Une forme bilinéaire coercive

$$\underline{V}_h^k := \{ \underline{v}_h = ((v_T)_{T\in\mathcal{T}_h}, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_h}) :$$
$$v_T \in \mathbb{P}^{k-1}(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$
$$v_F \in \mathbb{P}^{k}(F) \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \}$$

Forme bilinéaire continue :

$$a(w, v) := \int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \qquad \forall (w, v) \in [H^1(\Omega)]^2$$

Forme bilinéaire pour la méthode de Crouzeix-Raviart

$$a_h(w_h, v_h) := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla w_h \cdot \nabla v_h \qquad \forall (w_h, v_h) \in CR(\mathcal{T}_h)^2$$

Forme bilinéaire HHO : $a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) := \sum_{T\in\mathcal{T}_h} a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \ \forall (\underline{w}_h, \underline{v}_h) \in [\underline{V}_h^k]^2$

$$a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T)$$

$$a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T)$$

$s_T : \underline{V}_T^k \times \underline{V}_T^k \longrightarrow \mathbb{R}$ symétrique

$\boxed{A1}$ Il existe $\eta > 0$ indépendant de h t.q.

$$\eta^{-1} \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \leq a_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T) \leq \eta \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \qquad \forall \underline{v}_T \in \underline{V}_T^k \qquad (1)$$

Remarque En sommant (1) sur $T \in \mathcal{T}_h$, on obtient

Poincaré discret pour H^1_0

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \lesssim \eta^{-1} \|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 \leq a_h(\underline{v}_h, \underline{v}_h) \leq \eta \|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k \qquad (1')$$

où $v_h \in \mathcal{P}^{k-1}(\mathcal{T}_h)$ est t.q. $(v_h)_{|T} := v_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$.

Exercice A partir de l'inégalité discrète pour H_0^1, prouver que $\|\cdot\|_{1,h}$ définit une norme sur $\underline{V}_{h,0}^k$.

Suggestion : • $\|\cdot\|_{1,h}$ est évidemment une semi-norme

• il suffit alors de montrer que :

$$\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k, \quad \|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0 \Rightarrow \underline{v}_h = \underline{0}$$

Trouver $\underline{u}_h \in \underline{V}^k_{h,0}$ t.q.

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \int_\Omega f \, v_h \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}^k_{h,0} \qquad (2)$$

Remarque

u sol. continue $\in H^1_0(\Omega)$

$\underline{u}_h$ sol. HHO $\in \underline{V}^k_{h,0}$

Par conséquent, l'écriture $u - \underline{u}_h$ n'a pas de sens !

$R\underline{u}_h \; - \; u \qquad H^1_0(\Omega) \qquad$ Éléments finis virtuels

$\uparrow \qquad\qquad \downarrow \underline{I}^k_h$

$\underline{u}_h \; - \; \underline{I}^k_h u \qquad \underline{V}^k_{h,0}(\mathcal{T}_h) \qquad$ Méthodes entièrement discrètes (HHO, DDR, ...)

Analyse d'erreur

On cherche à écrire une équation pour l'erreur

$$\underline{e}_h := \underline{u}_h - \underbrace{\underline{I}_h^k u}_{\hat{\underline{u}}_h}$$

(2) $\Rightarrow$ $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$,

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) - a_h(\hat{\underline{u}}_h, \underline{v}_h) = \int_\Omega f v_h - a_h(\hat{\underline{u}}_h, \underline{v}_h)$$

$$\Rightarrow a_h(\underbrace{\underline{u}_h - \hat{\underline{u}}_h}_{\underline{e}_h}, \underline{v}_h) = \underbrace{\int_\Omega \overset{-\Delta u}{\overset{\parallel}{f}} v_h - a_h(\hat{\underline{u}}_h, \underline{v}_h)}_{=: \mathcal{E}_h(u; \underline{v}_h)}$$

erreur de consistance

L'erreur est donc l'unique solution du problème : Trouver $\underline{e}_h \in \underline{V}^k_{h,0}$ t.q.

$$a_h(\underline{e}_h, \underline{v}_h) = \mathcal{E}_h(u; \underline{v}_h) \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}^k_{h,0} \qquad (3)$$

$\boxed{L}$ Soit $\ell_h : \underline{V}^k_{h,0} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire et posons

$$\|\ell_h\|_{1,h,*} := \sup_{\underline{v}_h \in \underline{V}^k_{h,0} \setminus \{\underline{0}\}} \frac{\ell_h(\underline{v}_h)}{\|\underline{v}_h\|_{1,h}}. \qquad (4)$$

Soit $\underline{w}_h \in \underline{V}^k_{h,0}$ t.q.

$$a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) = \ell_h(\underline{v}_h) \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}^k_{h,0}. \qquad (5)$$

Alors,

$$\|\underline{w}_h\|_{1,h} \leq \eta \, \|\ell_h\|_{1,h,*}.$$

$$\gamma^{-1} \|\underline{w}_h\|_{1,h}^2 \overset{(1')}{\leq} a_h(\underline{w}_h, \underline{w}_h) \overset{(5)}{=} \ell_h(\underline{w}_h) \overset{(4)}{\leq} \|\ell_h\|_{1,h,*} \|\underline{w}_h\|_{1,h}$$

$$\Rightarrow \|\underline{w}_h\|_{1,h} \leq \gamma \|\ell_h\|_{1,h,*}. \quad \square$$

1) On applique ce lemme à $\ell_h : \underline{V}_{h,0}^k \ni \underline{v}_h \longmapsto \int_\Omega f v_h \in \mathbb{R}$.

On peut remarquer que, $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$,

$$\int_\Omega f v_h \overset{C-S}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} \overset{\text{Poincaré par HHO}}{\leq} C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\underline{v}_h\|_{1,h}$$

$$\Rightarrow \|\ell_h\|_{1,h,*} := \sup_{\underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega f v_h}{\|\underline{v}_h\|_{1,h}} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

On en déduit que $\underline{u}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$ solution de (2) est t.q.

$$\|\underline{u}_h\|_{1,h} \leq \gamma C_p \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

2) On applique ce lemme à $e_h = \varepsilon_h(u;\cdot)$

$\underline{e}_h \in \underline{V}^k_{h,0}$ solution de l'équation de l'erreur (3) est t.q.

$$\|\underline{e}_h\|_{1,h} \leq \gamma \, \|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{1,h,*}$$

Remarque $\quad \underline{e}_h \longrightarrow 0$ lorsque $h \longrightarrow 0^+$ si

$$\lim_{h \to 0^+} \|\varepsilon_h(u;\cdot)\|_{1,h,*} = 0$$

et on dira alors que la méthode est consistante.

Projecteur elliptique :

$$\varpi_T^{k+1} := p_T^{k+1} \circ I_T^k$$

$$\varpi_T^{k+1} : \quad H^1(T) \longrightarrow \mathbb{P}^{k+1}(T)$$
$$v \longmapsto p_T^{k+1} I_T^k v$$

$\forall v \in H^{r+2}(T)$, $r \in \{0, \dots, k\}$,

$$\| \nabla (v - \varpi_T^{k+1} v) \|_{\partial T} \lesssim h_T^{r+1/2} \, |v|_{H^{r+2}(T)}$$

L'idée pour prouver que

$$\lim_{h \to 0^+} \| \mathcal{E}_h(u; \cdot) \|_{1,h,*} = 0$$

consiste à reformuler $\mathcal{E}_h(u;\cdot)$ de telle sorte à faire apparaître des différences $u - \varpi_T^{k+1} u$

Caractérisation de ϖ_T^{k+1}

$$\varpi_T^{k+1} := p_T^{k+1} \circ I_T^k$$

déf. p_T^{k+1} ; $\forall (v, w) \in H^1(T) \times \mathbb{P}^{k+1}(T)$,

$$\int_T \nabla p_T^{k+1} I_T^k v \cdot \nabla w = - \int_T \cancel{\pi_T^{k-1}} v \underbrace{\Delta w}_{\in \mathbb{P}^{k-1}(T)} + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \cancel{\pi_F^k} v \underbrace{(\nabla w \cdot n_{TF})}_{\mathbb{P}^k(F)}$$

déf. π_T^{k-1} déf π_F^k

$$\Rightarrow \int_T \nabla \varpi_T^{k+1} v \cdot \nabla w = - \int_T v \Delta w + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v (\nabla w \cdot n_{TF}) = \int_T \nabla v \cdot \nabla w$$

Donc, $\forall v \in H^1(T)$,

$$\int_T \nabla \varpi_T^{k+1} v \cdot \nabla w = \int_T \nabla v \cdot \nabla w \qquad \forall w \in \mathbb{P}^{k+1}(T) \quad (6)$$

On supposera dorénavant qu'il existe $r \in \{0, \dots, k\}$ t.q. $u \in H^1_0(\Omega) \cap H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$.

$$\mathcal{E}_h(u; \underline{v}_h) := \int_\Omega f v_h - a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{v}_h)$$

- $$a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{v}_h) \overset{\text{déf. } a_h}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \nabla \underbrace{p_T^{k+1} \underline{\hat{u}}_T}_{p_T^{k+1} \underline{I}_T^k u \,=\, \varpi_T^{k+1} u \,\in\, \mathbb{P}^{k+1}(T)} \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \right]$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \nabla \varpi_T^{k+1} u \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \right]$$

$$\overset{\text{déf. } p_T}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_T \Delta \varpi_T^{k+1} u \, v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla \varpi_T^{k+1} u \cdot n_{TF}) v_F + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \right]$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big[\int_T \nabla \varpi_T^{k+1} u \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla \varpi_T^{k+1} u \cdot n_{TF})(v_F - v_T)$$

$$+ s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \Big]$$

- $$\int_\Omega f v_h = - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \Delta u \, v_T$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big[\int_T \nabla u \cdot \nabla v_T - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF}) v_T \Big]$$

$$- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF}) v_F + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF}) v_F$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Big[\int_T \nabla u \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF})(v_F - v_T) \Big]$$

$$\cancel{- \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF}) v_F}$$

formule magique

$\boxed{L}$ (Formule magique)

Soit $(v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}$ une famille de fonctions $v_F \in L^2(F)$ t.q. $v_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h^b$. Soit $\tau \in H(\mathrm{div}; \Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$.

Alors,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\tau \cdot n_{TF}) v_F = 0.$$

On souhaite appliquer cette formule avec $\tau = \nabla u$. Il faut vérifier que

$$\nabla u \in H(\mathrm{div}; \Omega) \cap H^1(\mathcal{T}_h)^d$$

$\nabla u \in H(\mathrm{div}; \Omega) := \nabla u \in L^2(\Omega)^d$ et $\mathrm{div}(\nabla u) \in L^2(\Omega)$ ✓

$u \in H^1_0(\Omega) \Rightarrow \nabla u \in L^2(\Omega)^d$ et $\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u = -f \in L^2(\Omega)$

$u \in H^{r+2}(T_h)$ avec $r \geq 0 \Rightarrow \nabla u \in H^{r+1}(T_h)^d \subset H^1(T_h)^d$

On a donc prouvé que $\nabla u \in H(\mathrm{div}; \Omega) \cap H^1(T_h)^d$ ✓

On a trouvé que

$$\mathcal{E}_h(u;\underline{v}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Big[\int_T \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot\nabla v_T + \sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot n_{TF}\,(v_F-v_T) + s_T(\underline{\hat{u}}_T,\underline{v}_T)\Big] \qquad (7)$$

- $\displaystyle\int_T \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot\nabla v_T \overset{(6)}{=} 0$ car $v_T\in\mathbb{P}^{k-1}(T)\subset\mathbb{P}^{k+1}(T)$ (8)
- $\displaystyle\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot n_{TF}\,(v_F-v_T)$

$$\overset{(2,\infty,2)\text{-Hölder}}{\leq} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \|\nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\|_{L^2(F)^d}\underbrace{\|n_{TF}\|_{L^\infty(F)^d}}_{\leq 1}\|v_F-v_T\|_{L^2(F)}$$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\sum_{F\in\mathcal{F}_T}\int_F \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot n_{TF}\,(v_F-v_T)$$

$$\lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{r+1}|u|_{H^{r+2}(T)}\times\left(\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1}\|v_F-v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}$$

$$\overset{C-S}{\leq}\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\underbrace{h_T^{2(r+1)}}_{\leq h^{2(r+1)}}|u|^2_{H^{r+2}(T)}\right)^{1/2}\times\underbrace{\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1}\|v_F-v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}}_{\leq \|\underline{v}_h\|_{1,h}}$$

car $h := \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$

par définition de $\|\cdot\|_{1,h}$

$$\lesssim h^{r+1}|u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}\,\|\underline{v}_h\|_{1,h} \qquad (9)$$

$$\bullet \quad \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F \nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\cdot n_{TF}\,(v_F - v_T)$$

$$\overset{(2,\infty,2)-\text{Hölder}}{\le} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{1/2}\,\|\nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\|_{L^2(F)^d}\,\underbrace{\|n_{TF}\|_{L^\infty(F)^d}}_{\le 1}\,h_T^{-1/2}\,\|v_F - v_T\|_{L^2(F)}$$

$$\overset{C-S}{\le} \left(\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T\,\|\nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\|^2_{L^2(F)^d}\right)^{1/2} \times \left(\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1}\,\|v_F - v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}$$

$$= \left(h_T\,\underbrace{\|\nabla(u-\varpi_T^{k+1}u)\|^2_{L^2(\partial T)^d}}_{\lesssim\, h_T^{2r+1}\,|u|^2_{H^{r+2}(T)}}\right)^{1/2} \times \underbrace{\left(\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1}\,\|v_F - v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}}_{\text{terme de bord dans } \|\underline{v}_T\|_{1,T}}$$

$$\lesssim h_T^{r+1}\,|u|_{H^{r+2}(T)} \times \left(\sum_{F\in\mathcal{F}_T} h_T^{-1}\,\|v_F - v_T\|^2_{L^2(F)}\right)^{1/2}$$

$\boxed{A2}$ (Consistance polynomiale)

$$s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T) = 0 \qquad \forall (w, \underline{v}_T) \in \mathcal{P}^{k+1}(T) \times \underline{V}_T^k$$

$\boxed{L}$ $A1, A2 \Rightarrow s_T(\hat{\underline{u}}_T, \underline{v}_T) \lesssim h_T^{r+1} |u|_{H^{r+2}(T)} \, \| \underline{v}_T \|_{1,T}$

Donc, en particulier,

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} s_T(\hat{\underline{u}}_T, \underline{v}_T) \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \, \| \underline{v}_h \|_{1,h}. \quad (10)$$

(8), (9), (10) dans (7) donnent, $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$,

$$\mathcal{E}_h(u; \underline{v}_h) \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \, \| \underline{v}_h \|_{1,h}$$

$$\Rightarrow \| \mathcal{E}_h(u; \cdot) \|_{1,h,*} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}$$

$\boxed{T}$ Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ solution du problème de Poisson. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\underline{u}_h \in \underline{V}_{h,0}^k$ solution de son approximation HHO. Alors, si $u \in H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$ pour un entier $r \in \{0, \dots, k\}$,

$$\|\underline{e}_h\|_{1,h} = \|\underline{u}_h - \underline{I}_h^k u\|_{1,h} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}.$$

Remarque A partir de ce résultat, on peut montrer que

$$\|\nabla_h p_h^{k+1} \underline{u}_h - \nabla u\|_{L^2(\Omega)^d} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}$$

où $(p_h^{k+1} \underline{u}_h)_{|T} := p_T^{k+1} \underline{u}_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h.$

Corrigé $\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k, \quad \|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0 \Rightarrow \underline{v}_h = \underline{0}$

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d}^2 + h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|v_F - v_T\|_{L^2(F)}^2 \right) \quad (A)$$

$$\|v_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|\underline{v}_h\|_{1,h} \qquad \forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k \quad (B)$$

$$\forall \underline{v}_h \in \underline{V}_{h,0}^k, \quad \|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0 \overset{(B)}{\Rightarrow} v_T = v_{h|T} = 0 \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad (C)$$

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h} = 0 \overset{(A)}{\Rightarrow} v_F = v_T \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h, \forall F \in \mathcal{F}_T \quad (D)$$

$$(C), (D) \Rightarrow v_F = 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_h \qquad (E)$$

$$(C), (E) \Rightarrow \underline{v}_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) = \underline{0}$$

$\boxed{L}$ A1, A2 $\Rightarrow$ $s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \lesssim e_T^{r+1} |u|_{H^{r+2}(T)} \|\underline{v}_T\|_{1,T}$.

Dém. Puisque s_T est symétrique, on peut écrire

$$s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{v}_T) \leq s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T)^{1/2} \, s_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T)^{1/2}$$
$$\overset{A1}{\lesssim} s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T)^{1/2} \, \|\underline{v}_T\|_{1,T}$$

Il suffit, donc, de montrer que

$$s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T)^{1/2} \lesssim e_T^{r+1} |u|_{H^{r+2}(T)}.$$

Soit maintenant $w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)$.

$$s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T) \overset{A2}{=} s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T) - s_T(\underline{I}_T^k w, \underline{v}_T)$$
$$\overset{A1}{=} s_T(\underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w, \underline{\hat{u}}_T)$$
$$\overset{A1}{=} s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w) \overset{A2}{=} s_T(\underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w, \underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w) \; (1)$$

$$s_T(\underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w, \underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w) \overset{A1}{\lesssim} \|\underline{\hat{u}}_T - \underline{I}_T^k w\|_{1,T}^2$$

$$= \|\underline{I}_T^k (u - w)\|_{1,T}^2 \qquad (12)$$

$$\|\underline{I}_T^k(u-w)\|_{1,T}^2 = \|\nabla \pi_T^{k-1}(u-w)\|_{L^2(T)^d}^2 + h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\pi_F^k(u-w)\|_{L^2(F)}^2 \qquad (13)$$

On peut montrer que :

- $\|\nabla \pi_T^{k-1}(u-w)\|_{L^2(T)^d}^2 = |\pi_T^{k-1}(u-w)|_{H^1(T)}^2 \lesssim |u-w|_{H^1(T)}^2 \qquad (14)$

- $\inf_{w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)} \left(\|\nabla(u-w)\|_{L^2(T)}^2 + h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|u-w\|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2} \lesssim h_T^{r+1} |u|_{H^{k+2}(T)}$

(15)

<u>Exercice</u> Montrer que $\qquad \|\pi_F^k(u-w)\|_{L^2(F)} \leq \|u-w\|_{L^2(F)} \qquad (16)$

(suggestion : partir de la définition de π_F^k et utiliser une inégalité de Cauchy-Schwarz)

On a donc :

$$s_T(\hat{\underline{u}}_T, \hat{\underline{u}}_T) \overset{(11),(12)}{\lesssim} \inf_{w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)} \|\underline{I}_T^k(u-w)\|_{1,T}^2$$

$$\overset{(13),(14),(16)}{\lesssim} \inf_{w \in \mathbb{P}^{k+1}(T)} \left(|u-w|_{H^1(T)}^2 + h_T^{-1} \|u-w\|_{L^2(F)}^2 \right)$$

$$\overset{(15)}{\lesssim} h_T^{2(r+1)} |u|_{H^{r+2}(T)}^2 \qquad \square$$

Exemple Un exemple de forme bilinéaire s_T est le suivant : $\forall (\underline{w}_T, \underline{v}_T) \in \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k$,

$$s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) = h_T^{-2} \int_T \pi_T^{k-1}(w_T - p_T^{k+1} \underline{w}_T)\, \pi_T^{k-1}(v_T - p_T^{k+1} \underline{v}_T)$$

$$+ h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \pi_F^{k}(w_F - p_T^{k+1} \underline{w}_T)\, \pi_F^{k}(v_F - p_T^{k+1} \underline{v}_T)$$

$$\underline{\delta}_T^k \underline{v}_T = \left(\delta_T^k \underline{v}_T, (\delta_{TF}^k \underline{v}_T)_{F \in \mathcal{F}_T}\right) := \underline{v}_T - \underline{I}_T^k p_T^{k+1} \underline{v}_T$$

$$s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := h_T^{-2} \int_T \delta_T^k \underline{w}_T\, \delta_T^k \underline{v}_T + h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F \delta_{TF}^k \underline{w}_T\, \delta_{TF}^k \underline{v}_T$$

$$\left[h_T^{-2} \int_T \delta_T^k \underline{w}_T\, \delta_T^k \underline{v}_T\right] = L^{-2} \underbrace{[T]}_{L^d} [u]^2 = L^{d-2} [u]^2$$

$$\left[h_T^{-1} \int_T \delta_{TF}^k \underline{w}_T\, \delta_{TF}^k \underline{v}_T\right] = L^{-1} \underbrace{[F]}_{L^{d-1}} [u]^2 = L^{d-2} [u]^2$$

La stabilisation HHO originale avait la forme suivante:

$$s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) = h_T^{-1} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F (\delta_T^k \underline{w}_T - \delta_{TF}^k \underline{w}_T)(\delta_T^k \underline{v}_T - \delta_{TF}^k \underline{v}_T)$$

Remarque Une stabilisation de la forme

$$s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) = h_T^{-1} \sum_{F\in\mathcal{F}_T} \int_F (w_F - w_T)(v_F - v_T)$$

ne satisfait pas A2!

$$\underline{w}_T = (w_T, (w_F)_{F\in\mathcal{F}_T})$$

et $\underline{v}_T = (v_T, (v_F)_{F\in\mathcal{F}_T})$