TD3 - groupes et anneaux 2

RaphBi

30 mars 2024

Exercice 1. Exprimer le groupe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{K}, abc = 1 \right\} < \mathrm{GL}_3(\mathbb{K})$$

comme un produit semi-direct $G = K \rtimes \mathrm{H}$ où $\mathrm{K} \cong \mathbb{K}$ et $H \cong \mathbb{K}^\times \times \mathbb{K}^\times$.

Exercice 2. Soit $\langle \_, \_ \rangle : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le produit scalaire standat $\langle x, y \rangle = x^{\mathrm{T}} y$, et soit

$$\mathrm{O}_n = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \}$$

le groupe orthogonal.

(i) Montrer que $\det A = \pm 1$ pour tout $A \in \mathrm{O}_n$.

(ii) Exprimer le groupe O_n comme un produit semi-direct $\mathrm{O}_n = \mathrm{SO}_n \rtimes H$ où $\mathrm{SO}_n = \{ A \in \mathrm{O}_n \mid \det A = 1 \}$ et $H \cong \boldsymbol{\mu}_2$.

(iii) Montrer que, si n est impair, alors $\mathrm{O}_n \cong \mathrm{SO}_n \times \boldsymbol{\mu}_2$.

Exercice 3. Soit p un nombre premier et soit $0 < n < p$ un entier. Montrer que, si $G = K \rtimes H$ est un groupe qui s'écrit comme produit semi-direct de deux sous-groupes K et H de cardinal $|K| = n$ et $|H| = p$, alors $G \cong K \times \boldsymbol{\mu}_p$.