A \gtrsim B$) with hidden constant independent of $X, Y, \text{ etc.}$ "

means that there exists C independent of $X, Y, \text{ etc.}$ such that $A \leq CB$ (resp. $A \geq CB$). The notation

$$A \simeq B$$

is used as a shorthand for $A \lesssim B$ and $B \lesssim A$, with the prescribed dependency of the hidden constants. Unless otherwise specified, when these notations are used inside the proof of a certain estimate, it is assumed that the dependency of the hidden constants is the same as for the estimate itself.

Dans les inégalités géométriques qui suivent, les constantes cachées peuvent dépendre uniquement de ϱ et de a .

$$A \leq -c B \quad (4)$$

$-c \in \mathbb{R}_+^*$ indépendant :

- ℓ
- si (1) est une inégalité locale sur $x \in T_h \cup T_g$, de X

Dans ce cas, on adopte la notation abrégée

$$A \leq B$$

En pratique, c dépendra dans la plupart des cas de

- ρ (paramètre de régularité du maillage)
- k (degré du schéma)
- Ω (domaine)
- d (dimension d'espace)

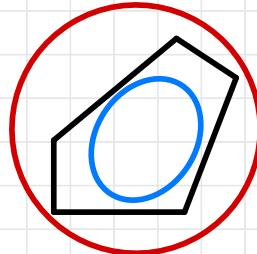
Inégalités géométriques pour des suites de maillages polytopaux réguliers

(\mathcal{M}_h) $_{h \in \mathcal{H}}$ suite de maillages réguliers

ϱ paramètre de régularité

B_m boule unitaire de \mathbb{R}^m

$|B_m|$ se mesure



a) Barre menière uniforme sur le volume des faces

d'un élément : $\exists N_d \in \mathbb{N}, N_d \geq d+1,$

dépendant uniquement de d et de ϱ .

$$\sup_{h \in \mathcal{H}} \left(\max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{cond}(\mathcal{F}_T) \right) \leq N_d$$

$$[\sup_{h \in \mathcal{H}} \left(\max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{cond}(\mathcal{F}_T) \right) \lesssim 1]$$



2) Comparaison des diamètres d'un élément et sa surface: $\forall h \in \mathcal{H}, \forall T \in \mathcal{T}_h,$

$\forall F \in \mathcal{F}_T$ (avec $\mathcal{F}_T := \{F \in \mathcal{F}_h : F \subset \partial T\}$) on a

$$2g^2 l_T \leq l_F \leq l_T$$

Remarque : $l_T \approx l_F \approx e_T$ [$e_F \approx e_T$]

3) Comparaison des diamètres et mesures d'un élément et d'une face: $\forall h \in \mathcal{H}, \forall T \in \mathcal{T}_h$

$$(18d|g^{2d}|)^{\frac{d}{d-1}} e_T^{\frac{d}{d-1}} \leq |T| \leq (18d|g^{2d}|)^{\frac{d}{d-1}} e_T^{\frac{d}{d-1}}$$

Remarque : $e_T^{\frac{d}{d-1}} \approx |T| \approx e_T^{\frac{d}{d-1}}$ [$|T| \approx e_T^{\frac{d}{d-1}}$]

De plus, pour toute $F \in \mathcal{F}_h$,

$$(18d-1|g|^{2(d-1)})^{\frac{d}{d-1}} e_F^{\frac{d-1}{d}} \leq |F| \leq (18d-1|g|^{2(d-1)})^{\frac{d}{d-1}} e_F^{\frac{d-1}{d}}$$

[$|F| \approx e_F^{\frac{d-1}{d}} = e_T^{\frac{d-1}{d}}$]

$A \approx B := "A \leq B \text{ et } B \leq A"$