Estimation d'erreur en norme L^2

Définition (Régularité elliptique)

Pour tout $g \in L^2(\Omega)$, l'unique solution de : Trouver $z_g \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(v, z_g) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla z_g = \int_\Omega g\, v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (1)$$

satisfait l'estimation

$$\|z_g\|_{H^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|g\|_{L^2(\Omega)} \qquad (2)$$

avec $C_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω.

Remarque La régularité elliptique est vérifiée si Ω est convexe.

Soit $\underline{u}_h \in \underline{U}_h^{k,\ell}$ la Solution du schéma HHO et posons

$$\underline{\hat{u}}_h := \underline{I}_h^{k,\ell} u .$$

Pour rappel, on peut définir les fonctions

$$u_h \in \mathbb{P}^{\max(\ell,0)}(\mathcal{T}_h) \quad \text{et} \quad \hat{u}_h \in \mathbb{P}^{\max(\ell,0)}(\mathcal{T}_h)$$

t.q.

$$(u_h)_{|T} := \begin{cases} u_T & \text{si } \ell \geq 0, \\ \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d|T|} \int_F u_F & \text{si } \ell = -1, \end{cases}$$

$$(\hat{u}_h)_{|T} := \begin{cases} \hat{u}_T = \pi_T^{0,\ell} u & \text{si } \ell \geq 0, \\ \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d|T|} \int_F u & \text{si } \ell = -1. \end{cases}$$

Notre objectif consiste à prouver une estimation améliorée pour la quantité

$$\|u_h - \hat{u}_h\|_{L^2(\Omega)} = \|e_h\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\underline{e}_h := \underline{u}_h - \underline{\hat{u}}_h, \qquad e_h := u_h - \hat{u}_h, \qquad \underline{\hat{z}}_h := \underline{I}_h^{k,\ell}(z_{e_h}) \qquad (3)$$

$$\|e_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega e_h^2 - a_h(\underline{e}_h, \underline{\hat{z}}_h) + \underbrace{a_h(\underline{u}_h, \underline{\hat{z}}_h) - a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{\hat{z}}_h)}_{\overset{(3)}{=} a_h(\underline{e}_h, \underline{\hat{z}}_h)}$$

$$= \left[\int_\Omega e_h^2 - a_h(\underline{\hat{z}}_h, \underline{e}_h)\right] + \left[\int_\Omega f\, \hat{z}_h - a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{\hat{z}}_h)\right]$$

symétrie de a_h $\qquad$ $\underline{u}_h$ solution du schéma

$$\|e_h\|^2_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega e_h^2 - a_h(\hat{\underline{z}}_h, \underline{e}_h)\right] + \left[\int_\Omega f\, \hat{z}_h - a_h(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\underline{z}}_h)\right]$$

déf. $\mathcal{E}_h(\cdot;\cdot)$

$$\overset{!}{=} \quad \mathcal{E}_h(z_{e_h}; \underline{e}_h) \qquad + \quad \mathcal{E}_h(u; \hat{\underline{z}}_h)$$

$$\leq \|\mathcal{E}_h(z_{e_h}; \cdot)\|_{1,h,*} \|\underline{e}_h\|_{1,h} \quad + \quad \mathcal{E}_h(u; \hat{\underline{z}}_h)$$

$$=: \qquad \mathfrak{T}_1 \qquad + \qquad \mathfrak{T}_2$$

Exercice Retrouver cette estimation à partir du cadre abstrait

Nous avions prouvé que, sous l'hypothèse $u \in H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$, $r \in \{0, \ldots, k\}$,

$$\|\mathcal{E}_h(u; \cdot)\|_{1,h,*} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}.$$

Compte tenu du fait que $z_{e_h} \in H^2(\Omega)$ (voir (2)), on a

$$\|\mathcal{E}_h(z_{e_h}; \cdot)\|_{1,h,*} \lesssim h |z_{e_h}|_{H^2(\Omega)} \overset{(2)}{\lesssim} h \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (4)$$

On avait prouvé aussi que, si $u \in H^{r+2}(T_e)$,

$$\|\underline{e}_h\|_{1,e} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(T_e)} \qquad (5)$$

1) $\mathcal{T}_1$

$$\mathcal{T}_1 \leq \| \varepsilon_h(z_{g_i} \cdot) \|_{1,h,*} \; \|\underline{e}_h\|_{1,e}$$

$$\overset{(4),(5)}{\lesssim} h \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \; h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(T_e)}$$

$$= h^{r+2} |u|_{H^{r+2}(T_e)} \; \|e_h\|_{L^2(\Omega)}$$

Nous allons par la suite estimer $\mathcal{B}_2$ sous l'hypothèse que

$$(k, \ell) \neq (1, 0). \qquad (6)$$

2) $\mathcal{B}_2$

2.a) Le cas $k \geq 1$. Par (6) on a $\ell \geq 1$ (en fait, soit $\ell = 1$, soit $\ell = 2$). On va reparcourir les étapes de l'estimation de $\mathcal{E}_{e_n}(\mu; \hat{\underline{z}}_n)$.

$$\mathcal{E}_h(u; \underline{\hat{z}}_h) = \int_\Omega f \hat{z}_h - a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{\hat{z}}_h)$$

$$= -\int_\Omega \Delta u \, \hat{z}_h - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{\hat{u}}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{\hat{z}}_T + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{z}}_T) \right]$$

IPP, déf. p_T^{k+1}

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\cancel{\int_T \nabla(u - p_T^{k+1} \underline{\hat{u}}_T) \cdot \nabla \hat{z}_T} \right.$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \int_F \nabla(u - p_T^{k+1} \underline{\hat{u}}_T) \cdot n_{TF} (\hat{z}_F - \hat{z}_T)$$

$$\left. + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{z}}_T) \right]$$

C-S, Hölder

$$\le \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \| \nabla(u - p_T^{k+1} \underline{\hat{u}}_T) \|^2_{L^2(\partial T)} + s_T(\underline{\hat{u}}_T, \underline{\hat{u}}_T) \right]^{1/2}$$

$$\times \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^{-1} \| \hat{z}_F - \hat{z}_T \|^2_{L^2(F)} + s_T(\underline{\hat{z}}_T, \underline{\hat{z}}_T) \right) \right]$$

$$\mathcal{E}_h(u; \hat{\underline{z}}_h) \leq \left[\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T \|\nabla(u - p_T^{k+1}\hat{\underline{u}}_T)\|^2_{L^2(\partial T)} + s_T(\hat{\underline{u}}_T, \hat{\underline{u}}_T)\right]^{1/2}$$

$$\times \left[\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(h_T^{-1}\|\hat{z}_F - \hat{z}_T\|^2_{L^2(F)} + s_T(\hat{\underline{z}}_T, \hat{\underline{z}}_T)\right)\right]$$

$$\lesssim h^{r+1}|u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}\left[\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(|\hat{\underline{z}}_T|^2_{1,\partial T} + s_T(\hat{\underline{z}}_T, \hat{\underline{z}}_T)\right)\right]$$

- Par consistance de s_T on a

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} s_T(\hat{\underline{z}}_T, \hat{\underline{z}}_T) \lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 |z_{eh}|^2_{H^2(T)}$$

$$\leq h^2 |z_{eh}|^2_{H^2(\Omega)}$$

$$\underset{(2)}{\lesssim} h^2 \|e_h\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (7)$$

- Soit $T \in \mathcal{T}_h$. On a

$$|\underline{\hat{z}}_T|_{1,\partial T}^2 = h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \|\hat{z}_F - \hat{z}_T\|_{L^2(F)}^2$$

déf. $\underline{I}_T^{k,l}$

$$\stackrel{!}{=} h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \| \pi_F^{0,k} z_{e_h} - \pi_T^{0,l} z_{e_h} \|_{L^2(F)}^2 \qquad (8)$$

Pour tout $F \in \mathcal{F}_T$, on écrit

$$\| \pi_F^{0,k} z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} + \pi_T^{0,1} z_{e_h} - \pi_T^{0,l} z_{e_h} \|_{L^2(F)}$$

$\pi_F^{0,k}$ car $k \geq 1$ $\qquad$ $\pi_T^{0,l}$ car $l \geq 1$

$$\leq \| \pi_F^{0,k} z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} \|_{L^2(F)} + \| \pi_T^{0,1} z_{e_h} - \pi_T^{0,l} z_{e_h} \|_{L^2(F)}$$

$$\lesssim \| \pi_F^{0,k} (z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h}) \|_{L^2(F)} + h_T^{-1/2} \| \pi_T^{0,l} (z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h}) \|_{L^2(T)}$$

continuité L^2 du projecteur L^2

$$\leq \| z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} \|_{L^2(F)} + h_T^{-1/2} \| z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} \|_{L^2(T)}$$

$$\| \pi_F^{0,k} z_{e_h} - \pi_T^{0,\ell} z_{e_h} \|_{L^2(F)}$$

$$\lesssim \| z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} \|_{L^2(F)} + h_T^{-1/2} \| z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h} \|_{L^2(T)}$$

$$\lesssim h_T^{3/2} | z_{e_h} |_{H^2(T)} \qquad (9)$$

$$(8), (9) \Rightarrow \sum_{T \in \mathcal{T}_h} | \hat{\underline{z}}_T |_{1,\partial T}^2 \lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_T^3 | z_{e_h} |_{H^2(T)}^2$$

$$\lesssim h^2 \underbrace{\max_{T \in \mathcal{T}_h} \mathrm{card}(\mathcal{F}_T)}_{\lesssim 1 \text{ par régularité de maillage}} | z_{e_h} |_{H^2(\Omega)}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} | \hat{\underline{z}}_T |_{1,\partial T}^2 \overset{(2)}{\lesssim} h^2 \| e_h \|_{L^2(\Omega)}^2} \qquad (10)$$

(7) et (10) donnent

$$\mathcal{E}_2 \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \, h \|e_h\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= h^{r+2} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)}$$

En conclusion, les estimations de $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ donnent

$$\boxed{\|e_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{r+2} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \qquad \text{si } k \geq 1}$$

$\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^{k,\ell}$ solution du schéma HHO

- <u>Estimation en norme H^1</u> : si $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$, $r \in \{0, \dots, k\}$, alors

$$\| \underline{u}_h - \underline{I}_h^{k,\ell} u \|_{1,h} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}$$

- <u>Estimation en norme L^2</u> : $u_h, \hat{u}_h \in \mathcal{P}^{\max(0,\ell)}(\mathcal{T}_h)$ t.q., $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$(u_h)_{|T} := \begin{cases} u_T & \text{si } \ell \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d|T|} \int_F u_F & \text{si } \ell = -1, \end{cases}$$

$$(\hat{u}_h)_{|T} := \begin{cases} \pi_T^{0,\ell} u & \text{si } \ell \geq 0, \\ \displaystyle\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d|T|} \int_F u & \text{si } \ell = -1. \end{cases}$$

Nous nous intéressons à l'erreur

$$\| u_h - \hat{u}_h \|_{L^2(\Omega)}$$

lorsque Ω est convexe et $(k, \ell) \neq (1, 0)$.

- La dernière fois, nous avons prouvé que

$$\| u_h - \hat{u}_h \|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{r+2} | u |_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \quad \text{si} \quad k \geqslant 1$$

- Aujourd'hui on va compléter avec le cas $k = 0$, en distinguant trois sous-cas :

  - $\ell = 1$
  - $\ell = 0$
  - $\ell = -1$

Cela revient à trouver des estimations alternatives pour $\mathfrak{T}_2$.

Nous allons dorénavant travailler sous l'hypothèse

$$f \in H^1(\Omega) \quad \text{si} \quad \ell \in \{0, -1\}$$

$$\varepsilon_\ell(u; \hat{\underline{z}}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \hat{z}_T - a_h(\overset{\underline{I}_h^{k,\ell} u \,=}{\hat{\underline{u}}_h}, \hat{\underline{z}}_h)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \hat{z}_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \underbrace{\nabla p_T^1 \hat{\underline{u}}_T}_{\substack{\nabla p_T^1 \underline{I}_T^{k,\ell} u \\ = \nabla \varpi_T^1 u}} \cdot \underbrace{\nabla p_T^1 \hat{\underline{z}}_T}_{\nabla \varpi_T^1 z_{\ell h}} + s_T(\hat{\underline{u}}_T, \hat{\underline{z}}_T) \right)$$

$$= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T f \hat{z}_T - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla \varpi_T^1 z_{\ell h} + s_T(\hat{\underline{u}}_T, \hat{\underline{z}}_T) \right)$$

2.b.1) $\ell = 1$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \hat{z}_T = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \left(\pi_T^{0,1} z_{ee} - z_{ee}\right) + \int_\Omega f z_{ee}$$

déf. z_{ee}

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \left(\pi_T^{0,1} z_{ee} - z_{ee}\right) + a(u, z_{ee})$$

On a donc

$$\mathcal{E}_h(u; \hat{\underline{z}}_h) = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \left(\pi_T^{0,1} z_{ee} - z_{ee}\right)$$

$$+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla u \cdot \nabla z_{ee} - \int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla \varpi_T^1 z_{ee} \right)$$

$$+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} s_T(\hat{\underline{u}}_h, \hat{\underline{z}}_h)$$

$$=: \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} \qquad (*)$$

$$\bullet\ \mathcal{A} \overset{C-S}{\leq} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|f\|_{L^2(T)} \underbrace{\|z_{e_h} - \pi_T^{0,1} z_{e_h}\|_{L^2(T)}}_{\lesssim h_T^2 |z_{e_h}|_{H^2(T)}}$$

$h_T \leq h,$

$$\overset{C-S}{\leq} h^2 \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|f\|^2_{L^2(T)} \right)^{1/2} \times \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} |z_{e_h}|^2_{H^2(T)} \right)^{1/2}$$

$$= h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} |z_{e_h}|_{H^2(\Omega)} \overset{\text{rég. ell.}}{\lesssim} h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (12)$$

$$\bullet\ \mathcal{C} \overset{C-S}{\leq} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \underbrace{s_T(\hat{\underline{u}}_T, \hat{\underline{u}}_T)^{1/2}}_{\lesssim h_T |u|_{H^2(T)}} \underbrace{s_T(\hat{\underline{z}}_{e_h}, \hat{\underline{z}}_{e_h})^{1/2}}_{\lesssim h_T |z_{e_h}|_{H^2(T)}}$$

$$\lesssim h^2 |u|_{H^2(\Omega)} |z_{e_h}|_{H^2(\Omega)}$$

$$\overset{\text{rég. ell.}}{\lesssim} h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (13)$$

$$\bullet\ \mathcal{B} = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla u \cdot \nabla z_{eh} - \int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla \varpi_T^1 z_{eh} \right)$$

caractérisation ϖ_T^1, $\varpi_T^1 z_{eh} \in \mathbb{P}^1(T)$

$$\int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla \varpi_T^1 z_{eh} = \int_T \nabla u \cdot \nabla \varpi_T^1 z_{eh}$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla u \cdot \nabla (z_{eh} - \varpi_T^1 z_{eh})$$

$$- \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla (z_{eh} - \varpi_T^1 z_{eh})$$

$$+ \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla (z_{eh} - \varpi_T^1 z_{eh})$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla (u - \varpi_T^1 u) \cdot \nabla (z_{eh} - \varpi_T^1 z_{eh})$$

$$+ \cancel{\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T \nabla \varpi_T^1 u \cdot \nabla (z_{eh} - \varpi_T^1 z_{eh})}$$

caractérisation de $\varpi_T^1 z_{eh}$ et $\varpi_T^1 u \in \mathbb{P}^1(T)$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T \nabla(u - \varpi_T^1 u) \cdot \nabla(z_{e_h} - \varpi_T^1 z_{e_h})$$

$$\overset{C-S}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - \varpi_T^1 u)\|_{L^2(T)^d} \, \|\nabla(z_{e_h} - \varpi_T^1 z_{e_h})\|_{L^2(T)^d}$$

$$\lesssim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T |u|_{H^2(T)} \, h_T |z_{e_h}|_{H^2(T)}$$

$$\overset{h_T \leq h,\ C-S}{\leq} h^2 |u|_{H^2(\Omega)} |z_{e_h}|_{H^2(\Omega)}$$

$$\overset{\text{rég. ell.}}{\leq} h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (14)$$

En utilisant (12),(13) et (14) pour estimer le seconde membre de (11), on obtient

$$b_2 = \mathcal{E}_h(u; \hat{\underline{z}}_h) \lesssim h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \qquad (15)$$

Si on combine (15) avec l'estimation de $\mathcal{E}_1$, on obtient, après simplification,

$$\|e_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{si} \quad (k,\ell)=(0,1)$$

2.b.2) $(k,\ell)=(0,0)$

On écrit cette fois-ci :

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \hat{z}_T = \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T f \left(\pi_T^{0,0} z_{eh} - z_{e_h}\right) + a(u, z_{eh})$$

$$= \underbrace{\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \int_T (f - \pi_T^{0,0} f)(\pi_T^{0,0} z_{eh} - z_{eh})}_{\mathcal{A}'} + a(u, z_{eh})$$

On arrive à la décomposition

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_h(u; \underline{\hat{z}}_h) = \mathcal{A}' + \mathcal{B} + \mathcal{C} \qquad (16)$$

avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme dans (14)

Pour estimer $\mathcal{A}'$ on écrit

$$\mathcal{A}' \le \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|f - \pi_T^{0,0} f\|_{L^2(T)} \, \|z_{e_h} - \pi_T^{0,0} z_{e_h}\|_{L^2(T)}$$

$$\lesssim h^2 \, |f|_{H^1(\Omega)} \, \overbrace{|z_{e_h}|_{H^1(\Omega)}}^{\le \|z_{e_h}\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|e_h\|_{L^2(\Omega)}} \qquad (17)$$

c'est dans ce passage qu'on utilise l'hypothèse $f \in H^1(\Omega)$!!

Si on utilise (12), (13) et (17) pour estimer le second membre de (16), on obtient, après simplification,

$$\|e_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^2 \|f\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{si } (k, \ell) = (0, 0).$$

Pour traiter le cas $(k,\ell) = (0,-1)$ on a besoin d'étudier

$$\varpi_T^0 : H^1(T) \longrightarrow \mathbb{P}^0(T)$$
$$v \longmapsto \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d|T|} \int_F v \qquad (18)$$

Exercice Prouver que, $\forall w \in H^2(T)$,

$$\|\varpi_T^0 (w - \pi_T^{0,1} w)\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^2 \, |w|_{H^2(T)}. \qquad (19)$$

$\forall w \in H^2(T)$,

$$\|\varpi_T^0 (w - \pi_T^{0,1} w)\|_{L^2(T)}$$

$$= |T|^{1/2} \, |\varpi_T^0 (w - \pi_T^{0,1} w)|$$

$$\overset{(18)}{=} |T|^{1/2} \left| \frac{1}{|T|} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF}}{d} \underbrace{\int_F (w - \pi_T^{0,1} w)} \right|$$

caractérisation projecteur L^2

$$= \left| \int_F \pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w) \right|$$

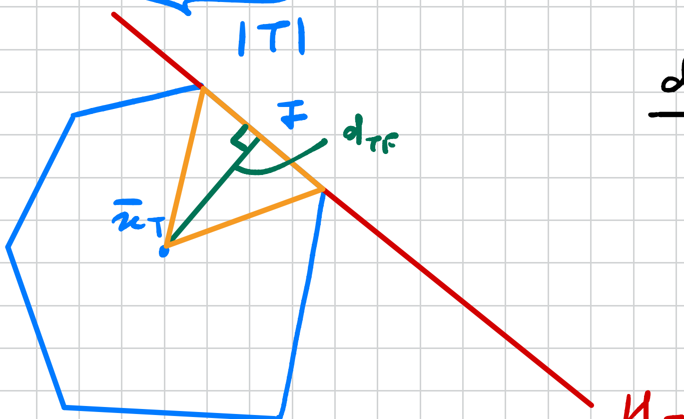
$$|F| \, |\pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w)|$$

$$\leq |T|^{-1/2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF} |F|^{1/2}}{d} \underbrace{|F|^{1/2} \, |\pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w)|}_{\|\pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w)\|_{L^2(F)}}$$

$$\Rightarrow \quad \| \mathfrak{D}_T^{0} (w - \pi_T^{0,1} w) \|_{L^2(T)}$$

$$\leq |T|^{-1/2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \left(\frac{d_{TF}^{1/2} |F|^{1/2}}{d^{1/2}} \right) \times \left(\frac{d_{TF}^{1/2}}{d^{1/2}} \| \pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w) \|_{L^2(F)} \right)$$

$$\overset{C-S}{\leq} |T|^{-1/2} \underbrace{\left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{d_{TF} |F|}{d} \right)^{1/2}}_{|T|} \times \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \frac{\overbrace{d_{TF}}^{\leq h_T}}{d} \| \pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1} w) \|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2}$$



$\dfrac{d_{TF} |F|}{d}$ = volume de la pyramide ayant pour sommet $\bar{x}_T$ et pour base F

$$\Rightarrow \quad \| \varpi_T^{0} (w - \pi_T^{0,1} w) \|_{L^2(T)}$$

$$\lesssim \cancel{|T|^{-1/2}} \; \cancel{|T|^{1/2}} \; h_T^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \| \pi_F^{0,0} (w - \pi_T^{0,1}) \|^2_{L^2(F)} \right)^{1/2}$$

$$\leq h_T^{1/2} \left(\sum_{F \in \mathcal{F}_T} \| w - \pi_T^{0,1} w \|^2_{L^2(F)} \right)^{1/2}$$

$$= h_T^{1/2} \; \underbrace{\| w - \pi_T^{0,1} w \|_{L^2(\partial T)}}_{h_T^{3/2} \, |w|_{H^2(T)}}$$

$$\Rightarrow \| \varpi_T^{0} (w - \pi_T^{0,1} w) \|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{2} \, |w|_{H^2(T)}$$

Remarque

On peut remarquer que

$$\varpi_T^0 \, \pi_T^{0,1} w = \frac{1}{|T|} \int_T \pi_T^{0,1} w \qquad \text{car } \pi_T^{0,1} w \in \mathbb{P}^1(T)$$

$$= \frac{1}{|T|} \int_T w \qquad \text{caractérisation } \pi_T^{0,1}$$

$$= \frac{1}{|T|} \int_T \pi_T^{0,0} w = \pi_T^{0,0} w \qquad \text{caractérisation } \pi_T^{0,0}$$

La formule (19) équivant donc à

$$\| \varpi_T^0 w - \pi_T^{0,0} w \|_{L^2(T)} \lesssim h_T^2 \, |w|_{H^2(T)} .$$

ϖ_T^0 fournit donc une approximation d'ordre 2 de la valeur moyenne d'une fonction régulière !

2.b.3) Le cas $(k,\ell)=(0,-1)$

$$\mathcal{E}_h(u; \underline{\hat{z}}_h) = \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T f\,\hat{z}_T\right) - a_h(\underline{\hat{u}}_h, \underline{\hat{z}}_h)$$

où $\underline{\hat{u}}_h := \underline{I}_h^k u$ et $\underline{\hat{z}}_h := \underline{I}_h^k z_{eh}$.

$\hat{z}_T := \varpi_T^0 z_{eh}$ et $\varpi_T^0(\pi_T^{0,1} z_{eh}) = \pi_T^0 z_{eh}$

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T f\,\hat{z}_T = \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\Bigg(\int_T f\,\varpi_T^0 z_{eh} \overbrace{- \int_T f\,\varpi_T^0(\pi_T^{0,1} z_{eh}) + \int_T f\,\pi_T^0 z_{eh}}^{0}$$

$$\underbrace{-\int_T f\, z_{eh} + \int_T f\, z_{eh}}_{0}\Bigg)$$

$$= \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\int_T f\,\varpi_T^0(z_{eh} - \pi_T^{0,1} z_{eh}) + \int_T f\,(\pi_T^0 z_{eh} - z_{eh})\right) + \int_\Omega f\, z_{eh}$$

On arrive donc à le décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_e(\mu; \hat{z}_h) = {} & \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T f\,\varpi_T^0\left(z_{eh} - \pi_T^{0,1} z_{eh}\right) && \Big\} =: \mathcal{B} \lesssim h^2 \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\int_T \left(f - \pi_T^0 f\right)\left(\pi_T^0 z_{eh} - z_{eh}\right) && \Big\} \lesssim h^2 \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \\
& + \int_\Omega f z_{eh} - a_h(\hat{\mu}_h, \hat{z}_h) && \Big\} \text{(traités comme dans le cas } (k,\ell) = (0,0))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} & \leq \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|f\|_{L^2(T)} \left\|\varpi_T^0\left(z_{eh} - \pi_T^{0,1} z_{e,h}\right)\right\|_{L^2(T)} \\
& \lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|f\|_{L^2(T)}\, h_T^2\, |z_{eh}|_{H^2(T)} \\
& \leq h^2 \underbrace{\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \|f\|_{L^2(T)}^2\right)^{1/2}}_{\|f\|_{L^2(\Omega)}} \underbrace{\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} |z_{eh}|_{H^2(T)}^2\right)^{1/2}}_{|z_{eh}|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|e_h\|_{L^2(\Omega)}} \qquad \square
\end{aligned}$$

$h_T \leq h\ \forall T\in\mathcal{T}_h$, C-S

$z_{e_h} \in H_0^1(\Omega)$ est le relèvement elliptique de l'erreur t.q.

$$a(v, z_{e_h}) = \int_\Omega e_h v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \qquad (20)$$

p.p. $\quad -\Delta z_{e_h} = e_h$

Pour extraire un h supplémentaire, nous avons utilisé $z_{e_h} \in H^2(\Omega)$.

Cette régularité est vérifiée si (20) vérifie la propriété de régularité elliptique : $\forall g \in L^2(\Omega)$, $z_g \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$a(v, z_g) = \int_\Omega g v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

vérifie

$$\|z_g\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|g\|_{L^2(\Omega)}$$

Ceci est vrai si Ω convexe.