ah

RaphBi*

30 mars 2024

Exercice 1. Minimisation d'une fonction par dichotomie. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On dit que f est **unimodale** sur l'intervalle $[a,b]$ si il existe un point $\overline{x} \in [a,b]$ tel que f soit strictement décroissante sur $[a,\overline{x}[$ et strictement croissante sur $]\overline{x},b]$.
Pour chercher $\overline{x}$, nous allons générer une suite strictement décroissante d'intervalles dont le diamètre tend vers 0 et qui encadrent le minimum recherché.

Supposons connus cinq point $a = x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 = b$. Cinq situations se présentent :

(i) $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\overline{x}$ appartient alors à $]x_1, x_2[$,

(ii) $f(x_1) > f(x_2), \quad f(x_2) < f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\overline{x}$ appartient alors à $]x_1, x_3[$,

(iii) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3), \quad f(x_3) < f(x_4) < f(x_5)$: $\overline{x}$ appartient alors à $]x_2, x_4[$,

(iv) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4), \quad f(x_4) < f(x_5)$: $\overline{x}$ appartient alors à $]x_3, x_5[$,

(v) $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4) > f(x_5)$: $\overline{x}$ appartient alors à $]x_4, x_5[$.

1. Utiliser ces propriétés pour construire un algorithme permettant de générer une suite d'intervalles $([a_k, b_k])_{k\in\mathbb{N}}$ telle que
   - $\overline{x} \in [a_k, b_k]$
   - $b_k - a_k = \frac{b_{k-1}-a_{k-1}}{2}$
   - mis à part pour le premier pas, 2 évaluations de f sont nécessaires à chaque itération.
2. Montrer que $a_k \to \overline{x}$ et $b_k \to \overline{x}$.

Solution. 1. On notera $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ plutôt $\{a_i, y_i, z_i, t_i, b_i\}$ à la i-ème itération.
Pour n'évaluer f que deux fois à chaque itération on regroupera également les cas (i) et (ii), soit

$$\underline{x} \in \,]a_k, z_k[$$

et les cas (iv) et (v), soit

$$\underline{x} \in \,]z_k, b_k[$$

le dernier cas est alors (iii)

$$\underline{x} \in \,]y_k, t_k[$$

Les valeurs deviennent alors dans le cas (i) et (ii),

$$a_{k+1} = a_k$$
$$b_{k+1} = z_k$$

dans le cas (iii),

$$a_{k+1} = y_k$$
$$b_{k+1} = t_k$$

et dans le cas (iv) et (v),

$$a_{k+1} = z_k$$
$$b_{k+1} = b_k$$

*Cours inspiré de M. Marche

2. On a $\frac{L_{k+1}}{L_k} = \frac{1}{2}$ donc

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \frac{1}{2} L_k \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} L_0 \end{aligned}$$

Soit que $L_k \underset{k\to\infty}{\to} 0$, et même que (a_k) est strictement croissante, (b_k) strictement décroissante et $\forall k, a_k < b_k$.
(a_k) et (b_k) sont alors adjacentes et convergent vers la même limite.
Par construction, $a_k \leq l \leq b_k$ pour tout k. Or, on sait que $\forall k, a_k \leq \underline{x} \leq b_k$ donc nécessairement $l = \underline{x}$.

Exercice 2. Méthode de la section dorée. Nous reprenons le principe de la méthode de la dichotomie précédente mais à chaque itération, nous allons maintenant chercher à diviser l'intervalle d'approximation en 3 parties (au lieu de 4 pour la dichotomie).

Plus précisément, nous allons construire une suite décroissante d'intervalles $[a_k, b_k]$ qui contiennent tous le minimum $\overline{x}$. Pour passer de $[a_k, b_k]$ à $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, on introduit deux nombres x_2^k et x_3^k de l'intervalle $[a_k, b_k]$.

On calcule alors les valeurs $f(x_2^k)$ et $f(x_3^k)$ et deux possibilités se présentent :

(i) Si $f(x_2^k) \leq f(x_3^k)$, alors le minimum se trouve nécessairement à gauche de x_3^k. Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = x_3^k$.

(ii) Si $f(x_2^k) \geq f(x_3^k)$, alors le minimum se trouve nécessairement à droite de x_2^k. Ceci définit alors le nouvel intervalle en posant $a_{k+1} = x_2^k$ et $b_{k+1} = b^k$.

La question suivant se pose alors : comment choisir x_2^k et x_3^k en pratique ? Il faut privilégier deux aspects :

(i) On souhaite que le facteur de réduction γ, qui représente le ratio de la longueur du nouvel intervalle, noté L_{k+1}, par rapport à la longueur du précédent, notée L_k, soit constant :

$$\frac{L_{k+1}}{L_k} = \gamma$$

(ii) On désire, comme pour la méthode de la dichotomie, réutiliser le point qui n'a pas été choisi dans l'itération précédente afin de diminuer les coûts de calcul : ceci permettra de n'évaluer f qu'une fois par itération au lieu de deux (sauf pour la première itération, où deux évaluations sont nécessaires). Rappelons que pour la dichotomie, il est nécessaire d'évaluer f deux fois par itération.

1. Traduire ces contraintes permettant de choisir $x_2^k, x_3^k, a_{k+1}, b_{k+1}$, proposer un algorithme et montrer qu'il n'y a qu'une seule valeur possible pour γ,
2. Montrer que pour tout k, on a $b_k - a_k = \gamma^k (b - a)$. Conclure.