

GROUPES ET ANNEAUX 2

FEUILLE DE TD N°3

PRODUITS SEMI-DIRECTS

Exercice 1. Exprimer le groupe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{k}, abc = 1 \right\} < \mathrm{GL}_3(\mathbb{k})$$

comme un produit semi-direct $G = K \rtimes H$ où $K \cong \mathbb{k}$ et $H \cong \mathbb{k}^\times \times \mathbb{k}^\times$.

Exercice 2. Soit $\langle _, _ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ le produit scalaire standard $\langle x, y \rangle = x^T y$, et soit

$$O_n = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle\}$$

le groupe orthogonal.

- (i) Montrer que $\det A = \pm 1$ pour tout $A \in O_n$.
- (ii) Exprimer le groupe O_n comme un produit semi-direct $O_n = \mathrm{SO}_n \rtimes H$ où $\mathrm{SO}_n = \{A \in O_n \mid \det A = 1\}$ et $H \cong \mu_2$.
- (iii) Montrer que, si n est impair, alors $O_n \cong \mathrm{SO}_n \times \mu_2$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier et soit $0 < n < p$ un entier. Montrer que, si $G = K \rtimes H$ est un groupe qui s'écrit comme produit semi-direct de deux sous-groupes K et H de cardinal $|K| = n$ et $|H| = p$, alors $G \cong K \times \mu_p$.

Exercice 4. Soit G un groupe et soient $s, t \in G$ deux éléments d'ordre 2. Soit $\Delta = \langle s, t \rangle$ le sous-groupe engendré par s et t , et soit $r = st \in \Delta$.

- (i) Montrer que $srs^{-1} = r^{-1}$, et en déduire que $\langle r \rangle$ est un sous-groupe distingué de Δ .
- (ii) Montrer que $\langle r \rangle \cap \langle s \rangle = \{e\}$.
- (iii) Montrer que $\Delta = \langle r \rangle \rtimes \langle s \rangle$.
- (iv) Montrer que $\Delta \cong \mathcal{D}_\infty$ ou $\Delta \cong \mathcal{D}_n$.

Exercice 5. Soit G un groupe et soient K et H des sous-groupes de G satisfaisant $G = K \rtimes H$. Montrer que tout sous-groupe $K < L < G$ vérifie $L = K \rtimes (H \cap L)$.

THÉORÈMES DE SYLOW

Exercice 6. Soit G un groupe d'ordre pq , où p et q sont deux nombres premiers tels que $p < q$ et $q \not\equiv 1 \pmod{p}$. Montrer que G possède exactement un p -Sylow et un q -Sylow. En déduire que G est cyclique. Donner un exemple d'un groupe non-abélien d'ordre pq où $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 7. Soient p et q deux nombres premiers tels que $q \equiv 1 \pmod{p}$. Dans la suite, on se servira du fait que $\mathrm{Aut}(\mu_q)$ est cyclique d'ordre $q - 1$.

- (i) Montrer que $\mathrm{Aut}(\mu_q)$ possède un unique sous-groupe d'ordre p .
- (ii) Utiliser les théorèmes de Sylow pour montrer qu'un groupe G d'ordre pq est isomorphe à un produit $\mu_q \rtimes_\varphi \mu_p$ pour un certain $\varphi : \mu_p \rightarrow \mathrm{Aut}(\mu_q)$.

- (iii) Montrer que, si G et G' sont deux groupes non-abéliens d'ordre pq , alors $G \cong G'$.
- (iv) Construire un exemple d'un groupe non-abélien Γ d'ordre 21. Combien d'éléments d'ordre 3 possède-t-il ?

Exercice 8. Soit p un nombre premier impair et G un groupe d'ordre $2p$. Montrer que $G \cong \mathcal{D}_p$ ou $G \cong \mu_{2p}$.

Exercice 9. Un groupe G est *simple* si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{e\}$ et G . On présente ici trois techniques pour montrer qu'un groupe n'est pas simple.

- (i) Soit G un groupe simple. Montrer que tout homomorphisme $f : G \rightarrow H$ est soit injectif, soit trivial.
- (ii) Soit G un groupe d'ordre 63. Montrer que G n'est pas simple.
- (iii) Soit G un groupe d'ordre 30. Montrer que G n'est pas simple (compter le nombre d'éléments de G d'ordre 2, 3 et 5).
- (iv) Soit G un groupe d'ordre 36. Montrer que G n'est pas simple (faire agir G sur l'ensemble des 3-Sylow de G).

Exercice 10. Soient p et q deux nombres premiers, et a et b deux entiers naturels.

- (i) On suppose $p < q$. Soit G un groupe d'ordre pq^b . Montrer que G n'est pas simple.
- (ii) On suppose $p^a < q + 1$. Soit G un groupe d'ordre $p^a q^b$. Montrer que G n'est pas simple.
- (iii) On suppose $p^a \nmid (q - 1)!$. Soit G un groupe d'ordre $p^a q$. Montrer que G n'est pas simple.