

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Soit $k > 0$ un entier et $\ell \in \{k-1, k, k+1\}$. On définit l'espace

$$\mathbb{U}_h^{k,\ell} := \left\{ \underline{v}_h = ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) : \begin{array}{ll} v_T \in P^\ell(T) & \forall T \in \mathcal{T}_h, \\ v_F \in P^h(F) & \forall F \in \mathcal{F}_h \end{array} \right\}$$

Remarque La méthode que nous avons étudiée dans la première partie de ce cours correspond au choix $\ell = k-1$

- $\ell = k$ méthode HHO originale [DP, Ern, Lemaire, 2014]
- $\ell = k+1$ méthode HDG Lehrenfeld - Schöberl

$\underline{U}_\tau^{k,\ell}$:= restriction à un élément $\tau \in \mathcal{T}_h$ de \underline{U}^k
 On muni $\underline{U}_\tau^{k,\ell}$ de la semi-norme

$$\|\underline{v}_\tau\|_{1,\tau} := \left(\|\nabla \underline{v}_\tau\|_{L^2(\tau)}^2 + |\underline{v}_\tau|_{1,\partial\tau}^2 \right)^{1/2},$$

$$|\underline{v}_\tau|_{1,\partial\tau} := \left(h_\tau^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_\tau} \|\underline{v}_F - \underline{v}_\tau\|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2}$$

avec la convention

$$\underline{v}_\tau := \sum_{F \in \mathcal{F}_\tau} \frac{\alpha_{TF}}{|F|} \int_F v_F \quad \text{si } \ell = -1$$

$$I_T^{k,e} : H^e(T) \longrightarrow \underline{U}_T^{k,e}$$

$$\omega \longmapsto (\pi_T^e \omega, (\pi_F^k \omega)_{F \in \mathcal{F}_T})$$

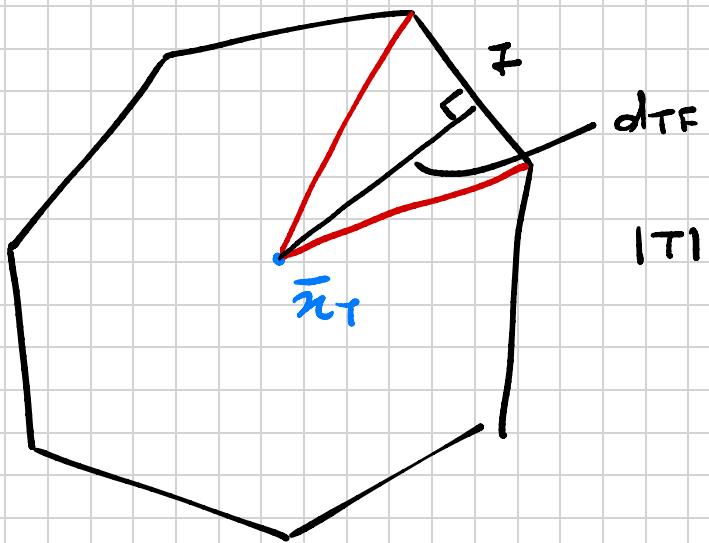
H Si $k=0$, nous allons supposer par la suite que $\forall T \in \mathcal{T}_h$, T est étoilé par rapport à son centre de masse

$$\bar{\omega}_T := \frac{1}{|T|} \int_T \omega.$$

Remarque Sous cette hypothèse, nous avons que

$$(\omega - \bar{\omega}_T) \cdot m_F = d_T F \geq 0 \quad \forall F \in \mathcal{F}_T$$

avec $d_T F = \text{dist}(\bar{\omega}_T, H_F)$ où H_F est l'hyperplan contenant F



$$|T| = \sum_{F \in F_T} \frac{d_{TF} |F|}{d}$$

Exercice Trouver un polygone pour lequel H n'est pas vérifiée

L Continuité de l'interpolateur

Pour tout $T \in T_h$, on a

$$\|\Xi_T^{k,e} v\|_{L^2(T)} \lesssim \|\nabla v\|_{L^2(T)} \quad \forall v \in H^1(T).$$

Dém. Nous avons, par définition,

$$\|\Xi_T^{k,e} v\|_{L^2(T)}^2 = \underbrace{\|\nabla \pi_T^e v\|_{L^2(T)}^2}_{z_1} + e_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \underbrace{\|\pi_F^k v - \hat{v}_T\|_{L^2(F)}^2}_{z_2}$$

avec

$$\hat{v}_T = \begin{cases} \pi_T^e v & \text{si } e \geq 0 \\ \frac{1}{|\mathcal{F}|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\alpha_{TF}}{\alpha_I} \int_F \cancel{\pi_F^k} v & \text{si } e = -1 \end{cases}$$

$$\| \nabla \pi_T^e v \|_{L^2(\Gamma)} = \| \pi_T^e v \|_{H^1(\Gamma)} \leq \underbrace{\| \pi_T^e v - v \|_{H^1(\Gamma)}} + \| v \|_{H^1(\Gamma)}$$

$\lesssim \| v \|_{H^1(\Gamma)}$ (propriétés d'approximation de π_T^e)

$$\Rightarrow \mathcal{E}_1 \lesssim \| \nabla v \|_{L^2(\Gamma)}$$

Pour estimer \mathcal{E}_2 on distingue 2 cas : $e > 0$ et $e = -1$

* $e > 0$

$$\| \pi_F^k v - \pi_T^e v \|_{L^2(F)} \leq \| \pi_F^k v - \pi_T^k v \|_{L^2(F)} + \| \pi_T^k v - \pi_T^e v \|_{L^2(F)}$$

$=:$ A + B

idempotence + linéarité de π_F^k

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \| \pi_F^k (\nu - \pi_T^k \nu) \|_{L^2(F)} \\ &\leq \| \nu - \pi_T^k \nu \|_{L^2(F)} \end{aligned}$$

inégalité de

trace

$$\lesssim e^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\| \nu - \pi_T^k \nu \|_{L^2(\Gamma)}}_{\lesssim e^{-\frac{1}{2}} \|\nu\|_{H^1(\Gamma)}} + e^{\frac{1}{2}} \| \nu - \pi_T^k \nu \|_{H^1(\Gamma)}$$

propriétés

d'approximation $\frac{1}{2}$
de π_T^k

$$\lesssim e^{-\frac{1}{2}} \| \nu \|_{H^1(\Gamma)} = e^{-\frac{1}{2}} \| \nabla \nu \|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} \lesssim e^{-\frac{1}{2}} \| \nabla \nu \|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\mathcal{B} = \|\pi_T^k v - \pi_T^e v\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\lesssim h_T^{-1/2} \| \pi_T^k v - \pi_T^e v \|_{L^2(\Gamma)}$$

inégalité de trace discrète

$$\lesssim h_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma)} d$$

On écrit

inégalité triangulaire, $\pi_T^k \circ \pi_T^0 = \pi_T^0$ et $\pi_T^e \circ \pi_T^0 = \pi_T^0$
(composante, $k \geq 0, e \geq 0$)

$$\|\pi_T^k v - \pi_T^e v\|_{L^2(\Gamma)} \leq \|\pi_T^k(v - \pi_T^0 v)\|_{L^2(\Gamma)} + \|\pi_T^e(v - \pi_T^0 v)\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\leq 2\|v - \pi_T^0 v\|_{L^2(\Gamma)} \quad \text{continuité de } \pi_T^k, \pi_T^e$$

$$\lesssim h_T \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma)} d$$

propriétés d'approximation
de π_T^0

$$\Rightarrow \left\| \pi_F^k v - \pi_T^e v \right\|_{L^2(F)} \leq A + B \lesssim e_T^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(T)}^{-1} \quad (1)$$

$$b_2 = e_T^{-1} \sum_{f \in \mathcal{F}_T} \left\| \pi_F^k v - \pi_T^e v \right\|_{L^2(F)}^2$$

(1)

$$\lesssim e_T^{-1} \sum_{f \in \mathcal{F}_T} e_T \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2$$

$$\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(T)}^2$$

$\text{car } \mathcal{F}_T \lesssim 1$

Ceci conclut la preuve pour le cas $e > 0$

* $\ell = -1$

idempotence, linéarité de π_F^0

$$\begin{aligned}
 \| \pi_F^0 v - \hat{v}_T \|_{L^2(F)} &= \| \pi_F^0 (v - \hat{v}_T) \|_{L^2(F)} \\
 &\leq \| v - \hat{v}_T \|_{L^2(F)} \\
 &\lesssim e_T^{-\frac{1}{2}} \underbrace{\| v - \hat{v}_T \|_{L^2(T)}}_{ct} + e_T^{\frac{1}{2}} \| \nabla v \|_{L^2(T)} d
 \end{aligned}$$

continuité π_F^0

inégalité de trace, $\hat{v}_T \in \mathcal{P}(T)$

Pour estimer \mathcal{A} , on peut commencer par remarquer que

$$\pi_T^0 v = \frac{1}{|T|} \sum_{f \in \mathcal{F}_T} \frac{d_f}{d} \int_f \pi_T^0 v \quad (2)$$

$$\mathcal{A} \leq \underbrace{\| v - \pi_T^0 v \|_{L^2(T)}}_{ct_1} + \underbrace{\left\| \frac{1}{|T|} \sum_{f \in \mathcal{F}_T} \frac{d_f}{d} \int_f (v - \pi_T^0 v) \right\|_{L^2(T)}}_{ct_2}$$

(2), inégalité triangulaire, définition de \hat{v}_T pour $\ell = -1$

$$cA_1 \leq \epsilon_T \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma)}$$

propriétés d'approximation de π_T°

$$cA_2^2 = \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\alpha_{TF}}{\alpha_f} \int_F (v - \pi_T^\circ v) \right|^2$$

$$= \frac{1}{|T|} \left| \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\alpha_{TF}}{\alpha_f} \underbrace{\int_F (v - \pi_T^\circ v)}_{\text{C-S}} \right|^2$$

$$\leq \|v - \pi_T^\circ v\|_{L^2(F)} |F|^{1/2} \quad \text{Cauchy-Schwarz}$$

$$\leq \frac{1}{|T|} \left| \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \left(\frac{\alpha_{TF} |F|}{\alpha_f} \right)^{1/2} \left(\frac{\alpha_{TF}}{\alpha_f} \right)^{1/2} \|v - \pi_T^\circ v\|_{L^2(F)} \right|^2$$

C-S

$$\leq \frac{1}{|T|} \underbrace{\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\alpha_{TF} |F|}{\alpha_f} \right)}_1 \times \underbrace{\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\alpha_{TF}}{\alpha_f} \|v - \pi_T^\circ v\|_{L^2(F)}^2 \right)}_{\approx \epsilon_T} \approx \epsilon_T \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma)}$$

$$\Rightarrow \alpha A_2 \lesssim \epsilon_T \|\nabla v\|_{L^2(\tau)}^{\alpha}$$

Donc $\alpha t \lesssim \epsilon_T \|\nabla v\|_{L^2(\tau)}^{\alpha} t$

$$\|\pi_F^k v - \hat{v}_T\|_{L^2(F)} \lesssim \epsilon_T^{1/\epsilon} \|\nabla v\|_{L^2(\tau)}^{\alpha} \quad (3)$$

$$\|\mathbb{I}_T^{k,\epsilon} v\|_{A_T}^2 = \rho_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{T}_T} \|\pi_F^k v - \hat{v}_T\|_{L^2(F)}^2$$

(3)

$$\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_T} \|\nabla v\|_{L^2(\tau)}^{\alpha}$$

$$\lesssim \|\nabla v\|_{L^2(\tau)}^{\alpha}$$

$$\text{const}(\mathcal{T}_T) \lesssim 1$$

Ceci conclut la preuve dans le cas $\epsilon = -1$ \square

$$P_T^{k+1} : \underline{U}_T^{k,e} \longrightarrow \mathcal{P}^{k+1}(T)$$

$$\forall v_T \in \underline{U}_T^{k,e},$$

$$\int_T \nabla P_T^{k+1} v_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla v_T \cdot \nabla w + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_T - v_F) (\nabla w \cdot n_{TF}) \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T)$$

$$\int_T P_T^{k+1} v_T = \begin{cases} \int_T v_T & \text{si } e > 0 \\ \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{\alpha} \int_F v_F & \text{si } e = -1 \end{cases}$$

Exercice Montrer que

$$P_T^{k+1} (\mathbb{I}_T v) = \overline{w}_T^{k+1} v \quad \forall v \in H^1(T).$$

$$H^1(\mathcal{T}) \xrightarrow{\omega_{\mathcal{T}}^{k+1}} \mathcal{P}^{k+1}(\mathcal{T})$$

$\Xi_{\mathcal{T}}^{k,e}$ ↘ ↑ $p_{\mathcal{T}}^{k+1}$
 $\cup_{\mathcal{T}}^{k,e}$ ↓

Donc, en particulier,

$$p_{\mathcal{T}}^{k+1}(\Xi_{\mathcal{T}}^{k,e} w) = w \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(\mathcal{T})$$

$$a_{\mathcal{T}} : \cup_{\mathcal{T}}^{k,e} \times \cup_{\mathcal{T}}^{k,e} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(w_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}) \longmapsto \int_{\mathcal{T}} \nabla p_{\mathcal{T}}^{k+1} w_{\mathcal{T}} \cdot \nabla p_{\mathcal{T}}^{k+1} v_{\mathcal{T}} + \underline{s_{\mathcal{T}}(w_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}})}$$

H2

Stabilisation

Pour tout $T \in \Gamma_k$, $s_T : \underline{U}_T^{k,e} \times \underline{U}_T^{k,e} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive t.q.

(S1) Coercivité et continuité

$$\|\underline{\Sigma}_T\|_{1,T}^2 \approx a_T(\underline{\Sigma}_T, \underline{\Sigma}_T) = \|\nabla p_T^{k+1} \underline{\Sigma}_T\|_{L^2(T)}^2 + s_T(\underline{\Sigma}_T, \underline{\Sigma}_T) \quad \forall \underline{\Sigma}_T \in \underline{U}_T^{k,e}$$

(S2) Consistance polynomiale

$$s_T(\underline{\Sigma}_T w, \underline{\Sigma}_T) = 0 \quad \forall (w, \underline{\Sigma}_T) \in \mathcal{P}^{k+1}(T) \times \underline{U}_T^{k,e}$$

On va montrer que (S1) et (S2) imposent une forme bien précise pour s_T .

$$\underline{d}_T^{k,e} : \underline{U}_T^{k,e} \longrightarrow \underline{U}_T^{k,e}$$

$$\underline{\Sigma}_T \longmapsto \underline{\Sigma}_T - \underline{I}_T^{k,e} p_T^{k+1} \underline{\Sigma}_T$$

$$\underline{d}_T^{k,e} \underline{\Sigma}_T = (\underline{d}_T^e \underline{\Sigma}_T, (\underline{d}_{TF}^k \underline{\Sigma}_T)_{F \in \mathcal{F}_T}) \text{ avec}$$

$$\underline{d}_T^e \underline{\Sigma}_T = \underline{\Sigma}_T - \pi_T^e p_T^{k+1} \underline{\Sigma}_T$$

$$\underline{d}_{TF}^k \underline{\Sigma}_T = \underline{\Sigma}_F - \pi_F^k p_T^{k+1} \underline{\Sigma}_T \quad \forall F \in \mathcal{F}_T$$

Par définition,

$$\underline{\Sigma}_T = \underline{I}_T^{k,e} p_T^{k+1} \underline{\Sigma}_T + \underline{d}_T^{k,e} \underline{\Sigma}_T,$$

ce qui montre que $\underline{d}_T^{k,e} \underline{\Sigma}_T$ contient la partie "non polynomiale" de $\underline{\Sigma}_T$. On remarque que

$$\underline{d}_T^{k,e} \underline{I}_T^{k,e} w = 0 \quad \forall w \in P^{k+1}(\tau) \quad (4)$$

Pour vérifier (4), on écrit, pour tout $w \in \mathcal{P}^{k+1}(\tau)$,

$$\underline{d}_\tau^{k,e} \underline{\mathbb{I}}_\tau^{k,e} w = \underline{\mathbb{I}}_\tau^{k,e} w - \underbrace{\underline{\mathbb{I}}_\tau^{k,e} (\underline{p}_\tau^{k+1} (\underline{\mathbb{I}}_\tau^k w))}_{w} \quad (\text{consistance polynomiale de } \underline{p}_\tau^{k+1})$$

$$= \underline{\mathbb{I}}_\tau^{k,e} w - \underline{\mathbb{I}}_\tau^{k,e} w = 0$$

Structure gluante de stabilisation

s_τ vérifie H2 ssi il existe une forme bilinéaire

$$S_\tau : \underline{U}_\tau^{k,e} \times \underline{U}_\tau^{k,e} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

$$(S1') \quad S_\tau(\underline{v}_\tau, \underline{w}_\tau) = \underline{s}_\tau(\underline{d}_\tau^{k,e} \underline{v}_\tau, \underline{d}_\tau^{k,e} \underline{w}_\tau) \quad \forall (\underline{v}_\tau, \underline{w}_\tau) \in \underline{U}_\tau^{k,e} \times \underline{U}_\tau^{k,e}$$

$$(S2') \quad |\underline{v}_\tau|_{1,\tau}^2 \leq S_\tau(\underline{v}_\tau, \underline{v}_\tau) \leq \|\underline{v}_\tau\|_{1,\tau}^2 \quad \forall \underline{v}_\tau \in \underline{U}_\tau^{k,e}$$

La preuve démontre les résultats intermédiaires dans la proposition suivante.

P Pour tout $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^{k,e}$,

$$\|\nabla_{p_T^{k+1}} \underline{v}_T\|_{L^2(\Gamma)} \lesssim \|\underline{v}_T\|_{h,T} \quad (5)$$

$$\|\underline{d}_T^{k,e} \underline{v}_T\|_{\lambda,T} \lesssim \|\underline{v}_T\|_{\lambda,T} \quad (6)$$

$$\|\underline{v}_T\|_{\lambda,T} \lesssim \|\nabla_{p_T^{k+1}} \underline{v}_T\|_{L^2(\Gamma)} + \|\underline{d}_T^{k,e} \underline{v}_T\|_{h,\partial T} \quad (7)$$

Dém. Par définition de p_T^{k+1} , on a : $\forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(\Gamma)$,

$$\int_T \nabla_{p_T^{k+1}} \underline{v}_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla \underline{v}_T \cdot \nabla w + \sum_{F \in \mathcal{T}_T} \int_F (\underline{v}_F - \underline{v}_T) (\nabla w \cdot n_T F)$$

On choisit $w = p_T^{k+1} \underline{v}_T$.

$$\|\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)}^2 = \int_{\tau} \nabla \underline{\nu}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\underline{\nu}_F - \underline{\nu}_T) (\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T \cdot m_{TF})$$

$$\leq \|\nabla \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)} \|\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)}$$

Cauchy-Schwarz,
(2,2,∞)- Hölder

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\underline{\nu}_F - \underline{\nu}_T\|_{L^2(F)} \underbrace{\|\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T\|_{L^2(F)}}_{\approx e_T^{-1/2} \|\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)}} \underbrace{\|m_{TF}\|_{L^\infty(F)}}_{\leq 1}$$

(Inégalité de trace discrète)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|\nabla p_T^{k+1} \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)} &\leq \|\nabla \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)} + e_T^{-1/2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\underline{\nu}_F - \underline{\nu}_T\|_{L^2(F)} \\ &\lesssim \left(\|\nabla \underline{\nu}_T\|_{L^2(\tau)}^2 + e_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\underline{\nu}_F - \underline{\nu}_T\|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \|\underline{\nu}_T\|_{A,T} \end{aligned}$$

def. $d_T^{k,e}$

$$\begin{aligned} \cdot \| d_T^{k,e} \underline{v}_T \|_{1,T} &= \| \underline{v}_T - I_T^{k,e} p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,T} \\ &\leq \| \underline{v}_T \|_{1,T} + \| I_T^{k,e} p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,T} \end{aligned}$$

inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \cdot \| I_T^{k,e} p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,T} &\lesssim \| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(\tau)} \quad \text{continuité de l'interpolateur} \\ &\stackrel{(S)}{\lesssim} \| \underline{v}_T \|_{1,T} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \| d_T^{k,e} \underline{v}_T \|_{1,T} \lesssim \| \underline{v}_T \|_{1,T}$$

Par définition de p_T^{k+1} : $\forall w \in P^{k+1}(\tau)$,

$$\int_T \nabla v_T \cdot \nabla w = \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla w - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - \underline{v}_T) (\nabla w \cdot n_F)$$

On choisit $w = v_T$ (on a le droit de le faire car $\ell \leq k+1$!).

$$\|\nabla v_T\|_{L^2(\tau)} = \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla v_T - \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (v_F - \underline{v}_T) (\nabla v_T \cdot n_F)$$

Exercice

$$\Rightarrow \|\nabla v_T\|_{L^2(\tau)} \lesssim \|\nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T\|_{L^2(\tau)} + \|\underline{v}_T\|_{1,\partial\tau}$$

$$\begin{aligned} \|\underline{v}_T\|_{1,\partial\tau} &= \| \underline{\mathbb{I}}_T p_T^{k+1} \underline{v}_T + \underline{\mathbb{d}}_T \underline{v}_T \|_{1,\partial\tau} \\ &\leq \| \underline{\mathbb{I}}_T p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,\partial\tau} + \| \underline{\mathbb{d}}_T \underline{v}_T \|_{1,\partial\tau} : \text{inégalité triangulaire} \\ &\leq \| \underline{\mathbb{I}}_T p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{1,\tau} + \| \underline{\mathbb{d}}_T \underline{v}_T \|_{1,\partial\tau} : \text{déf. de } \|\cdot\|_{1,\tau} \\ &\approx \| \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \|_{L^2(\tau)} + \| \underline{\mathbb{d}}_T \underline{v}_T \|_{1,\partial\tau} : \text{continuité de l'interpolateur} \end{aligned}$$

En combinant les résultats précédents, on obtient

$$\|\nabla \tilde{v}_T\|_{L^2(T)^d} \leq \|\nabla p_T^{k+2} \tilde{v}_T\|_{L^2(T)^d} + \|d_T^{k,e} \tilde{v}_T\|_{1,T} \quad \square$$