EQUAZIONI NON LINEARI

$$U_t + c(x,t)\,U_x = 0$$ (eq. Trasporto)

$\rightarrow$ $$\boxed{U_t + c(U)\,U_x = 0}$$ Velocita' dipendente dal campo U

equazione prototipo:

$$\boxed{U_t + U U_x = 0}$$ eq. Burgers-Hopf

equazioni non lineari possono SVILUPPARE DISCONTINUITA' in tempi FINITI (es: fenomeni di Shock)

Problema:

$$\begin{cases} U_t + UU_x = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$\rightarrow$ Studio fino alle eventuali discontinuita'.

Metodo delle caratteristiche

Cerco curva γ: $x(s)$, $t(s)$ t.c. $\left.\frac{du}{ds}\right|_\gamma = 0$

$U_t\, t_s + U_x\, x_s = 0$ $\rightarrow$ prendo $s = t$

$\Rightarrow U_t + U_x \dot{x} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = U}$ per confronto

pero' la soluzione U e' IGNOTA. Faccio delle ipotesi sulla soluzione

oss: $U|_\gamma$ e' costante (sulla caratteristica)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = U \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Posso integrare in maniera esatta

$\rightarrow$ $x = Ut + \underset{\text{Rispetto a } t}{\underline{cost}} = Ut + \underset{U \text{ e' costante su } \gamma}{\underline{F(U)}}$

(1) $\boxed{x - Ut = F(U)}$ Fisso $F(U)$ attraverso il dato iniziale

$U(x,0) = \varphi(x)$ e' (1) valutata a $T=0$

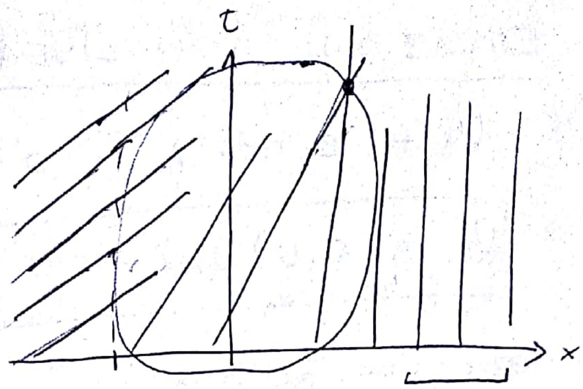
(1), $t=0$ $\Rightarrow x = F(U) \Rightarrow F = \varphi^{-1}$ (se possibile)

$\Rightarrow$ $$\boxed{\varphi(x - Ut) = U}$$ Soluzione in Forma implicita.

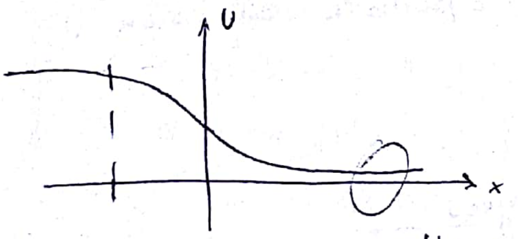
Valido per ogni $C(U)$ almeno C^∞

Caratteristiche dell' equazione

$$\begin{cases} U_t + U U_x = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \rightarrow \underline{\varphi(x - Ut) = U}$$



ad esempio:



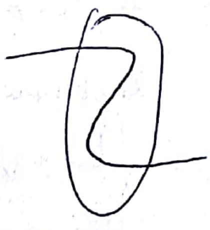
$U \to 0$

pendenze caratteristiche $= \frac{1}{U} \to \infty$

Nella fase di transizione, succede che almeno due caratteristiche si incrociano. (def: catastrofe)

la soluzione assume due valori → Non e' una funzione

→ Non ha significato



Il primo t per cui si perde significato, e' il tempo in cui compare derivata verticale (comportamento catastrofico)

- def: Tempo di Catastrofe: primo t tale che la derivata della soluzione esplode

trovo derivata da $\varphi(x - Ut) = U$, per semplicita' valuto in ogni intervallo di monotonia

$\mathcal{J} := x - Ut - F(U) = \mathcal{J}(x,t,U)$ trovo quando e' Nulla

$$\underline{\mathcal{J}(x,t,U) = 0}$$ Teorema della funzione implicita

$$\underline{dx - U dt - t dU - F_U dU = 0}$$

$$U_x = \frac{1}{t + F_U} = \infty \ ? \quad \text{se } \underline{t + F_U = 0}$$

se $\boxed{t_c = -F_U}$ tempo di catastrofe

Catastrofe:

$x_c - U_c t_c = F(U_c)$ sistema e' soddisfatto per tutti i Tempi di catastrofe

$t_c = -F_U(U_c)$ => Voglio il primo (cioe' il Tempo minimo)

$$\begin{cases} t(U) = -F_U(U) & \text{curva dei tempi di catastrofe} \\ \left.\frac{dt}{dU}\right|_{U_c} = -F_{UU}(U_c) = 0 & \end{cases}$$

Inoltre $\underline{-F_{UUU}(U_c) > 0}$

Trovo il tempo di catastrofe risolvendo il sistema:

$$\boxed{\begin{cases} x_c = U_c t_c = F|_{U_c} \\ t_c = -F_U|_{U_c} \end{cases} \quad \text{con i vincoli: } \; -F_{UU}|_{U_c} = 0, \quad -F_{UUU}|_{U_c} < 0}$$

TEMPO DI CATASTROFE

• esempio:

$$U_t + UU_x = 0 \quad , \quad U(x,0) = e^{-x^2} = \varphi(x)$$

definisco $F(U) = \varphi^{-1}(U)$ dove invertibile. In questo caso nei due intervalli $x>0$ e $x<0$ (so già che si avrà catastrofe per $x>0$ perché il segnale propaga verso destra)

$$F(U) = \sqrt{-\log U}$$

$$F_U = \frac{1}{2U\sqrt{-\log U}} \quad , \quad F_{UU} = \frac{1}{(2U\sqrt{-\log U})^2}\left(\sqrt{-\log U} - \frac{1}{2\sqrt{-\log U}}\right)$$

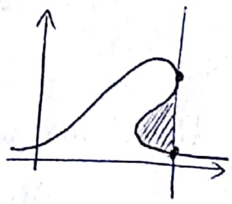
$F_{UU} = 0$ se $-\log U = 1/2 \Rightarrow \boxed{U_c = e^{-1/2}}$

$-F_U|_{U_c} = t_c \Rightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{e}{2}}}$ la soluzione ha senso solo per $t<t_c$

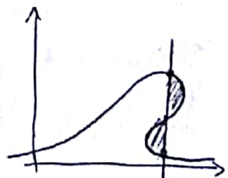
Verifico che sia un minimo: $-F_{UUU}|_{U_c} = -\sqrt{2}\, e^{3/2} < 0$ minimo.

OLTRE IL TEMPO DI CATASTROFE

Per $t>t_c$ la soluzione non è più una funzione, ma posso comunque scriverla come una funzione analitica a TRATTI, escludendo alcuni punti (ARBITRARIO)



Per trovare dove porre il salto, cerco le soluzioni deboli



• osservo che: $UU_x = \left(\frac{1}{2}U^2\right)_x =: A_x, \quad A = \frac{U^2}{2}$

Il problema è quindi:

$$U_t + A_x(U) = 0$$

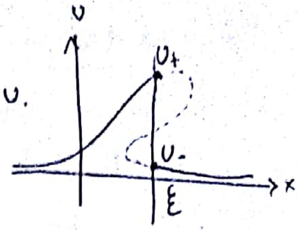
Cerco soluzione debole: sia $\phi \in \mathcal{D}$. Cerco il funzionale U per cui

$$\langle U_t + A_x | \phi \rangle = \langle U | -\phi_t \rangle + \langle A | -\phi_x \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

ossia:

$$-\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[U\phi_t + A\phi_x \right] = 0$$

Dopo il tempo di catastrofe, devo scegliere un taglio.
Sia $x=\xi$ il punto di taglio e U_+ e U_- i due valori di U.
Spezzo l'integrale in dx fino a ξ



$$0=\int_0^\infty dt\int_{-\infty}^{\xi} dx(U\phi_t + A\phi_x) + \int_0^\infty dt\int_\xi^{+\infty} dx (U\phi_t + A\phi_x) \overset{IBP}{=}$$

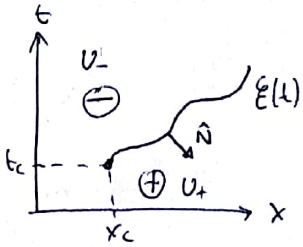
$$= \int_0^\infty dt\int_{-\infty}^{\xi} dx\left[(U\phi)_t + (A\phi)_x - \underbrace{\cancel{(U_t+A_x)}}_{0}\phi\right] + \int_0^\infty dt \int_\xi^{+\infty} dx\left[(U\phi)_t+(A\phi)_x - \underbrace{\cancel{(U_t+A_x)}}_{0}\phi\right]$$

per definizione del problema

$$=\int_0^\infty dt\left[\int_{-\infty}^{\xi} dx\, (U\phi)_t+(A\phi)_x + \int_\xi^{+\infty} dx\, (U\phi)_t + (A\phi)_x\right]$$

Definito il campo accessorio: $\underline{W}=\begin{pmatrix}U\phi\\A\phi\end{pmatrix}$, $(U\phi)_t+(A\phi)_x = \underline{\nabla}\cdot\underline{W}$

Applico teorema della divergenza scegliendo la normale esterna $\hat N=(N_x,N_t)$ (vedi figura) alla CURVA DI SHOCK $\xi(t)$



CURVA DI SHOCK

$$=\int_{\xi(t)_+} d\underline{s}\, \underline{W}\cdot\hat N + \int_{\xi(t)_-} ds\, \underline{W}\cdot \hat N = \int_{\xi(t)} d\underline{s}\,(U_-\phi N_t + A_-\phi N_x) - \int_{\xi(t)} ds\,(U_+\phi N_t + A_+\phi N_x) =$$

$$=\int_{\xi(t)} d\underline{s}\left((U_- - U_+)N_t + (A_- - A_+)N_x\right)\phi \;\underline{= 0 \quad \forall\phi}\ !$$

Deve allora essere nullo il termine:

$$\Delta U N_t + \Delta A N_x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{-\frac{N_t}{N_x} = \frac{\Delta A}{\Delta U}}$$

osservo che: se $\hat N$ è il vettore normale $\hat N=(N_t,N_x)$, allora il tangente $\hat T=(-N_x,N_t)$

Allora:

$$\boxed{S := -\frac{n_t}{n_x} = \frac{A_+ - A_-}{U_+ - U_-}}$$

VELOCITA' DI SHOCK (velocità della curva di shock)

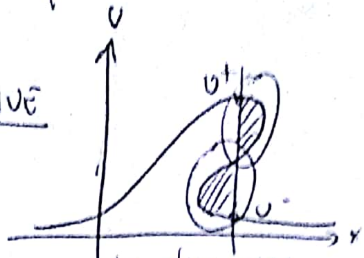
quindi:
I salti (tagli ξ) ammissibili sono QUELLI per cui la curva di shock $\xi(t)$ ha esattamente velocità S, UNICA

per il problema $U_t+UU_x=0$ si ha $\boxed{S = \frac{U_+ + U_-}{2}}$

Questa scelta e' equivalente a preservare solo la conservazione della MASSA (integrale) della soluzione U

Si mostra che tutte le altre quantita' presenti si perdono.

es: per Burgers-Hopf sono inizialmente conservate tutte le potenze di U



Le equazioni non lineari diventano quindi DISSIPATIVE

Le due aree sono uguali, quindi la massa rimane la stessa di prima della catastrofe

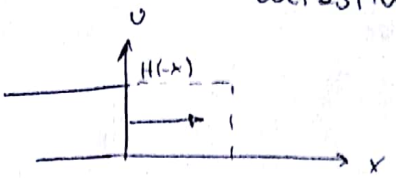
Inoltre, si perde anche L'UNICITA' della soluzione, devo dare altre REGOLE per preservarla.

• esempio: problema $U_t + UU_x = 0$, con dato iniziale

1) $U(x,0) = H(-x) \rightarrow S = 1/2$

la soluzione dopo lo shock è:

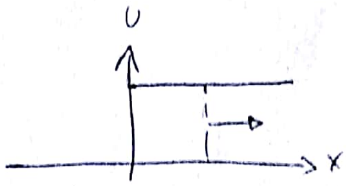
$$U(x,t) = H\left(-\left(x - \frac{1}{2}t\right)\right) \quad \text{UNICA}$$



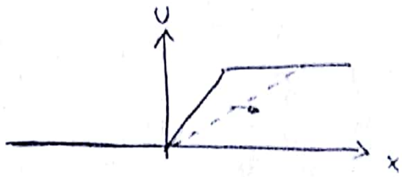
2) $U(x,0) = H(x)$

Ha entrambe le soluzioni:

$$U_1(x,t) = H\left(x - \frac{1}{2}t\right)$$



$$U_2(x,t) = \begin{cases} 1 & x \geq t \\ x/t & 0 \leq x \leq t \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



Ho due soluzioni allo stesso problema

Devo selezionarne una

CRITERIO DI ENTROPIA: Soluzione valida se e solo se

$$\boxed{U_- > S > U_+}$$

La velocita' prima dello shock (U^+) e' maggiore della velocita' dopo lo shock (U^-)

esercizio: disegnare le caratteristiche per U_1 e U_2