EQUAZIONE DEL CALORE / DIFFUSIONE

L'approccio tramite le caratteristiche è poco efficiente (non veicolano bene i dati iniziali)

In analogia con la diffusione in termodinamica (vedi principio Entropia)

→ eq. calore NON È INVERTIBILE TEMPORALMENTE

Di seguito due tipiche derivazioni FENOMENOLOGICHE:

- DIFFUSIONE/EVOLUZIONE della TEMPERATURA in un Materiale

Sia θ la temperatura del materiale, sia H la quantità di calore dalla termodinamica, la definizione di capacità Termica $C_v = \frac{\partial Q}{\partial T} = M c_v$ dà la relazione tra variazione di calore e di Temperatura

$$dH = C_v \, d\theta = c_v \cdot M \, dT = \int_D dV \rho \, c_v \, d\theta$$

Definisco quindi il calore:

$$H(t) := \int_D d^3\underline{x} \, c_v \rho \, \theta(t) \quad , \text{ supponendo } \rho, c_v \text{ costante (approssimazione forte)}$$

$$\Rightarrow \dot{H}(t) = \int_D d^3\underline{x} \, c_v \rho \, \theta_t(t)$$

Per la legge Fenomenologica di FOURIER (per θ lontano da 0 K)

$$\dot{H} = \int_{\partial D} d^2x (K \underline{\nabla} \theta) \cdot \hat{\underline{n}} \qquad \text{con } K = \text{conduttività Termica}$$

Per teorema di STOKES:

$$\int_{\partial D} d^2x (K \underline{\nabla}\theta) \cdot \hat{\underline{n}} = \int_D d^3\underline{x} \, \underline{\nabla} \cdot (K \underline{\nabla}\theta) - \int_D d^3x \underbrace{(\underline{\nabla} K) \cdot (\underline{\nabla}\theta)}_{\text{Termine lineare in } \underline{\nabla}\theta}$$

→ Nullo se $K = \text{cost.}$

$$\Rightarrow \int d^3x \, c_v \rho \, \theta_t = \int d^3x \, \underline{\nabla} \cdot (K \underline{\nabla}\theta)$$

deve valere per ogni dominio $\underline{D}$

$$c_v \rho \, \theta_t = \underline{\nabla} \cdot (K \underline{\nabla}\theta) \quad , \text{ se } K = \text{cost} \qquad D := \frac{K}{c_v \rho}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_t = D \nabla^2 \theta} \qquad \text{eq. diffusione temperatura in un materiale}$$

$$\begin{cases} \theta(x,0) = \phi(x) & \text{Problema Cauchy} \\ \theta(x,t)|_{\partial D} = f(t) & \text{Condizioni al Bordo} \end{cases}$$

OSS: $D = \frac{K}{c_v \rho} > 0$!! se fosse minore di zero, l'equazione perderebbe molte proprietà (es: buona positura)

- CONCENTRAZIONE di un SOLUTO in un SOLVENTE

Sia ρ la concentrazione di soluto. Considero equazione di continuità'

$$\rho_t + \underline{\nabla} \cdot \underline{J} = 0 \quad \text{(analogamente a eq. eulero)}$$

Per la legge Fenomenologica di FICK (per equazione di continuità)

$$\underline{J} = -D \underline{\nabla} \rho \quad , \text{oss: } [D] = \frac{L^2}{T}$$

Allora:

$$\rho_t - \underline{\nabla} \cdot D \underline{\nabla} \rho = 0$$

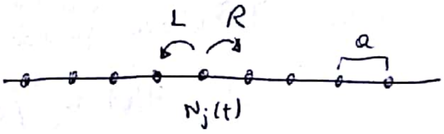
$$\begin{cases} \rho_t = D \nabla^2 \rho & \text{equazione} \\ \rho(x,0) = \phi(x) & \text{problema di Cauchy} \\ \rho(x,t)\big|_{\partial D} = f(t) & \text{condizioni al bordo} \end{cases}$$

OSS: $\phi(x)$ sarà una funzione localizzata in una regione (modello goccia d'acqua)

- DERIVAZIONE MICROSCOPICA

EINSTEIN: Legame coefficienti di diffusione - grandezze meccaniche microscopiche

Considero una catena con siti fissati a passo a con numero di occupazione $N_j(t)$



Per ogni intervallo di tempo Δt esiste una probabilità di transizione verso destra (R) e verso sinistra (L)

in generale $R \neq L$ e $R + L \leq 1$ (può esistere probabilità che non ci sia transizione)

Numero di transizioni sito $j \to j+1$ dopo Δt

$$N_{j \to j+1}(t + \Delta t) = R N_j(t)$$

Numero di occupazione del sito j al tempo $t + \Delta t$

$$N_j(t+\Delta t) = N_j(t) + R\big(N_{j-1}(t) - N_j(t)\big) + L\big(N_{j+1}(t) - N_j(t)\big)$$

$$\Delta N_j = N_j(t+\Delta t) - N_j(t) = R N_{j-1}(t) + L N_{j+1}(t) - N_j(t)(R+L)$$

Assumo ora che $R = L = P$ (probabilità di transizione indipendente dal verso)

$$\underline{\Delta N_j = P\left[N_{j-1}(t) + N_{j+1}(t) - 2N_j(t)\right]}$$

Derivata di sorta:

$$\frac{\Delta N_j}{\Delta t} = \frac{a^2 P}{\Delta t} \frac{\left(N_{j-1}(t) - 2N_j(t) + N_{j+1}(t)\right)}{a^2}$$

Eseguo il limite al continuo: $\Delta t \to 0$, $a \to 0$ t.c. $\frac{Pa^2}{\Delta t} = D$ finito

$$\boxed{N_t = D N_{xx}(x,t)} \qquad \text{dove } D = \frac{Pa^2}{\Delta t}$$

OSS: Non è invertibile temporalmente, perché

$\Delta t \mapsto -\Delta t \Rightarrow D \mapsto -D \to$ equazione diversa

Considero ora un sistema NON ISOTROPO ($R \neq L$)

Sia $L = P \quad R = L + A = P + A$

$$\Delta N_j = (L+A) N_{j-1}(t) + P N_{j+1}(t) - (2P+A) N_j(t) =$$
$$= P(N_{j-1} - 2N_j + N_{j+1}) - A(N_{j-1} - N_j)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N_j}{\Delta t} = \frac{Pa^2}{\Delta t}\left(\frac{N_{j-1} - 2N_j + N_{j+1}}{a^2}\right) - \frac{Aa}{\Delta t}\left(\frac{N_{j-1} - N_j}{a}\right)$$

Nel passaggio al continuo per $a \to 0$ e $\Delta t \to 0$, devo avere che entrambi

$\frac{Pa^2}{\Delta t}$ e $\frac{Aa}{\Delta t}$ devono essere finiti $\to$ condizioni su A (deve essere dell'ordine di a)

$$\boxed{N_t(x,t) = D N_{xx}(x,t) + \delta N_x(t,x)}$$

eq calore + eq trasporto $\to$ prevale uno dei due comportamenti a seconda di D e δ

<u>esercizio:</u> aggiungere R_2, L_2 (probabilita' di saltare di 2 siti in Δt) tali che: $R_1 + L_1 + R_2 + L_2 \leq 1$

- <u>DERIVAZIONE DI EINSTEIN</u>

Analoga a quella appena fatta, ma parte direttamente dal continuo. L'equivalente di $D = \frac{Pa^2}{\Delta t}$ permette di stimare coefficiente di diffusione a partire da proprieta' microscopiche

Considero ora una retta continua e una densita' di probabilita' di transizione nell'intervallo di tempo τ, $\phi(x;\tau)$ che suppongo essere:

- C^∞ a decrescenza rapida
- Simmetrica $\phi(-x;\tau) = \phi(x;\tau)$
- Normalizzata $\int_{\mathbb{R}} \phi(x;\tau) = 1$

La misura di probabilita' e' $dP = \phi(y;\tau)\,dy$ (probabilita' che avvenga una transizione nell'intervallo dy)

POSIZIONE MEDIA $\quad \bar{y} = \int_{\mathbb{R}} y\,\phi(y;\tau)\,dy = 0$ (perche' ϕ e' pari)

SCARTO QUADRATICO (MEDIO) $\quad \bar{y}^2 = \int_{\mathbb{R}} y^2 \phi(y;\tau)\,dy \neq 0$

Ipotizzo ora che la densita' di particelle al tempo $t+\tau$, nel punto x sia $\rho(x, t+\tau)$ (analogamente a $N_j(t+\Delta t)$)

$$\rho(x,t+\tau) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x-y,t)\,\phi(y,\tau)\,dy$$

Per τ piccolo sviluppo ρ rispetto a x e t

$$\rho(x,t+\tau) = \rho(x,t) + \tau \rho_t(x,t) + o(\tau) = \int_{\mathbb{R}} dy\left(\rho(x,t) + y\rho_x(x,t) + o(y)\right)\phi(y,\tau)$$

<u>OSS:</u> $\rho(x,t)\int_{\mathbb{R}} dy\,\phi(y,t) = \rho(x,t)$

Allora:

$$\rho(x,t) + \tau \rho_t(x,t) + o(\tau) = \rho(x,t) - \rho_x(x,t) \int_{\mathbb{R}} \underbrace{y \phi(y,\tau)\, dy}_{\bar{y}} + \frac{1}{2}\rho_{xx}(x,t) \int_{\mathbb{R}} \underbrace{y^2 \phi(y,\tau)\, d\tau}_{\sigma^2} + o(y^2)$$

$$\boxed{\rho_t(x,t) = \rho_{xx}(x,t)\, \frac{\sigma^2}{2\tau}}$$ eq. del calore

OSSERVAZIONE:

Sto sviluppando y piccoli e poi integro su tutto $\mathbb{R}$ in dy
$\Rightarrow$ devo avere supporto di ρ sufficientemente piccolo

Interpretazione meccanica statistica:

σ^2 libero cammino medio
τ tempo caratteristico tra urti

Posso stimare il coefficiente di diffusione D

(EQ. CALORE) SOLUZIONI AUTOSIMILARI

Metodo delle caratteristiche non funziona per eq. calore perché sono curve patologiche a tempo costante

- SIMMETRIE EQ. DEL CALORE $\quad U_t = D U_{xx}, \quad D > 0$

> ⚠ Mi interessa sotto quali trasformazioni, data una soluzione U, U' rimane SOLUZIONE (Non mi interessa il dato iniziale)

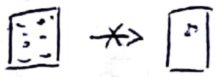
DISCRETE:

I) INVERSIONE SPAZIALE $\quad x \to -x$

Recall ad esempio modello probabilistico (probabilità di transizione è ISOTROPA)

⚠ INVERSIONE TEMPORALE $\quad t \to -t$
NON È UNA SIMMETRIA

In analogia con il modello di diffusione soluto-solvente. Fisicamente non esiste diffusione con $D < 0$ (cioè verso gradiente di concentrazione). Viola II° principio Termodinamica
→ NON è POSSIBILE Recuperare il dato iniziale a partire dalla soluzione al tempo t



II) DILATAZIONE RIGIDA $\quad U \mapsto AU, \quad A \in \mathbb{R}$

si mantiene soluzione per la LINEARITÀ dell'equazione differenziale

CONTINUE:

III) TRASLAZIONI (SPAZIOTEMPO) $\quad x \mapsto x + \tilde{x}, \quad \tilde{x} \in \mathbb{R}$
$\quad t \mapsto t + \tilde{t}, \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}$

Cambierà chiaramente il dato iniziale

IV) DILATAZIONI (SPAZIOTEMPO) $\quad U(x,t) \mapsto U(\alpha x, \beta t)$

Non vale per tutti gli $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (es $\beta = -1$)

→ α, β tali che $\boxed{\beta = \alpha^2}$

dim: suppongo $U(\alpha x, \beta t)$ soluzione. pongo $\xi = \alpha x \quad \tau = \beta t$

$$U_t(\xi,\tau) = \frac{\partial \tau}{\partial t} U_\tau(\xi,\tau) = \beta U_\tau(\xi,\tau)$$

$$U_{xx}(\xi,\tau) = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 U_\xi(\xi,\tau) = \alpha^2 U_{\xi\xi}(\xi,\tau)$$

$$\Rightarrow \beta U_\tau = \alpha^2 D U_{xx} \iff \alpha^2 = \beta \quad \blacksquare$$

Trasformazioni $\quad \underline{U(x,t) \longmapsto U(\alpha x, \alpha^2 t)}$

- SOLUZIONI BANALI

$U(x,t) = 0$

$U(x,t) = x$

$\Rightarrow \underline{U(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha x = \alpha U(x,t)}$

$$\boxed{\begin{aligned} &U(x,t) = x^2 + 2Dt \\ &\Rightarrow U(\alpha x, \alpha^2 t) = \alpha^2 x + 2D\alpha^2 t = \alpha^2 U(x,t) \end{aligned}}$$

OSS: $U(x,t) = x^2 + 2Dt$ e' una parabola che trasla verticalmente (in t)
Soluzione del tipo profilo che trasla (analogamente a eq. onde)

- QUANTITA' CONSERVATE

Osservo che eq. calore corrisponde all'equazione di continuità

$$U_t - DU_{xx} = \underline{U_t + (-DU_x)_x} = \rho_t + J_x = 0$$

con densità associata $\rho = U$ e corrente $J = -DU_x$

Attenzione: La carica corrispondente a ρ si conserva solo in alcuni casi

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} \rho\, dx\right) = \int_{\mathbb{R}} U_t\, dx = \int_{\mathbb{R}} (DU_{xx})\, dx = \underbrace{DU_x\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{} = 0$$

dipende dalle condizioni al bordo!

es: $U = \frac{D}{2}x^2 + t$

$$\frac{dQ}{dt} = \int_{\mathbb{R}} \partial_t\left(\frac{D}{2}x^2 + t\right) = \int_{\mathbb{R}} 1 = +\infty \;!$$

Suppongo che le soluzioni U siano sufficientemente regolari ad esempio a decrescenza rapida $(U, U_x, U_{xx}, \dots \to 0 \text{ per } x \to \infty)$

Con queste condizioni $\boxed{Q := \int_{\mathbb{R}} U(x,t)\, dx}$ è quantità conservata

oss: le simmetrie II e IV cambiano la quantità Q

II) $U \mapsto AU \quad \to \quad Q \mapsto AQ$

IV) $U(x,t) \mapsto U(\alpha x, \alpha^2 t) \quad \Rightarrow \quad Q \mapsto \frac{1}{\alpha} Q$

$$\int_{\mathbb{R}} U(\alpha x, \alpha^2 t)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}} U(y, t')\, dy$$

$\Rightarrow$ Affinché sia preservata dalla simmetria occorre applicare contemporaneamente II e IV, con $A = \alpha$

V) $U(x,t) \to \alpha U(\alpha x, \alpha^2 t)$ simmetria che preserva Q

- Def: Soluzione AUTOSIMILARE se data U soluzione, anche $\alpha U(\alpha x, \alpha^2 t)$ è soluzione $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$

10/04/2018

Voglio ora valutare se la simmetria V vale anche se
$\alpha = \alpha(x,t)$ è una qualche funzione

OSS: Dall'espressione della simmetria vedo che x pesa il doppio di t
e U pesa come x

Allora IPOTIZZO che U abbia la forma seguente

(ANSATZ) $\boxed{U = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \, v\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right)}$ OSS: $[\sqrt{Dt}] = L$, quindi $\frac{x}{\sqrt{Dt}} =: \xi$ è ADIMENS.

Devo verificare che: sia soluzione e il suo integrale sia Q

L'idea è di trasformare PDE(x,t) $\to$ ODE(ξ) $\xi := \frac{x}{\sqrt{Dt}}$

$$\begin{cases} U_t = -\frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} v + \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \frac{x}{\sqrt{D}} t^{-3/2} v' \\ U_{xx} = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} \frac{1}{Dt} v'' \end{cases}$$ (dove $v' = \frac{dv}{d\xi}$)

Raccolgo $\frac{Q}{2\sqrt{D}} t^{-3/2}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} v + \frac{Q}{D}\frac{x}{t^2} v' = \frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} v''$$

$$-\frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} \left(v'' + \xi v' \right) = \frac{Q}{\sqrt{D}} t^{-3/2} v''$$

OSS: se parto da $t<0$ o se applico time reversal
incontro in tempi finiti la singolarità $t^{-3/2}|_{t=0}$
(L'equazione non descrive più bene il sistema)

Allora, supponendo $t>0$

$$v'' + \frac{\xi}{2} v' + \frac{v}{2} = 0$$ ODE in ξ

Risolvo l'equazione:

$$\left(v' + \frac{\xi}{2} v\right)' = 0 \Rightarrow v' + \frac{\xi}{2} v = \text{cost}$$

OSS: la costante deve essere nulla, per due motivi

- per $x \to \infty$ v è a decrescenza rapida,
  quindi $v = 0$ e $v' = 0$ $\to$ cost $= 0$
- v è pari, quindi in $\xi = 0$ ($v' =$ cost)
  dove ha derivata nulla in zero $v' = 0 \Rightarrow$ cost $= 0$

Allora:

$$v' + \frac{\xi}{2} v = 0$$

Risolvo l'equazione differenziale

$$\frac{U'}{U} = -\frac{\xi}{2} \Rightarrow \frac{dU}{U} = -\frac{\xi}{2}\,d\xi \rightarrow \log U = -\frac{\xi^2}{4} + cost \rightarrow \boxed{U = A e^{-(\xi/2)^2}}$$

La soluzione dell'equazione del calore e'

$$U = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} A e^{-x^2/4Dt}$$

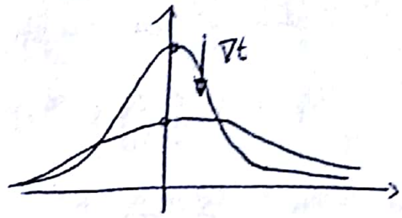
Pongo ora che $Q = \int U\,dx$

$$\int_{\mathbb{R}} U\,dx = \frac{Q}{\sqrt{Dt}} A \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4Dt}\,dx = \frac{Q}{\cancel{\sqrt{Dt}}} A\,(2\cancel{\sqrt{Dt}}) \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \underline{Q\,2A\sqrt{\pi} = Q}$$

Allora:

$$\underline{A = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\quad, \text{quindi:}$$

$$\boxed{\Gamma_D(x,t) = \frac{Q}{\sqrt{4\pi Dt}}\, e^{-x^2/4tD}}$$



Soluzione FONDAMENTALE eq. calore

(Propagatore eq. del calore / FUNZIONE DI GREEN)

OSS: e' una gaussiana che ha $\sigma \propto t$ e $A \propto t^{-1/2}$

con il tempo si sbrodola tale che Q rimane costante

Tornando indietro nel tempo, si picca sullo zero

Voluto $\lim_{t\to 0^+} \Gamma_D(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$ (vince l'esponenziale)

OSS: $\lim_{t\to 0^+} Q = Q$ limite e integrale non commutano

occorre introdurre la teoria delle distribuzioni

- CONVOLUZIONE

Sia $U(x,t)$ soluzione $\Rightarrow$ $U(x-y,t)$ soluzione (invarianza temporale)

Prendo una $f(y)$ $\Rightarrow$ $U(x-y_1,t)f(y_1) + U(x-y_2,t)f(y_2)$ soluzione (linearita')

Allora:

$$\tilde{U}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,U(x-y,t)\,dy \quad \text{e' } \underline{\text{soluzione}}$$

(se l'integrale converge $\to$ dipende da f)

EQUAZIONE DEL CALORE E DISTRIBUZIONI

Considero il problema di Cauchy, per $-\infty < x < \infty$ e $t > 0$

$U_t = DU_{xx}$, $U(x,0) = \phi(x)$ e sia $\tilde{U}$ una soluzione particolare

Data una f sufficientemente regolare, anche $U(x,t) = \int dy\, \tilde{U}(x-y,t) f(y)$ e' soluzione

Costruisco allora, a partire dalla Funzione di Green:

$$U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \qquad \underline{\text{per } t > 0}$$

La funzione $\Gamma_D(x-y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Dt}} e^{-(x-y)^2/4Dt}$ NON e' DEFINITA in $t=0$,

ma, per una ϕ sufficientemente regolare, la sua convoluzione con la funzione ϕ, permette di dare senso a

$$\lim_{t \to 0^+} U(x,t) =: U(x,0)$$

Voglio ora dare un senso a questo limite e in seguito studiare le ipotesi che deve soddisfare ϕ.

OSS: Il limite ($t \to 0^+$) NON COMMUTA con l'integrale perche' c'e' una dipendenza non banale da t in Γ_D.

$\to$ occorre trovare un modo per regolarizzare U

Voglio scaricare su ϕ (che e' arbitrariamente regolare) tutte le irregolarita', con l'integrazione per parti.

Definisco h_D la primitiva di Γ_D: Sia h_D t.c. $\frac{\partial h_D}{\partial x} = \Gamma_D$

$$\boxed{h_D(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{4Dt}} ds\, e^{-s^2}}$$

Osservo che:

$$\lim_{t \to 0^+} h_D(x,t) = \begin{cases} x > 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1 \\ x < 0 & \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0 \end{cases}$$

Definisco allora:

$$\boxed{H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} = \lim_{t \to 0^+} h_D(x,t)} \quad \text{la funzione di HEAVISIDE}$$

Se ϕ e' una funzione TEST (esempio: convergenza rapida)

$$U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t)\,\phi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial h_D}{\partial x}(x-y,t)\,\phi(y)\,dy \overset{\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}}{=} -\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{\partial h_D}{\partial y}(x-y,t)\,\phi(y)\,dy}_{IBP} =$$

$$= \cancel{h_D(x-y,t)\,\phi(y)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} + \int_{\mathbb{R}} dy\, h_D(x-y,t) \frac{d\phi}{dy}(y)$$

per ϕ test

Allora:

$$\boxed{U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} h_D(x-y,t)\, \frac{d\phi}{dy}(y)\,dy}$$

Adesso $U(x,t)$ e' scritta in maniera più regolare, perché so quale è il $\lim_{t\to 0} h_D(x,t) = H(x)$. Allora ha senso definire:

$$U(x,0) := \lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} dy\, h_D(x-y,t) \frac{d\phi}{dy}(y) = \int_{\mathbb{R}} dy\, \underbrace{\lim_{t\to 0^+}\left(h_D(x-y,t)\right)}_{\text{il limite ora commuta}} \frac{d\phi}{dy}(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy\, \underbrace{H(x-y)}_{\text{NON NULLA solo per } x-y\geq 0 \Rightarrow y<x} \frac{d\phi}{dy}(y) = \int_{-\infty}^{x} dy \frac{d\phi}{dy} = \phi(x) - \phi(-\infty)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{U(x,0) = \lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \phi(x)} \quad \text{il } \underline{\text{dato iniziale}}$$

Allora:

$$\boxed{\begin{array}{c} U(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y,t)\phi(y)\,dy \\ \text{e' } \underline{\text{SOLUZIONE del P.C. } \forall t\geq 0} \end{array}}$$

<u>OSS</u>: $\Gamma_D(x,t)$ per $t\to 0^+$ si comporta come un funzionale che valuta ϕ nel punto x

- <u>def</u>: definisco l'operatore δ DELTA DI DIRAC t.c.

$$\int_{\mathbb{R}} dy\, \delta(x-y)\phi(y) = \phi(x) \quad \forall \phi$$

per dare un senso all'espressione

$$\int_{\mathbb{R}} dy\, \delta(x-y)\phi(y) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y,t)\phi(y)$$

e' necessaria la teoria delle distribuzioni.

<u>OSS</u>: $H(x)$ e' la primitiva di δ, nel senso che

$$\int_{\mathbb{R}} H(x-y)\phi(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} dy\, \phi(y) = \Phi(x) \quad (\text{una primitiva di } \phi)$$

ESISTENZA DELLA SOLUZIONE (EQ. CALORE)

Sia dato il problema di Cauchy:

$$U_t = DU_{xx} \qquad \begin{matrix} 0<t<\infty \\ -\infty<x<+\infty \end{matrix} \qquad U(x,0) = \phi(x)$$

Per la soluzione, ho trovato l'espressione

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_D(x-y,t)\,\phi(y)\,dy$$

Finora ho supposto che ϕ fosse sufficientemente regolare per tutte le operazioni che ho fatto.

Voglio valutare per quali condizioni su ϕ la soluzione e' BEN DEFINITA:

- l'integrale della convoluzione e' convergente $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \phi(x)$ (commutazione limite e integrale)
- L'integrale e' convergente rispetto alla commutazione con l'operazione di derivata $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial t}$

Introduco il cambio variabili:

$$U(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \cdot \phi(y)\,dy = \qquad \text{sia } s^2 = \frac{(x-y)^2}{Dt}$$

$$\Rightarrow y = x - \sqrt{Dt}\,s \qquad dy = -\sqrt{Dt}\,ds$$

$$U(x,t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2/4}\, \phi(x-\sqrt{Dt}\,s)\,ds$$

- CONVERGENZA DELL'INTEGRALE PER U (per $t>0$)

Immediata se $\|U(x,t)\|$ e' limitata

$$\|U(x,t)\| \le \underline{\max_{y\in\mathbb{R}} |\phi(y)|} \cdot \left| \frac{Q}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2/4}\,ds \right|$$

Il massimo su $\mathbb{R}$ di ϕ esiste se ϕ e' <u>LIMITATA</u>

- CONVERGENZA DELL'INTEGRALE per U_x (per $t>0$)

$$U_x(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2/4} \underbrace{\phi(x-\sqrt{Dt}\,s)}_{\text{unica dipendenza da } x} \right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2/4} \underbrace{\phi_x(x-\sqrt{Dt}\,s)}_{\text{deve esistere q.o.}}$$

Voglio fare il cambio di variabile $\partial_x \to \partial_s$, osservo il seguente:

Sia $f = f \circ g(x,s)$ valuto l'azione dei due operatori: ∂_x e ∂_s

$$\partial_x f = f' \cdot g_x \qquad e \qquad \partial_s f = f' \cdot g_s \qquad \text{dove } f' = \frac{df}{dg}$$

Allora:

$$\frac{\partial_x f}{\partial_s f} = \frac{g_x}{g_s} \Rightarrow \boxed{f_x = \frac{g_x}{g_s} \cdot f_s}$$

Nel caso particolare: $f = \phi \qquad g(x,s) = x - \sqrt{Dt}\, s$

$$\phi_x = \frac{g_x}{g_s} \cdot \phi_s = \frac{1}{-\sqrt{Dt}} \cdot \phi_s$$

Allora: inserisco nell'espressione di u_x

$$u_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, e^{-s^2/4} \cdot \phi_s(x - s\sqrt{Dt}) \left(\frac{1}{-\sqrt{Dt}}\right) \overset{\text{I.B.P}}{=}$$

$$= -\text{Termini di Bordo} - \left(-\frac{1}{\sqrt{Dt}} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ds\, \phi(x - s\sqrt{Dt})\, e^{-s^2/4} \left(\frac{s}{2}\right)\right) =$$

0

Gaussiana a decresc. rapido e ϕ e' limitata

quindi:

$$\|u_x(x,t)\| \le \underbrace{\max_{y \in \mathbb{R}} |\phi(y)|}_{\phi \text{ limitata}} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\right| \cdot \underbrace{\left|\int_{-\infty}^{\infty} ds\, \frac{s}{2}\, e^{-s^2/4}\right|}_{\text{finito}} \qquad \forall t > 0$$

$$\|u_x(x,t)\| \le \max|\phi| \cdot C \qquad \text{se } \phi_x \text{ esiste QUASI OVUNQUE}$$

- **DERIVATE SUCCESSIVE:**

Posso ripetere lo stesso ragionamento richiedendo che ϕ sia limitata e abbia derivata n-esima quasi ovunque. e si dimostra il seguente:

TEOREMA: Sia u soluzione del problema di Cauchy sopra, se ϕ e' LIMITATA su $\mathbb{R}$ e ha derivate definite QUASI ovunque, allora

$$\boxed{\forall t > 0 \quad u(x,t) \text{ è } C^\infty}$$

Eventuali discontinuita' nel dato iniziale o nelle sue derivate (a $t=0$) vengono immediatamente regolarizzate a $t>0$

- CONVERGENZA DELL'INTEGRALE per $t=0$

LEMMA: Sia U soluzione del problema di Cauchy precedente per $t>0$, sia ϕ funzione CONTINUA

allora: $\lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \phi(x)$

DIMOSTRAZIONE:

Valuto la differenza tra le due:

$$U(x,t) - \phi(x) = \int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y,t)\phi(y) - \phi(x)\overbrace{\int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x-y;t)\,dy}^{1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y,t)\big(\phi(y)-\phi(x)\big) \quad = \quad y = x - s\sqrt{Dt}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} ds\, e^{-s^2/4}\big(\phi(x-s\sqrt{Dt}) - \phi(x)\big)$$

Poiche' ϕ e' continua:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \text{ t.c. } |x-y|<\delta \Rightarrow |\phi(x)-\phi(y)|<\varepsilon$$

Fisso $\varepsilon>0$ e sia δ come sopra. Spezzo l'integrale in:

$$\underbrace{-\infty < s < -\frac{\delta}{\sqrt{Dt}}}_{B} \ ; \ \underbrace{-\frac{\delta}{\sqrt{Dt}} < s < \frac{\delta}{\sqrt{Dt}}}_{A} \ ; \ \underbrace{\frac{\delta}{\sqrt{Dt}} < s < +\infty}_{B}$$

E valuto i due contributi:

A $$\int_{-\delta/\sqrt{Dt}}^{\delta/\sqrt{Dt}} ds\, \frac{e^{-s^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{|\phi(x-s\sqrt{Dt}) - \phi(x)|}_{\delta \text{ piccolo}} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cdot \max_{A} |\phi| \int_{-\delta/\sqrt{Dt}}^{\delta/\sqrt{Dt}} ds\, e^{-s^2/4} < \varepsilon$$

B $$\int_{|s|>\delta/\sqrt{Dt}} ds\, \frac{e^{-s^2/4}}{\sqrt{4\pi}} \underbrace{|\phi(x-s\sqrt{Dt}) - \phi(x)|}_{t \text{ piccolo}} \le \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left| \int_{|s|>\delta/\sqrt{Dt}} ds\, e^{-s^2/4} \right| \max_{B} |\phi| < \varepsilon$$

Allora: per $t \to 0^+$

$$\| U(x,t) - \phi(x) \| < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

INVERSIONE TEMPORALE

Dato il problema:
$$\begin{cases} U_t = D U_{xx} \\ U(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

considero il problema inverso: (da $t = t_F$)
$$\begin{cases} \tilde{U}_t = -D \tilde{U}_{xx} \\ \tilde{U}(x,t_F) = \tilde{U}(x,t)|_{t=t_F} \end{cases}$$

Allora vale che $\tilde{U}(x,0) = U(x,0) = \phi(x)$ (dimostrato sull'Evans)

Pero' l'equazione inversa $U_t = -D U_{xx}$ $(D>0)$ NON e' BEN POSTA

- esempio: considero la famiglia di soluzioni:

$$U_n = \frac{1}{n} \sin(nx) e^{Dtn^2} \quad \text{soluzione di } U_t = D U_{xx}$$
$$V_n = \frac{1}{n} \sin(nx) e^{-Dtn^2} \quad \text{soluzione di } V_t = -D V_{xx}$$

osservo che: $U_n(x,0) = V_n(x,0) = \frac{1}{n}\sin(nx) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (per entrambe le equazioni)

ma: $U_n(x,1) = \frac{1}{n} \sin nx \, e^{Dn^2} \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$

$V_n(x,1) = \frac{1}{n} \sin nx \, e^{-Dn^2} \xrightarrow{(n\to\infty)} +\infty$ diverge in un tempo finito $\forall x$

In particolare se prendo i due dati iniziali:
$$\phi_1(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \quad e \quad \phi_2(x) = 0$$
sono dati iniziali vicini per qualche n (in norma L_∞), MA:
siano V_1 e V_2 le relative soluzioni:
$$V_1(x,t) = \frac{1}{n} \sin nx \, e^{-Dn^2 t} \qquad V_2(x,t) \equiv 0$$
$$\|\phi_1 - \phi_2\| < \varepsilon \quad \text{ma} \quad \|V_1 - V_2\| \to \infty$$
V_1 diverge in tempi finiti

---

appendice: idea per l'Ansatz della soluzione all'equazione del calore
Le simmetrie implicano che se $U(x,t)$ e' soluzione $\alpha U(\alpha x, \alpha^2 t)$.

OSS: se $\alpha = \frac{1}{\sqrt{Dt}} \Rightarrow \alpha^2 t = \frac{1}{D}$, costante, allora: (voglio rendere lo costante)
$$\alpha U(\alpha x, \alpha^2 t) = \frac{1}{\sqrt{Dt}} U\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}, \frac{1}{D}\right) = \frac{1}{\sqrt{Dt}} v\left(\frac{x}{\sqrt{Dt}}\right) \to \text{cerco ODE}$$
Soluzioni autosimilari hanno in generale forma:
$$U(x,t) = A(t)\, v\left(\frac{x}{L(t)}\right)$$
esempio: se $U = t^\gamma v\left(\frac{x}{t^\sigma}\right)$ e inserisco nell'eq. trovo $\sigma = 1/2$ ma no vincoli su γ

esercizio: se U e' soluzione, U_x e' soluzione? sotto che condizioni?

PDE: 17/04/2018

EQUAZIONE DEL CALORE SU DOMINI FINITI

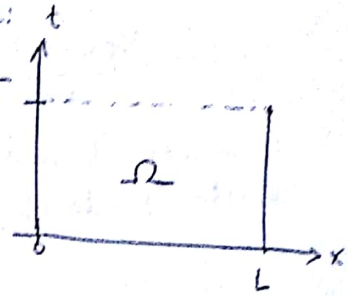
Sia $\Omega = [0,L] \times [0,T]$ e considero il problema su Ω

$$U_t = D U_{xx} \;,\; U(x,0) = \varphi(x) ,\; U(0,t) = f(t) ,\; U(L,t) = g(t)$$

PRINCIPIO DEL MASSIMO

Sia U soluzione del problema sopra su Ω, allora:
Il massimo di U può essere assunto SOLO su

$$[0,t] \cup [L,t] \cup [x,0] \qquad \begin{array}{l} 0 \le x \le L \\ 0 \le t \le T \end{array}$$



DIMOSTRAZIONE:

Cerco di mostrare che se è assunto altrove genera contraddizione.
Sia $A = \{[0,t] \cup [L,t] \cup [x,0] ,\ 0 \le x \le L,\ 0 \le t \le T\}$.
Sia $M_A = \max_A U(x,t)$ il massimo su A. Devo mostrare che $\max_{\Omega \setminus A} U(x,t) < M_A$. Sia $\alpha > 0$ arbitrario e definisco la funzione ausiliaria:

$$V(x,t) = U(x,t) + \alpha x^2$$

Chiaramente su A vale: $V(x,t) \le M_A + \alpha L^2$, se mostro che vale anche su tutto Ω, allora

$$U(x,t) + x^2\alpha \le M_A + \alpha L^2$$

$$U(x,t) \le M_A + \underbrace{\alpha(L^2 - x^2)}_{\text{quantità positiva}} \quad \text{su } \Omega ,\ \forall \alpha > 0$$

Allora, poiché è vero $\forall \alpha$ deve valere anche

$$U(x,t) \le M_A \quad \forall (x,t) \in \Omega$$

Mostro quindi che il massimo di $V(x,t)$ è assunto in A.
Sia (x_0, t_0) il punto di massimo di $V(x,t)$ e suppongo per assurdo che sia in $\Omega \setminus A = \mathring{\Omega} \cup \{(x,T)\}$. Ho i due casi:

① sia $(x_0,t_0) \in \mathring{\Omega}$. Allora è un punto di massimo locale per V, ossia: $V_t(x_0,t_0) = 0$, $V_x(x_0,t_0) = 0$ e deve valere almeno $V_{xx}(x_0,t_0) \le 0$ (V deve decrescere in TUTTE le direzioni, in particolare lungo x).

Dalla forma dell'equazione (per U)

$$V_t - DV_{xx} = \overset{\downarrow}{U_t} - DU_{xx} - \alpha D \cdot 2 = \boxed{-2\alpha D < 0} \;, \text{ ma}$$

$$V_t - DV_{xx} = 0 - \underline{DV_{xx} \le 0} \;, \text{ assurdo.}$$

② Sia $(x_0, t_0) \in \{(x,T),\ 0 \le x \le L\}$.

Non ho informazioni sulla derivata in t (v_t), ma certamente $v_t(x_0, T) \geq 0$ (arrivo crescendo a T). Però vale ancora

$$v_x(x_0,t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \le 0 \quad \text{massimo in } x\text{, quindi}$$

di nuovo:

$$(v_t - Dv_{xx})(x_0,t_0) = v_t(x_0,t_0) - D\,u_{xx}(x_0,t_0) - 2\alpha D = \underline{-2\alpha D < 0}$$

$$\underbrace{v_t(x_0,t_0)}_{\geq 0} - D\underbrace{v_{xx}(x_0,t_0)}_{\leq 0} \ \underline{\geq 0}\ , \text{ assurdo.}$$

Quindi il massimo di $v(x,t)$ è assunto in A e di conseguenza anche quello di $u(x,t)$ è in A ∎

COROLLARIO: (PRINCIPIO DEL MINIMO)

Se u è soluzione $-u$ è soluzione $\Rightarrow$ Max $-u$ è in A
$\rightarrow$ MIN di u è in A

COROLLARIO: Se il massimo di u è assunto in $\Omega \setminus A$, allora u è costante.

UNICITA' DELLA SOLUZIONE

Considero il problema di Cauchy precedente (su $0 < x < L$, $0 < t < T$)
Siano u_1 e u_2 soluzioni distinte. Allora $w := u_1 - u_2$ è SOLUZIONE di:

$$w_t = Dw_{xx}, \quad w(x,0) = 0, \quad w(0,t) = w(L,t) = 0$$

w deve quindi avere max e min su A, ma $w \equiv 0$ su A

Allora: w è costante e $w \equiv 0$ su Ω, poiché

$$\left.\begin{aligned} M &= \max_{\Omega} w = 0 \Rightarrow w(x,t) \le 0 \\ m &= \max_{\Omega} w = 0 \Rightarrow w(x,t) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow w = 0 \text{ su } \Omega$$

quindi: $u_1 = u_2$ ∎

BUONA POSITURA su $[0,L]\times[0,T]$

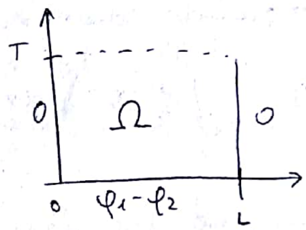
con norma L^∞. Siano U_1 e U_2 soluzioni dei problemi:

$$\begin{cases} (U_1)_t = D(U_1)_{xx} & 0<x<L,\ 0<t<T \\ U_1(x,0) = \varphi_1(x) \\ U_1(0,t) = f(t) \\ U_1(L,t) = g(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} (U_2)_t = (U_2)_{xx}\cdot D \\ U_2(x,0) = \varphi_2(x) \\ U_2(0,t) = f(t) \\ U_2(L,t) = g(t) \end{cases}$$

Considero $W := U_1 - U_2$, soluzione del problema

$$W_t = DW_{xx}, \quad W(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad W(0,t) = W(L,t) = 0$$

W assume massimo sull'insieme



$$A = \{(x,0)\cup(0,t)\cup(L,t),\ 0\le x\le L,\ 0\le t\le T\}$$

Sia esso $M = \max\limits_{A} W(x,t) = \max\limits_{\Omega} W(x,t)$, allora

$$M \le \max_{0<x<L}\big(\underbrace{\varphi_1(x) - \varphi_2(x)}_{\text{Può a priori essere positivo o negativo}}\big)$$

$$\Big(M < \max_{0<x<L} \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \quad \text{se } M = 0 \Big)$$

Allora:

$$\underbrace{-\max_{0<x<L} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \le M}_{\text{principio minimo}} \le \underbrace{\max_{0<x<L} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|}_{\text{principio massimo}}$$

quindi vale che:

$$|W(x,t)| \le \max_{0<x<L} |\varphi_1 - \varphi_2| \qquad \forall (x,t)\in\Omega$$

di conseguenza

$$\max_{\Omega} |W(x,t)| = \max_{\Omega} |U_1 - U_2| \le \max_{0<x<L} |\varphi_1 - \varphi_2| < \varepsilon$$

posso sceglierlo tale che

$\Rightarrow$ L'equazione del calore è ben posta ∎

UNICITA' CON METODO DELL'ENERGIA

Considero su $\Omega = [0,L]\times[0,T]$ il problema

$$U_t = D U_{xx} \, , \quad U(x,0) = \varphi(x) \, , \quad U(0,t) = f(t) \, , \quad U(L,t) = g(t)$$

e siano U_1 e U_2 soluzioni distinte con dato iniziale φ_1 e φ_2 e considero:

$W := U_1 - U_2$ soluzione di:

$$W_t = D W_{xx} \quad , \quad W(x,0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \, , \quad W(0,t) = W(L,t) = 0$$

Moltiplico ambo i lati l'equazione per W (come per energia onde):

$$0 = W\cdot(W_t - DW_{xx}) = W W_t - D W W_{xx} = \frac{1}{2}(W^2)_t - D(W_x W)_x + D(W_x)^2$$

osservo che: $(W_x W)_x = W_x \cdot W_x + W W_{xx}$

Integrando ambo i lati tra 0 e L

$$0 = \int_0^L \frac{1}{2}(W^2)_t \, dx + \underbrace{\int_0^L D(W_x)^2 \, dx}_{\text{quantita' positiva } (\geq 0)} - \cancel{D(W_x W)\Big|_0^L}^{\,0}$$

Segue che per fare zero, deve essere:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^L \frac{(W^2)_t}{2} \, dx \leq 0}$$

Variazione temporale dell'integrale è negativa

$\Rightarrow$ sempre minore del valore al tempo zero

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L \frac{W^2(x,t)\,dx}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{W^2(x,t)\,dx}{2} \leq \int_0^L \frac{W^2(x,0)\,dx}{2}$$

se prendo $\varphi_1 = \varphi_2$ (U_1 e U_2) soluzioni allo STESSO problema

$W(x,0) = 0$, quindi:

$$\underbrace{\int_0^L \frac{W^2(x,t)\,dx}{2}}_{\text{quantita' positiva}} \leq 0$$

deve allora essere:

$$W \equiv 0$$

$$\boxed{U_1 = U_2}$$ ∎

Altrimenti se $\varphi_1 \neq \varphi_2$:

$$\underbrace{\int_0^L dx \, \frac{(U_1(x,t) - U_2(x,t))^2}{2}}_{\text{NORMA } L^2} \leq \underbrace{\int_0^L dx \, \frac{(\varphi_1(x,t) - \varphi_2(x,t))^2}{2}}_{\text{NORMA } L^2}$$

La Buona positura vale anche in norma L^2

RELAZIONE DI DISPERSIONE su $[0,L]$

Considero il seguente problema su $0<x<L$, $t>0$

$$U_t = DU_{xx} \ , \ U(x,0) = \varphi(x) \ , \ \underline{U(0,t) = U(L,t) = 0 \ \forall t>0}$$

Cerco soluzioni di tipo onda piana:

$$U(x,t) = e^{i(k_m x - \omega_m t)}$$

$$U_t(x,t) = \underline{-i\omega_m} \, e^{i(kx-\omega_m t)} = DU_{xx}(x,t) = \underline{-K_m^2 D} \, e^{i(k_m x - \omega_m t)}$$

E' soluzione se e solo se

$$\boxed{\omega_m = -iDK_m^2}$$ Relazione di dispersione eq. del calore su $[0,L]$

<u>OSS:</u> si ha un termine IMMAGINARIO, che produce la <u>DISSIPAZIONE</u>

Risolvo il problema per separazione delle variabili

$$U(x,t) = F(x)G(t)$$

L'equazione diventa:

$$\frac{\dot{G}(t)}{G(t)} = D\frac{F''(x)}{F(x)} = D\lambda \qquad \begin{cases} \dot{G} = D\lambda G \\ F'' = \lambda F \end{cases}$$

<u>es:</u> Condizioni di Dirichlet dipendenti da t, influenzano la soluzione della prima equazione?
→ Le ampiezze diventano dipendenti dal Tempo

<u>SOLUZIONE SPAZIALE</u> (esempio con le condizioni di dirichlet sopra)

$$\begin{cases} F'' = \lambda F \\ F(0) = F(L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_m = -\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 = -K_m^2 < 0 \qquad \underline{m \geq 1} \\ \underline{F_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)} \end{cases}$$

<u>SOLUZIONE TEMPORALE</u>

$$\dot{G}_m = D\lambda_m G \Rightarrow \underline{G_m(x) = A_m e^{D\lambda_m t}} \ , \ \lambda_m < 0$$

La soluzione temporale e' di tipo ESPONENZIALE PURO (REALE)
⇒ e' questo che genera la relazione di dispersione <u>COMPLESSA</u>

$$\boxed{U_m(x,t) = A_m e^{D\lambda_m t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}$$

Scrivo la soluzione generale come sovrapposizione

$$\boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{D\lambda_n t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)} \qquad \lambda_n < 0 \quad \forall n$$

Voglio valutare più in generale quale tipo di condizioni al bordo mi garantiscono che le autofunzioni siano un SISTEMA ORTONORMALE (e COMPLETO) ossia affinché la soluzione generale ammetta sviluppo di Fourier rispetto alla base di autofunzioni

Considero i più generali dati al bordo possibili per

$$F''(x) = \lambda F(x) \qquad a < x < b$$

$$\begin{cases} A_1 F(a) + B_1 F(b) + C_1 F'(a) + D_1 F'(b) = 0 \\ A_2 F(a) + B_2 F(b) + C_2 F'(a) + D_2 F'(b) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

<u>esercizio:</u> Posso scrivere anche le condizioni periodiche così?

Introduco la seguente condizione:

Considero due funzioni f e g che rispettino (1) e anche l'ulteriore condizione di simmetria (2),

$$(2) \quad f'(a)g(a) - f(a)g'(a) = f'(b)g(b) - f(b)g'(b)$$

(<u>oss:</u> le condizioni di dirichlet $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$
Rispettano la condizione (2). Anche le altre viste finora.)

Questa condizione vuole introdurre le proprietà buone delle matrici simmetriche (diagonalizzabilità, base ortonormale di autovettori,..) all'operatore derivata seconda.

<u>TEOREMA:</u> Siano F_1 e F_2 soluzioni di $F'' = \lambda F$ relative ad autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e che rispettino (2), allora:

<u>F_1 e F_2 sono ortonormali secondo il prodotto L^2</u>

DIMOSTRAZIONE:

Siano $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e F_1, F_2 autofunzioni associate. Valuto il prodotto L^2:

$$\int_a^b F_1(x)\bar{F}_2(x)\,dx = 0 \,?$$

Osservo che $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, quindi:

$$\int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) F_1(x)\bar{F}_2(x) = 0 \iff \int_a^b F_1(x)\bar{F}_2(x) = 0 \quad (\langle F_1 | F_2 \rangle = 0)$$

Ricordando che vale $F_1'' = \lambda_1 F_1$ e $F_2'' = \lambda_2 F_2$, uso:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) F_1 \bar{F}_2 = \lambda_1 F_1 \bar{F}_2 - \lambda_2 F_1 \bar{F}_2 = F_1'' \bar{F}_2 - F_1 \bar{F}_2''$$

Integro per parti:

$$\int_a^b (F_1'' \bar{F}_2 - F_1 \bar{F}_2'')\,dx = \left[F_1' \bar{F}_2 - F_1 \bar{F}_2' \right]_a^b - \int_a^b \cancel{(F_1' \bar{F}_2' - F_1' \bar{F}_2')}_{0}\,dx =$$

$$= \left(F_1'(b)\bar{F}_2(b) - F_1(b)\bar{F}_2'(b) \right) - \left(F_1'(a)\bar{F}_2(a) - F_1(a)\bar{F}_2'(a) \right)$$

$= 0$ perchè vale (2) per F_1 e F_2

Allora:

$$\int_a^b (\lambda_1 - \lambda_2) F_1 \bar{F}_2\,dx = 0 \implies \langle F_1 | F_2 \rangle = 0 \quad \blacksquare$$

TEOREMA: sia $F'' = \lambda F$ e valga (2) per F e $\bar{F}$, allora

$$\lambda = \bar{\lambda} \quad \text{(autovalori reali)}$$

DIMOSTRAZIONE: uguale a prima

Se λ autovalore di F allora $\bar{\lambda}$ è autovalore di $\bar{F}$, allora:

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b S\bar{S}\,dx = (\lambda - \bar{\lambda}) \underbrace{\int_a^b |S|^2\,dx}_{\neq 0 \text{ se } S \neq 0} = \int_a^b [(\lambda S)\bar{S} - \bar{\lambda}\bar{S} S]\,dx =$$

$$= \int_a^b [S''\bar{S} - \bar{S}'' S]\,dx = \underbrace{\left[S'\bar{S} - \bar{S}' S \right]_a^b}_{= 0 \text{ per } (2)} - \int_a^b \cancel{dx [\,]}^{0} = 0$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b S\bar{S}\,dx = 0 \implies \lambda - \bar{\lambda} = 0 \quad \blacksquare$$

OSS: Se vale (2) gli autovalori sono reali, anche per autofunzioni complesse.

Con le condizioni viste finora (Dirichlet, Neumann,...) lo spettro è sempre stato NON POSITIVO ($\lambda \leq 0$)

Esiste una condizione che lo garantisca:

<u>TEOREMA</u>: sia $S'' = \lambda S$, S NORMALIZZATA, e tale che (3),

(3) $\underline{S'(b)S(b) - S'(a)S(a) \leq 0}$, allora $\lambda \leq 0$

<u>DIMOSTRAZIONE:</u>

$$\lambda = \lambda \underbrace{\int_a^b dx\, S^2}_{1} = \int_a^b dx\, (\lambda S) S = \int_a^b dx\, S'' S \overset{IBP}{=}$$

$$= \underbrace{-\int_a^b (S')^2 dx}_{\leq 0} + \underbrace{[S'S]_a^b}_{\leq 0\,(3)} \leq 0 \quad \blacksquare$$

<u>OSS</u>: (3) è condizione sufficiente

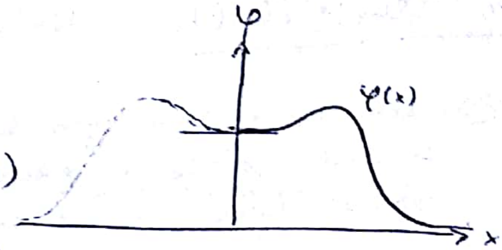
La SOLA condizione di simmetria (2) sulle condizioni al bordo è sufficiente per garantire la <u>SIMMETRIA dell'operatore</u>

<u>Recall</u>: un operatore simmetrico è $\hat{A}$ t.c. $\hat{A}^+ = A$

EQUAZIONE DEL CALORE SULLA SEMIRETTA

esempio con condizione di Neumann

$U_t = DU_{xx}$, $U(x,0) = \varphi(x)$, $\underline{U_x(0,t) = 0}$



Rifletto il dato iniziale per SIMMETRIA (PARI)

Sia:
$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{per } x \geq 0 \\ \varphi(-x) & \text{per } x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{U}_t = D\tilde{U}_{xx} \\ \tilde{U}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

la soluzione del nuovo problema:

$$\tilde{U}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y)\tilde{\varphi}(y) = \int_{\mathbb{R}} dy \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} \tilde{\varphi}(y)$$

TEOREMA: (anche) per equazione del calore se il dato iniziale è simmetrico, rimane simmetrico a $t > 0$

Allora posso restringere $\tilde{U}$ a $x > 0$ per ottenere la soluzione

$$\tilde{U}(x,t) = \int_{-\infty}^{0} dy\, \Gamma_D(x-y)\underbrace{\tilde{\varphi}(y)}_{\tilde{\varphi}(y)=\varphi(-y)} + \int_{0}^{+\infty} \Gamma_D(x-y)\underbrace{\tilde{\varphi}(y)}_{\tilde{\varphi}(y)=\varphi(y)} dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dy\, \underbrace{\Gamma_D(x-y)\varphi(-y)}_{\text{sia } s=-y,\ dy=-ds} + \int_{0}^{\infty} \Gamma_D(x-y)\varphi(y)\, dy$$

$$= \int_{+\infty}^{0} (-ds)\Gamma_D(x+s)\varphi(s) + \int_{0}^{\infty} dy\, \Gamma_D(x-y)\varphi(y) ds =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} dy \left(\underline{\Gamma_D(x+y) + \Gamma_D(x-y)}\right)\varphi(y)\, dy \text{ , Allora:}$$

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{0}^{\infty} dy\, \varphi(y)\left(e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+y)^2}{4Dt}}\right)} \quad \underline{x \geq 0}$$

SOLUZIONE eq. del calore SULLA SEMIRETTA, CON CONDIZIONE DI NEUMANN

esercizio: Risolvere equazione del calore sulla semiretta:

$$\begin{cases} U_t = DU_{xx} , & x \geq 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) = 1 \\ U(0,t) = 1 \end{cases}$$
Dirichlet

$$\begin{cases} U_t = DU_{xx} , & x \geq 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) = 1 \\ U_x(0,t) = 0 \end{cases}$$
Neumann

EQUAZIONE DEL CALORE NON OMOGENEA (CON SORGENTE)

$U_t - DU_{xx} = f(x,t)$, $U(x,0) = \varphi(x)$

OSS: Non ha senso integrare in un cono di luce come per le onde, perche' il segnale viene propagato a velocita' infinita (Devo integrare su tutto il dominio, non su una sezione)

In analogia con le ODE

$$\begin{cases} \dot{\mu} + A\mu = f(t) \\ \mu(0) = \varphi \end{cases} \Rightarrow \mu(t) = \underbrace{e^{-tA}}_{\text{Propagatore}}\varphi + \int_0^t ds\, e^{-(t-s)A} f(s)$$

Provo a integrare tra 0 e t il propagatore del calore: $\int_{\mathbb{R}} \Gamma_D(x)dx$

$$\boxed{U(x,t) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y,t)\varphi(y)}_{\text{PROPAGATORE}} + \int_0^t ds \left(\int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y, t-s)\right) f(y,s)}$$

OSS: Nelle onde f viene integrato su un cono del dominio (sezione dello spazio) Qua su TUTTO lo spazio

- Verifico se il dato iniziale e' $\varphi(x)$

$$\lim_{t\to 0^+} U(x,t) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}} dy\, \Gamma_D(x-y,t)\varphi(y) + \int_0^0 (\dots) = \int_{\mathbb{R}} \delta(x-y)\varphi(y)dy = \varphi(x)$$

DIFFERENZE TRA CALORE E ONDE

PROPRIETA'	ONDE	CALORE
Velocita' di propagazione	Finita, c	∞
Singolarita' nel dato iniziale	propaga a c	viene smussata istantaneamente
Condizione Dirichlet	ben posto a t>0 ben posta a t<0	ben posta a t>0 mal posta a t<0 (singolarita' in tempi finiti)
Principio di massimo	NO (esercizio)	SI
Energia	si conserva	diminuisce cont
"Informazione"	Si trasmette a velocita' finita	Viene persa
Relazione di dispersione	Lineare e Reale Non disperde ($v_f = v_g$)	Quadratica e complessa Disperde e dissipa ($v_f \neq v_g$)

EQUAZIONE DEL CALORE IN PIU' DIMENSIONI

Considero il problema su $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N$

$$U_t = D\nabla^2 U \qquad U(\underline{x},0) = \varphi(\underline{x})$$

Cerco soluzioni autosimilari e che conservino la massa (come in 1D)

$$U(\underline{x},t) = A(t)\mu\left(\frac{x}{L(t)}\right)$$

Ansatz: suppongo $A(t) = t^\alpha$ e $L(t) = t^\beta$ e che lo scaling NON dipenda dalla direzione $\underline{x} \mapsto r = \sqrt{x^i x_i}$

Ansatz:

$$U(\underline{x},t) = t^\alpha \mu\left(\frac{r}{t^\beta}\right) = t^\alpha \mu(s)$$

Voglio trasformare l'equazione in una ODE per $\mu(s)$

$$U_t = \alpha t^{\alpha-1}\mu(s) + t^\alpha(-\beta)t^{-\beta-1} r\,\mu'(s) = t^{\alpha-1}(\alpha\mu(s) - \beta s\mu'(s))$$

$$\nabla^2 U = \nabla\cdot\nabla U = t^\alpha\nabla^2\mu = t^\alpha\,\nabla\cdot(\nabla\mu) =$$
$$= t^\alpha\,\nabla\cdot(\mu'(s)\cdot\nabla s) = t^\alpha(\nabla\cdot(\mu')\cdot\nabla s + \mu'\nabla^2 s) =$$
$$= t^\alpha(\mu''\nabla s\cdot\nabla s + \mu'\nabla^2 s) = t^\alpha(\mu''|\nabla s|^2 + \mu'\nabla^2 s)$$

Valuto ∇r e $\nabla^2 r$:

$$\nabla r = \left(\frac{1}{2}\frac{\cdot 2x_i}{\sqrt{x_i x_i}}\right) = \frac{1}{r}(x_1,\dots,x_N) \Rightarrow |\nabla r|^2 = 1$$

$$\nabla^2 r = \underline{\nabla}\cdot\underline{\nabla} r = \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) = \sum_{i=1}^N\left(\frac{1}{r} + x_i\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$\nabla^2 r = \frac{N}{r} + \sum_{i=1}^N x_i\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{r^3}\cdot 2x_i = \frac{N}{r} - \frac{1}{r} = \frac{N-1}{r}$$

Allora:

$$\nabla^2 U = t^\alpha\left(\mu'' t^{-2\beta} + \mu' t^{-\beta}\frac{N-1}{r}\right) = t^\alpha\left(\mu'' t^{-2\beta} + \mu' t^{-\beta}\frac{(N-1)}{s\cdot t^\beta}\right) =$$
$$= t^{\alpha-2\beta}\left(\mu'' + \mu'\left(\frac{N-1}{s}\right)\right)$$

$$\Rightarrow U_t - D\nabla^2 U = t^{\alpha-1}(\alpha\mu - \beta s\mu') - Dt^{\alpha-2\beta}\left(\mu'' + \frac{N-1}{s}\mu'\right) = 0$$

Voglio che entrambi i membri siano omogenei in t

$$\Rightarrow \alpha - 1 = \alpha - 2\beta \rightarrow \boxed{\beta = 1/2}$$

Ottengo una ODE per $\mu(s)$, dipendente da un parametro α, da determinare.

$$\boxed{D\mu'' + \left(\frac{D(N-1)}{s} + \frac{s}{2}\right)\mu' - \alpha\mu = 0}$$

equazione per μ (da risolvere)

Voglio inoltre che $U(x,t)$ rispetti la conservazione della massa Q

Sia $\gamma = \gamma(t)$, $\sigma^2 = \frac{1}{t}$, soluzione autosimilare: $U(x,t) = \gamma(t)\mu(\sigma r, \sigma^2 t) = \gamma(t)\,\mu\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)$

$$Q = \int_{\mathbb{R}^N} d^N\underline{x}\,\gamma(t)\,\mu\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx_1}{\sqrt{t}}\cdots\frac{dx_N}{\sqrt{t}}\,\gamma(t)\,\mu\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\sqrt{t}\cdots\sqrt{t} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} d^N\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\mu\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)\cdot\gamma(t)\cdot t^{N/2} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} d^N\underline{s}\,\mu(s)}_{\text{valore costante}}\cdot\gamma(t)\,t^{N/2}$$

Se Q NON deve dipendere da t, allora:

$$\gamma(t)\,t^{N/2} = 1 \Rightarrow \gamma(t) = t^{-N/2}$$

Ma deve anche essere $\gamma(t) = t^{-\alpha}$ $\quad \boxed{\alpha = N/2}$

Allora la struttura della soluzione è:

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{t^{N/2}}\,\mu\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)}$$

L'equazione da integrare diventa:

$$D\mu'' + \left(\frac{D(N-1)}{s} + s\right)\mu' - \frac{N}{2}\mu = 0$$

$$s^{N-1}D\mu'' + \left(\frac{D(N-1)}{s}\cdot s^{N-1} + \frac{s\cdot s^{N-1}}{2}\right)\mu' - \frac{N}{2}s^{N-1}\mu = 0$$

$$s^{N-1}D\mu'' + D(N-1)s^{N-2}\mu' + \frac{s^N}{2}\mu' - \frac{N}{2}s^{N-1}\mu = 0$$

$$D\left(s^{N-1}\mu'' + (N-1)s^{N-2}\mu'\right) + \frac{1}{2}\left(s^N\mu' - Ns^{N-1}\mu\right) = 0$$

$$D\frac{d}{ds}\left(s^{N-1}\mu'\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(s^N\mu\right) = 0$$

$$D\,s^{N-1}\mu' + \frac{1}{2}s^N\mu = \boxed{\text{cost} = 0}$$

μ, μ' sono a decrescenza rapida. A ∞ cost $= 0$
($N \geq 1$, se μ, μ' limitate in 0 cost $= 0$)

per $s \neq 0$ $\quad D\frac{\mu'}{s} + \frac{\mu}{2} = 0$, integro:

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{s}{2D} \Rightarrow \boxed{\mu(s) = \tilde{A}\, e^{-s^2/4D}}$$

OSS: μ NON dipende da N!

Allora:

$$\boxed{U(x,t) = A \cdot \frac{1}{(4Dt)^{N/2}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4Dt}}}$$

Trovo la normalizzazione da:

$$Q = \int_{\mathbb{R}^N} d^N x \, A \frac{1}{(4Dt)^{N/2}} e^{-\frac{(\sum x_i^2)}{4Dt}} = A\left(\int_{\mathbb{R}} ds\, e^{-s^2}\right) = A\,(\sqrt{\pi})^{N/2}$$

Definisco allora il propagatore

$$\boxed{\Gamma_D^N(x,t) := U(x,t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{N/2}} \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right)}$$

Allora la soluzione generale è:

$$\boxed{U(\underline{x},t) = \int_{\mathbb{R}^N} d^N y\, \Gamma_D^N(x-y,t)\,\varphi(y)}$$

OSS: $\varphi(\underline{y})$ NON è in generale separabile nelle componenti

OSSERVAZIONE: Equazione di Schrödinger

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi \,, \quad \text{siano } \tau := it \,, \quad D := \frac{\hbar}{2m}$$

$$\boxed{\psi_\tau = D\,\psi_{xx}}$$ equazione del calore con tempo complesso.

oppure: $$\psi_t = \underbrace{\frac{i\hbar}{2m}}_{D}\nabla^2\psi$$ equazione calore con diffusione complessa

Il propagatore di Schrödinger è proporzionale a Γ_D