b) Dérivation de l'équation de Hamilton–Jacobi

Thm 4.5.2 : Soit u_0 Lipschitz. Alors $v(t,x)$ est une solution de viscosité de $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + H\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \text{ ds } \mathbb{R}. \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$

Lemme 4.5.3 (Lemme 1 p. 124 Evans)

$\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\forall\, 0 \le s < t$, $v(t,x) = \min \left\{ v(s,y) + (t-s) L\left(\dfrac{x-y}{t-s}\right) \right\}$

Il s'agit du principe de programmation dynamique.

Lemme 4.5.4 (Lemma 2 p. 126 Evans)

v est Lipschitz et $v(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Preuves ds le Evans : Essayez de les rédiger et de les comprendre

Preuve du théorème : La continuité de v résulte du Lemme 4.5.4

Montrons que v est une sous-solution. Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ qui touche u par dessus en (t_0, x_0). D'après le Lemme 4.5.3,

$$u(t_0,x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ u(t,x) + (t_0-t) L\left(\frac{x_0-x}{t_0-t}\right) \right\} \quad \forall\, 0 \le t < t_0.$$

Donc $u(t,x) - u(t_0,x_0) \le \varphi(t,x) - \varphi(t_0,x_0)$ pour $h = t - t_0$ et $x = x_0 + hv$ où $v \in \mathbb{R}^n$ qcq

$$(t_0-t) L\left(\frac{x_0-x}{t_0-t}\right) \le \varphi(t_0+h, x_0+hv) - \varphi(t_0,x_0)$$

$$\le \varphi(t_0+h, x_0+hv) - \varphi(t_0, x_0+hv) + \varphi(t_0, x_0+hv) - \varphi(t_0,x_0)$$

$$h L(v) \le \varphi(t_0+h, x_0+hv) - \varphi(t_0, x_0+hv) + \varphi(t_0,x_0+hv) - \varphi(t_0,x_0)$$

en divisant par h et $h \to 0^-$:

Or $H(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} \{ p q - L(q) \}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) + D\varphi(t_0, x_0) \cdot v - L(v) \leq 0$$

Ex le montrer
correc Evans

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x_0) + H(D\varphi(t_0, x_0)) \leq 0$$

$$\varphi(t_0 + h, x_0 + hv) - \varphi(t_0, x_0 + hv) = \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t_0, x_0 + hv) h + h \, \varepsilon(|h|, (x_0 + hv))$$

Exercice $\forall \varphi$ v est une sursol p. 604 Evans ⚠ différent des cas sous-sol