FUNZIONI ARMONICHE $\nabla^2 U = 0$

Considero il problema:

$$U_{xx} = 0 \quad , \; U(0) = 0 \quad , \; U(L) = 1$$

$$\Rightarrow U(x) = Ax + B \Rightarrow B = 0 \quad A = \frac{1}{L}$$

Invece:

$$U_{xx} = 0 \quad , \; U'(0) = 0 \quad , \; U'(L) = 1$$

$$\Rightarrow U(x) = Ax + B \quad \Rightarrow U'(x) = A$$

NON ESISTE soluzione che verifica $U'(0) \neq U'(L)$

se $U'(0) = U'(L)$ esiste soluzione, ma non e' UNICA

Esempio: $\underline{U}$ campo di velocita' incomprimibile e irrotazionale

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{U} = 0 \quad , \quad \underline{\nabla} \times \underline{U} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{U} = \underline{\nabla} \varphi \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\nabla^2 \varphi = 0}$$

EQUAZIONE DI LAPLACE

Sia $U: \Omega \to \mathbb{R}$, tale che $U|_{\partial\Omega} = f(x)$ (dato al bordo)

$$\boxed{\nabla^2 U = 0}$$ equazione di laplace

OSS: in campo complesso sia $U: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tale che $\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = 0$ (FUNZIONE ARMONICA), allora sono

$z = x + iy \to \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial y}$

e sia $U = \mu + i\nu$, allora:

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\mu_x - \frac{1}{2i}\mu_y + i\left(\frac{1}{2}\nu_x - \frac{1}{2i}\mu_y\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mu_x - \nu_y + i(\mu_y + \nu_x)\right) = 0$$

$\iff \mu_x = \nu_y$ e $\mu_y = -\nu_x$

Se le derivate commutano $\nu_{xy} = \nu_{yx}$:

$$\nu_{xy} = (-\mu_y)_y = \nu_{yx} = \mu_{xx} \Rightarrow -\mu_{yy} = \mu_{xx}$$

$\Rightarrow \underline{\nabla^2 \mu = 0}$, analogamente per ν

Parte reale e immaginaria di funzione armonica complessa sono funzioni armoniche Reali.

Voglio ora sfruttare le simmetrie dell'equazione per trovare la soluzione.

eq. onde	eq laplace
$U_{xx} - U_{yy} = 0$ invariante per Boost di Lorentz	$U_{xx} + U_{yy} = 0$ invariante per rotazioni

- TEOREMA: L'equazione di Laplace e' invariante per rotazione

DIMOSTRAZIONE: Scrivo il laplaciano in coordinate polari. Sara' indipendente da θ

Considero la trasformazione:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \partial_r = \frac{\partial x}{\partial r}\cdot\partial_x + \frac{\partial y}{\partial r}\cdot\partial_y \qquad \partial_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\partial_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\partial_y \qquad \begin{pmatrix}\partial_r \\ \partial_\theta\end{pmatrix} = J\begin{pmatrix}\partial_x \\ \partial_y\end{pmatrix}$$

e' quindi sufficiente invertire la Jacobiana. Si trova:

$$\boxed{\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2}$$ indipendente da θ. ∎

OSS: Rotazioni sono trasformazioni LINEARI in Θ, ossia

$\theta' = \theta + h$, quindi $\partial_{\theta'} = \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \cdot \partial_\theta = \partial_\theta$ e allora $\underline{\partial^2_{\theta'} = \partial^2_\theta}$

(invarianza rotazionale del laplaciano)

Cerco allora una soluzione dipendente solo da r (in N dimensioni è analogo). Osservo che:

$r = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i x^i}$, allora $\frac{\partial r}{\partial x^i} = \frac{x_i}{\sqrt{x^i x_i}} = \frac{x_i}{r}$ e $\frac{\partial^2 r}{\partial x^{i2}} = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = x_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial x_i}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{x_i}{(x_j x^j)^{3/2}}(-x_i) + \frac{1}{r} = -\frac{x_i^2}{r^3} + \frac{1}{r}$$

quindi: $\underline{\nabla} r = \frac{1}{r} \cdot \nabla$, $\nabla^2 r = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 r}{\partial x_i} = \frac{N}{r} - \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i^2}{r^3} = \frac{N}{r} - \frac{1}{r}$

$$\boxed{\nabla^2 r = \frac{N-1}{r}}$$

Allora: $U(x_1, \dots, x_N) = v(r)$ e quindi:

$$\nabla^2 U = \nabla^2 v(r) = \nabla \cdot (\nabla v(r)) = \nabla \cdot (v_r \cdot \nabla r) = \nabla(v_r) \cdot \nabla r + v_r \nabla^2 r =$$

$$= (v_{rr} \cdot \underline{\nabla} r)\underline{\nabla} r + v_r \nabla^2 r = v_{rr} |\nabla r|^2 + v_r \nabla^2 r = \underline{v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r}$$

risolvo allora:

$$\boxed{v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r = 0}$$

<u>per $N = 1$</u>

$v_{rr} = 0 \quad \to \quad \underline{v(r) = Ar + B}$

<u>per $N = 2$</u>

$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r = 0$, $r v_{rr} + v_r = \frac{d}{dr}(r v_r) = 0$

quindi: $r v_r = cost \Rightarrow v_r = \frac{cost}{r}$

$$\underline{v(r) = A \log(r) + B}$$

<u>per $N > 2$</u>

$v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r = 0$, $r^{N-1} v_{rr} + r^{N-2}(N-1) v_r = \frac{d}{dr}\left(r^{N-1} v_r\right) = 0$

quindi: $r^{N-1} v_r = cost \Rightarrow v_r = cost\, r^{-(N-1)}$

$v_r = r^{-N+1} \cdot cost \quad \Rightarrow \quad \underline{v(r) = \frac{A}{r^{N-2}} + B}$

$v = \frac{r^{-N+2}}{(-N+2)} \cdot cost$

Allora, la soluzione FONDAMENTALE a $\nabla^2 u = 0$ è:

$$\boxed{\begin{array}{lll} (N=1) & u(r) = Ar + B \\ (N=2) & u(r) = A\log(r) + B \\ (N\geq 3) & u(r) = \frac{A}{r^{N-2}} + B \end{array}}$$

OSS: per $N \geq 3$ la singolarità è di tipo polo.

OSS: è anche soluzione del calore con sorgente unica, a grandi t

• TEOREMA: In N dimensioni ∇^2 è invariante per rotazione

Dimostrazione: Rotazione è una matrice ortogonale $N\times N$

Matrice R t.c. $R^T R = \mathbb{1}_N$, la trasformazione è

$x'_i = R_i{}^j x_j \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} = R_i{}^j \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$, e poiché $R^{-1} = R^T$

$\frac{\partial}{\partial x'_j} = R^j{}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, quindi:

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^N \partial_i \partial^i = \sum_{i,j} \delta_{ij}\partial_i\partial^j = \sum_{i,j,k,e} \delta_{ij} R_i{}^k \partial'_k R^j{}_e \partial'^e =$$

$$= \sum_{i,j,k,e} R_i{}^k R^j{}_e \delta_{ij} \partial'_k \partial'^e = \sum_{i,j,k,e} R^{Tk}{}_i R^i{}_e \partial'_k \partial'^e = \sum_{k,e} \delta_{ke} \partial'^k \partial'_e$$

$$= \nabla'^2 \quad \blacksquare$$

IDENTITA' DI GREEN

L'idea è: poiché per V armoniche $\int \nabla^2 v = 0$, allora $\int u \nabla^2 v = ?$

I. Siano $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$, sufficientemente regolari

$$\boxed{\int_D d^N x \left(u \nabla^2 v + \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \right) = \int_{\partial D} d^{N-1}x \, \frac{\partial v}{\partial n} \cdot u}$$

dimostrazione:

$$\int_D u \nabla^2 v \, d^N x = \int_D \underline{\nabla}\cdot(u \underline{\nabla} v)\, d^N x - \int_D \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d^N x =$$

$$= \int_{\partial D} u \underbrace{\underline{\nabla} v \cdot \hat{n}}_{\frac{\partial v}{\partial n}} \, d^{N-1}x - \int_D \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d^N x \quad \blacksquare$$

II. Con le stesse ipotesi:

$$\boxed{\int_D d^N x \left(u \nabla^2 v - v \nabla^2 u \right) = \int_{\partial D} d^{N-1}x \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right)}$$

dimostrazione:

Scambio v e u in I e sottraggo $\blacksquare$

CONDIZIONI DI NEUMANN

Il problema di Neumann prevede di assegnare la derivata Normale al bordo:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \underline{n}} = f(\underline{x}) \end{cases}$$

Però, poiché U è armonica, vale:

$$\underbrace{\int_D \nabla^2 U \, d^N x}_{=0} = \int_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial \underline{n}} \, d^{N-1} x \, ,$$

quindi il problema di Neumann ha soluzione se e solo se:

$$\boxed{\int_{\partial D} f(\underline{x}) \, d^{N-1} x = 0}$$

OSS: in 1 dimensione, la condizione equivale a:

$f(a) - f(b) = 0$ devono avere la stessa derivata ai due punti estremi

Se invece mi va bene una soluzione definita QUASI OVUNQUE non è necessaria questa condizione (perché non vale .

esempio: in elettrostatica assegnare $\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{n}}$ equivale a stare in un conduttore se non vale più $\nabla^2 \varphi = 0$ OVUNQUE nel dominio

→ La SOLUZIONE NON è PIÙ STATICA

OSS: la soluzione al problema di Neumann NON è UNICA (definita a meno di COSTANTI di integrazione, che non cambiano i dati al bordo $\frac{\partial U}{\partial \underline{n}}$)

PROPRIETÀ DELLA SOLUZIONE

- PROPRIETÀ DEL VALOR MEDIO: Sia U funzione ARMONICA su Ω. Sia $\underline{0} \in \Omega$, allora:

$$\boxed{U(\underline{0}) = \frac{1}{V(\partial B)} \int_{\partial B(\underline{0},r)} d^{N-1} x \, U(\underline{x})} \quad \forall B(0,r) \subset \Omega \; !$$

corollario:

$$\boxed{U(\underline{0}) = \frac{1}{V(B)} \int_{B(\underline{0},r)} d^N \underline{x} \, U(\underline{x})}$$

OSS: Vale sia per il Bordo che per il Volume

⚠ Vale per ogni raggio r !

DIMOSTRAZIONE:

[Il volume della sfera N dimensionale e' $V_N = \alpha(N) r^N$ e la superficie e' quindi $S_N = \underbrace{\alpha(N) N}_{\omega(N)} r^{N-1}$ (dimostrare $V_N \Rightarrow S_N$)]

Sia $x \in \Omega$, definisco la funzione $g(r)$ (media di raggio r)

$$g(r) = \frac{1}{\omega(N) r^{N-1}} \cdot \int_{S(x,r)} d^{N-1}y \, U(y)$$

Voglio mostrare che e' INDIPENDENTE da r. Seguirà che:

$$g(r) = g(0) = U(0) \quad \forall r$$

Oss: r entra anche nel DOMINIO di integrazione $S(x,r)$

Voglio fare un cambio di coordinate per risolvere questo problema.

Sia $\underline{y} = x + r\hat{\underline{\xi}}$, dove $\hat{\xi}$ e' un versore radiale

$$dy_i = r\, d\xi_i \rightarrow d^{N-1}\underline{y} = r^{N-1} d\hat{\underline{\xi}}$$

$$g(r) = \frac{1}{\omega(N) \cancel{r^{N-1}}} \cdot \int_{S(0,1)} d^{N-1}\hat{\underline{\xi}} \, \cancel{r^{N-1}} \, U(x + r\hat{\underline{\xi}})$$

Valuto ora $\frac{dg}{dr}$

$$\frac{dg}{dr} = \frac{1}{\omega(N)} \int_{S(0,1)} d^{N-1}\hat{\underline{\xi}} \, U_r(x + r\hat{\underline{\xi}}) = \frac{1}{\omega(N)} \int_{S(0,1)} d^{N-1}\hat{\underline{\xi}} \overbrace{\left(\hat{\underline{\xi}} \cdot \underline{\nabla} U(x + r\hat{\underline{\xi}})\right)}^{\text{derivata radiale}}$$

Torno in $\underline{y} = \underline{x} + r\hat{\underline{\xi}}$ (cerco la derivata di r sul bordo)

$$\frac{dg}{dr} = \frac{1}{\omega(N) r^{N-1}} \int_{S(x,r)} d^{N-1}\underline{y} \underbrace{\left(\frac{\underline{y} - \underline{x}}{r}\right)}_{\substack{\text{e' un elemento di } S(x,r) \\ \Rightarrow \text{sto facendo la proiezione sul raggio: Derivata NORMALE}}} \cdot \underline{\nabla} U(y) = \frac{1}{\omega(N) r^{N-1}} \int_{S(x,r)} d^{N-1}\underline{y} \frac{\partial U}{\partial n}(y) =$$

Applicando il teorema della divergenza:

$$\frac{dg}{dr} = \frac{1}{\omega(N) r^{N-1}} \int_{S(x,r)} d^{N-1}\underline{y} \frac{\partial U}{\partial \underline{n}}(y) = \frac{1}{\omega(N) r^{N-1}} \int_{B(x,r)} d^N\underline{y} \, \nabla^2 U = \underline{0}$$

Allora $g(r) = g(0) \; \forall r$ ∎

esercizio: dimostrare

LEMMA: Sia $B(x_0, r)$ palla centrata in x_0, sia V_N il volume N-dimensionale e S_N la superficie N-dimensionale di ∂B, allora

$$V_N = \alpha(N) r^N \quad -> \quad S_N = \alpha(N) N r^{N-1}$$

dimostrazione:

$$\nabla \cdot \underline{x} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} = N$$

$$V_N = \alpha(N) r^N = \int_B d^N x = \int_B 1 \cdot d^N x = \frac{1}{N} \int_B \underline{\nabla \cdot \underline{x}\, d^N x} =$$

$$= \frac{1}{N} \int_{\partial B} \underbrace{\underline{n} \cdot x}_{\text{entrambi radiali}} \, d^{N-1} x = \frac{1}{N} \int_{\partial B} |x| \, d^{N-1} x = \frac{r}{N} \int_{\partial B} d^{N-1} x = \frac{r}{N} S_N$$

$$\Rightarrow \alpha(N) r^N = \frac{r}{N} S_N \Rightarrow \underline{S_N = N \alpha(N) r^{N-1}}$$

$\square$

TEOREMA: Sia U una funzione per cui vale la proprietà della media per ogni palla di raggio r centrata in un punto del dominio, x_0, che sia anche almeno di classe C^2. Allora: <u>U è armonica</u>

DIMOSTRAZIONE:

definisco la funzione media sulle sfera $S = \partial B(x_0, r)$

$$g(r) = \frac{1}{\omega(N) r^N} \int_S d^{N-1} y \; U(\underline{y})$$

Poiché vale la proprietà della media allora $\frac{dg}{dr} = 0$

$$\frac{dg}{dr} = \int_S d^{N-1} \underline{y} \; \nabla^2 U(\underline{y}) = 0$$

Poiché $\nabla^2 U$ è continuo, se esiste un punto in cui è POSITIVO $\underline{x}_0$. Allora esiste una sfera di raggio r in cui $\nabla^2 U$ è POSITIVO, su questa sfera, se la <u>media</u> della funzione positiva $\nabla^2 U$ è NULLA, allora deve essere nulla $\nabla^2 U$ su questa sfera. Analogamente se $\nabla^2 U(x_0) < 0$ ∎

ESERCIZIO: costruire una funzione per cui valga questa proprietà (media) in una dimensione

$$x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \quad \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \Rightarrow f \text{ è } \underline{\text{lineare}}$$

COROLLARIO: vale la proprietà della media anche su una PALLA, se U è armonica.

DIMOSTRAZIONE:

Calcolo la media su una palla centrata attorno a x_0. U armonica $\Rightarrow$ Vale propr. media sulla superficie

$$\frac{1}{\alpha(N) r^N} \int_{B(x_0,r)} d^N \underline{y} \; U(\underline{y}) = \frac{1}{\alpha(N) r^N} \int_0^r d\rho \underbrace{\int_{S(x_0,r)} d^{N-1} y \; U(\underline{y})} = \frac{1}{\alpha(N) r^N} \int_0^r d\rho \; \omega(N) \rho^{N-1} \cdot U(x_0) =$$

$$= U(\underline{x}_0) \cdot \frac{\omega(N)}{\alpha(N) r^N} \left(\frac{\rho^N}{N} \right)_0^r = U(x_0) \frac{\cancel{\omega(N)}^{1}}{\cancel{\alpha(N)} N} = \underline{U(x_0)} \;∎$$

- **TEOREMA (PRINCIPIO DEL MASSIMO, FORTE):** Sia $U : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione ARMONICA, allora se il punto di massimo è assunto all'INTERNO di Ω, allora:

<u>U è COSTANTE in Ω</u>

DIMOSTRAZIONE: sia $x_0 \in \Omega$ il punto di massimo, ~~allora~~ e sia $M = U(x_0)$, allora:

$$M = U(x_0) = \frac{1}{\omega(N)r^{N-1}} \int_{S^{N-1}(x_0,r)} d^{N-1}y \, U(y) \leq M \cdot \frac{V(S^{N-1})}{\omega(N)r^{N-1}} \cancel{} 1$$

Allora $U(y)$ deve essere costante e uguale al massimo.

Replico il ragionamento su un'altra sfera centrata in $x_1 \in S(x_0, r)$ e per estensione posso coprire tutto l'INTERNO ∎

COROLLARIO: Analogamente per il minimo.

COROLLARIO: I punti estremanti di una funzione armonica possono solo essere sul bordo.

UNICITA' DELLA SOLUZIONE (PER PROBLEMA DI DIRICHLET)

Considero il problema: $U: \Omega \to \mathbb{R}$

$$\nabla^2 U = 0 \quad \text{su } \Omega \quad , \quad U|_{\partial\Omega} = \psi(s)$$

TEOREMA: La soluzione U del problema e' UNICA

• DIMOSTRAZIONE

Siano U_1 e U_2 soluzioni del Problema. Definisco $W := U_1 - U_2$, che e' soluzione di:

$$\nabla^2 W = 0 \quad , \quad W|_{\partial\Omega} = 0$$

1) Se U e' almeno C^2, allora W ha massimo e minimo su $\partial\Omega$, dove pero' $W = 0$, allora $W \equiv 0$ ∎

2) Dalla prima identita' di green

$$\underbrace{\int_{\partial\Omega} W \frac{\partial W}{\partial n} d\sigma}_{\substack{=0 \text{ sia per condizioni} \\ \text{di Dirichlet che per Neumann}}} = \int_{\Omega} |\nabla W|^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{W = cost}_{=0 \text{ per dirichlet}} \ ∎$$

OSS: per condizioni di Neumann, la soluzione NON e' UNICA.

Dirichlet: $W|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow U_1 = U_2$

Neumann: $\left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} U_1 = K_1 \\ U_2 = K_2 \end{matrix}$, $K_1 \neq K_2$ in generale.

08/05/2018

PRINCIPIO DI DIRICHLET

Considero su Ω il problema:

$$\nabla^2 U = 0 \quad , \quad U|_{\partial\Omega} = \varphi$$

Le funzioni armoniche sono i minimi del funzionale

$$E[w] = \int_\Omega |\nabla w|^2 d^N x \quad , \quad w|_{\partial\Omega} = \varphi$$

DIMOSTRAZIONE:

Per costruzione $E[w] \geq 0 \ \forall w$, sia U una funzione armonica e v una funzione qualsiasi tale che $w = U + v$, $v|_{\partial\Omega} = 0$

(oss: $w|_{\partial\Omega} = \varphi$, $U|_{\partial\Omega} = \varphi$, allora: $v|_{\partial\Omega} = 0$ è massimo)

$$E[w] = \int_\Omega |\nabla U + \nabla v|^2 d^N x = E[U] + E[v] + 2\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla v \, d^N x \geq 0$$

OSSERVO che: U è un minimo di E se, per definizione,

$\forall w \quad E[w] - E[U] \geq 0$

Dalla I identità di Green:

$$\int_\Omega \nabla U \cdot \nabla v \, d^N x = \cancel{\int_{\partial\Omega} d^{N-1}x \, v \frac{\partial U}{\partial n}} - \int_\Omega d^N x \, \cancel{\nabla^2 U \cdot v}$$

$v|_{\partial\Omega} = 0$; 0 se $\nabla^2 U$ in $\Omega = 0$

Allora:

$$E[w] = E[U] + E[v] \geq 0 \quad \forall v \text{ (variazione)}$$

$$E[w] - E[U] = E[v] \geq 0 \quad \text{(per costruzione di } E)$$

$(\forall v)$

quindi $E[U]$ è MINIMO. ■

TEOREMA (DI LIOUVILLE): Sia $U : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione ARMONICA. Se U è LIMITATA su Ω, allora è COSTANTE.

DIMOSTRAZIONE: Se U è armonica, anche $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ è armonica, allora vale principio delle medie (voglio mostrare che è NULLA $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, così U è costante)

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{V(B)} \int_{B(x,r)} \frac{\partial U}{\partial x_i}(y) \, d^N y = \frac{1}{\alpha(N) r^N} \int_{\partial B(x,r)} U(y) \cdot \hat{n} \, d^{N-1} y$$

$$\leq \frac{1}{\alpha(N) r^N} \max_\Omega |U(x)| \cdot \omega(N) r^{N-1} \sim \frac{1}{r} \quad \forall r$$

in particolare per $r \to \infty$ $\quad \frac{\partial U}{\partial x_i} \to 0$

$\Rightarrow U$ è costante ■

FORMULA DI POISSON

Voglio risolvere l'equazione di Laplace in un disco di $\mathbb{R}^2$

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad u|_{r=a} = h(\theta)$$

In coordinate polari: $\nabla^2 u = u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\theta\theta}}{r^2} = 0$

OSS: e' omogeneo rispetto a r

e' separabile tra r e θ: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$

$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \rightarrow r^2 \frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0$

Allora separo il problema in:

$$r^2 R'' + r R' = \lambda R \quad , \quad \Theta'' = -\lambda\Theta$$

oscillatore o repulsore armonico

OSS: la parte angolare Θ deve essere PERIODICA
$\Rightarrow$ dub avere soluzioni seni e coseni circolari $\Rightarrow \lambda \geq 0$

$\lambda = \omega^2 \quad , \quad \Theta = A\cos(\omega\theta) + B\sin(\omega\theta) \quad , \quad \theta(0) = \theta(2\pi)$

$\cos(0) = \cos(\omega 2\pi) \quad , \quad \sin(0) = \sin(\omega 2\pi) \Rightarrow \omega = N$

$$\boxed{\Theta_N(\theta) = A_N\cos(N\theta) + B_N\sin(N\theta)} \qquad N \geq 0$$

In particolare e' ammesso l'autovalore nullo, cui autostato sono le funzioni costanti (in θ)

Risolvo ora la parte radiale

$$r^2 R''(r) + r R'(r) - \lambda R = 0 \quad \rightarrow R = r^\alpha$$

$\alpha(\alpha-1)r^\alpha + \alpha r^\alpha - \lambda r^\alpha = 0$

$(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \lambda) r^\alpha = 0 \quad \forall r \quad \Rightarrow \alpha(\alpha-1) + \alpha - N^2 = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 = N^2 \qquad \boxed{\alpha = \pm N} \qquad$ se $N > 0$

Se invece $N = 0$

$r^2 R''(r) + r R'(r) = 0 \Rightarrow r R''(r) + R'(r) = 0$

$(rR')' = 0 \Rightarrow rR' = \text{cost} \Rightarrow R = C_0\log(r) + D_0$

Allora:

$$\boxed{R_N(r) = \begin{cases} C_N r^N + D_N r^{-N} & N > 0 \\ C_0 \log(r) + D_0 & N = 0 \end{cases}}$$

Trovare la soluzione al problema:

$$\nabla^2 U = 0 \quad , \quad U|_{r=a} = h(\theta)$$

$$U_N(r,\theta) = R_N(r)\,\Theta_N(\theta) = \left(A_N \cos(N\theta) + B_N \sin(N\theta)\right) \cdot \begin{cases} (N=0) & C_0 \log(r) + D_0 \\ (N>0) & C_N r^N + D_N r^{-N} \end{cases}$$

Pongo ora le condizioni:

- La funzione deve essere CONTINUA all'interno del disco: NO singolarità $\log(r)$, r^{-N} per $r=0$

$$\Rightarrow \underline{C_0 \ , \ D_N = 0}$$

Allora, per:

$N=0$ $\quad \Theta_0 = \text{cost}$, $R_0 = \text{Cost}$

$N>0$ $\quad \Theta_N = A_N\cos(N\theta) + B_N \sin(N\theta)$, $R_N = C_N r^N$

Costruisco ora la soluzione generale:

$$\boxed{U(r,\theta) = \sum_{N=0}^{\infty} U_N(r,\theta) = \frac{1}{2}\tilde{A}_0 + \sum_{N=1}^{\infty} r^N\left(\tilde{A}_N \cos(N\theta) + \tilde{B}_N \sin(N\theta)\right)}$$

Devo porre ora le condizioni al Bordo:

sviluppo h in serie di Fourier (se è possibile)

$$h(\theta) = U(a,\theta) = \frac{1}{2}\tilde{A}_0 + \sum_{N=1}^{\infty} a^N\left(\tilde{A}_N \cos(N\theta) + \tilde{B}_N \sin(N\theta)\right)$$

Per trovare i coefficienti, calcolo

$$\langle h(\theta)|\cos(M\theta)\rangle = \int_0^{2\pi} h(\theta)\cos(M\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta\, a^M \tilde{A}_M \cos^2(M\theta) = \pi a^M \tilde{A}_M$$

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{A}_M &= \frac{1}{\pi a^M}\langle h(\theta)|\cos(M\theta)\rangle \\ \tilde{B}_M &= \frac{1}{\pi a^M}\langle h(\theta)|\sin(M\theta)\rangle \end{aligned}}$$

In questo caso la serie è risommabile per $r \leq a$ (Dominio)

$$U = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\, h(\varphi) + \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left(\frac{r}{a}\right)^N \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot h(\varphi)\Big(\underbrace{\cos N\varphi \cos N\theta + \sin N\varphi \sin N\theta}_{\cos(N\varphi - N\theta)}\Big) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\left[1 + \sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^N\left(e^{iN(\theta-\varphi)} + e^{-iN(\theta-\varphi)}\right)\right] h(\varphi) =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}\left[1 + \left(\sum_{N=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}e^{i(\theta-\varphi)}\right)^N + \left(\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\varphi)}\right)^N\right]h(\varphi) =$$

definisco: $\rho = \frac{r}{a} e^{i(\theta-\varphi)}$, allora:

$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} h(\varphi) \left[1 + \sum_{N=1}^{\infty} \rho^N + \sum_{N=1}^{\infty} \bar{\rho}^N \right] = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} h(\varphi) \left[1 + \left(\frac{1}{1-\rho} - 1 \right) + \left(\frac{1}{1-\bar{\rho}} - 1 \right) \right] = \dots$$

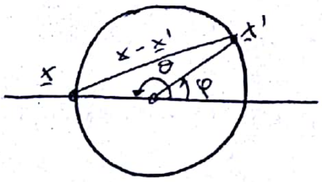
$$\boxed{u(r,\theta) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{(a^2 - r^2)\, h(\varphi)}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta-\varphi)}}$$

oss: $\lim_{r \to a} u(r,\theta) = h\theta$

FORMULA DI POISSON

(soluzione di $\nabla^2 u = 0$, $u(a,\theta) = h(\theta)$, su $\{(r,\theta)$ t.c. $r \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi\}$)

La riscrivo in coordinate cartesiane con la seguente sostituzione:



$$\boxed{u(\underline{x}) = \frac{a^2 - |\underline{x}|^2}{2\pi a} \int_{|\underline{x}'| = a} ds' \frac{h(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^2}}$$

FORMULA DI POISSON IN COORDINATE CARTESIANE

OSSERVAZIONI:

- ho supposto che h fosse sviluppabile in serie di Fourier, ma si può dimostrare che vale anche per h continue. (Non serve che sia derivabile sul bordo)
- Dall'espressione di u osservo che può essere derivata indefinitamente:

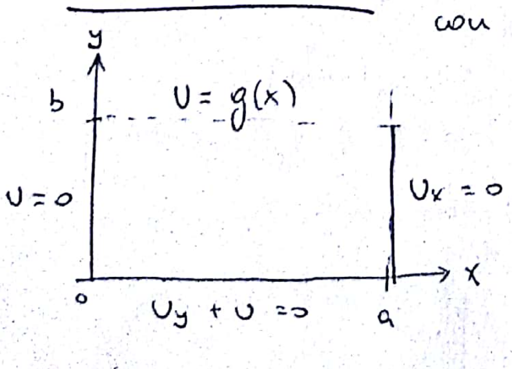
  FUNZIONI ARMONICHE SU UNA PALLA SONO C^∞

Per qualunque dominio, posso per ogni punto usare il teorema della media e in ogni punto è C^∞ perché lo è sulla palla

- Più in generale si può mostrare che sono analitiche.
- Si può dimostrare il:

  TEOREMA: una funzione CONTINUA e che ammette proprietà della media è ARMONICA.

esercizio (Strauss): Trovare la funzione armonica su un rettangolo con condizioni miste:



$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \{0 < x < a,\ 0 < y < b\}$$

$$\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u_x(a,y) = 0 \\ u(x,b) = g(x) \\ u_y(x,0) + u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Studio la soluzione separando le variabili: $U(x,y) = X(x)\,Y(y)$

L'equazione si divide in:

$$X'' - \lambda X = 0 \qquad Y'' + \lambda Y = 0$$

Studio le condizioni al bordo (in maniera intelligente)

- $U(0,y) = 0$ (in $x=0$). Risolvo allora X

$$X(x) = A\cosh(\sqrt{-\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{-\lambda}x) \qquad \text{IMPOSSIBILE}$$

(cfr. equazione ONDE, spettro $\lambda > 0$)

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Pongo le condizioni:

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$X'(a) = 0 \Rightarrow B\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}a) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{a}\left(N + \frac{1}{2}\right)$

$$\lambda = \frac{\pi^2}{a^2}\left(N + \frac{1}{2}\right) = K_N^2 > 0$$

Allora: $\boxed{X(x) = B_N \sin(K_N x)}$

Risolvo allora per y (Repulsore armonico)

$$Y = A\cosh(K_N y) + B\sinh(K_N y)$$

$$U_y + U|_{y=0} = X\left[K_N\left(A\sinh(K_N y)|_{y=0} + B\cosh(K_N y)|_{y=0}\right) + \left(A\cosh(K_N y) + B\sinh(K_N y)\right)\right]_{y=0} = 0$$

$$\Rightarrow K_N B_N + A_N = 0 \Rightarrow \boxed{A_N = -K_N B_N}$$

$$\boxed{Y(y) = B_N\left(\sinh(K_N y) - \cosh(K_N y)\right)}$$

Pongo la condizione $U(x,b) = g(x)$. SE g è sviluppabile in fourier

$$U(x,b) = g(x) = \sum_{N=0}^{\infty} C_N \sin(K_N x)\left(\sinh(K_N b) - K_N\cosh(K_N b)\right) = \sum_{N=0}^{\infty} \langle g(x)|\sin(K_N(x))\rangle \sin K_N(x)$$

se calcolo $\langle g(x)|\sin(K_N x)\rangle = C_N\left(\sinh(K_N b) - K_N\cosh(K_N b)\right)$

La soluzione è allora:

$$\boxed{U(x,y) = \sum_{N=0}^{\infty} C_N \sin(K_N x)\left(\sinh(K_N y) + K_N\cosh(K_N y)\right)}$$

con $K_N = \frac{\pi}{a}\left(N + \frac{1}{2}\right)$, $C_N = \dfrac{\langle g(x)|\sin(K_N x)\rangle}{\sinh(K_N b) - K_N\cosh(K_N b)}$

FORMULA DI RAPPRESENTAZIONE

Definisco la funzione

$$G_\infty(|\underline{x}-\underline{x}_0|) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|\underline{x}-\underline{x}_0| & (N=2) \\ \frac{1}{\omega_N(N-2)}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0|^{N-2}} & (N>2) \end{cases}$$

Per ogni funzione $u:\Omega\to\mathbb{R}$, sufficientemente liscia, vale

$$\boxed{u(\underline{x}) = \int_\Omega d^Ny\, G_\infty(|x-y|)\nabla^2 u(y) + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y\left[u(y)\frac{\partial}{\partial \underline{n}}G_\infty(|x-y|) - G_\infty(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}(y)\right]}$$

OSS: Non è nient'altro che l'identità di Green, se

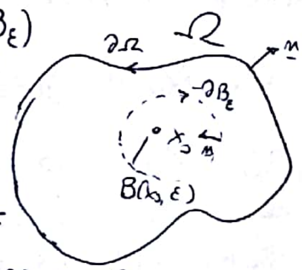
$$\int_\Omega d^Ny\, u(y)\nabla^2 G_\infty(|x-y|) = u(\underline{x}), \quad \text{cioè } \nabla^2 G_\infty(|x-y|) = \delta(x-y)$$

Mostro che G_∞ è una funzione il cui laplaciano agisca come δ

DIMOSTRAZIONE: G_∞ è singolare in $x_0\in\Omega$. Ritaglio da Ω una palla centrata in x_0, di raggio ε.

Sia $\Omega_\varepsilon = \Omega\setminus B(x_0,\varepsilon)$, $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega\cup(-\partial B_\varepsilon)$
orientato, opposto

Su Ω_ε le identità di Green valgono



$$\int_{\Omega_\varepsilon} d^Ny\Big(\underset{(1)}{G_\infty(|x-y|)\nabla^2u(y)} - u(y)\cancel{\nabla^2G_\infty(|x-y|)}\Big) =$$

0 G_∞ è armonica su Ω_ε

$$= \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y\left(G_\infty\frac{\partial u}{\partial \underline{n}} - u\frac{\partial G_\infty}{\partial \underline{n}}\right) + \int_{\partial B_\varepsilon}\Big(\underset{(2)}{-u\frac{\partial G_\infty}{\partial \underline{n}}} + \underset{(3)}{G_\infty\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}}\Big)d^{N-1}y$$

(1) per $\varepsilon\to 0$ $\Omega_\varepsilon\to\Omega$, quindi vale $\int_\Omega d^Ny\, G_\infty(|x-y|)\nabla^2 u$

(3) $\int_{\partial B_\varepsilon} G_\infty \frac{\partial u}{\partial \underline{n}} d^{N-1}y \underset{(\text{per } N=3)}{=} \int_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\Big|_{r=\varepsilon} d^2y \le \max_{r=\varepsilon}\left|\frac{\partial u}{\partial \underline{n}}\right|\frac{1}{4\pi\varepsilon}\cdot\varepsilon^2\cdot(\text{cost})$

Allora, per $\varepsilon\to 0$ (3) $\to 0$ come ε, (uguale per N generico)

(2) $\int_{\partial B_\varepsilon} d^{N-1}y\, u(y)\frac{\partial G_\infty}{\partial \underline{n}}(|x-y|) \overset{(N=3)}{=} \int_{\partial B_\varepsilon} d^2y\, u(y)\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\cdot\nabla_y\left(\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)\right) = \left(\text{OSS: } \frac{\partial}{\partial \underline{n}} = \frac{x-y}{\varepsilon}\cdot\nabla_y\right)$

$$= \int_{\partial B_\varepsilon} d^2y\, u(y)\,\frac{1}{4\pi}\,\frac{|x-y|}{\varepsilon^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\overbrace{\frac{|x-y|}{\varepsilon}}^{=1} d^{N-1}y = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\int_{\partial B_\varepsilon} u(y)\,d^{N-1}y}_{\text{T. Media}} =$$

$\xrightarrow{\varepsilon\to 0}$ $u(\underline{x}_0)$ (per Teorema della Media, vale $\forall\varepsilon$!!) ∎ se u è armonica.
(quindi anche per $\varepsilon\to 0$)

- <u>DEF (FUNZIONE DI GREEN)</u>: definisco la funzione di Green del dominio Ω come la G tale che:
  - $\nabla^2 G = 0 \quad \forall x \neq x_0$ (al più una singolarità)
  - $G|_{\partial\Omega} = 0$
  - $H := G - G_\infty$ è <u>REGOLARE</u> (G diverge ESATTAMENTE come G_∞ in x_0)

    <u>oss</u>: $H|_{\partial\Omega} \neq 0$ in generale!

<u>esercizio</u>: dimostrare che dato il dominio Ω, G è UNICA (Attenzione ai dati al Bordo di H, dipendono solo da G_∞)

<u>SOLUZIONE AL PROBLEMA DI DIRICHLET, con formula di Rappresentazione</u>

Considero il problema: su Ω

$$\nabla^2 U = 0 \quad , \quad U|_{\partial\Omega} = \varphi(s)$$

Formula di rappresentazione

$$U(\underline{x}) = \int_\Omega d^N y \, \cancel{G_\infty(x-y)\nabla^2 U(y)} + \int_{\partial\Omega} d^{N-1} y \left[U(y) \frac{\partial}{\partial \underline{n}} G_\infty(|x-y|) - G_\infty(|x-y|) \frac{\partial U}{\partial \underline{n}}(\underline{y}) \right]$$

0 perché $\nabla^2 U = 0$ su Ω

definita:

$$H = G - G_\infty \Rightarrow G_\infty = G - H$$

$$U(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} d^{N-1} \underline{y} \left[U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial \underline{n}} \right] - \int_{\partial\Omega} d^{N-1} y \left[U \frac{\partial H}{\partial \underline{n}} - H \frac{\partial U}{\partial \underline{n}} \right]$$

Osservo che U e H sono regolari e <u>armoniche</u>. Uso allora identità di Green

$$U(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} d^{N-1} \underline{y} \left[\varphi(y) \frac{\partial G}{\partial \underline{n}} - \cancel{G \frac{\partial \varphi}{\partial n}} \right] - \int_\Omega d^N \underline{y} \left(U \cancel{\nabla^2} H - H \cancel{\nabla^2} U \right)$$

0, $G|_{\partial\Omega} = 0$ 0 0 H, U armoniche ovunque

$$\boxed{U(\underline{x}) = \int_{\partial\Omega} d^{N-1} \underline{y} \, \varphi(\underline{y}) \frac{\partial G}{\partial \underline{n}}(|\underline{x} - \underline{y}|)}$$

soluzione al problema di dirichlet

OSS: confronto con equazione del Calore

Soluz. = $\int$ dato iniziale · Propagatore

- Calore l'integrale è su TUTTO il dominio, non al bordo

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{G dipende solo dalla Geometria del Dominio} \\ \to \text{NON dipende dal dato iniziale}\end{array}}$$!

Se avessi avuto il problema di Neumann, avrei dovuto trovare una $\tilde{G}$, con singolarità G_∞ e armonica, e tale che:

$$\left.\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \underline{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

Così

$$U(x) = \int_{\partial\Omega} d^{N-1}\underline{y} \left[\cancelto{0}{\varphi \frac{\partial \tilde{G}}{\partial n}} - \tilde{G} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]$$

esercizio: costruire la funzione di Green in 1 dimensione

PDE 15/05/2018.

EQUAZIONE LAPLACE CON SORGENTI

$$\boxed{\nabla^2 u = \rho} \quad \text{(eq. Poisson)} \quad \text{su } \Omega$$

Risolvo il problema con le condizioni: $u|_{\partial\Omega} = \phi(s)$

OSS: u NON e' armonica, quindi non valgono a priori le proprieta'

Dimostrazione con formula di rappresentazione e' analoga

$$u(x) = \int_\Omega d^N y\, G_\infty(|x-y|) \underbrace{\nabla^2 u(y)}_{\rho \neq 0} + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y \left(u \frac{\partial G_\infty}{\partial n} - G_\infty \frac{\partial u}{\partial n}\right)$$

Definisco la funzione di Green G, tale che:

$H = G - G_\infty$ regolare e armonica, $G|_{\partial\Omega} = 0$

Allora: $u(x) =$

$$= \int_\Omega d^N y (G\nabla^2 u - H\nabla^2 u) + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y \left[u\frac{\partial G}{\partial n} - \underbrace{G\frac{\partial u}{\partial n}}_{0} - \left(u\frac{\partial H}{\partial n} - \underbrace{H\frac{\partial u}{\partial n}}_{\text{Green}}\right)\right] =$$

G nulla al bordo

$$= \int_\Omega d^N y (G\nabla^2 u - \cancel{H\nabla^2 u}) - \int_\Omega d^N y (0 - \cancel{H\nabla^2 u}) + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y \left[u\frac{\partial G}{\partial n} - \underbrace{u\frac{\partial H}{\partial n}}_{\text{Green}}\right] =$$

$$= \int_\Omega d^N y\, G \underbrace{\nabla^2 u}_{\rho} + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y\, \underbrace{u}_{\phi} \frac{\partial G}{\partial n} - \int_\Omega d^N y\, u \underbrace{\nabla^2 H}_{0}$$

H armonica

$$\boxed{u(x) = \int_\Omega d^N y\, G(|x-y|)\rho(y) + \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y \frac{\partial G}{\partial n}(|x-y|)\phi(y)}$$

soluzione eq. di Poisson con condizioni di dirichlet

OSS: anche se $u|_{\partial\Omega} = 0$ rimane il termine in ρ

PROPRIETA' DI SIMMETRIA DELLE FUNZIONI DI GREEN

Per le funzioni G_∞ vale la simmetria

$$G_\infty(x, x_0) = G_\infty(x_0, x) = G_\infty(|x - x_0|)$$

dove x_0 e' il punto singolare e x la variabile di integrazione o il punto in cui valuto la funzione.

TEOREMA: Tutte le funzioni di Green G sono simmetriche rispetto al punto di valutazione e la singolarita'

DIMOSTRAZIONE: in 3 dimensioni per comodità

Sia Ω il dominio e siano a e $b \in \Omega$. Siano $B_\varepsilon(a)$ e $B_\varepsilon(b)$ palle di raggio ε centrate attorno ad a e b.

Nella regione $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \{B_\varepsilon(a) \cup B_\varepsilon(b)\}$ sia $G(x,a) =: u(x)$ che $G(x,b) =: v(x)$ sono funzioni armoniche, e vale:

$$u(\underline{x}) = G(\underline{x},a) = -G_\infty(x,a) + H(x,a) = \underline{H(x,a)} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-a|}$$

$$v(\underline{x}) = G(\underline{x},b) = -G_\infty(x,b) + H(x,b) = \underbrace{H(x,b)}_{\text{uguali in } \Omega_\varepsilon} - \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-b|}$$

Applico identità di Green in Ω_ε (dove u e v sono armoniche)

$$\int_{\Omega_\varepsilon} d^N y \, \underbrace{\cancel{(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)}}_{0\text{, perché armoniche}} = \int_{\partial\Omega} d^{N-1}y \underbrace{\cancel{\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)}}_{0\text{, perché } G|_{\partial\Omega}=0} + \underbrace{\int_{\partial B_\varepsilon(a)} d^{N-1}y\, \alpha_\varepsilon(y) + \int_{\partial B_\varepsilon(b)} d^{N-1}y\, \beta_\varepsilon(y)}$$

ottengo allora che:

$$\int_{\partial B_\varepsilon(a)} d^{N-1}y \underbrace{\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)}_{(1)} + \int_{\partial B_\varepsilon(b)} d^{N-1}y \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0$$

Calcolo esplicitamente gli integrali, ad esempio in 3D,

Sia $r = |\underline{x} - \underline{a}| = \varepsilon$

$$(1) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta\, \varepsilon^2 \sin\theta \left[\underbrace{\left(H|_{r=\varepsilon} - \frac{1}{4\pi\varepsilon}\right)}_{u} \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{r=\varepsilon} - v|_{r=\varepsilon} \underbrace{\frac{\partial}{\partial n}\left(H - \frac{1}{4\pi r}\right)}_{(1b)}\right]\Bigg|_{r=\varepsilon}$$

OSS: su $\partial B_\varepsilon(a)$ la funzione v è REGOLARE

OSS: Il grado dello Jacobiano è $N-1$ e quello di $\frac{1}{\varepsilon}$ è $N-2$, quindi vale sempre $\forall n \geq 3$

L'unico termine che dà problemi per $\varepsilon \to 0$ può essere (1b), l'altro va a zero tranquillamente.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \varepsilon^2 v \frac{\partial}{\partial n}\left[-\frac{1}{4\pi r}\right]\Bigg|_{r=\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \varepsilon^2 v \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{1}{4\pi r}\right]\right)\Bigg|_{r=\varepsilon} =$$

OSS: $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, \cancel{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{4\pi \cancel{\varepsilon^2}} \cdot v\Big|_{r=\varepsilon} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot v\Big|_{r=0} = \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{4\pi}} \cdot v(|x-a|)\Big|_{x=0}$$

$$= v(a)$$

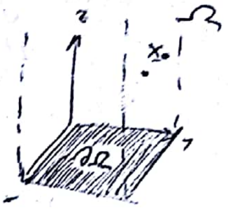
Analogamente per (2). Quindi si ha:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (1) + (2) = v(a) - u(b) = G(a,b) - G(b,a) = 0 \ \blacksquare$$

OSS: Nell'identità di Green u e v sono antisimmetriche, questo dà il segno $(-)$

Scanned by CamScanner

<u>ESERCIZIO</u>: Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, $\partial\Omega = \mathbb{R}^2$



Trovare funzione di Green che si annulla sul piano $z=0$

Sia $\underline{x}_0$ la singolarità di $G_\infty(|x - x_0|)$. Pongo delle singolarità $\underline{x}_i$ al di fuori del dominio Ω, tali che quindi $G_\infty(|x - \underline{x}_i|)$ sono regolari in Ω, ma tali che:

$$G(|\underline{x} - \underline{x}_0|) = G_\infty(|\underline{x} - \underline{x}_0|) + \sum_{i=1}^{N(\Omega)} G_\infty(|\underline{x} - \underline{x}_i|) \cdot \underbrace{C_i(\underline{x}_0)}_{\text{coefficienti}}$$

(<u>OSS</u>: $\underline{x}_i \notin \Omega$ e dipenderanno da $\underline{x}_0$ e dalla struttura di Ω)

Sia <u>NULLA</u> su $\partial\Omega$ = piano $z=0$

→ <u>METODO DELLE CARICHE IMMAGINE</u>

Ipotizzo sia sufficiente una sola carica immagine. Cerco allora

$$G(|\underline{x} - \underline{x}_0|) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} - \frac{q(x_0)}{4\pi|\underline{x} - \underline{x}_1|} \quad \text{t.c. } G(|\underline{x} - \underline{x}_0|)\Big|_{z=0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{q(x_0)}{|\underline{x} - \underline{x}_1|}\Bigg|_{z=0} = -\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|}\Bigg|_{z=0} \text{, cioè:}$$

$$q(x_0)\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\right]^{1/2}\Big|_{z=0} = -\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2\right]^{1/2}\Big|_{z=0} \quad (1)$$

Ha soluzione se:

$$q(x_0) = -1 \quad , \quad x_1 = x_0 \quad , \quad y_1 = y_0 \quad , \quad \underline{z_1^2 = z_0^2} \quad \to \underline{\text{UNICA?}}$$

$\Rightarrow z_1 = \pm z_0$, ma $+z_0 \in \Omega$, allora:

$$q = -1 \quad , \quad \underline{\underline{x}_1 = (x_0, y_0, -z_0)}$$

Quindi:

$$\boxed{G(|\underline{x} - \underline{x}_0|) = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}_0|} + \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0^2) + (z+z_0)^2\right]^{1/2}}}$$

<u>OSS</u>: L'unicità della soluzione di (1) è GARANTITA dall'unicità della funzione di Green dato il dominio Ω

Posso ora risolvere su Ω il problema

$$\nabla^2 u = 0 \quad , \quad u|_{\{z=0\}} = \varphi$$
$$\text{in } \Omega = \{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+\}$$

la cui soluzione è:

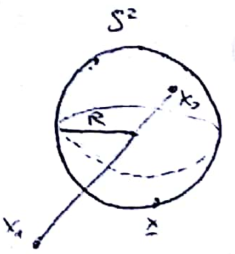
$$U(\underline{x}) = \int_{\{z'=0\}} d^2\underline{x}' \, \frac{\partial G}{\partial n}(|\underline{x}-\underline{x}'|)\,\varphi(\underline{x}') = -\int_{\{z'=0\}} dx'dy' \, \underbrace{\frac{\partial}{\partial z'} G(|x-\underline{x}'|)}\,\varphi(\underline{x}')$$

Oss: $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z'}$

$$\frac{\partial G}{\partial z'} = \dots = \frac{1}{2\pi}\,\frac{z}{[(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z-z')^2]^{3/2}}$$

$$\boxed{U(\underline{x}) = \frac{z}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dx'dy' \, \frac{\varphi(x',y')}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}}$$

• esercizio: trovare la funzione di Green di una sfera, con singolarità NON nel centro.



$$G(|\underline{x}-\underline{x}_0|) = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0|} + \frac{q}{4\pi}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_1|}\,, \quad G|_{S^2} = 0$$

Oss: su S^2 $|\underline{x}| = R$

$$\Rightarrow \quad -q|\underline{x}-\underline{x}_0| = |\underline{x}-\underline{x}_1| \Rightarrow q^2|\underline{x}-\underline{x}_0|^2 = |\underline{x}-\underline{x}_1|^2$$

$$q^2R^2 + q^2|\underline{x}_0|^2 - q^2 2\,\underline{x}\cdot\underline{x}_0 - R^2 - |\underline{x}_1|^2 + 2\,\underline{x}\cdot\underline{x}_1 = 0$$

Mi basta trovare UNA soluzione $(q, \underline{x}_1)$ che annulli questa espressione $\forall x_0 \in B(R)$

$$q^2R^2 + q^2|\underline{x}_0|^2 - R^2 - |x_1|^2 + 2\,\underline{x}\cdot\underbrace{(\underline{x}_1 - q^2\underline{x}_0)}_{=0} = 0$$

Vedo che devo avere $\boxed{\underline{x}_1 = q^2\,\underline{x}_0}$ Sostituisco

$$q^2R^2 + q^2|\underline{x}_0|^2 - R^2 - (q^2)^2|\underline{x}_0|^2 = 0$$

$$R^2(\cancel{q^2-1}) = |x_0|^2(q^4-q^2) = |x_0|^2(\cancel{q^2-1})\cdot q^2$$

$$\Rightarrow q^2 = \frac{R^2}{|x_0|^2} \quad \Rightarrow \boxed{q = \frac{R}{|x_0|}}$$

$$\boxed{\underline{x}_1 = \frac{R^2}{|x_0|^2}\,\underline{x}_0}$$ posizione della carica immagine

$$\boxed{G = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{|\underline{x}-\underline{x}_0|} + \frac{1}{4\pi}\,\frac{R}{|x_0|}\,\frac{1}{|\underline{x} - \frac{R^2}{x_0^2}\underline{x}_0|}}$$

Funzione di green della sfera

• esercizio: provare a vedere cosa succede se la distanza tra le cariche è tendente a zero (confronto con campo di dipolo)

Ricavo ora la soluzione del problema

$\nabla^2 u = 0$, $u|_{S^2} = \varphi(s)$, $u = \int \varphi \frac{\partial G}{\partial n}\, d^2\underline{x}$ dove $n = \underline{x} - \underline{y}$ con y centro sfera