Espaces de fonctions

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné.

On considère des fonctions $v : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-mesurables et on note $\int_X v$ leur intégrale. On définit

$$\boxed{\|v\|_{L^2(X)} := \left(\int_X |v|^2 \right)^{1/2}}$$

$$L^2(X) := \left\{ v : X \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue-mesurable} : \|v\|_{L^2(X)} < +\infty \right\}$$

- $L^2(X)$ est un espace de Banach et $C_c^\infty(X)$ est dense dans $L^2(X)$

Notation

$\forall v, w \in L^2(X)$, $\boxed{(v, w)_X := \int_X v w}$

(produit scalaire dans $L^2(X)$)

Si $X = \Omega$, on écrit simplement $\boxed{(v, w)}$

De plus, on pose $\boxed{\|v\|_X := \|v\|_{L^2(X)}}$

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(X)$:

$$\boxed{\forall v, w \in L^2(X), \quad \int_X |vw| \leq \|v\|_X \, \|w\|_X}$$

Soit $v : X \to \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrable et posons :

$$\|v\|_{L^\infty(X)} := \inf \{ M \in \mathbb{R} : |v(x)| \leq M \text{ pour presque tout } x \in X \}$$

$$L^\infty(X) := \{ v : X \to \mathbb{R} \text{ Lebesgue-mesurable} : \|v\|_{L^\infty(X)} < +\infty \}$$

Inégalité de Hölder généralisée avec exposants $(+\infty, 2, 2)$

$$\boxed{\forall (v, w, z) \in L^\infty(X) \times L^2(X) \times L^2(X), \quad \int_X |vwz| \leq \|v\|_{L^\infty(X)} \|w\|_{L^2(X)} \|z\|_{L^2(X)}}$$

Remarque : pour $v = 1_X$, alors on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Espaces de Hilbert

$\mathbb{R}^n$ avec système de coordonnées cartésiens $(x_1, \dots, x_n)$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$ on note ∂_i la dérivée partielle au sens des distributions par rapport à x_i. Pour tout

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

on pose

$$\partial^{\vec{\alpha}} := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$$

avec $\partial_i^{\alpha_i}$:= dérivée partielle α_i-ème par rapport à x_i et

$$\boxed{\|\vec{\alpha}\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|}$$

P.E.
$\|(1,2,3)\|_1 = 6$

Pour tout entier $s \geq 0$, on introduit l'ESPACE DE HILBERT

$$\boxed{H^s(X) := \{ v \in L^2(X) : \partial^{\vec{\alpha}} v \in L^2(X) \quad \forall \vec{\alpha} \in A_n^s \}}$$

avec $A_n^s := \{ \vec{\alpha} \in \mathbb{N}^n : \|\alpha\|_1 \leq s \}$.

Remarque : $H^0(X) := L^2(X)$

$$\|v\|_{H^s(X)} := \sum_{\vec{\alpha} \in A_m^s} \|\partial^{\vec{\alpha}} v\|_{L^2(X)}$$

$$|v|_{H^s(X)} := \sum_{\vec{\alpha} \in \mathbb{N}^m,\ \|\vec{\alpha}\|_1 = s} \|\partial^{\vec{\alpha}} v\|_{L^2(X)}$$

$\forall v, w \in H^s(X)$,

$$(v, w)_{H^s(X)} := \sum_{\vec{\alpha} \in A_m^s} (\partial^{\vec{\alpha}} v, \partial^{\vec{\alpha}} w)_X$$

Remarque : $\|\cdot\|_{H^s(X)}$ n'est pas la norme induite par le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^s(X)}$!!

L'opérateur de **GRADIENT**

$$\nabla : H^1(X) \longrightarrow L^2(X)^m$$

est t.q.

$\forall v \in H^1(X)$, $\quad \nabla v := \begin{pmatrix} \partial_1 v \\ \vdots \\ \partial_m v \end{pmatrix}$

$$\boxed{H_0^s(X) := \text{fermeture de } C_c^\infty(X) \text{ dans } H^s(X)}$$

L'espace H(div)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ domaine

$$H(\text{div};\Omega) := \Big\{ \vec{\tau} := (\tau_1, \dots, \tau_d) \in L^2(\Omega)^d : \underbrace{\sum_{i=1}^d \partial_i \tau_i}_{=: \nabla\cdot\vec{\tau}} \in L^2(\Omega) \Big\}$$

(divergence de $\vec{\tau}$)

P.E. $d=3$

$$\underbrace{\partial_1\tau_1 + \partial_2\tau_2 + \partial_3\tau_3}_{=: \text{div}\,\vec{\tau} = \nabla\cdot\vec{\tau}} \in L^2(\Omega)$$

Remarque :

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega \qquad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad (2)$$

$$\Delta u := \partial_1^2 u + \dots + \partial_d^2 u = \nabla\cdot(\nabla u)$$

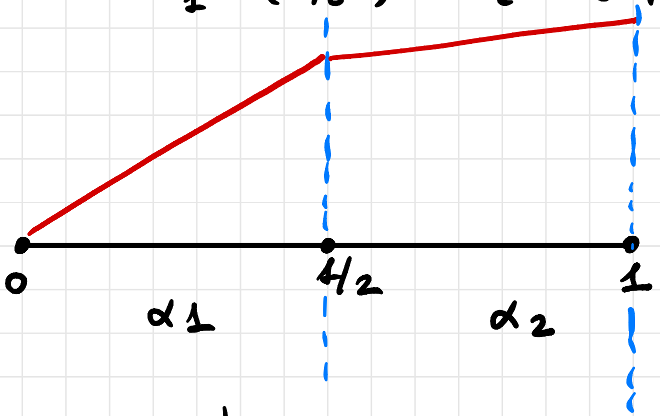
Si $f \in L^2(\Omega)$, alors $(1) \Rightarrow \nabla\cdot(-\nabla u) \in L^2(\Omega)$.

Définissant le FLUX $\Phi := -\nabla u$, on a

$$\Phi \in H(\text{div};\Omega).$$

Comme on le verra, ceci implique que la composante normale de Φ est continue à travers les interfaces (CONTINUITÉ DU FLUX NORMAL)

$\alpha_1 u'(1/2^-) = \alpha_2 u'(1/2^+) \leftarrow$ égalité du flux



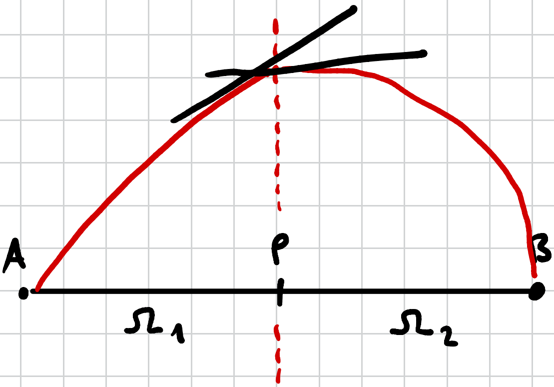
$$-(\alpha u')' = f \quad \text{dans } (0,1)$$

$$u(0) = u(1) = 0$$

$$\alpha_1 < \alpha_2$$

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

$$\kappa_1 << \kappa_2$$



$$-(\kappa u')' = f \qquad \text{dans } \Omega \setminus \{P\}$$

$$u = 0 \qquad \text{en } A \text{ et } B$$

$$-\kappa_1 u_1' + \kappa_2 u_2'' = 0 \qquad u_i := u|\Omega_i$$

Espaces de Hilbert brisés

Soit $\mathcal{M}_h$ un maillage de Ω. Soit $s \in \mathbb{N}$ un entier. On pose

$$\boxed{H^s(\mathcal{T}_h) := \left\{ v \in L^2(\Omega) : v_{|T} \in H^s(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}}$$

$\forall v \in H^s(\mathcal{T}_h)$,

$$\|v\|_{H^s(\mathcal{T}_h)} := \sum_{\vec{\alpha} \in A^s_m} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\partial^{\vec{\alpha}} v\|^2_{L^2(T)} \right)^{1/2}$$

$$|v|_{H^s(\mathcal{T}_h)} := \sum_{\vec{\alpha} \in \mathbb{N}^m, \|\vec{\alpha}\|_1 = s} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\partial^{\vec{\alpha}} v\|^2_{L^2(T)} \right)^{1/2}$$

Gradient et divergence brisés

$\forall v \in H^1(\mathcal{T}_h)$, $\quad \nabla_h v \in L^2(\Omega)^d$ t.q.

$$\boxed{(\nabla_h v)_{|T} := \nabla v_{|T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h}$$

Soit, maintenant,

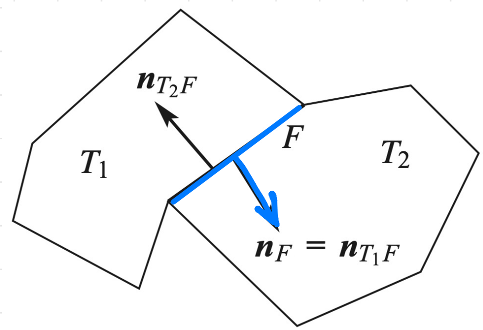
$$\boxed{H(\mathrm{div}\,; \mathcal{T}_h) := \left\{ \tau \in L^2(\Omega)^d : \tau_{|T} \in H(\mathrm{div}\,; T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}}$$

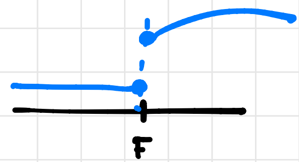
$\forall \tau \in H(\mathrm{div}; \mathcal{T}_h)$, $\nabla_h \cdot \tau \in L^2(\Omega)^d$ est t.q.

$$\boxed{(\nabla_h \cdot \tau)_{|T} := \nabla \cdot \tau_{|T} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h}$$

Pour toute $F \in \mathcal{F}_h^i$ t.q. $F \subset \partial T_1 \cap \partial T_2$

$n_F = n_{T_1F} = -n_{T_2F}$





et toute fonction v admettant une trace de chaque côté de F, (p.e., $v \in H^1(\mathcal{T}_h)$)

$$\boxed{[v]_F := (v_{|T_1})_{|F} - (v_{|T_2})_{|F}}$$

Lemme (Caractérisation de $H(\mathrm{div};\Omega)$)

Soit $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in H^1(\mathcal{T}_h)^d$. Alors,

$$\boxed{\tau \in H(\mathrm{div};\Omega) \iff \underbrace{[\tau]_F \cdot n_F = 0}_{\tau_{|T_1} \cdot n_{T_1F} + \tau_{|T_2} \cdot n_{T_2F} = 0} \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i}$$

Corollaire (Élimination des termes de bord)

Soit $\tau \in H(\mathrm{div};\Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$ et $(\varphi_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ une famille de fonctions t.q. $\varphi_F \in L^2(F)$ $\forall F \in \mathcal{F}_h$.

Alors,

$$\boxed{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau_{|T} \cdot n_{TF}) \varphi_F = \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\tau \cdot n_F) \varphi_F .}$$

Démonstration

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau_{|T} \cdot n_{TF}) \varphi_F$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \int_F (\tau_{|T} \cdot n_{TF}) \varphi_F$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \int_F (\tau_{|T} \, n_{TF}) \varphi_F$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b,\, F \subset \partial T} \int_F (\tau_{|T} \cdot n_F) \varphi_F$$

$F \in \mathcal{F}_h^i$, $\mathcal{T}_F = \{T_1, T_2\}$, $n_F = n_{T_1 F}$

$$\int_F (\tau_{|T_1} \cdot n_F) \varphi_F - (\tau_{|T_2} \cdot n_F) \varphi_F$$

$$= \int_F [\tau]_F \cdot n_F \, \varphi_F = 0$$

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} \int_F \cancel{[\tau]_F} \cdot n_F \, \varphi_F + \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\tau \cdot n_F) \varphi_F$$

$\to 0$

(régularité de τ)

$$= \sum_{F \in \mathcal{F}_h^b} \int_F (\tau \cdot n_F) \varphi_F \qquad \square$$

Lemme (Charactérisation de $H^1(\Omega)$)

$$\boxed{\forall v \in H^1(\mathcal{T}_h), \quad \left(v \in H^1(\Omega) \Leftrightarrow [v]_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^i \right)}$$

Preuve laissée en exercice

$$A_n^e := \{ \alpha \in \mathbb{N}^n : \|\alpha\|_1 \leq e \}$$

Espaces de polynômes

Soient $n \geq 0$ et $e \geq 0$ deux entiers et posons :

$$\boxed{N_n^e := \text{card}(A_n^e) = \binom{n+e}{n} = \frac{(n+e)!}{n! \; e!}}$$

n = nombre de variables

e = degré total des polynômes

L'espace des polynômes de n variables et de **DEGRÉ TOTAL $\leq e$** est

$$\boxed{\mathbb{P}_n^e := \left\{ p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \exists \, (p_{\vec{\alpha}})_{\vec{\alpha} \in A_n^e} \in \mathbb{R}^{N_n^e} \text{ t.q. } p(x) = \sum_{\vec{\alpha} \in A_n^e} p_{\vec{\alpha}} \, x^{\vec{\alpha}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \right\}}$$

avec $x^{\vec{\alpha}} := x_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n}$. $\quad \mathbb{P}^{-1} := \{0\}$

Exemple $\forall x \in \mathbb{R}^3$, ← $n=3$

$$p(x) = 3x_1^2 x_2 + 4x_3^5 x_1 x_2 + 5x_3^6 \in \mathbb{P}_3^7 \subset \mathbb{P}_3^8 \subset \mathbb{P}_3^9 \subset \cdots$$

Proposition (Dimension de $\mathbb{P}_n^e$)

$$\boxed{\dim(\mathbb{P}_n^e) = N_n^e .}$$

Définition (Espaces de polynômes locaux)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, ouvert convexe, et $e \geqslant 0$ un entier. L'**ESPACE DE POLYNÔMES LOCAL** **$\mathbb{P}^e(X)$** est formé par la restriction à X des fonctions de $\mathbb{P}_n^e$.

(en pratique, soit $X \in \mathcal{T}_h$, soit $X \in \mathcal{F}_h$)

Exemples

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine et $\mathcal{M}_h$ un maillage polytopale. Les méthodes HHO sont basées sur les espaces locaux suivants:

- $T \in \mathcal{T}_h$, $\quad \mathbb{P}^e(T)$ =: restriction de $\mathbb{P}_d^e$ à T
- $F \in \mathcal{F}_h$, $\quad \mathbb{P}^e(F)$ =: " " " $\mathbb{P}_d^e$ à F

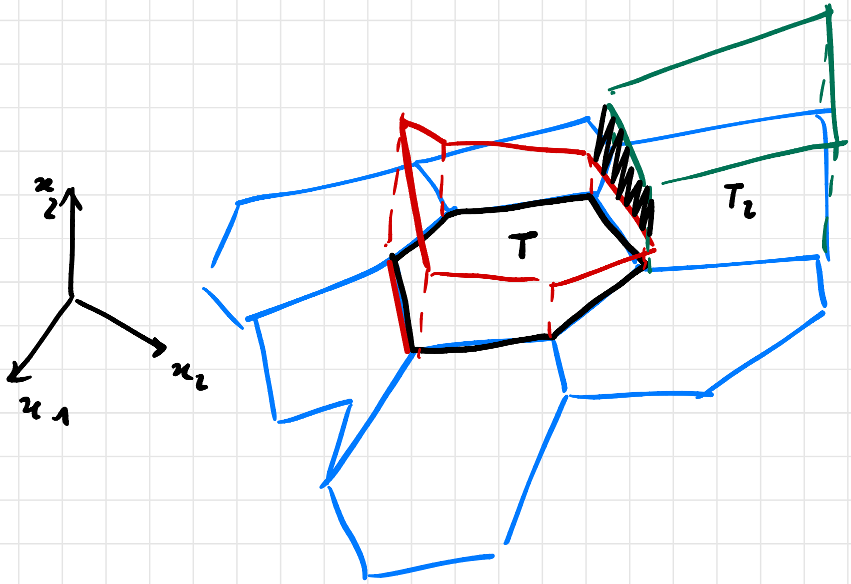
Proposition (Dimension des espaces locaux)

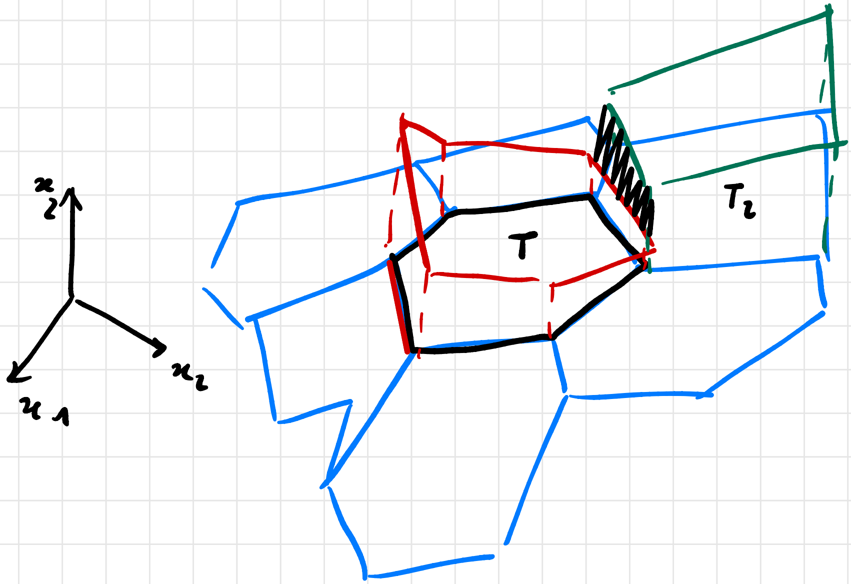
$$\dim(\mathbb{P}^e(T)) = N_d^e \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

$$\dim(\mathbb{P}^e(F)) = N_{d-1}^e \qquad \forall F \in \mathcal{F}_h$$

Définition (Espaces de polynômes brisés)

$$\boxed{\mathbb{P}^e(\mathcal{T}_h) := \left\{ v_h \in L^2(\Omega) : (v_h)_{|T} \in \mathbb{P}^e(T) \ \forall T \in \mathcal{T}_h \right\}.}$$


x_3
x_2
x_1
T
T_2



x_3
x_2
x_1
T
T_2