Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(u, v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Soit $k \geq 0$ un entier et $\ell \in \{k-1, k, k+1\}$. On définit l'espace

$$\underline{U}_h^{k,\ell} := \Big\{ \underline{v}_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) : \\
v_T \in \mathcal{P}^\ell(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \\
v_F \in \mathcal{P}^k(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \Big\}$$

Remarque La méthode que nous avons étudiée dans la première partie de ce cours correspond au choix $\ell = k-1$

- $l = k$ méthode HHO originaire [DP, Ern, Lemaire, 2014]
- $l = k+1$ méthode HDG Lehrenfeld–Schöberl

$\underline{U}_T^{k,l}$:= restriction à un élément $T \in \mathcal{T}_h$ de $\underline{U}_h^{k,l}$

On munit $\underline{U}_T^{k,l}$ de la semi-norme

$$\|\underline{v}_T\|_{1,T} := \left(\|\nabla v_T\|^2_{L^2(T)^d} + |\underline{v}_T|^2_{1,\partial T} \right)^{1/2},$$

$$|\underline{v}_T|_{1,\partial T} := \left(h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v_F - v_T\|^2_{L^2(F)} \right)^{1/2}$$

avec la convention

$$v_T := \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v_F \quad \text{si } l = -1$$

$$\underline{I}_T^{k,\ell} : H^1(T) \longrightarrow \underline{U}_T^{k,\ell}$$
$$v \longmapsto \left(\pi_T^{\ell} v, \; (\pi_F^{k} v)_{F \in \mathcal{F}_T} \right)$$

$\boxed{H}$ Si $k=0$, nous allons supposer par la suite que le centre de masse

$$\bar{x}_T := \frac{1}{|T|} \int_T x$$

appartient à l'enveloppe convexe de $\{ \bar{x}_F : F \in \mathcal{F}_T \}$, où, comme dans la première partie du cours,

$$\bar{x}_F := \frac{1}{|F|} \int_F x \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T.$$

<u>Remarque</u> Sous cette hypothèse, nous avons que

$$(x - \bar{x}_T) \cdot n_{TF} = d_{TF} \geq 0 \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T$$

avec $d_{TF} = \mathrm{dist}(\bar{x}_T, H_F)$ où H_F est l'hyperplan contenant F

Exercice Trouver un polygone pour lequel $\boxed{H}$ n'est pas vérifiée

$\boxed{L}$ Continuité de l'interpolateur

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, on a
$$\| I_T^{k,\ell} v \|_{1,T} \lesssim \| \nabla v \|_{L^2(T)^d} \qquad \forall v \in H^1(T).$$

Dém. Nous avons, par définition,
$$\| I_T^{k,\ell} v \|_{1,T}^2 = \underbrace{\| \nabla \pi_T^{\ell} v \|_{L^2(T)^d}^2}_{\mathfrak{T}_1} + \underbrace{h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \| \pi_F^k v - \hat{v}_T \|_{L^2(F)}^2}_{\mathfrak{T}_2}$$

avec
$$\hat{v}_T = \begin{cases} \pi_T^{\ell} v & \text{si } \ell \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{|T|} \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \dfrac{d_{TF}}{d} \int_F \cancel{\pi_F^k} v & \text{si } \ell = -1 \end{cases}$$

- $\|\nabla \pi_T^e v\|_{L^2(T)^d} = |\pi_T^e v|_{H^1(T)} \le \underbrace{|\pi_T^e v - v|_{H^1(T)}}_{\lesssim |v|_{H^1(T)} \text{ (propriétés d'approximation de } \pi_T^e)} + |v|_{H^1(T)}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{T}_1 \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(T)}$$

- Pour estimer $\mathcal{T}_2$ on distingue 2 cas : $e \geq 0$ et $e = -1$

<u>* $e \geq 0$</u>

$$\|\pi_F^k v - \pi_T^e v\|_{L^2(F)} \le \|\pi_F^k v - \pi_F^k \pi_T^k v\|_{L^2(F)} + \|\pi_T^k v - \pi_T^e v\|_{L^2(F)}$$
$$=: \quad \mathcal{A} \quad + \quad \mathcal{B}$$

idempotence + linéarité de π_F^k

$$\mathcal{A} = \| \pi_F^k (v - \pi_T^k v) \|_{L^2(F)}$$

$$\leq \| v - \pi_T^k v \|_{L^2(F)}$$

inégalité de trace

$$\lesssim h_T^{-1/2} \underbrace{\| v - \pi_T^k v \|_{L^2(T)}}_{\lesssim h_T |v|_{H^1(T)}} + h_T^{1/2} | v - \pi_T^k v |_{H^1(T)}$$

propriétés d'approximation de π_T^k

$$\lesssim h_T^{1/2} | v |_{H^1(T)} = h_T^{1/2} \| \nabla v \|_{L^2(T)^d}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{A} \lesssim h_T^{1/2} \| \nabla v \|_{L^2(T)^d}$$

$$\mathfrak{B} = \| \pi_T^k v - \pi_T^\ell v \|_{L^2(F)}$$

$$\lesssim h_T^{-1/2} \| \pi_T^k v - \pi_T^\ell v \|_{L^2(T)}$$ inégalité de trace discrète

$$\lesssim h_T^{1/2} \| \nabla v \|_{L^2(T)^d}$$

On écrit

inégalité triangulaire, $\pi_T^k \circ \pi_T^0 = \pi_T^0$ et $\pi_T^\ell \circ \pi_T^0 = \pi_T^0$ (idempotence, $k \geq 0$, $\ell \geq 0$)

$$\| \pi_T^k v - \pi_T^\ell v \|_{L^2(T)} \leq \| \pi_T^k (v - \pi_T^0 v) \|_{L^2(T)} + \| \pi_T^\ell (v - \pi_T^0 v) \|_{L^2(T)}$$

$$\leq 2 \| v - \pi_T^0 v \|_{L^2(T)}$$ continuité de π_T^k, π_T^ℓ

$$\lesssim h_T \| \nabla v \|_{L^2(T)^d}$$ propriétés d'approximation de π_T^0

$$\Rightarrow \|\pi_F^k v - \pi_T^\ell v\|_{L^2(F)} \le \mathcal{A} + \mathcal{B} \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(T)^d} \qquad (1)$$

$$\mathfrak{b}_2 = h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\pi_F^k v - \pi_T^\ell v\|^2_{L^2(F)}$$

$$\overset{(1)}{\lesssim} h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_T \|\nabla v\|^2_{L^2(T)^d}$$

$$\lesssim \|\nabla v\|^2_{L^2(T)^d} \qquad \text{card}(\mathcal{F}_T) \lesssim 1$$

Ceci conclut la preuve dans le cas $\ell \geq 0$

* $\ell = -1$

$$\| \pi_F^0 v - \hat{v}_T \|_{L^2(F)} \overset{\text{idempotence, linéarité de } \pi_F^0}{=} \| \pi_F^0 (v - \hat{v}_T) \|_{L^2(F)}$$

$$\leq \| v - \hat{v}_T \|_{L^2(F)} \qquad \text{continuité } \pi_F^0$$

$$\lesssim h_T^{-1/2} \underbrace{\| v - \hat{v}_T \|_{L^2(T)}}_{\mathcal{A}} + h_T^{1/2} \| \nabla v \|_{L^2(T)^d} \qquad \text{inégalité de trace, } \hat{v}_T \in \mathbb{P}^0(T)$$

Pour estimer $\mathcal{A}$, on peut commencer par remarquer que

$$\pi_T^0 v = \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F \pi_T^0 v \qquad (2)$$

$$\mathcal{A} \underset{\text{(2), inégalité triangulaire, définition de } \hat{v}_T \text{ pour } \ell = -1}{\leq} \underbrace{\| v - \pi_T^0 v \|_{L^2(T)}}_{\mathcal{A}_1} + \underbrace{\left\| \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F (v - \pi_T^0 v) \right\|_{L^2(T)}}_{\mathcal{A}_2}$$

$$\mathcal{A}_1 \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)^d}$$ propriétés d'approximation de π_T^0

$$\mathcal{A}_2^2 = \int_T \left| \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F (v - \pi_T^0 v) \right|^2$$

$$= \frac{1}{|T|} \left| \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \underbrace{\int_F (v - \pi_T^0 v)}_{\leq \|v - \pi_T^0 v\|_{L^2(F)} |F|^{1/2}} \right|^2$$

Cauchy-Schwarz

$$\leq \frac{1}{|T|} \left| \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \left(\frac{d_{TF}|F|}{d}\right)^{1/2} \left(\frac{d_{TF}}{d}\right)^{1/2} \|v - \pi_T^0 v\|_{L^2(F)} \right|^2$$

$$\overset{C-S}{\leq} \underbrace{\frac{1}{|T|} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}|F|}{d} \right)}_{1} \times \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \underbrace{\frac{d_{TF}}{d}}_{\lesssim h_T} \underbrace{\|v - \pi_T^0 v\|_{L^2(F)}^2}_{\lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2} \right)$$

$\Rightarrow \mathcal{A}_2 \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)^d}$

Donc $\mathcal{A} \lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)^d}$ et

$$\|\pi_F^k v - \hat{v}_T\|_{L^2(F)} \lesssim h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(T)^d} \qquad (3)$$

$$\|\underline{I}_T^{k,\ell} v\|_{1,T}^2 = h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\pi_F^k v - \hat{v}_T\|_{L^2(F)}^2$$

$$\overset{(3)}{\lesssim} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\nabla v\|_{L^2(T)^d}^2$$

$$\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(T)^d}^2 \qquad \mathrm{card}(\mathcal{F}_T) \lesssim 1$$

Ceci conclut la preuve dans le cas $\ell = -1$ $\square$

$$p_T^{k+1} : \underline{U}_T^{k,\ell} \longrightarrow \mathbb{P}^{k+1}(T)$$

$\forall \underline{v}_T \in \underline{U}_T^{k,\ell}$,

$$\int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla v_T \cdot \nabla w + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - v_T)(\nabla w \cdot n_{TF}) \quad \forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$$

$$\int_T p_T^{k+1} \underline{v}_T = \begin{cases} \int_T v_T & \text{si } \ell \geq 0 \\ \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \int_F v_F & \text{si } \ell = -1 \end{cases}$$

Exercice Montrer que

$$p_T^{k+1}(\underline{I}_T^{k,\ell} v) = \varpi_T^{k+1} v \qquad \forall v \in H^1(T).$$

$$
\begin{tikzcd}
H^1(T) \arrow[r, "\varpi_T^{k+1}"] \arrow[dr, "\underline{I}_T^{k,e}"'] & \mathcal{P}^{k+1}(T) \\
& \underline{U}_T^{k,e} \arrow[u, "p_T^{k+1}"']
\end{tikzcd}
$$

Donc, en particulier,

$$
p_T^{k+1}(\underline{I}_T^{k,e} w) = w \qquad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T)
$$

$$
\begin{aligned}
a_T : \underline{U}_T^{k,e} \times \underline{U}_T^{k,e} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(\underline{w}_T, \underline{v}_T) &\longmapsto \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T)
\end{aligned}
$$

$\boxed{H2}$ Stabilisation

Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $s_T : \underline{U}_T^{k,\ell} \times \underline{U}_T^{k,\ell} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive t.q.

(S1) Coercivité et continuité

$$\|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \cong a_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T) = \|\nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T\|_{L^2(T)^d}^2 + s_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T) \quad \forall \underline{v}_T \in \underline{U}_T^{k,\ell}$$

(S2) Consistance polynomiale

$$s_T(\underline{I}_T^{k,\ell} w, \underline{v}_T) = 0 \qquad \forall (w, \underline{v}_T) \in \mathcal{P}^{k+1}(T) \times \underline{U}_T^{k,\ell}$$

On va montrer que (S1) et (S2) imposent une forme bien précise pour s_T.

$$\underline{d}_T^{k,\ell} : \underline{U}_T^{k,\ell} \longrightarrow \underline{U}_T^{k,\ell}$$
$$\underline{v}_T \longmapsto \underline{v}_T - \underline{I}_T^{k,\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T$$

$$\underline{d}_T^{k,\ell} \underline{v}_T = \left(d_T^{\ell} \underline{v}_T, (d_{TF}^{k} \underline{v}_T)_{F \in \mathcal{F}_T} \right) \quad \text{avec}$$
$$d_T^{\ell} \underline{v}_T = v_T - \pi_T^{\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T$$
$$d_{TF}^{k} \underline{v}_T = v_F - \pi_F^{k} p_T^{k+1} \underline{v}_T \qquad \forall F \in \mathcal{F}_T$$

Par définition,
$$\underline{v}_T = \underline{I}_T^{k,\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T + \underline{d}_T^{k,\ell} \underline{v}_T,$$
ce qui montre que $\underline{d}_T^{k,\ell} \underline{v}_T$ contient la partie "non polynomiale" de $\underline{v}_T$ si on remarque que
$$\underline{d}_T^{k,\ell} \underline{I}_T^{k,\ell} w = 0 \qquad \forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T) \qquad (4)$$

Pour vérifier (4), on écrit, pour tout $w \in \mathcal{P}^{k+1}(T)$,

$$\underline{d}_T^{k,e}\, \underline{I}_T^{k,e} w = \underline{I}_T^{k,e} w - \underline{I}_T^{k,e}\big(\underbrace{p_T^{k+1}(\underline{I}_T^{k} w)}_{w}\big)$$

(consistance polynomiale de p_T^{k+1})

$$= \underline{I}_T^{k,e} w - \underline{I}_T^{k,e} w = 0$$

$\boxed{L}$ Structure du terme de stabilisation

s_T vérifie H2 ssi il existe une forme bilinéaire $\mathcal{S}_T : \underline{U}_T^{k,e} \times \underline{U}_T^{k,e} \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q.

(S1') $\quad s_T(\underline{v}_T, \underline{w}_T) = \mathcal{S}_T(\underline{d}_T^{k,e}\underline{v}_T, \underline{d}_T^{k,e}\underline{w}_T) \quad \forall (\underline{v}_T, \underline{w}_T) \in \underline{U}_T^{k,e} \times \underline{U}_T^{k,e}$

(S2') $\quad |\underline{v}_T|_{1,\partial T}^2 \lesssim \mathcal{S}_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T) \lesssim \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \quad \forall \underline{v}_T \in \underline{U}_T^{k,e}$

La preuve demande les résultats intermédiaires dans la proposition suivante.

$\boxed{P}$ Pour tout $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^{k,e}$,

$$\| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(T)^d} \lesssim \| \underline{v}_T \|_{1,T} \qquad (5)$$

$$\| \underline{d}_T^{k,e} \underline{v}_T \|_{1,T} \lesssim \| \underline{v}_T \|_{1,T} \qquad (6)$$

$$\| \underline{v}_T \|_{1,T} \lesssim \| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(T)^d} + | \underline{d}_T^{k,e} \underline{v}_T |_{1,\partial T} \qquad (7)$$

Dém. Par définition de p_T^{k+1}, on a : $\forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$,

$$\int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla v_T \cdot \nabla w + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - v_T)(\nabla w \cdot n_{TF})$$

On choisit $w = p_T^{k+1} \underline{v}_T$.

$$\|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|^{\cancel{2}\,1}_{L^2(T)^d} = \int_T \nabla v_T\cdot\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F (v_F - v_T)(\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\cdot n_{TF})$$

$$\leq \|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d}\,\cancel{\|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{L^2(T)^d}}\;1$$

Cauchy-Schwarz, (2,2,∞)-Hölder

$$+\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\|v_F - v_T\|_{L^2(F)}\underbrace{\|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{L^2(F)^d}}_{\lesssim\, h_T^{-1/2}\,\cancel{\|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{L^2(T)^d}}\;1}\underbrace{\|n_{TF}\|_{L^\infty(F)^d}}_{\leq 1}$$

(inégalité de trace discrète)

$$\Rightarrow \|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{L^2(T)^d} \leq \|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d} + h_T^{-1/2}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\|v_F - v_T\|_{L^2(F)}$$

$$\lesssim \left(\|\nabla v_T\|^2_{L^2(T)^d} + h_T^{-1}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\|v_F - v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}$$

$$= \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

$$\bullet\ \|\underline{d}_T^{k,\ell}\,\underline{v}_T\|_{1,T} \overset{\text{déf. } \underline{d}_T^{k,\ell}}{\overset{!}{=}} \|\underline{v}_T - \underline{I}_T^{k,\ell}\, p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{1,T}$$

$$\leq \|\underline{v}_T\|_{1,T} + \underline{\|\underline{I}_T^{k,\ell}\, p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{1,T}}$$

inégalité triangulaire

$$\bullet\ \underline{\|\underline{I}_T^{k,\ell}\, p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{1,T}} \lesssim \|\nabla p_T^{k+1}\underline{v}_T\|_{L^2(T)^d}$$

continuité de l'interpolateur

$$\overset{(S)}{\lesssim} \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

$$\Rightarrow \|\underline{d}_T^{k,\ell}\,\underline{v}_T\|_{1,T} \lesssim \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

Par définition de p_T^{k+1} : $\forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T)$,

$$\int_T \nabla v_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla w - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - v_T)(\nabla w \cdot n_{TF})$$

On choisit $w = v_T$ (on a le droit de le faire car $\ell \leq k+1$!).

$$\| \nabla v_T \|^2_{L^2(T)^d} = \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla v_T - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - v_T)(\nabla v_T \cdot n_{TF})$$

Exercice

$$\Rightarrow \| \nabla v_T \|_{L^2(T)^d} \lesssim \| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(T)^d} + \underline{| \underline{v}_T |_{1,\partial T}}$$

$$\underline{| \underline{v}_T |_{1,\partial T}} = | \underline{I}_T^{k,\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T + \underline{\delta}_T^{k,\ell} \underline{v}_T |_{1,\partial T}$$

$$\leq | \underline{I}_T^{k,\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T |_{1,\partial T} + | \underline{\delta}_T^{k,\ell} \underline{v}_T |_{1,\partial T} \quad \text{: inégalité triangulaire}$$

$$\leq \| \underline{I}_T^{k,\ell} p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,T} + | \underline{\delta}_T^{k,\ell} \underline{v}_T |_{1,\partial T} \quad \text{déf. de } \| \cdot \|_{1,T}$$

$$\lesssim \| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(T)^d} + | \underline{\delta}_T^{k,\ell} \underline{v}_T |_{1,\partial T} \quad \text{continuité de l'interpolateur}$$

En combinant les résultats précédents, on obtient

$$\|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d} \lesssim \|\nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T\|_{L^2(T)^d} + |\underline{d}_T^{k,e} \underline{v}_T|_{1,\partial T} \qquad \square$$