



M2 MANU - 2024/2025

Analyse des EDPs III - TD2



Exercice 1.

Soit $(h_0, \dot{h}_0) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$. Etant donné $\alpha > 0$, on considère le problème de Cauchy d'inconnue la fonction h :

$$\ddot{h} + \frac{\dot{h}}{h^\alpha} = 0 \quad h(0) = h_0 \quad \dot{h}(0) = \dot{h}_0. \quad (1)$$

Montrer qu'il existe une unique solution non-prolongeable (T^*, h) de (1). Discuter en fonction de α si $T^* \in (0, \infty)$ ou si $T^* = \infty$

Dans les exercices suivants on considère $\Omega = \mathbb{R}_+^2$, et, pour $h > 0$, on note B_h le disque de centre $(0, (1+h))$ et de rayon 1. Etant donné $\eta \in (0, 1)$ on note

$$\mathcal{G}_\eta = \{(x_1, x_2) \in \Omega \setminus \overline{B}_h \text{ t.q. } |x_1| < \eta_0 \text{ et } x_2 < (1+h)\}$$

Exercice 2.

1. Faire un dessin représentant Ω et B_h .
2. Calculer $\text{dist}(B_h, \partial\Omega)$ et montrer que cette distance est réalisée exactement par deux points respectivement de ∂B_h et $\partial\Omega$
3. Calculer $\gamma_t : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$((x_1, x_2) \in \partial B_h \text{ et } x_2 < 1+h) \Leftrightarrow x_2 = h + \gamma_t(x_1)$$

4. Etant donné $\eta < 1$, réécrire \mathcal{G}_η en fonction de γ_t .

Exercice 3.

Dans cet exercice, on suppose que $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ est à divergence nulle et qu'il existe $V \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = V$ sur B_h .

1. Etant donné $\ell < 1$, en intégrant $\text{div}u = 0$ dans \mathcal{G}_ℓ , montrer que:

$$2|V_2|\ell \leq |h + \gamma_t(\ell)|^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{h+\gamma_t(\ell)} |\partial_2 u_1(\ell, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} + |h + \gamma_t(-\ell)|^{\frac{3}{2}} \left(\int_0^{h+\gamma_t(-\ell)} |\partial_2 u_1(-\ell, z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. En intégrant sur ℓ en déduire que pour tout $\eta < 1$:

$$|V_2| \leq \frac{|h + \gamma_t(\eta)|^{\frac{3}{2}}}{\eta^{\frac{3}{2}}} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

3. En déduire un exposant e tel que, pour $h < 1$:

$$|V_2| \leq 2^{\frac{3}{2}} h^e \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

$\frac{1}{h}$

γ_t
 ℓ $\gamma_t(\ell)$

\leftarrow \leftarrow \times \times

Exercice 4.

Dans cet exercice, on se donne $\eta_0 \in (0, 1)$, on considère l'espace:

$$\tilde{K} := \{\psi \in H^2(\mathcal{G}_{\eta_0}) \text{ t.q. } \psi(x_1, 0) = \partial_2 \psi(x_1, 0) = 0, \underbrace{\psi(x_1, h + \gamma_t(x_1))}_{\wedge} = x_1, \underbrace{\partial_2 \psi(x_1, h + \gamma_t(x_1))}_{\wedge} = 0\}$$

et on étudie des propriétés de

$$\psi_0 = \operatorname{argmin} \left\{ \int_{\mathcal{G}_{\eta_0}} |\partial_{22} \psi|^2, \quad \psi \in \tilde{K} \right\}$$

1. Etant donné $\psi \in \tilde{K}$ calculer $\nabla^\perp \psi$ sur $\partial B_h \cap \mathcal{G}_{\eta_0}$ et sur $\partial \Omega$. Quelle solution du problème de Stokes essaie-t-on d'approcher ?
2. Montrer que, si ψ_0 défini comme ci-dessus existe, alors:

$$\partial_{2222} \psi_0(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{G}_{\eta_0}.$$

En déduire que, notant $P_{opt}(t) = 3t^2 - 2t^3$, on a:

$$\psi_0(x_1, x_2) = x_1 P_0 \left(\frac{x_2}{h + \gamma_t(x_1)} \right)$$

3. Montrer que $\|\nabla \psi_0\|_{L^2(\mathcal{G}_0)}$ est bornée indépendamment de $h < 1$.
4. Déterminer la constante C_{dom} telle que, quand $h \rightarrow 0$.

$$\int_{\mathcal{G}_\eta} |\partial_{22} \psi_0|^2 = \frac{C_{dom}}{h^{3/2}} + O(1/\sqrt{h})$$

Dans la suite de l'énoncé, on note $u = \nabla^\perp \psi$.

5. Montrer qu'il existe $p_0 \in C^\infty(\mathcal{G}_0)$ tel que
 - $p_0(\pm \eta_0, x_2) = 0$ pour tout $x_2 \in (0, h + \gamma_t(\eta_0))$
 - $\partial_{222} \psi_0 + \partial_1 p_0 = 0$.
6. On pose $p = p_0 + \partial_{21} \psi_0$, Calculer $f = \Delta u - \nabla p$ en fonction ψ_0
7. Montrer qu'il existe une constante C indépendante de h telle que:

$$\left| \int_{\mathcal{G}_{\eta_0}} f \cdot v \right| \leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega \setminus \overline{B_h})}$$

pour tout $v \in [H_0^1(\Omega \setminus \overline{B_h})]^2$



M2 MANU - 2023/2024

Analyse des EDPs III - Contrôle Continu

Exam



Le sujet est constitué de trois exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tous les documents de cours et ressources bibliographiques imprimées sont autorisés. Aucun support numérique n'est autorisé. Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction et à la précision des références au cours.

Durée : 1h30.

Exercice 1.

On considère un obstacle \mathcal{B} immergé dans un fluide visqueux incompressible contenu dans une cavité $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. On suppose que \mathcal{B} est un ouvert de bord régulier tel que $\bar{\mathcal{B}} \subset \Omega$ et on note $\mathcal{F} = \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}$. On note également $u : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{R}$ respectivement le champ de vitesses et la pression du fluide.

1. Exprimer la force F exercée par le fluide sur l'obstacle \mathcal{B} en fonction de u et p .
2. On suppose de plus que (u, p) satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \mathcal{F} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathcal{F} \end{cases}$$

Donner deux autres formules permettant de calculer la force F subie par \mathcal{B} .

Exercice 2.

Dans cet exercice on considère \mathcal{B} ouvert de bord lisse tel que $\bar{\mathcal{B}} \subset \Omega$ ouvert borné de \mathbb{R}^3 . On se donne $(V, \omega) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et on veut construire un champ de vitesse $u \in [C^\infty(\Omega)]^3$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{sur } \Omega \\ u = V + \omega \times x & \text{sur } \mathcal{B} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Dans toute la suite, pour un vecteur a on note (a_1, a_2, a_3) ses coordonnées dans la base canonique. On rappelle alors que, pour tout vecteur $a \in \mathbb{R}^3$ et $b \in \mathbb{R}^3$, on définit $a \times b = c$

par

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

1. Soit $A \in [C^\infty(\Omega)]^3$ et on pose $v = \nabla \times A$ c'est-à-dire:

$$v_1 = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 \quad v_2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3 \quad v_3 = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1.$$

Montrer que $\operatorname{div} v = 0$.

2. On définit $A^{(0)} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$A^{(0)}(x) = \frac{1}{2} [V \times x + \omega |x|^2]$$

Calculer $v^{(0)} = \nabla \times A^{(0)}$.

3. En déduire un champ $u \in [C^\infty(\Omega)]^3$ satisfaisant (1). Justifier.

Exercice 3.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert borné de bord régulier et $G \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overline{B(G, 1)} \subset \Omega$. On fixe $(V, \omega) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ et (u, p) l'unique solution de:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(G, 1)} \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(G, 1)} \end{cases} \quad \begin{cases} u(x) = V + \omega(x - G)^\perp & \text{sur } B(G, 1) \\ u(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On note alors:

$$F = \int_{\partial B(G, 1)} (2D(u) - p\mathbb{I}_2) n d\sigma \quad T = \int_{\partial B(G, 1)} (x - G)^\perp \cdot (2D(u) - p\mathbb{I}_2) n d\sigma$$

avec $D(u)$ la partie symétrique de ∇u , \mathbb{I}_2 la matrice identité 2×2 et n la normale à $\partial B(G, 1)$ orientée vers G .

1. Rappeler la caractérisation variationnelle de u .

Indication: On pourra utiliser les notations du cours.

2. Montrer que $\mathcal{D} := F \cdot V + \omega T$ satisfait:

$$\mathcal{D} = \int_{\Omega} |\nabla u|^2.$$

3. En déduire que

$$\mathcal{D} = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \mid v \in [C_c^\infty(\Omega)]^2, \operatorname{div} v = 0, v(x) = V + \omega(x - G)^\perp \text{ sur } B(G, 1) \right\}.$$

4. Etant donné $0 < r < 1$ on considère la solution (u_r, p_r) de

$$\begin{cases} -\Delta u_r + \nabla p_r = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(G, r)} \\ \operatorname{div} u_r = 0 & \text{dans } \Omega \setminus \overline{B(G, r)} \end{cases} \quad \begin{cases} u_r(x) = V + \omega(x - G)^\perp & \text{sur } B(G, r) \\ u_r(x) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Montrer que:

$$\mathcal{D} \geq \int_{\Omega} |\nabla u_r|^2.$$

En déduire qu'il existe une constante $a_r > 0$ ne dépendant que de r (mais indépendante de V, ω et G) telle que:

$$\mathcal{D} \geq a_r (|V|^2 + |\omega|^2)$$



Le sujet est constitué de trois exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tous les documents de cours et ressources bibliographiques imprimées sont autorisés. Aucun support numérique n'est autorisé. Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction et à la précision des références au cours. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.

Durée : 2h.

Exercice 1.

Soit B un solide de forme $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^2$. On note m la masse de B et J son inertie. On suppose que ce solide se déplace sur l'intervalle de temps $(0, T_{fin})$ sous l'action d'une force F et d'un couple T constants au cours du temps. On introduit $G(t)$ et $\theta(t)$ respectivement la position du centre masse et l'orientation de B à l'instant $t \in (0, T_{fin})$.

1. Rappeler la forme des équations de Newton en fonction de G, θ et F, T .
2. On considère le déplacement $G_0(t)$ du point d'abscisse G_0 dans la forme \mathcal{B}_0 de B . Calculer l'accélération de $G_0(t)$ au cours du temps en fonction de F et T .

Exercice 2.

Dans cet exercice, on fixe $(h, L) \in (0, \infty)^2$ tel que $h/L \ll 1$ et $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction profil donnée qui reste strictement positive. On note

$$\Omega = \{(x, y) \text{ t.q. } x \in (-L, L) \text{ et } y \in (0, h\varphi(x/L))\}.$$

et on suppose que $((u_x, u_y), p)$ satisfait:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, 0) = (0, 0) \\ u(x, h\varphi(x/L)) = (0, 1) \end{cases} \quad \text{pour } x \in (-L, L)$$

On cherche (u_x, u_y, p) de la forme:

$$u_x(x, y) = \frac{L}{h} \tilde{u}_x \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{h} \right) \quad u_y(x, y) = \tilde{u}_y \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{h} \right) \quad p(x, y) = \frac{L^2}{h^3} \tilde{p} \left(\frac{x}{L}, \frac{y}{h} \right)$$

1. Notant $\tilde{\Omega} = \{(s, t) \text{ t.q. } s \in (-1, 1) \text{ et } t \in (0, \varphi(s))\}$, montrer que $(\tilde{u}_x(s, t), \tilde{u}_y(s, t), \tilde{p}(s, t))$ est défini pour $(s, t) \in \tilde{\Omega}$ et satisfait:

- $\tilde{u}_x(s, 0) = \tilde{u}_x(s, \varphi(s)) = \tilde{u}_y(s, 0) = 0$ pour $s \in (-1, 1)$
- $\tilde{u}_y(s, \varphi(s)) = 1$ pour $s \in (-1, 1)$
- le système d'équations suivant:

$$\frac{h^2}{L^2} \partial_{ss} \tilde{u}_x + \partial_{tt} \tilde{u}_x = \partial_s \tilde{p}, \quad \frac{h^4}{L^4} \partial_{ss} \tilde{u}_y + \frac{h^2}{L^2} \partial_{tt} \tilde{u}_y = \partial_t \tilde{p}, \quad \partial_s \tilde{u}_x + \partial_t \tilde{u}_y = 0$$

2. En déduire qu'un bon système approché pour $(\tilde{u}_x, \tilde{u}_y, \tilde{p})$ est

$$\partial_{tt} \tilde{u}_x = \partial_s \tilde{p}, \quad \partial_t \tilde{p} = 0, \quad \partial_s \tilde{u}_x + \partial_t \tilde{u}_y = 0.$$

3. Montrer que, $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{p})$ est solution du système approché si et seulement si il existe une fonction $\pi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

$$\hat{p}(s, t) = \pi(s) \quad \hat{u}_x(s, t) = \frac{t(t - \varphi(s))}{2} \pi'(s) \quad \hat{u}_y(t) = - \int_0^t \partial_s \left(\frac{\sigma(\sigma - \varphi(s))}{2} \pi'(s) \right) d\sigma$$

et π est solution du :

$$\frac{1}{12} \partial_s [\varphi^3 \partial_s \pi] = 1.$$

Exercice 3.

Dans cet exercice, on considère Ω et \mathcal{B} des ouverts réguliers bornés de \mathbb{R}^2 tels que $\bar{\mathcal{B}} \subset \Omega$. On pose $\mathcal{F} = \Omega \setminus \bar{\mathcal{B}}$. Étant donné $f \in [L^2(\mathcal{F})]^2$, on veut résoudre le problème d'inconnues (V, ω) et (u, p) décrit comme suit:

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = f & \text{sur } \mathcal{F}, \\ \operatorname{div} u = 0 & \end{cases} \quad \begin{cases} u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u = V + \omega(x - G)^\perp & \text{sur } \partial\mathcal{B} \end{cases}$$

avec:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (2D(u) - p\mathbb{I}_2) n d\sigma = 0 \quad \int_{\partial\mathcal{B}} (x - G)^\perp \cdot (2D(u) - p\mathbb{I}_2) n d\sigma = 0.$$

Pour cela, on construit:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0[\mathcal{B}] &= \{u \in [C_c^\infty(\Omega)]^2, \text{ tel que } \operatorname{div} u = 0 \text{ et } \exists (V_u, \omega_u) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } u = V_u + \omega_u(x - G)^\perp \text{ sur } \mathcal{B}\} \\ K_0[\mathcal{B}] &= \{u \in [H_0^1(\Omega)]^2, \text{ tel que } \operatorname{div} u = 0 \text{ et } \exists (V_u, \omega_u) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } u = V_u + \omega_u(x - G)^\perp \text{ sur } \mathcal{B}\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $K_0[\mathcal{B}]$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v \quad \forall (u, v) \in [K_0[\mathcal{B}]]^2$$

2. Justifier que $\mathcal{K}_0[\mathcal{B}]$ est dense dans $K_0[\mathcal{B}]$.

3. Montrer que, si $(u, p) \in [C^2(\bar{\mathcal{F}})]^2 \times C^1(\mathcal{F})$ associé à $(V, \omega) \in \mathbb{R}^3$ est une solution classique de notre problème alors \bar{u} défini par

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{sur } \bar{\mathcal{F}}, \\ V + \omega(x - G)^\perp & \text{sur } \mathcal{B}, \end{cases}$$

satisfait

- $\bar{u} \in K_s[\mathcal{B}]$
- pour tout $w \in K_s[\mathcal{B}]$ on a :

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} : \nabla w = \int_{\mathcal{F}} f \cdot w.$$

Dans la suite, on fixe $f \in [C_c^\infty(\mathcal{F})]^2$. On dit que \bar{u} est une solution faible si $u \in K_s[\mathcal{B}]$ satisfait:

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{u} : \nabla w = \int_{\mathcal{F}} f \cdot w. \quad \forall w \in K_s[\mathcal{B}].$$

4. Montrer qu'il existe une unique \bar{u} solution faible de notre problème.



M2 MANU - 2024/2025

Analyse des EDPs III - Examen



Le sujet est constitué de quatre exercices. Il est possible d'admettre et d'utiliser des résultats de l'énoncé pour répondre aux questions suivantes. Tous les documents de cours et ressources bibliographiques imprimées sont autorisés. Aucun support numérique n'est autorisé. Une attention particulière sera portée à la clarté de la rédaction et à la précision des références au cours. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour avoir la note maximale.

Durée : 2h.

Exercice 1.

Soit $\gamma \in C^3(\mathbb{R})$. On suppose:

$$\gamma(0) = 0 \quad \gamma'(0) = 0 \quad \gamma''(0) > 0.$$

1. Montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ tel que $\gamma(x) > 0$ pour $x \in (-\eta_0, \eta_0) \setminus \{0\}$. On garde cette valeur de η_0 par la suite.

2. Etant donné $p \in \mathbb{N}$, on pose:

$$F_p(h) = \int_{-\eta_0}^{\eta_0} \frac{x^p dx}{(h + \gamma(x))} \quad \forall h \in (0, 1).$$

(a) Montrer que F_p est bornée pour $p \geq 2$

(b) Déterminer $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} F_0(h)$.

(c) Montrer que F_1 est bornée.

Dans les exercices qui suivent, on note $B(x, r)$ la boule euclidienne de centre $x \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$. Etant donné $h \in (0, 1)$, on introduit

$$B = B((0, 2), 2) \quad B_h = B((0, 1+h), 1) \quad \mathcal{F}_h = B \setminus \overline{B_h}$$
$$\mathcal{G}_{h,\eta} := \{(x_1, x_2) \in \mathcal{F}_h \text{ t.q. } |x_1| < \eta, \quad x_2 < 1+h\}.$$

Exercice 2.

1. Faire une figure (à la main) représentant B et B_h .

2. Calculer $\gamma_b : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ et $\gamma_t : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$((x_1, x_2) \in \partial B_h \text{ et } x_2 < 1+h) \Leftrightarrow x_2 = h + \gamma_t(x_1)$$
$$((x_1, x_2) \in \partial B \text{ et } x_2 < 1+h) \Leftrightarrow x_2 = \gamma_b(x_1)$$

3. Etant donné $\eta < 1$, réécrire $\mathcal{G}_{h,\eta}$ en fonction de γ_t et γ_b .

Exercice 3.

Dans cet exercice, on fixe $\ell \in \mathbb{R}^2$ et on s'intéresse au problème:

$$\Delta\psi = 0 \text{ dans } \mathcal{F}_h \quad \partial_n\psi = 0 \text{ sur } \partial B \quad \partial_n\psi = \ell \cdot n \text{ sur } \partial B_h \quad (P)$$

où on note n la normale sortante au bord de \mathcal{F}_h .

1. On suppose qu'il existe une solution ψ régulière. Montrer que cette solution satisfait

$$\psi \in H^1(\mathcal{F}_h) \quad \int_{\mathcal{F}_h} \nabla\psi \cdot \nabla\phi = \int_{\partial B_h} (\ell \cdot n)\phi. \quad (P_w)$$

2. Montrer qu'il existe un unique ψ_ℓ satisfaisant (P_w) .

3. On admet que $\psi_\ell \in C^2(\overline{\mathcal{F}_h})$. Montrer que $u_\ell = \nabla\psi_\ell$ satisfait:

$$\operatorname{div} u_\ell = 0 \text{ sur } \mathcal{F}_h, \quad u_\ell \cdot n = 0 \text{ sur } \partial B, \quad u_\ell \cdot n = \ell \cdot n \text{ sur } \partial B_h.$$

Exercice 4.

Dans cet exercice, on se donne $\eta_0 \in (0, 1)$. Pour $h \in (0, 1)$, on considère l'espace:

$$\tilde{K} := \{\psi \in H^1(\mathcal{G}_{h, \eta_0}) \text{ t.q. } \psi(x_1, \gamma_b(x_1)) = 0, \psi(x_1, h + \gamma_t(x_1)) = x_1\}$$

et on étudie des propriétés de ψ_0 minimiseur de

$$\left\{ \int_{\mathcal{G}_{h, \eta_0}} |\partial_2 \psi|^2, \quad \psi \in \tilde{K} \right\} \quad (P_{app})$$

1. Montrer que, si ψ_0 défini comme ci-dessus existe, alors:

$$\partial_{22}\psi_0(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sur } \mathcal{G}_{h, \eta_0}.$$

En déduire que,

$$\psi_0(x_1, x_2) = \frac{x_1(x_2 - \gamma_b(x_1))}{h + (\gamma_t(x_1) - \gamma_b(x_1))}.$$

2. Montrer que le minimum correspondant de (P_{app}) est uniformément borné pour $h \in (0, 1)$.

Hors Barème Etant donné $\psi \in \tilde{K}$ calculer $\nabla^\perp \psi \cdot n$ sur $\partial \mathcal{F}_h \cap \mathcal{G}_{\eta_0}$. Pour quelle valeur de ℓ essaie-t-on d'approcher un minimiseur de:

$$\left\{ \int_{\mathcal{F}_h} |u|^2 \quad u \in H^1(\mathcal{F}_h) \quad \operatorname{div} u = 0 \quad u \cdot n = 0 \text{ sur } \partial B, \quad u \cdot n = \ell \cdot n \text{ sur } \partial B_h. \right\}.$$

Justifier que ce minimum est uniformément borné pour $h \in (0, 1)$



M2 MANU - 2023/2024

Analyse des EDPs III - TD2



Dans cette suite d'exercices, on propose un autre point de vue sur le calcul des efforts appliqués par un fluide sur un solide immergé. Dans tous les exercices, on considère Ω ouvert borné simplement connexe de \mathbb{R}^2 et $V \in \mathbb{R}^2$ fixé. On introduit alors

$$\mathcal{A}_0 := \{G \in \Omega \text{ tel que } \text{dist}(G, \partial\Omega) > 1\}$$

et, pour $G \in \mathcal{A}_0$, on note (u_G, p_G) l'unique solution de:

$$\begin{aligned} -\Delta u_G + \nabla p_G &= 0 && \text{sur } \mathcal{F}_G \\ \operatorname{div} u_G &= 0 && \text{sur } \mathcal{F}_G \\ u_G &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \\ u_G &= V && \text{sur } \partial B(G, 1) \end{aligned}$$

où $B(G, 1) := \{x \in \mathbb{R}^2 \text{ t.q. } |x - G| < 1\}$. Ceci permet alors de calculer

$$F(G) := - \int_{\partial B(G, 1)} (2D(u_G) - p_G \mathbb{I}) n d\sigma.$$

On rappelle que, pour $G \in \mathcal{A}_0$, on note:

$$Y[G] := \{u \in [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ t.q. } \operatorname{div} u = 0 \quad u = 0 \text{ sur } B(G, 1)\}$$

$$K[G] := \{u \in [H_0^1(\Omega)]^2 \text{ t.q. } \operatorname{div} u = 0 \quad u = V \text{ sur } B(G, 1)\}$$

L'objectif des exercices ci-dessous est de montrer que F est C^∞ sur \mathcal{A}_0 . Pour cela, on fixe $G_0 \in \mathcal{A}_0$ et on veut montrer que F est C^∞ sur un voisinage de G_0 .

Exercice 1.

1. Justifier que \mathcal{A}_0 est un ouvert.
2. Etant donné $G_0 \in \mathcal{A}_0$ montrer qu'il existe $\eta_0 > 0$ et $d_0 > 0$ tel que, pour tout $G \in B(G_0, \eta_0)$ on a $\text{dist}(B(G, 1), \partial\Omega) \geq 2d_0$.
3. Etant donné $W \in \mathbb{R}^2$ construire une fonction $w_0 \in [C_c^\infty(\Omega)]^2$ telle que:
 - $\operatorname{div} w_0 = 0$
 - $w_0(x) = W$ si $x \in \Omega \setminus [\partial\Omega]_{d_0}$ où $[\partial\Omega]_{d_0} := \{x \in \Omega \text{ t.q. } \text{dist}(x, \partial\Omega) < d_0\}$
 - En déduire que, pour tout $G \in B(G_0, \eta_0)$ on a:

$$F(G) \cdot W = 2 \int_{[\partial\Omega]_{d_0}} D(u_G) : D(w_0)$$

Exercice 2.

On fixe η_0, d_0 comme dans l'exercice précédent. Etant donné $G \in B(G_0, \eta_0)$ construire une application X_G telle que

1. $X_G : \Omega \rightarrow \Omega$ est C^∞ , et satisfait $X_G(B(G_0, 1)) = B(G, 1)$,
2. $X_G(x) = x + G - G_0$ sur $\Omega \setminus |\partial\Omega|_{3d_0/2}$,
3. $X_G(x) = x$ sur $|\partial\Omega|_{d_0}$.

Quitte à diminuer η_0 , montrer que X_G est un C^∞ -difféomorphisme.

Indication: On pourra chercher X_G sous la forme $X_G(x) = x + \chi(x)(G - G_0)$ avec χ une fonction de troncature. On admettra dans la suite que $G \mapsto X_G$ et $G \mapsto Y_G = X_G^{-1}$ sont C^∞ sur $B(G_0, \eta_0)$ à valeur dans $C^k(\bar{\Omega})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

1. Soit $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tel que ψ est constante sur $B(G_0, 1)$ montrer que $\psi_G := \psi \circ Y_G$ satisfait
 - $\psi_G \in C_c^\infty(\Omega)$
 - ψ_G est constante sur $B(G, 1)$
2. Calculer $\nabla \psi_G$ en fonction de $\nabla \psi$ et Y_G .
3. En déduire une application linéaire continue inversible T_G qui envoie $Y[G_0]$ sur $Y[G]$
4. Monter que la même application envoie $K[G_0]$ sur $K[G]$
5. Pour tout $(v, w) \in K[G_0] \times Y[G_0]$ écrire

$$2 \int_{\Omega} D(T_G[v]) : D(T_G[w])$$

en fonction de v, w , leurs dérivées et Y_G, X_G .

Exercice 4.

Dans cet exercice, on note v_0 la construction w_0 du premier exercice correspondant au vecteur V .

1. Montrer qu'il existe un unique $v \in Y[G_0]$ tel que $u_G = v_0 + T_G[v]$.
2. En déduire que u_G est caractérisé par $u_G = v_0 + T_G[v_G]$ avec $v_G \in Y[G_0]$ tel que:

$$2 \int_{\Omega} D(T_G[v_G]) : D(T_G[w]) = -2 \int_{\Omega} D(v_0) : D(T_G[w]) \quad \forall w \in Y[G_0]. \quad (1)$$

3. Montrer que, pour $W \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$F(G) \cdot W = 2 \int_{\Omega} D(w_0) : D(v_0 + v_G).$$

Exercice 5.

Au vu de la dernière question de l'exercice précédent, pour montrer que F est C^∞ sur $B(G_0, \eta_0)$ il suffit de montrer que $G \mapsto v_G$ est C^∞ à valeurs dans $Y[G_0]$. On montre cette propriété par une application du théorème des fonctions implicites.

1. Montrer que pour tout $(G, v) \in B(G_0, \eta_0) \times Y[G_0]$ il existe un unique $\mathbb{A}(G, v) \in Y[G_0]$ tel que:

$$2 \int_{\Omega} D(\mathbb{A}(G, v)) : D(w) = 2 \int_{\Omega} D(T_G[v] + v_0) : D(T_G[w])$$

2. Vérifier que l'application $(G, v) \mapsto \mathbb{A}(G, v)$ ainsi définie est $C^\infty(B(G_0, \eta_0) \times Y[G_0])$.
3. Soit $v \in Y[G_0]$ calculer la différentielle $\partial_v \mathbb{A}[G_0, v]$ de \mathbb{A} selon sa deuxième variable au point (G_0, v) et montrer qu'elle est inversible.
4. Conclure.

Master 2 MANU - Introduction aux problèmes inverses

Devoir surveillé n° 2 - 30/11/2023 - Durée : 2 h 15 - Noté sur 25 points

On veillera à respecter l'ordre des questions et à bien séparer les réponses

Partie I. Problèmes inverses. [12 points]

Soit une application linéaire $A : F \rightarrow G$ où F et G sont des espaces de Banach. On appelle "problème inverse" :

Trouver $f \in F$ telle que $Af = g$, étant donnée $g \in G$ (\mathcal{P})

On rappelle la formulation de Hadamard en 3 points d'un problème "bien posé" :

i) A est injective ; ii) A est surjective ; iii) A^{-1} est continue.

1) Si (\mathcal{P}) est "bien posé", et qu'on ajoute une perturbation à la donnée, on a :
 $A(f + \delta f) = g + \delta g$. Montrer que $\frac{\|\delta f\|_F}{\|f\|_F} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta g\|_G}{\|g\|_G}$

2) On suppose qu'il existe deux réels $0 < \alpha \leq \beta$ tels que $\forall f \in F$ on ait :

$$\alpha \|f\|_F \leq \|Af\|_G \leq \beta \|f\|_F \quad (1)$$

a) Montrer que A est une bijection de F sur $Im(A) \subset G$.

b) Trouver, dans ce cas, un majorant pour $\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$.

c) Le problème (\mathcal{P}) est-il "bien posé" ? (Examiner les 3 points de Hadamard.)

3) On décide de résoudre, plutôt que (\mathcal{P}) , le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ suivant, pour $\varepsilon > 0$:

Trouver $f = \text{Arg} \min_{f \in L^2(\mathbb{R})} \left(\|Af - g\|_2^2 + \varepsilon^2 \|f\|_2^2 \right)$, étant donnée $g \in L^2(\mathbb{R})$ (\mathcal{P}_ε)

On appelle f_ε la solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$, et B_ε l'application telle que $f_\varepsilon = B_\varepsilon g$, $\forall g \in L^2(\mathbb{R})$.

Montrer que $B_\varepsilon = (A^* A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^*$. (On admettra que $A^* A + \varepsilon^2 I$ est inversible).

4) On choisit $F = G = L^2(\mathbb{R})$, et A tel $Af = f * h$: convolution avec $h \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose de plus que h est une fonction paire à valeurs réelles.

a) Le problème (\mathcal{P}) est-il "bien posé" ? (Examiner les 3 points de Hadamard.)

b) Montrer que, dans le cas de la convolution, on obtient alors $f_\varepsilon = \mathcal{F}_2^* \left(\frac{\mathcal{F}h}{(\mathcal{F}h)^2 + \varepsilon^2} \mathcal{F}_2 g \right)$.

Partie II. Le principe d'incertitude d'Heisenberg [6 points]

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la classe de Schwarz.

1) Montrer que

$$\frac{\|xf\|_2}{\|f\|_2} \frac{\|\xi \hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2} \geq \frac{1}{4\pi},$$

et déterminer les fonctions qui réalisent l'égalité.

Indication : considérer $\int_{\mathbb{R}} x(f^2)'(x)dx$.

2) Montrer que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}$ on déduit facilement de 1) que

$$\frac{\|(x - x_0)f\|_2}{\|f\|_2} \frac{\|(\xi - \xi_0)\hat{f}\|_2}{\|\hat{f}\|_2} \geq \frac{1}{4\pi}.$$

Partie III. Transformée de Radon. [7 points]

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la classe de Schwarz. On note \mathcal{C} , le cercle unité de \mathbb{R}^2 , et $Rf(\omega, s)$, où $(\omega, s) \in \mathcal{C} \times \mathbb{R}$, la transformée de Radon de f .

1) Enoncer et démontrer le “Fourier Slice Theorem” (ou “théorème de la projection”).
 Rappel : Si on note $R_\omega f(s) := Rf(\omega, s)$, une projection de f , ce théorème donne une formule pour $\widehat{R_\omega f}$.

2) Démontrer la formule d'inversion de la transformée de Radon :

$$f = \frac{1}{2} R^\# I^{-1} Rf$$

Rappel : $R^\#$ est l'opérateur de “rétroréprojection”, et I^{-1} est un potentiel de Riesz, jouant sur la deuxième variable de Rf .

NB : On pourra écrire les différentes étapes de la formule d'inversion sous la forme d'une chaîne d'égalités numérotées. On justifiera rapidement chacune de ces égalités à la fin du calcul.



Durée : 2h30 - Noté sur 50 points

On veillera à bien justifier les résultats et à souligner les réponses

Partie I. Problèmes inverses (à rédiger sur une copie séparée). [20 points]

Soit une application linéaire $A : F \rightarrow G$ où F et G sont des espaces de Banach. On considère le problème inverse :

Trouver $f \in F$ telle que, étant donnée $g \in G$, on ait $Af = g$, (1)

1) Si (1) est bien posé, et qu'on ajoute une perturbation à la donnée, on a : $A(f + \delta f) = g + \delta g$.

a) Montrer que $\frac{\|\delta f\|_F}{\|f\|_F} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\delta g\|_G}{\|g\|_G}$

b) Expliquer la signification du terme $\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$.

2) On suppose qu'il existe deux réels positifs $0 < \alpha < \beta$ tels que $\forall f \in F$ on ait :

$$\alpha \|f\|_F \leq \|Af\|_G \leq \beta \|f\|_F \quad (*)$$

a) Montrer que A est une bijection de F sur $\text{Im}(A) \subset G$.

b) Trouver un majorant pour $\text{cond}(A)$. (Expliciter tous les calculs.)

3) On choisit $F = G = L^2(\mathbb{R})$ (muni de la norme $\|\cdot\|_2$ et du produit scalaire usuel), ainsi que $A = \mathcal{F}_2$, la transformée de Fourier.

a) Montrer que le problème (1) est bien posé au sens de Hadamard.

b) Calculer $\text{cond}(A)$.

4) On choisit $F = G = L^2(\mathbb{R})$, et A tel $Af = f * h$, l'opérateur de convolution avec $h \in L^1(\mathbb{R})$.

a) Le problème (1) est-il bien posé au sens de Hadamard ? (Explicitez votre réponse.)

b) Dans le cas particulier où $h = \frac{1}{2}e^{-|\cdot|}$, donner un sous-espace H de $L^2(\mathbb{R})$, toujours muni de la norme $\|\cdot\|_2$, tel que (1) soit bien posé ? (Pour $F = G = H$.)

5) On choisit $F = G = L^2([-1, 1])$, et A tel que $Af = \chi_{[-1,1]} \widehat{f}$. ($L^2([-1, 1])$ est l'espace des fonctions L^2 à support dans $[-1, 1]$, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_2$.)

Le problème (1) est-il bien posé au sens de Hadamard ? (Explicitez votre réponse.)

6) On décide de résoudre, plutôt que (1), le problème (2) suivant :

$$\text{Etant donnée } g \in G, \text{ trouver } f = \underset{f \in F}{\text{Arg}} \min \left(\|Af - g\|_G + \varepsilon^2 \|f\|_F^2 \right) \quad (2)$$

où $\varepsilon > 0$.

a) Expliquer l'intérêt de résoudre (2) plutôt que (1).

b) Pour $F = G = L^2(\mathbb{R})$, on appelle f_ε la solution de (2), et B_ε l'application telle que $f_\varepsilon = B_\varepsilon g$, $\forall g \in L^2(\mathbb{R})$.

Montrer que $B_\varepsilon = (A^* A + \varepsilon^2 I)^{-1} A^*$ et commenter cette formule. (On admet que $AA + \varepsilon^2 I$ est inversible.)

c) Calculer B_ε dans le cas de la question 4).

Partie II. Fourier et convolution (à rédiger sur une copie séparée). [20 points]

Exercice 1 [... points]

Résoudre l'équation $u * u * u = u$ dans $L^1(\mathbb{R})$

Exercice 2 [... points]

Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a(x) = Y(x)e^{-ax}$, où Y désigne la fonction de Heaviside, et $g_a(x) = e^{-\alpha x^2}$. On se donne ensuite deux réels strictement positifs α et β .

- Calculer $f_\alpha * f_\beta$
- Calculer $g_\alpha * g_\beta$

Exercice 3 [... points]

- Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ radiale (à savoir qu'il existe F telle que $f(x) = F(|x|)$). Montrer que \hat{f} est radiale.
- Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ radiales. Montrer que $f * g$ est radiale.

Exercice 4 [... points]

Si la réponse à une question est "oui", il faut donner une preuve (ou juste citer un résultat du cours).

Si la réponse est "non", il faut donner un contre-exemple ou une preuve.

On note \mathcal{S} l'espace des fonctions C^∞ à décroissance rapide (classe de Schwarz) ; \mathcal{D} l'espace des fonctions C^∞ à support compact ; $H = \{f \in L^1 \mid \hat{f} \in L^1\}$; et \mathcal{G} l'ensemble des fonctions s'écrivant comme combinaison linéaire réelle et finie des gaussiennes $x \mapsto e^{-\alpha_i(x-a_i)^2}$ (avec $\alpha_i > 0$ et $a_i \in \mathbb{R}$).

- Les ensembles suivants sont-ils stables par transformée de Fourier ? (i.e. $f \in E \Rightarrow \hat{f} \in E$)
 a) $L^1 \cap L^2$ b) H c) \mathcal{S} d) \mathcal{D} e) \mathcal{G}
- Les ensembles suivants sont-ils stables par convolution ? (i.e. $f, g \in E \Rightarrow f * g \in E$)
 a) $L^1 \cap L^2$ b) H c) \mathcal{S} d) \mathcal{D} e) \mathcal{G}

Partie III. Transformée de Radon (à rédiger sur une copie séparée). [20 points]

On considère dans toute la suite une image 2D, i.e. $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, dont le support est D , le disque unité de \mathbb{R}^2 . On écrit alors $f \in C_0^\infty(D)$. On note \mathcal{C} , le cercle unité de \mathbb{R}^2

- Enoncer le "Fourier Slice Theorem" et montrer qu'il permet de retrouver théoriquement f en tout point de D , à partir de donnée de $Rf(\omega, s)$, $\forall (\omega, s) \in \mathcal{C} \times [-1, 1]$,
- Soit $\Omega \subsetneq \mathcal{C}$, un ouvert non vide du cercle unité. Montrer que la donnée de $Rf(\omega, s) \forall (\omega, s) \in \Omega \times [-1, 1]$ permet de retrouver théoriquement f en tout point de D .
- Quels problèmes numériques va-t'on rencontrer dans le cas de la question 1) ? De la question 2) ?
- Quelques calculs (question indépendante) :
 - Démontrer la transformée de Radon d'une fonction radiale est radiale (ne dépend que de s).
 - Calculer la transformée de Radon de $f = \chi_{D(0,A)}$, la fonction caractéristique du disque $D(0, A)$.
 - Calculer la transformée de Radon de la gaussienne $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$.
 - Dans le cas général, pour une fonction f , on note $f_a : x \mapsto f(x - a)$. Exprimer Rf_a en fonction de Rf .

Exercice 1



(1) a) Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors, $\mathcal{F}_2 f = \hat{f} \in L^2$. Mais $\hat{f} \notin L^1$ en général (elle est seulement L^0 par R-Lebesgue). Il suffit de prendre $f = \chi_{[1,2]}$, donnant $\hat{f} = \sin x \notin L^1$.

b) Soit $f \in H$. On a, par définition de H , $\hat{f} \in L^1$. Comme $f, \hat{f} \in L^1$, le "thm d'inclusion dans L^1 " donne $\widehat{\hat{f}} = f(-\cdot)$, partout où f est continue. Mais $f(-\cdot) \in L^1$ - D'où $\widehat{\hat{f}} \in L^1$. H est donc stable

c) Montrons que, $\forall p, k \in \mathbb{N}$, $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^p \widehat{f}^{(k)}(\xi) = 0$.

Par les règles (4) et (5), on a successivement :

$$\xi^p \widehat{f}^{(k)}(\xi) = \xi^p \widehat{(2i\pi \cdot)^k f}(\xi) = \frac{1}{(2i\pi)^p} \widehat{[(2i\pi \cdot)^k f]}^{(p)}(\xi).$$

La stabilité de \mathcal{S} par dérivation et multiplication par un polynôme (définition de \mathcal{S}) implique donc que $[(2i\pi \cdot)^k f]^{(p)} \in \mathcal{S}$.

Comme $\mathcal{S} \subset L^1$, le lemme de R.L implique que sa TF $\xrightarrow[\xi \neq 0]{} 0$. D'où la stabilité de \mathcal{S} . (On a implicitement montré que $\widehat{f} \in L^\infty$)

d) Dès lors résultat du cours, $f \in L^2(K) \Rightarrow \widehat{f}$ est analytique. (*)

Ici $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset L^2(K)$, pour $\text{supp } f = K$.

Si \widehat{f} était à support compact également, elle serait nulle, par prolongement analytique depuis le complémentaire de son support. Ainsi, \mathcal{D} n'est pas stable par \mathcal{F} .

Montrons (*): $\mathcal{C}^{-2i\pi x \xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x \xi)^k}{k!}$, par développement en série entière, convergeant uniformément pour $x \in K$. On peut donc permute l'intégrale et la somme : $\forall \xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int f(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2i\pi x \xi)^k}{k!} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \int (-2i\pi x)^k f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \frac{d^k}{d\xi^k} \int f(u) e^{-2i\pi x \xi} dx \Big|_{x=0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \widehat{f}^{(k)}(0) : \text{DSE de } \widehat{f} \text{ au 0.} \end{aligned}$$

e) Soit $f = g_\pi(1-a) \in G$. On a $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi a \xi} g_\pi(\xi)$.

Ainsi $\widehat{f} \notin G$: G n'est pas stable par TF.

Réu: $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi a \xi} e^{-\pi \xi^2} = e^{-\pi a^2} e^{-\pi (\xi + ia)^2}$ peut être vu comme un élément de G , avec $a_i = ia \in \mathbb{C}$... Formulation acceptée.

2/4

(2) a) Par la règle $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2}$, on a $\begin{cases} f \in L^1, g \in L^2 \Rightarrow f * g \in L^1 \\ f \in L^2, g \in L^1 \Rightarrow f * g \in L^2 \end{cases}$

D'où $f, g \in L^1 \cap L^2 \Rightarrow f * g \in L^1 \cap L^2 = L^1 \cap L^2$ est stable pour la convolution.

b) Soient $f, g \in L^1 \cap L^2$. D'une part, on a $f * g \in L^1$.

D'autre part, $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$ (thm TF et cœur de L^1).

Mais, par R-L, $\widehat{f} \in L^\infty$. Ainsi $\widehat{f} \widehat{g} \in L^1$. D'où la stabilité de H

c) En utilisant la stabilité de \mathcal{G} par TF (1-c) et par produit (Leibniz), on a $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g} \in \mathcal{G} \subset L^1$. Comme $f * g \in L^1$ (car $\mathcal{G} \subset L^1$, et 1-a), on peut appliquer le thm d'inversion de la TF dans L^1 :

$f * g = \widehat{\widehat{f} \widehat{g}}$. Toujours pour stabilité de \mathcal{G} par TF (adjointe), on a le résultat: $f * g \in \mathcal{G}$. \mathcal{G} est donc stable par convolution.

Réu: On peut montrer (directement) que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^p (f * g)^{(k)}(n) = 0$

On écrit: $x^p (f * g)^{(k)}(n) = x^p [f * g^{(k)}](n) = \int_{\mathbb{R}} x^p f(x-t) g^{(k)}(t) dt$, et on utilise le thm de la convergence dominée.

d) D'une part, $f * g \in \mathcal{E}^\infty$, car $\forall k \in \mathbb{N}, (f * g)^{(k)} = f * g^{(k)} \in \mathcal{E}^0$.
D'autre part, $\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g}$ est compact. En effet, $\text{supp } f$ et $\text{supp } g$ sont, par définition, compacts. Leur somme est donc compacte, et $\text{supp}(f * g)$ l'est aussi, en tant que fermé (par déf.) contenu dans un compact. D'où la stabilité de \mathcal{G}

) * Il suffit (par bilinéarité) de prouver la stabilité pour deux "gaussiennes".

** On a $[e^{-\alpha(x-a)^2} * e^{-\beta(x-b)^2}] = \lambda e^{-\gamma(x-c)^2}$. En effet, par TF et TF inverse dans L^1 (car $\mathcal{G} \subset L^1$), on obtient (après calcul) que:

$$[\dots] = F^* \left(e^{-2\pi(a+b)\xi} \frac{\pi}{\alpha\beta} \frac{g_{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha+\beta} \right)(n) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}} \frac{g_{\alpha\beta}}{\alpha+\beta} (x-(a+b))$$

NB: il n'est pas nécessaire de calculer exactement les coefficients. Il suffit de dire que $\widehat{g_\alpha} = g_\beta$ et de ne pas oublier le terme $e^{-2\pi(a+b)\xi}$.

Ex 2 On veut montrer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, afin de pouvoir appliquer le thm d'inversion.

Or $\widehat{f''}(\xi) = (2i\pi\xi)^2 \widehat{f}(\xi)$ (par la formule (5)) est une fonction bornée (Riemann-Lebesgue). Ainsi, $\exists M > 0$ tq $|\widehat{f}(\xi)| \leq M/|\xi|^2$ et \widehat{f} est intégrable hrg de $[-1, 1]$ (critère de Riemann).

De plus $f \in L^1 \Rightarrow \widehat{f}$ continue (R.L) $\Rightarrow \widehat{f}$ est intégrable sur $[-1, 1]$. D'où le résultat.

Ex 3 Comme $u \in L^1$, $u * u \in L^1$ (thm du cours) et aussi $u * u * u \in L^1$. L'équation a un sens et on peut prendre la TF dans L^1 en appliquant (2 fois) la formule $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$. Cela donne : $(\widehat{u})^3 = \widehat{u}$. Ainsi, soit $\widehat{u} \equiv 0$ et donc $u \equiv 0$. Soit $\widehat{u} \neq 0$ et donc $(\widehat{u})^2 = 1$.

La fonction \widehat{u} vérifie donc $\widehat{u}(\xi) \in \{-1, 1\}, \forall \xi \in \mathbb{R}$.
Etant continue^(*), on a donc $\widehat{u} \equiv 1$ ou $\widehat{u} \equiv -1$.
Mais $u \in L^1 \Rightarrow \widehat{u} \xrightarrow[+\infty]{} 0$ (RL), ce qui est ici impossible.

Ainsi, il ne reste que la solution nulle : $u \equiv 0$.

(*) toujours par Riemann-Lebesgue.

Ex 4 $\phi \in L^1$, bien sûr, et sa TF vaut (cf. tableau)

$$\hat{\phi}(\xi) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi + 4\pi^2 \xi^2}. \quad \text{En appliquant alors}$$

la formule dans L^1 , $\widehat{f * \phi} = \widehat{f} \widehat{\phi}$ et en notant que $\widehat{g_\pi} = g_\pi$ (cf. tableau), on obtient:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi + 4\pi^2 \xi^2} \hat{\phi}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} - \text{Soit encore}$$

$$\hat{\phi}(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-\pi \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2i\pi \xi)^2 e^{-\pi \xi^2}$$

Cette fonction étant L^1 , ainsi que ϕ , on peut appliquer le théorème d'inversion dans L^1 , qui donne:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2\pi} g_\pi(u) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-2i\pi \xi)^2 \widehat{g_\pi}(\xi)}_{(a)} \\ &= \sqrt{2\pi} g_\pi(u) - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{g_\pi''}(x)}_{(a)} \quad \text{R} \quad \text{formule (5)} \\ &= \sqrt{2\pi} g_\pi(u) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g_\pi''(x). \end{aligned}$$

On peut noter que $\widehat{g_\pi''}(x) = 2\pi g_\pi(u) (2\pi x^2 - 1)$.
(et donc une petite simplification).

Nom, prénom : _____

Numéro étudiant : _____

Consignes. Répondez de façon soignée et synthétique aux questions ci-dessous. La qualité de la rédaction sera un facteur déterminant dans l'évaluation. **Notes de cours autorisées.**

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, un domaine polytopal et $f \in L^2(\Omega)$. Le but de cet exercice consiste à étudier une variante de la méthode *Hybrid High-Order* pour le problème de diffusion–réaction : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} u v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (1)$$

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite régulière de maillages où, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{M}_h = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)$ avec \mathcal{T}_h ensemble des éléments et \mathcal{F}_h ensemble des faces. Pour un degré polynomiale $k \geq 0$ fixé, on définit l'espace HHO

$$\underline{U}_h^k := \{\underline{v}_h := ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) : v_T \in \mathcal{P}^k(T) \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h \text{ et } v_F \in \mathcal{P}^k(F) \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}_h\}$$

ainsi que son sous-espace incorporant la condition au bord :

$$\underline{U}_{h,0}^k := \{\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k : v_F = 0 \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}_h^b\}.$$

L'interpolateur $\underline{I}_h^k : H^1(\Omega) \rightarrow \underline{U}_h^k$ est tel que, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\underline{I}_h^k v := ((\pi_T^{0,k} v)_{T \in \mathcal{T}_h}, (\pi_F^{0,k} v)_{F \in \mathcal{F}_h}).$$

Les restrictions de l'espace \underline{U}_h^k , d'un élément générique $\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k$ et de l'interpolateur à un élément du maillage $T \in \mathcal{T}_h$ seront notées, respectivement, \underline{U}_T^k , $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^k$ et \underline{I}_T^k .

Pour tout élément $T \in \mathcal{T}_h$, on définit l'opérateur de reconstruction du potentiel $p_T^{k+1} : \underline{U}_T^k \rightarrow \mathcal{P}^{k+1}(T)$ tel que, pour tout $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^k$,

$$\begin{aligned} \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T \cdot \nabla w &= - \int_T v_T \Delta w + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_F (\nabla w \cdot n_{TF}) \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T), \\ \int_T p_T^{k+1} \underline{v}_T &= \int_T v_T \end{aligned}$$

ainsi que l'opérateur de différence $\underline{\delta}_T^k : \underline{U}_T^k \rightarrow \underline{U}_T^k$ tel que, pour tout $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^k$,

$$\underline{\delta}_T^k \underline{v}_T := \underline{v}_T - \underline{I}_T^k(p_T^{k+1} \underline{v}_T).$$

Soit $a_h : \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire telle que, pour tout $(\underline{w}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k$,

$$\begin{aligned} a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) &:= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T), \\ a_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) &:= \int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot \nabla p_T^{k+1} \underline{v}_T + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) + \int_T w_T v_T, \end{aligned}$$

où, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$, $s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := \mathcal{S}_T(\underline{\delta}_T^k \underline{w}_T, \underline{\delta}_T^k \underline{v}_T)$ avec $\mathcal{S}_T : \underline{U}_T^k \times \underline{U}_T^k \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire telle que

$$\mathcal{S}_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) := h_T^{-1} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (w_F - w_T)(v_F - v_T).$$

On souhaite étudier le schéma HHO suivant pour le problème (1) : Trouver $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ tel que

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \quad (2)$$

où la fonction $v_h \in \mathcal{P}^k(\mathcal{T}_h)$ est définie par

$$(v_h)_{|T} := v_T \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \quad (3)$$

1. (3 points) Soit $T \in \mathcal{T}_h$. A partir des définitions de p_T^{k+1} et I_T^k ainsi que de la caractérisation de $\pi_T^{0,k}$ et $\pi_T^{0,k}$ vue en cours, montrer la propriété suivante :

$$p_T^{k+1}(I_T^k w) = w \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T). \quad (4)$$

En déduire que

$$\underline{\delta}_T^k(I_T^k w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{P}^{k+1}(T).$$

2. (2 points) On admettra la propriété de continuité suivante :

$$\|\nabla p_T^{k+1}(I_T^k z)\|_{L^2(T)^d} \lesssim |z|_{H^1(T)} \quad \forall z \in H^1(T). \quad (5)$$

A l'aide de (4), d'une inégalité triangulaire, de (5) et des propriétés d'approximation de $\pi_T^{0,k+1}$, montrer que, pour tout $T \in \mathcal{T}_h$ et tout $w \in H_r^{r+2}(T)$, $r \in \{0, \dots, k\}$,

$$\|\nabla(p_T^{k+1}(I_T^k w) - w)\|_{L^2(T)^d} \lesssim h_T^{r+1}|w|_{H^{r+2}(T)}. \quad (6)$$

En déduire que

$$\|p_T^{k+1}(I_T^k w) - w\|_{L^2(T)} \lesssim h_T^{r+2}|w|_{H^{r+2}(T)}. \quad (7)$$

Suggestion : Pour prouver (7), on pourra utiliser l'inégalité de Poincaré–Wirtinger locale $\|v\|_{L^2(T)} \lesssim h_T|v|_{H^1(T)}$ valable pour tout $v \in H^1(T)$ tel que $\int_T v = 0$. Prenez soin de bien vérifier cette dernière hypothèse.

3. (2 points) A partir des inégalités prouvées au point précédent, montrer que

$$\|\nabla(p_T^{k+1}(I_T^k w) - w)\|_{L^2(\partial T)^d} \lesssim h_T^{r+\frac{1}{2}}|w|_{H^{r+2}(T)}. \quad (8)$$

4. (2 points) On définit les seminormes suivantes sur \underline{U}_T^k :

$$\|\underline{v}_T\|_{1,T} := \left(\|\nabla \underline{v}_T\|_{L^2(T)^d}^2 + |\underline{v}_T|_{1,T}^2 \right)^{1/2}, \quad |\underline{v}_T|_{1,T} := S_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T)^{1/2}.$$

A partir des propriétés de S_T et des résultats vus en cours, déduire que

$$a_T(\underline{v}_T, \underline{v}_T) \simeq \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 + \|\underline{v}_T\|_{L^2(T)}^2 \quad (9)$$

avec v_h définie par (3) et que, pour tout $w \in H^{r+2}(T)$ avec $r \in \{0, \dots, k\}$,

$$s_T(I_T^k w, I_T^k w)^{\frac{1}{2}} \lesssim h_T^{r+1}|w|_{H^{r+2}(T)}. \quad (10)$$

NB : Il suffira de citer les résultats de cours permettant de déduire (9) et (10) sans donner une preuve détaillée.

5. (3 points) En utilisant le fait que $f = -\Delta u + u$ presque partout dans Ω , montrer que, pour tout $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$,

$$\int_{\Omega} f v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla u \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla u \cdot n_{TF})(v_F - v_T) \right) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T u v_T.$$

Justifier soigneusement l'introduction de la composante de face v_F dans l'intégrale de bord à partir des résultats vus en cours.

6. (3 points) Prouver la reformulation suivante de a_h : Pour tout $(\underline{w}_h, \underline{v}_h) \in \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k$,

$$\begin{aligned} & a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla p_T^{k+1} \underline{w}_T \cdot n_{TF}) (v_F - v_T) + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \right) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T w_T v_T. \end{aligned}$$

7. (3 points) Soit $\hat{u}_h := I_h^k u$. L'erreur de consistance pour le schéma (2) est la forme linéaire $\mathcal{E}_h : \underline{U}_{h,0}^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, notant $u \in H_0^1(\Omega)$ la solution de (1),

$$\mathcal{E}_h(\underline{v}_h) := \int_{\Omega} f v_h - a_h(\hat{u}_h, \underline{v}_h).$$

A partir des résultats obtenus dans les questions précédentes, montrer que, si $u \in H^{r+2}(\mathcal{T}_h)$ pour $r \in \{0, \dots, k\}$,

$$\mathcal{E}_h(\underline{v}_h) \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)} \|\underline{v}_h\|_{1,h} \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k. \quad (11)$$

Comment la présence du terme de réaction modifie-t-elle l'estimation de l'erreur de consistance par rapport à celle vue en cours pour le problème de diffusion pure ?

8. (3 points) Montrer l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\underline{u}_h - \hat{u}_h\|_{1,h} + \|u_h - \hat{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \lesssim h^{r+1} |u|_{H^{r+2}(\mathcal{T}_h)}. \quad (12)$$

9. (2 points) Proposer une autre discréétisation possible pour le terme de réaction garantissant toujours une estimation d'erreur en norme d'énergie en h^{r+1} .

10. (4 points) Indiquer une piste pour obtenir une estimation d'erreur améliorée pour la quantité $\|u_h - \hat{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$. Préciser la forme de cette estimation d'erreur ainsi qu'une hypothèse sur le domaine Ω nécessaire pour la prouver.

Nom, prénom :

Numéro étudiant :

Consignes. Répondez de façon soignée et synthétique aux questions ci-dessous. La qualité de la rédaction sera un facteur déterminant dans l'évaluation. **Documents non autorisés.**

Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, un domaine polytopal et $f \in L^2(\Omega)$. Le but de cet exercice consiste à étudier une variante de la méthode *Hybrid High-Order* pour le problème de diffusion pure : Trouver $u \in U := H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \int_{\Omega} f v \quad \forall v \in U. \quad (1)$$

Soit $(\mathcal{M}_h)_{h \in \mathcal{H}}$ une suite régulière de maillages où, pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mathcal{M}_h = (\mathcal{T}_h, \mathcal{F}_h)$ avec \mathcal{T}_h ensemble des éléments et \mathcal{F}_h ensemble des faces. Pour un degré polynomiale $k \geq 0$ fixé, on définit

$$\underline{U}_h^k := \{\underline{v}_h := ((v_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (v_F)_{F \in \mathcal{F}_h}) : v_T \in \mathbb{P}^k(T) \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h \text{ et } v_F \in \mathbb{P}^k(F) \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}_h\}$$

ainsi que

$$\underline{U}_{h,0}^k := \{\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k : v_F = 0 \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}_h^b\}.$$

Pour tout élément $T \in \mathcal{T}_h$, on définit l'opérateur de *reconstruction de gradient* $\mathbf{G}_T^k : \underline{U}_T^k \rightarrow \mathbb{P}^k(T)^d$ tel que, pour tout $\underline{v}_T \in \underline{U}_T^k$,

$$\int_T \mathbf{G}_T^k \underline{v}_T \cdot \boldsymbol{\tau} = - \int_T v_T (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F v_F (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_{TF}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}^k(T)^d. \quad (2)$$

A l'aide de cet opérateur, on définit la forme bilinéaire $a_h : \underline{U}_h^k \times \underline{U}_h^k \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $\underline{w}_h, \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k$,

$$a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\int_T \mathbf{G}_T^k \underline{w}_T \cdot \mathbf{G}_T^k \underline{v}_T + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \right]$$

avec $s_T, T \in \mathcal{T}_h$, formes bilinéaires stabilisantes. **On remarquera que la seule différence par rapport à la forme bilinéaire vues en cours vient du terme de constance.**

On considère le problème discret : Trouver $\underline{u}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$ tel que

$$a_h(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad \forall \underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \quad (3)$$

avec $v_h \in \mathbb{P}^k(\mathcal{T}_h)$ tel que $(v_h)|_T = v_T$ pour tout $T \in \mathcal{T}_h$.

Répondre aux questions suivantes :

1. (3 points) Démontrer la propriété de commutativité suivante : Pour tout $T \in \mathcal{T}_h$,

$$\mathbf{G}_T^k(I_T^k v) = \pi_T^{0,k}(\nabla v) \quad \forall v \in H^1(T),$$

où I_T^k est l'interpolateur HHO local tel que, pour tout $q \in H^1(T)$,

$$I_T^k q := (\pi_T^{0,k} q, (\pi_F^{0,k} q|_F)_{F \in \mathcal{F}_T}),$$

avec $\pi_Y^{0,k}$ (resp. $\pi_T^{0,k}$) projecteur L^2 -orthogonal sur $\mathbb{P}^k(Y)$ (resp. $\mathbb{P}^k(T)^d$).

- 2. (2 points) **Après avoir rappelé les propriétés de s_T vue en cours** (qui correspondent à [1, Assumption 2.4]), justifier l'équivalence suivante : Pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k$,

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h} \approx \|\underline{v}_h\|_{a,h} = a_h(\underline{v}_h, \underline{v}_h)^{\frac{1}{2}}$$

avec constante cachée indépendante de h et seminorme $\|\cdot\|_{1,h}$ définie, pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_h^k$, comme suit :

$$\|\underline{v}_h\|_{1,h}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 \text{ où } \|\underline{v}_T\|_{1,T}^2 := \|\nabla v_T\|_{L^2(T)^d}^2 + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} h_F^{-1} \|v_F - v_T\|_{L^2(F)}^2 \text{ pour tout } T \in \mathcal{T}_h.$$

- 3. (4 points) Soit $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\mathcal{T}_h)$ tel que $\Delta w \in L^2(\Omega)$. Montrer que, pour tout $\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k$,

$$-\int_{\Omega} \Delta w \cdot v_h = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \nabla w \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\nabla w \cdot \mathbf{n}_{TF})(v_F - v_T) \right).$$

Justifier soigneusement l'introduction de la composante de face v_F dans l'intégrale de bord à partir des résultats vus en cours.

- 4. (3 points) Prouver la reformulation suivante de a_h : Pour tout $\underline{w}_h, \underline{v}_h \in \underline{U}_h^k$,

$$a_h(\underline{w}_h, \underline{v}_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\int_T \mathbf{G}_T^k \underline{w}_T \cdot \nabla v_T + \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \int_F (\mathbf{G}_T^k \underline{w}_T \cdot \mathbf{n}_{TF})(v_F - v_T) + s_T(\underline{w}_T, \underline{v}_T) \right).$$

5. (3 points) Exploitant les résultats obtenus aux points précédents, montrer l'estimation de consistance suivante : Pour tout $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\mathcal{T}_h)$ tel que $\Delta w \in L^2(\Omega)$,

$$\sup_{\underline{v}_h \in \underline{U}_{h,0}^k, \|\underline{v}_h\|_{a,h}=1} |\mathcal{E}_h(w; \underline{v}_h)| \lesssim h^{k+1} |w|_{H^{k+2}(\mathcal{T}_h)},$$

avec *erreur de consistance* $\mathcal{E}_h(w; \underline{v}_h)$ tel que

$$\mathcal{E}_h(w; \underline{v}_h) := -(\Delta w, v_h) - a_h(I_h^k w, \underline{v}_h),$$

$I_h^k : H^1(\Omega) \rightarrow \underline{U}_h^k$ étant l'interpolateur HHO global tel que, pour tout $q \in H^1(\Omega)$,

$$I_h^k q := ((\pi_T^{0,k} q|_T)_{T \in \mathcal{T}_h}, (\pi_F^{0,k} q|_F)_{F \in \mathcal{F}_h}).$$

- 6. (3 points) On suppose la régularité $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+2}(\mathcal{T}_h)$ pour la solution de (1). Prouver l'estimation d'erreur suivante :

$$\|\underline{u}_h - I_h^k u\|_{a,h} \lesssim h^{k+1} |u|_{H^{k+2}(\mathcal{T}_h)},$$

avec constante cachée indépendante de h .

7. (2 points) Donner l'expression du flux numérique $\Phi_{TF}(\underline{u}_T)$ pour la méthode considérée.

Références

- [1] D. A. DI PIETRO et J. DRONIQU. *The Hybrid High-Order method for polytopal meshes. Design, analysis, and applications.* T. 19. Modeling, Simulation and Application. Springer International Publishing, 2020. doi : 10.1007/978-3-030-37203-3.



Examen (2h)

Année 2023-2024

Dans tout l'examen, les notations du cours seront adoptées, à savoir que $\omega(t)$ correspond à la transformation d'un volume de contrôle Ω au cours du temps par un mapping $x(X, t)$, où x dénote la variable spatiale dans la configuration actuelle et X celle dans la configuration initiale. On note $J(X, t) = \partial_X x(X, t)$ le Jacobien de la transformation et $u(x(X, t), t) = \partial_t x(X, t)$ la vitesse du point fluide localisé en x à l'instant t .

Exercice 1

7 pts

1. Retrouver l'équation d'évolution du Jacobien : $\partial_t J(X, t) = J(X, t) \partial_x u(x(X, t), t)$.
2. En considérant une fonction ψ suffisamment régulière pour calculer ses différentes dérivées partielles, rappeler la définition de la dérivée totale $\frac{d\psi(x(X, t), t)}{dt}$.
3. Retrouver la formule de transport de Reynolds calculant $\frac{d}{dt} \int_{\omega(t)} \psi(x, t) dx$.

Exercice 2

6 pts

On rappelle le système de la dynamique des gaz en formalisme Lagrangien mobile :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{de}{dt} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{de}{dt} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1c)$$

où toutes les quantités sont fonctions de x et t , avec $x(X, t)$ la position du point initialement localisé en X . Dans le système (1), ρ désigne la densité, $\tau = \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique, u la vitesse du fluide, e l'énergie totale spécifique et p la pression.

1. Avec la formule de la dérivée totale (voir Ex. 1.2), retrouver, à partir de la conservation de masse Lagrangienne (1a), la version Eulérienne : $\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$.
2. Les équations (1b)-(1c) peuvent être mises sous la forme vectorielle suivante :

$$\rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

avec $\mathcal{V} = (u, e)^t$ et $\mathcal{G} = (p, pu)^t$. En utilisant la conservation de la masse en version Eulérienne (voir Ex. 2.1) et la définition de la dérivée totale, réécrire le système (2) en formulation Eulérienne :

$$\frac{\partial(\rho \mathcal{V})}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

en explicitant la formule du flux \mathcal{H} en fonction de \mathcal{G} .

Exercice 3

7 pts

Le but de cet exercice est de retrouver la définition du flux numérique de Rusanov (Lax-Friedrichs local). Pour cela, on considère le problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial G(W)}{\partial x} = 0, \\ W(x, t_n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ W_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases}, \end{array} \right. \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_n, +\infty[, \quad (4a)$$

$$(4b)$$

Au lieu de résoudre analytiquement ce problème, nous allons considérer une version simplifiée :

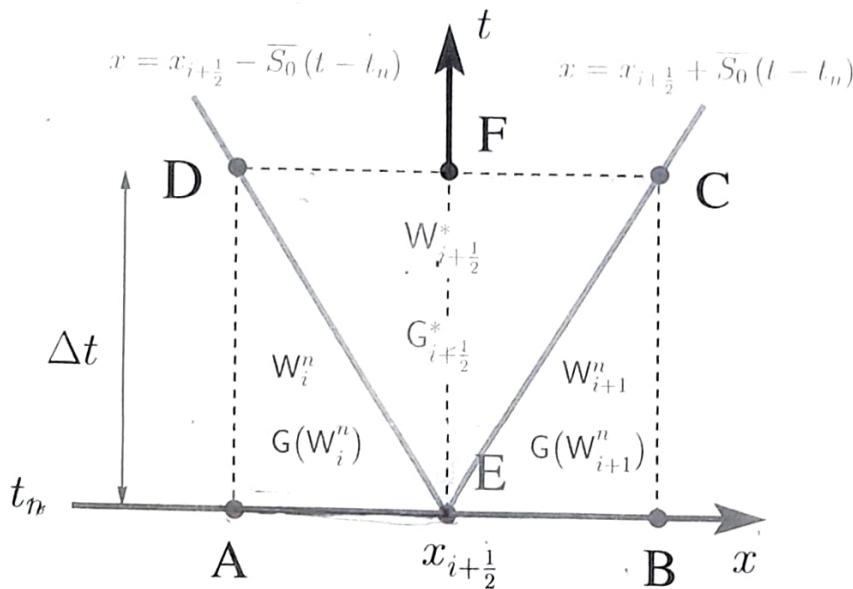


Figure 1: Problème de Riemann approché.

- En intégrant le système $\partial_t W + \partial_x G = 0$ sur les rectangles $[AEFD]$ puis $[EBCF]$, retrouver les deux relations suivantes, obtenues dans le cours grâce aux relations de Rankine-Hugoniot :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{i+\frac{1}{2}}^* - G(W_i^n) = -\overline{S_0} \left(W_{i+\frac{1}{2}}^* - W_i^n \right), \\ G_{i+\frac{1}{2}}^* - G(W_{i+1}^n) = \overline{S_0} \left(W_{i+\frac{1}{2}}^* - W_{i+1}^n \right). \end{array} \right. \quad (5a)$$

$$(5b)$$

- Grâce au système (5), retrouver la formule du flux numérique de Rusanov $G_{i+\frac{1}{2}}^*$.
- Vérifier que ce flux numérique est consistant.



Examen (2h)

Année 2024-2025

Exercice 1

10 pts

On souhaite résoudre le problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogène sur un domaine Ω défini à partir de level-sets.

- Soit Ω_1 défini avec la level set ϕ_1 et Ω_2 défini avec la level set ϕ_2 . Quelle serait la définition de $\Omega = \Omega_1^c \cup \Omega_2$ à l'aide des levels sets ?
- Donner les 3 formulations variationnelles discrètes pour les 3 méthodes (CutFEM, SBM et phiFEM direct) pour des éléments finis P_2 (détalier tous les ensembles, espaces qui interviennent dans les formulations variationnelles).
- Donner l'estimation d'erreur H^1 commise avec la méthode CutFEM et avec la méthode phiFEM pour des éléments finis P_2 .

Exercice 2

5 pts

On rappelle le système de la dynamique des gaz en formalisme Lagrangien mobile :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{de}{dt} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{d\tau}{dt} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{array} \right. \quad (1c)$$

où toutes les quantités sont fonctions de x et t , avec $x(X, t)$ la position du point initialement localisé en X . Dans le système (1), ρ désigne la densité, $\tau = \frac{1}{\rho}$ le volume spécifique, u la vitesse du fluide, e l'énergie totale spécifique et p la pression. On rappelle que $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée totale, définie comme :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2)$$

- Avec la formule de la dérivée totale (2), retrouver, à partir de la conservation de masse Lagrangienne (1a), la version Eulérienne : $\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) = 0$.
- Les équations (1b)-(1c) peuvent être mises sous la forme vectorielle suivante :

$$\rho \frac{d\mathcal{V}}{dt} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

avec $\mathcal{V} = (u, e)^t$ et $\mathcal{G} = (p, pu)^t$. En utilisant la conservation de la masse en version Eulérienne (voir Ex. 2.1) et la définition de la dérivée totale, réécrire le système (3) en formulation Eulérienne :

$$\frac{\partial(\rho\mathcal{V})}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

en explicitant la formule du flux \mathcal{H} en fonction de \mathcal{G} .

Exercice 3

5 pts

Le but de cet exercice est de retrouver la définition du flux numérique de Rusanov (Lax-Friedrichs local). Pour cela, on considère le problème de Riemann suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial G(W)}{\partial x} = 0, \\ W(x, t_n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ W_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases} \end{array} \right. \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [t_n, +\infty[, \quad (5a)$$

$$W(x, t_n) = \begin{cases} W_i^n & \text{si } x < x_{i+\frac{1}{2}} \\ W_{i+1}^n & \text{si } x > x_{i+\frac{1}{2}} \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5b)$$

Au lieu de résoudre analytiquement ce problème, nous allons considérer une version simplifiée :

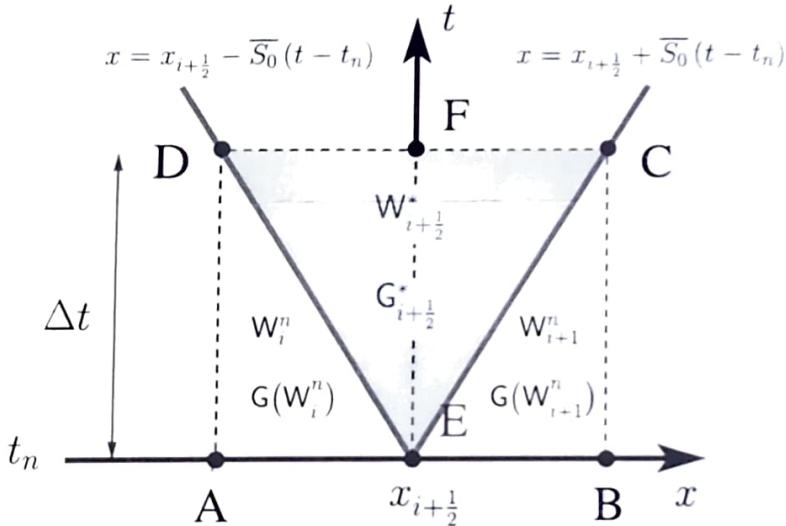


Figure 1: Problème de Riemann approché.

- En intégrant le système $\partial_t W + \partial_x G = 0$ sur les rectangles $[AEFD]$ puis $[EBCF]$, retrouver les relations suivantes, obtenues dans le cours grâce aux relations de Rankine-Hugoniot :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{i+\frac{1}{2}}^* - G(W_i^n) = -\overline{S_0} \left(W_{i+\frac{1}{2}}^* - W_i^n \right), \end{array} \right. \quad (6a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{i+\frac{1}{2}}^* - G(W_{i+1}^n) = \overline{S_0} \left(W_{i+\frac{1}{2}}^* - W_{i+1}^n \right). \end{array} \right. \quad (6b)$$

- Grâce au système (6), retrouver la formule du flux numérique de Rusanov $G_{i+\frac{1}{2}}^*$.

- Vérifier que ce flux numérique est consistant.

M2 HAX007X

DS UNFITTED METHOD

Exercice 1 On s'intéresse au problème suivant avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $c(x) \geq 0$:

$$-\nabla \cdot (\alpha \nabla u) + cu = f \text{ dans } \Omega$$

1. Le domaine Ω qui nous intéresse est l'anneau 2D formé des cercles centrés en l'origine et de rayon 2 et 3.

Comment traduiriez vous ce domaine à l'aide de level set ?

2. Dessiner les maillages considérés pour les 3 méthodes (CutFEM, SBM et phiFEM direct).

3. On considère pour cette question une condition de Dirichlet $u = g$.

Donner les 3 formulations variationnelles discrètes pour les 3 méthodes (CutFEM, SBM et phiFEM direct) pour des éléments finis P1 (détailier tous les ensembles, espaces qui interviennent dans les formulations variationnelles).

4. Maintenant on souhaite résoudre le problème avec une condition de Neumann $\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = h$.

Donner les 2 formulations discrètes pour CutFEM et phiFEM pour des éléments finis P1 (détailier tous les ensembles, espaces qui interviennent dans les formulations variationnelles).

5. Comment programmeriez vous la formulation matricielle correspondante pour la méthode phiFEM Neumann sur votre logiciel préféré ?

6. On souhaite désormais monter en ordre au niveau des éléments finis. Expliquer les modifications à effectuer pour chaque méthode.

Exercice 1 1. Les jeux olympiques auront bientôt lieu en France. On souhaite résoudre le problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogène sur les anneaux olympiques :



Sachant qu'en 3D, un anneau est donné par la level set (R et r étant connus) :

$$\phi(x, y, z) = (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 - r^2.$$

Comment feriez vous pour définir votre domaine Ω des anneaux olympiques à l'aide de plusieurs level sets ?

On pose $\Omega_0 = \{\phi_0 < 0\}$ avec ϕ_0 l'anneau initial. Pour les autres anneaux, les domaines $\Omega_i, i = 1..4$ correspondent à des difféomorphismes T du domaine Ω_0 . On a alors $\phi_i = \phi_0 \circ T^{-1}$ avec $\Omega_i = \{\phi_i < 0\}$. Pour obtenir le domaine $\Omega = \cup \Omega_i$. On doit prendre la level set suivante : $\phi = \min(\phi_i)$.

2. On se restreint désormais à un seul anneau. Dessiner les maillages utilisés pour les 3 méthodes (CutFEM, SBM et phiFEM direct).

On demande le maillage sur un anneau. Si on dessine en 2D, il y a 2 cercles. Le maillage SBM correspond aux triangles entiers à l'intérieur de l'anneau. Alors que pour le maillage Cutfem et phiFEM on prend le maillage SBM auquel on rajoute tous les triangles sur le bord des 2 cercles.

3. Donner les 3 formulations variationnelles discrètes pour les 3 méthodes précédentes pour des éléments finis P1 (détailier tous les ensembles, espaces qui interviennent dans les formulations variationnelles).

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \text{dans } \Omega, \\ u &= 0, & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

La formulation de Nitsche est la suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma} v_h (\nabla u_h \cdot n) - \int_{\Gamma} (\nabla v_h \cdot n) u_h + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{h} u_h v_h = \int_{\Omega} f v_h$$

α est le paramètre de pénalisation et h est le maximum du diamètre des éléments.

CutFEM :

La formulation variationnelle se fait sur le domaine physique Ω . C'est pourquoi on doit ajouter le terme de ghost penalty. Trouver $u_h \in V_h$ tel que :

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma} v_h (\nabla u_h \cdot n) - \int_{\Gamma} (\nabla v_h \cdot n) u_h + \int_{\Gamma} \frac{\alpha}{h} u_h v_h + \sigma h \sum_{E \in F^1} \int_E \left[\frac{\partial u_h}{\partial n} \right] \left[\frac{\partial v_h}{\partial n} \right] = \int_{\Omega} f v_h$$

$\forall v_h \in V_h = \{v_h \in H^1(\Omega_h), v_h|_T \in P^1(T), \forall T \in T_h\}$ et F^Γ est l'ensemble des arêtes coupées par le bord Γ .

Shifted boundary method :

Pour $x \in \Gamma$ and $\tilde{x} \in \Gamma_h$ la projection la plus proche. On a la formule de Taylor :

$$0 = u(\tilde{x}) + \nabla u(\tilde{x}).(x - \tilde{x}) + O(\|x - \tilde{x}\|^2)$$

La formulation SBM donne en remplaçant l'approximation de Taylor dans la formulation de Nitsche ci dessus : Trouver $u_h \in V_h(\Omega_h) = \{w_h \in H^1(\Omega_h), v_h|_T \in P^1(T) \forall T \in T_h\}$ tel que $\forall v_h \in V_h(\Omega_h)$,

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h - \int_{\Gamma_h} v_h (\nabla u_h \cdot \bar{n}) - \int_{\Gamma_h} (\nabla v_h \cdot \bar{n})(u_h + \nabla u_h \cdot d) + \int_{\Gamma_h} \frac{\alpha}{h} (u_h + \nabla u_h \cdot d) v_h = \int_{\Omega_h} f v_h$$

avec \bar{n} la normale extérieure à Γ_h .

PhiFEM :

Pour vérifier la condition au bord, on fait l'ansatz

$$u = \phi w, \text{ sur } \Omega_h$$

et nous allons formuler le problème avec la nouvelle inconnue w sur Ω_h . On introduit l'espace :

$$V_h := \{v_h \in H^1(\Omega_h), v_h|_T \in P^1(T) \forall T \in T_h\}.$$

La formulation variationnelle discrète est la suivante : Trouver $w_h \in V_h$ tel que $\forall s_h \in V_h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_h} \nabla(\phi_h w_h) \cdot \nabla(\phi_h s_h) - \int_{\partial\Omega_h} (\partial_n(\phi_h w_h)) \phi_h s_h \\ & + \sigma h \sum_{E \in \mathcal{F}_h^\Gamma} \int_E [\partial_n(\phi_h w_h)] [\partial_n(\phi_h s_h)] + \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T \Delta(\phi_h w_h) \Delta(\phi_h s_h) \\ & = \int_{\Omega_h} f \phi_h s_h - \sigma h^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h^\Gamma} \int_T f \Delta(\phi_h s_h) \end{aligned}$$

T_h^Γ est constitué des cellules intersectées par la courbe $\{\phi_h = 0\}$ et \mathcal{F}_h^Γ représente l'ensemble des facettes internes du maillage qui sont aussi les facettes de T_h^Γ (ce sont les facettes soit intersectées par Γ , ou appartenant aux cellules intersectées par Γ).

4. Quelle est la méthode que vous préférez et justifiez pourquoi.

Dire la méthode que vous préférez en mettant en avant ses avantages sur les autres méthodes.

5.a Rappeler l'estimation d'erreur H^1 commise avec la méthode phiFEM pour des éléments finis P^k .

Soit $f \in H^k(\Omega \cup \Omega_h)$, soit $u \in H^{k+2}(\Omega)$ solution du problème de Poisson homogène. Soit $u_h = \phi_h w_h$ solution du problème approché avec la méthode PhiFEM direct avec $w_h \in V_h = \{v_h \in H^1(\Omega_h) \text{ tel que } v_h|_T \in P^k(T), \forall T \in T_h\}$

$$|u - u_h|_{1,\Omega \cap \Omega_h} \leq Ch^k \|f\|_{k,\Omega \cup \Omega_h}$$

5.b Pour montrer cette estimation d'erreur, on obtient le résultat suivant :

$$|\phi w - \phi_h I_h w|_{1,\Omega_h} \leq Ch^k \|\phi\|_{W^{k+1,\infty}(\Omega_h)} \|w\|_{k+1,\Omega_h}$$

Démontrer ce résultat avec les outils d'éléments finis classiques que vous connaissez et que vous pouvez utiliser sur Ω_h , sachant que $I_h w$ correspond à l'interpolation de Lagrange de w et