$v : X \to \mathbb{R}$

$$\|v\|_{L^p(X)} \longmapsto \left(\int_X |v|^p \right)^{1/p}$$

$$\lesssim h^?$$

$$\|v\|_{L^p(X)} \qquad \|v\|_{L^q(X)}$$

$$\gtrsim h^?$$

$$p \le q$$

Inégalités locales

Remarque : Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un domaine, $\mathcal{M}_h$ un maillage et $x \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}^\ell(X)$ est un espace vectoriel de dimension finie. On a donc équivalence de toutes les normes sur $\mathbb{P}^\ell$.

En particulier $\forall q, m \in [1, \infty]$, la norme $L^q(X)$ d'un polynôme de $\mathbb{P}^\ell$ est équivalente à sa norme $L^m(X)$. Comment les constantes d'équivalence dépendent-elles de h_X ?

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{c.-à-d.}, \ \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall v_X \in \mathbb{P}^\ell(X) \\ \quad c_1 \|v_X\|_{L^q(X)} \leq \|v_X\|_{L^m(X)} \leq c_2 \|v_X\|_{L^q(X)} \end{array}}$$

Lemme (Inégalités de Lebesgue discrètes)

Soit $n \geq 1$ un entier, X un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$. Soit $\rho > 0$ t.q.

$$\boxed{\rho\, h_X \leq r_X.}$$

$$[\|\nabla x\|_{L^m(X)}] = \left[\left(\int_X |\nabla x|^m\right)^{1/m}\right]$$

$$= \left([X]\,[\nabla x]^m\right)^{1/m}$$

$$= [X]^{1/m}\,[\nabla x]$$

$$[X] \simeq (h_X)^{\dim(X)} = \begin{cases} h_X^{d} & \text{si } X \in \mathcal{T}_h \\ h_X^{d-1} & \text{si } X \in \mathcal{F}_h \end{cases}$$

$$[\|\nabla x\|_{L^q(X)}] = [X]^{1/q}\,[\nabla x]$$

$$\|\nabla x\|_{L^m(X)} \leq \underbrace{C}_{\simeq |X|^{\frac{1}{m}-\frac{1}{q}} \simeq h_X^{\dim(X)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{q}\right)}} \|\nabla x\|_{L^q(X)}$$

$$\| v_x \|_{L^{m}(X)} \lesssim |X|^{\frac{1}{m} - \frac{1}{q}} \| v_x \|_{L^{q}(X)}$$

la constante cachée dans "$\lesssim$"

ne dépend pas de h_x

Soit $\ell \geq 0$ un entier et $q, m \in [1, \infty]$.
Alors, pour tout $w \in \mathbb{P}^{\ell}(X)$,

$$\boxed{\|w\|_{L^q(X)} \simeq |X|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{m}} \|w\|_{L^m(X)}.}$$

Les constantes cachées dépendent uniquement de n, ℓ, ρ, m et q.

<u>Remarque :</u> Si $m < q$, alors $\frac{1}{q} - \frac{1}{m} < 0$

<u>Lemme (Inégalité inverse discrète)</u>

Soit X un ouvert borné convexe de $\mathbb{R}^n$ qui satisfait $\rho\, h_X \leq r_X$ pour un réel ρ.
Soit $\ell \geq 0$ un entier et $p \in [1, +\infty]$. Alors,

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{P}^{\ell}(X), \ \|\nabla v\|_{L^p(X)^n} \lesssim h_X^{-1} \|v\|_{L^p(X)}}$$

avec constante cachée dépendant uniquement de n, ρ, ℓ, p.

Lemme (Inégalités de trace) $(p=2)$

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ une suite de maillage régulière et soit $p\in[1,+\infty]$. Alors: $H^1(T)$

1) $\forall h\in\mathcal{H}$, $\forall T\in\mathcal{T}_h$, $\forall F\in\mathcal{F}_T$, $\forall v\in W^{1,p}(T)$,

INÉGALITÉ DE TRACE CONTINUE

$$\boxed{\|v\|_{L^p(F)} \lesssim h_T^{-\frac{1}{p}}\left(\|v\|_{L^p(T)} + h_T\|\nabla v\|_{L^p(T)^d}\right)}$$

avec constante cachée dépendant uniquement de d, ϱ et p.

$W^{1,p}(T)$
$\cup$

2) Si, en particulier, $v\in\mathbb{P}^\ell(T)$ avec $\ell\geq 0$ entier,

INÉGALITÉ DE TRACE DISCRÈTE

$$\boxed{\|v\|_{L^p(F)} \lesssim h_T^{-\frac{1}{p}}\|v\|_{L^p(T)}}$$

avec constante cachée dépendant de d, ϱ, p et ℓ.

$\boxed{p=2}$ $\forall v \in H^1(T)$,

$$\|v\|_{L^2(F)} \lesssim h_T^{-\frac{1}{2}} \left(\|v\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)^d} \right) \quad (A)$$

Si $v \in \mathbb{P}^e(T)$ pour un entier $e \geq 0$,

$$\|v\|_{L^2(F)} \lesssim h_T^{-1/2} \|v\|_{L^2(T)} \quad (B)$$

car on peut estimer $h_T \|\nabla v\|_{L^2(T)^d} \lesssim \|v\|_{L^2(T)}$

à l'aide de l'inégalité inverse

(A) := inégalité de trace continue

(B) := inégalité de trace discrète

$$[\|v\|_{L^2(F)}] = |F|^{1/2} [v] = h_T^{\frac{(d-1)}{2}} [v]$$

$$[\|v\|_{L^2(T)}] = |T|^{1/2} [v] = h^{\frac{d}{2}} [v]$$

$$\|v\|_{L^p(F)} \lesssim h_T^{-\frac{1}{p}} \Big(\underline{\|v\|_{L^p(T)}} + \underline{h_T \|\nabla v\|_{L^p(T)^d}} \Big)$$

- $[\,\|v\|_{L^p(F)}\,] = \Big[\Big(h_T^{n-1} [v]^p \Big)^{1/p} \Big] = h_T^{(n-1)/p} [v]$

- $*\; [\,\|v\|_{L^p(T)}\,] = \Big[\Big(h_T^{n} [v]^p \Big)^{1/p} \Big] = \underline{h_T^{\frac{n}{p}} [v]}$

$*\; [\, h_T \|\nabla v\|_{L^p(T)^d} \,] = h_T \Big(h_T^{n} \Big(\frac{1}{h_T} [v] \Big)^p \Big)^{1/p}$

$$= \underline{h_T^{\frac{n}{p}} [|v|]}$$

$$* \Big[h_T^{-\frac{1}{p}} \Big(\|v\|_{L^p(T)} + h_T \|\nabla v\|_{L^p(T)^d} \Big) \Big] = h_T^{-\frac{1}{p}} \; h_T^{\frac{n}{p}} [v]$$

$$= h_T^{\frac{n-1}{p}} [v]$$

$$\|v\|_{L^p(F)} = \Big(\int_F |v|^p \Big)^{1/p}$$

Projecteurs sur des espaces de polynômes locaux

On va aborder le problème : "Comment approcher une fonction régulière à l'aide d'un polynôme ?"

Le projecteur L^2-orthogonal

Soit $X \in \mathcal{T}_h \cup \mathcal{F}_h$, $\ell \geq 0$ un entier.

Le projecteur L^2-orthogonal

$$\pi_X^{0,\ell} : L^1(X) \longrightarrow \mathbb{P}^\ell(X)$$

est telle que, $\forall v \in L^1(X)$,

$$\boxed{\pi_X^{0,\ell} v := \arg\min_{w \in \mathbb{P}^\ell(X)} \|w - v\|^2_{L^2(X)} .}$$

La solution de ce problème est caractérisée par l'**ÉQUATION D'EULER**

$$\boxed{(\pi_X^{0,\ell} v - v , w)_X = 0 \qquad \forall w \in \mathbb{P}^\ell(X)}$$

$$\parallel$$

$$\int_X (\pi_X^{0,\ell} v - v)\, w \qquad \text{produit scalaire de } L^2(X)$$

Le projecteur elliptique

Soit $T \in \mathcal{T}_h$ et $\ell \geq 0$ un entier. $H^1(T)$

Le projecteur elliptique $\pi_T^{1,\ell} : \cancel{W^{1,1}(T)} \longrightarrow \mathbb{P}^\ell(T)$ $(H^1(T) = W^{1,2}(T))$

est t.q. $\forall v \in W^{1,1}(T)$,

$$\boxed{\pi_T^{1,\ell} v := \underset{w \in \mathbb{P}^\ell(T),\ \int_T w = \int_T v}{\arg\min} \|\nabla(w - v)\|^2_{L^2(T)^d}}$$

La projection elliptique est caractérisée par l'équation d'Euler : $/\!/ \int_X \nabla(\pi_T^{1,\ell} v - v) \cdot \nabla w$

$$\boxed{\begin{gathered} (\nabla(\pi_T^{1,\ell} v - v), \nabla w)_X = 0 \quad \forall w \in \mathbb{P}^\ell(T) \\ \int_T \pi_T^{1,\ell} v = \int_T v \end{gathered}}$$

Nous allons ensuite énoncer des résultats d'approximation pour ces projecteurs basés sur la théorie de [Dupont-Scott, 1980].

Theorem 1.44 (Approximation properties of the L^2-orthogonal projector on elements and faces). *Let $(\mathcal{M}_h)_{h\in\mathcal{H}} = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ be a regular mesh sequence in the sense of Definition 1.9. Let a polynomial degree $l \geq 0$, an integer $s \in \{0, \ldots, l+1\}$, and a real number $p \in [1, \infty]$ be given. Then, for any X element or face of $\mathcal{M}_h$, all $v \in W^{s,p}(X)$, and all $m \in \{0, \ldots, s\}$,*

$$|v - \pi_X^{0,l} v|_{W^{m,p}(X)} \lesssim h_X^{s-m} |v|_{W^{s,p}(X)}. \tag{1.72}$$

Moreover, if $s \geq 1$, for all $T \in \mathcal{T}_h$, all $v \in W^{s,p}(T)$, all $F \in \mathcal{F}_T$, and all $m \in \{0, \ldots, s-1\}$, it holds that

$$\cancel{h_T^{\frac{1}{p}} |v - \pi_T^{0,l} v|_{W^{m,p}(F)} \lesssim h_T^{s-m} |v|_{W^{s,p}(T)}. \quad (1.73)}$$

In (1.72) and (1.73), the hidden constants depend only on d, ϱ, l, s, p, and m.

$$\|\nabla(v - \pi_T^{0,l} v)\|_{L^p(F)^d} \lesssim h_T^{s-1-\frac{1}{p}} |v|_{W^{s,p}(T)}$$

Theorem 1.48 (Approximation properties of the elliptic projector on elements). *Let $(\mathcal{M}_h)_{h\in\mathcal{H}} = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)_{h\in\mathcal{H}}$ be a regular mesh sequence in the sense of Definition 1.9. Let a polynomial degree $l \geq 0$, an integer $s \in \{1, \ldots, l+1\}$, and a real number $p \in [1, \infty]$ be given. Then, for all $T \in \mathcal{T}_h$, all $v \in W^{s,p}(T)$, and all $m \in \{0, \ldots, s\}$,*

$$|v - \pi_T^{1,l} v|_{W^{m,p}(T)} \lesssim h_T^{s-m} |v|_{W^{s,p}(T)}. \tag{1.78}$$

Moreover, if $m \leq s-1$, for all $F \in \mathcal{F}_T$,

$$\cancel{h_T^{\frac{1}{p}} |v - \pi_T^{1,l} v|_{W^{m,p}(F)} \lesssim h_T^{s-m} |v|_{W^{s,p}(T)}.} \tag{1.79}$$

The hidden constants in (1.78) and (1.79) depend only on d, ϱ, l, s, and p.

$$\|\nabla(v - \pi_T^{1,l} v)\|_{L^p(T)^d} \lesssim h_T^{s-m-\frac{1}{2}} |v|_{W^{s,p}(T)}.$$