Strang 3

Pour le problème continu :

- un espace de Hilbert U
- une forme bilinéaire continue $a : U \times U \to \mathbb{R}$
- une forme linéaire continue $\ell : U \to \mathbb{R}$

(Π) Trouver $u \in U$ t.q. $a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in U$

Pour le problème discret :

- un espace U_h avec norme $\|\cdot\|_{U_h}$
- un INTERPOLATEUR $I_h : U \to U_h$
- une forme bilinéaire $a_h : U_h \times U_h \to \mathbb{R}$
- une forme linéaire $\ell_h : U_h \to \mathbb{R}$

(Π_h) Trouver $u_h \in U_h$ t.q. $a_h(u_h, v_h) = \ell_h(v_h) \; \forall v_h \in U_h$

U_h n'est pas forcément un espace de fonctions et il n'existe pas forcément un espace où à la fois U et U_h s'injectent

Définition (stabilité inf-sup)

La forme bilinéaire a_e est inf-sup stable pour la norme $\|\cdot\|_{V_e}$ si :

$$\exists \gamma > 0 \quad \text{t.q.} \quad \sup_{v_e \in V_e \setminus \{0\}} \frac{a_e(w_e, v_e)}{\|v_e\|_{V_e}} \geq \gamma \|w_e\|_{V_e} \quad \forall w_e \in V_e. \qquad (*)$$

Remarque a_e coercive $\Rightarrow$ a_e inf-sup stable

Soit $u_e \in V_e$. Alors, si a_e est coercive avec constante de coercivité γ, on a que :

$$\gamma \|u_e\|^2_{V_e} \leq a_e(u_e, u_e) = \left(a_e\left(u_e, \frac{u_e}{\|u_e\|_{V_e}}\right) \right) \|u_e\|_{V_e}$$

$$\leq \left(\sup_{v_e \in V_e \setminus \{0\}} \frac{a_e(u_e, v_e)}{\|v_e\|_{V_e}} \right) \|u_e\|_{V_e}$$

La conclusion s'ensuit en simplifiant par $\|u_e\|_{V_e}$.

DARCY

$$\sigma = -\nabla u \quad \text{dans } \Omega$$
$$\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{dans } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

On peut écrire une formulation faible avec

$$\sigma \in H(\mathrm{div}; \Omega)$$
$$u \in L^2(\Omega)$$

formulation MIXTE

inf - sup

POISSON

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

La formulation faible standard cherche

$$u \in H_0^1(\Omega)$$

formulation PRIMALE

coercivité

Remarque

$$\forall u_e \in U_e \setminus \{0\}, \quad \sup_{v_e \in U_e \setminus \{0\}} \frac{a_e(u_e, v_e)}{\|u_e\|_{U_e} \|v_e\|_{U_e}} \geq \gamma$$

$$\Leftrightarrow \quad \inf_{u_e \in U_e \setminus \{0\}} \sup_{v_e \in U_e \setminus \{0\}} \frac{a_e(u_e, v_e)}{\|u_e\|_{U_e} \|v_e\|_{U_e}} \geq \gamma$$

d'où le nom de condition "inf-sup".

Norme duale Si Z est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_Z$, la norme duale d'une forme linéaire $\mu : Z \to \mathbb{R}$ est donnée par :

$$\|\mu\|_{Z^*} := \sup_{z \in Z \setminus \{0\}} \frac{|\mu(z)|}{\|z\|_Z}$$

Proposition

Si a_h est inf-sup stable et si $m_h : U_h \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire, alors, si $w_h \in U_h$ est t.q.

$$a_h(w_h, v_h) = m_h(v_h) \qquad \forall v_h \in U_h$$

on a l'estimation

$$\|w_h\|_{U_h} \leq \gamma^{-1} \|m_h\|_{U_h^*}.$$

Preuve laissée en exercice !

Remarque On utilisera ce résultat deux fois :

- avec $m_h = \ell_h$ pour obtenir une estimation a priori pour la solution $u_h \in U_h$ du (Π_h) :

$$\|u_h\|_{U_h} \leq \gamma^{-1} \|\ell_h\|_{U_h^*}$$

- avec m_h = erreur de consistance pour prouver une estimation d'erreur

Pour obtenir une estimation d'erreur on compare $u_h \in U_h$ avec $I_h u \in U_h$:

$$u_h - I_h u = \text{erreur de discrétisation}$$

Équation de l'erreur : $\forall v_h \in U_h$

$$a_h(u_h, v_h) - a_h(I_h u, v_h) = \ell_h(v_h) - a_h(I_h u, v_h)$$

$$\Rightarrow a_h(u_h - I_h u, v_h) = \varepsilon_h(u; v_h) \qquad (**)$$ ÉQUATION DE L'ERREUR

avec $\varepsilon_h(u; \cdot) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\forall v_h \in U_h$,

$$\varepsilon_h(u; v_h) = \ell_h(v_h) - a(I_h u, v_h)$$

On a donc immédiatement l'estimation d'erreur :

$$\boxed{\underbrace{\| u_h - I_h u \|_{U_h}}_{\text{erreur de discrétisation}} \leq \gamma^{-1} \underbrace{\| \varepsilon_h(u; \cdot) \|_{U_h^*}}_{\text{erreur de consistance}}}$$

STRANG 3

On a donc, en particulier : si, lorsque $h \to 0$,

$$\|u_h - I_h u\|_{V_h} \longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\varepsilon_h(u; \cdot)\|_{V_h^*} \longrightarrow 0$$

Définition On dit que (Π_h) est une approximation consistante de (Π) si

$$\|\varepsilon_h(u; \cdot)\|_{V_h^*} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \to 0.$$

Remarque (quasi-optimalité de l'estimation d'erreur)

Supposons (comme c'est le cas d'habitude) M soit indépendant de h et on pose

$$\|a_h\|_{V_h \times V_h} := \sup_{w_h, v_h \in V_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(w_h, v_h)}{\|w_h\|_{V_h} \|v_h\|_{V_h}}$$

(**) $\Rightarrow$ $$\boxed{\|\varepsilon_h(u; \cdot)\|_{V_h^*} \leq \|a_h\|_{V_h \times V_h} \|u_h - I_h u\|_{V_h}}$$

$$\|a_h\|^{-1}_{U_h\times U_h}\ \|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{U_h^*} \le \|u_h - I_h u\|_{U_h} \le \gamma^{-1}\ \|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{U_h^*}$$

Si ni γ ni $\|a_h\|_{U_h\times U_h}$ dépendent de h, l'estimation est QUASI-OPTIMALE (c.-à-d., les quantités $\|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{U_h^*}$ et $\|u_h - I_h u\|_{U_h}$ tendent vers 0 "à la même vitesse" lorsque $h\to 0$)

1) STABILITÉ (inf-sup sur a_h) $\rightsquigarrow$ estimation d'erreur

2) CONSISTANCE ($\|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{U_h^*}\to 0$ lorsque $h\to 0$)
$\rightsquigarrow$ convergence de la solution $u_h\in U_h$ de (Π_h)

3) CONTINUITÉ UNIFORME EN h DE a_h
$\rightsquigarrow$ quasi-optimalité de l'estimation d'erreur

(Principe de Lax :

stabilité $\Rightarrow$ (consistance $\Leftrightarrow$ convergence))

Exemple (Méthode EF)

$H^1_0(\Omega) \ni v \mapsto \left(\|v\|^2_{L^2(\Omega)} + h_\Omega^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d} \right)^{1/2} \in \mathbb{R}$

Problème de Poisson sur Ω domaine de $\mathbb{R}^d$

- $U = H_0^1(\Omega)$ équipé avec la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$
- $a : U \times U \ni (w, v) \longmapsto a(w,v) := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \in \mathbb{R}$
- $\ell : U \ni v \longmapsto \int_\Omega f v \in \mathbb{R}$

Discrétisation EF :

- $\mathcal{T}_h$ maillage simplicial conforme de Ω
- $U_h^k := \{ v \in H_0^1(\Omega) : v_{|T} \in \mathbb{P}_d^k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}$

  où $k \geq 1$ est un entier fixé

équipé avec la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$

- $I_h^k :=$ (quasi-)interpolateur au noeuds de Lagrange
- $a_h = a$
- $\ell_h = \ell$

$\left[\|u_h - I_h u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u_h - I_h u)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \right]^{1/2}$

$\|$

Strang 3 $\Rightarrow$ $\|u_h - I_h^k u\|_{H^1(\Omega)} \leq \gamma^{-1} \|\mathcal{E}_h^k(u;\cdot)\|_{U_h^*} \lesssim h^k$ $(*)$

inégalité avec constante multiplicative cachée C

$\mathcal{E}_h^k(u; v_h) := \int_\Omega f v_h - a(I_h^k u, v_h)$

si $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

C dépend de k, de la régularité du maillage, de $\|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$, de γ, mais pas de h

$$(*) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|u_h - I_h^k u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(u - I_h^k u)\|_{L^2(\Omega)^d} \lesssim h^k}$$

Si Ω est convexe, alors on peut prouver que

$$\|u_h - I_h^k u\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{k+1}$$

Ce résultat est prouvé avec la technique de Aubin-Nitsche. $\square$

Revenons maintenant au cadre abstrait

$$u \in U$$
$$\not\updownarrow$$
$$u_h \in U_h$$

$U_h \ni u_h - I_h u$ = erreur de discrétisation

Hypothèse U s'injecte de façon continue dans un espace de Banach L. Notons $\|\cdot\|_L$ la norme de cet espace. On suppose qu'il existe un OPÉRATEUR DE RECONSTRUCTION

$$r_h : U_h \longrightarrow L$$

Remarque Si r_h est continu (c.-à-d., s'il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q. $\|r_h v_h\|_L \leq C \|v_h\|_{U_h}$ $\forall v_h \in U_h$), alors nous avons que

continuité de r_h

$$\|r_h(u_h - I_h u)\|_L \leq C \|u_h - I_h u\|_{U_h}$$
$$\leq C\, \gamma^{-1} \|\mathcal{E}_h(u;\cdot)\|_{U_h^*}$$

estimation en norme $\|\cdot\|_{U_h}$

Cette estimation simple peut être sous-optimale !!

Technique de Aubin-Nitsche

$L^* :=$ espace des formes linéaires $L \to \mathbb{R}$

Pour $g \in L^*$, on considère le PROBLÈME DUAL :

$$\boxed{\text{Trouver } z_g \in U \text{ t.q. } \quad a(w, z_g) = g(w) \quad \forall w \in U.}$$

L' ERREUR DE CONSISTANCE DUALE est $\mathcal{E}_h^d(z_g; \cdot) : U_h \to \mathbb{R}$

t.q. $\forall v_h \in U_h$,

$$\mathcal{E}_h^d(z_g; v_h) := g(r_h(v_h)) - a_h(v_h, I_h z_g)$$

Définition

$\forall g \in L^*$, $\quad \|g\|_{L^*} := \sup\limits_{w \in L \setminus \{0\}} \dfrac{g(w)}{\|w\|_L}$

Lemme (Aubin-Nitsche)

Supposons que le problème dual admette une solution z_g pour tout $g \in L^*$. Soit

$$\boxed{B_{L^*} := \{ g \in L^* : \|g\|_{L^*} \leq 1 \}.}$$

Soient $u \in U$ et $u_h \in U_h$ solutions de (Π) et (Π_h), respectivement. Alors,

$$\boxed{\begin{aligned} \|r_h(u_h - I_h u)\|_L \leq \|u_h - I_h u\|_{U_h} \sup_{g \in B_{L^*}} \|\varepsilon_h^{d}(z_g; \cdot)\|_{U_h^*} \\ + \sup_{g \in B_{L^*}} \varepsilon_h(u; I_h z_g). \end{aligned}}$$

Exercice A partir de ce résultat, déduire une estimation d'erreur en norme L^2 pour la méthode des EF de Lagrange appliquée au problème de Poisson sur un domaine Ω convexe

<u>Dém.</u> Soit $g \in B_{L^*}$. On a $\forall w_e \in U_e$,

$$g(r_e(w_e)) = \underbrace{\mathcal{E}_e^d(z_g; w_e) + a_e(w_e, I_e z_g)}$$

$\llcorner$ déf. de $\mathcal{E}_e^d(z_g; \cdot)$

$w_e = u_e - I_e u$

$$g(r_e(u_e - I_e u)) = \mathcal{E}_e^d(z_g; u_e - I_e u) + \underbrace{a_e(u_e - I_e u, I_e z_g)}_{= \mathcal{E}_e(u; I_e z_g)}$$

$$\sup_{g \in B_{L^*}} \Rightarrow g(r_e(u_e - I_e u)) = \sup_{g \in B_{L^*}} \left[\mathcal{E}_e^d(z_g; u_e - I_e u) + \mathcal{E}_e(u; I_e z_g) \right]$$

On passe ensuite au sup pour $g \in B_{L^*}$

$$\boxed{\sup_{g \in B_{L^*}} g(r_e(u_e - I_e u)) = \|r_e(u_e - I_e u)\|_L}$$

$\ulcorner \forall w \in L, \|w\|_L = \sup_{g \in B_{L^*}} g(w)$ (Brézis) $\lrcorner$

$\hookrightarrow$ cf. cours d'Analyse Fonctionnelle

$$\Rightarrow \|r_h(u_h - I_h u)\|_L \leq \boxed{\sup_{g \in B_{L^*}} \mathcal{E}_h^d(z_g; u_h - I_h u)} + \sup_{g \in B_{L^*}} \mathcal{E}_h(u; I_h z_g)$$

déf. de la norme duale sur U_h^*

$$|\mathcal{E}_h^d(z_g; u_h - I_h u)| \leq \|u_h - I_h u\|_{U_h} \, \|\mathcal{E}_h^d(z_g; \cdot)\|_{U_h^*}$$

$$\Rightarrow \|r_h(u_h - I_h u)\|_L \leq \|u_h - I_h u\|_{U_h} \sup_{g \in B_{L^*}} \|\mathcal{E}_h^d(z_g; \cdot)\|_{U_h^*} + \underbrace{\sup_{g \in B_{L^*}} \mathcal{E}_h(u; I_h z_g)}_{\text{erreur primale-duale}} \qquad \square$$