O.D.E. → P.D.E.

$$m\ddot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$$

ESISTENZA e UNICITA' Soluzione → condizioni su $\underline{F}$

$\underline{F}$ deve essere CONTINUA e LIPSCHITZ in t

OSS: $\underline{F}(\underline{x}, \dot{\underline{x}}, t)$ non dipende da $\ddot{\underline{x}}$: posso scomporre in un sistema di equazioni del prim'ordine

$$\begin{cases} \underline{p} = m\dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{p}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{p}, t) \end{cases}$$

dati iniziali

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

NOTAZIONE: $U_t := \frac{\partial U}{\partial t}$, $\dot{U} = \frac{dU}{dt}$

es: oscillatore armonico, cerco $U: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ t.c.

$$\ddot{U} + \omega^2 U = 0 \qquad U = U(t)$$

Soluzione: $U(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Se cambio invece il dominio; cerco $U: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$U_{tt} + \omega^2 U = 0 \qquad U = U(x,t)$$

Integrando in t, produco delle costanti ARBITRARIE rispetto a t
⇒ FUNZIONI ARBITRARIE DI x (dati iniziale)

$$U(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \varphi(x))$$

- Def (LINEARITA') Sia $\mathcal{L}$ un operatore. Si dice lineare se

$$\mathcal{L}(u_1 + u_2) = \mathcal{L}(u_1) + \mathcal{L}(u_2) \qquad \forall u_1, u_2 \text{ funzioni nel dominio di } \mathcal{L}$$

Un'equazione differenziale è detta LINEARE se è definita da un operatore lineare

$$\mathcal{L}(U) = g(x,t)$$

Se però non è omogenea ($g \neq 0$) non vale il principio di sovrapposizione delle soluzioni.

$$\mathcal{L}(u_1) = g, \quad \mathcal{L}(u_2) = g \Rightarrow \mathcal{L}(u_1 + u_2) = g + g = 2g$$

$$\mathcal{L}(u_1) = 0, \quad \mathcal{L}(u_2) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}(u_1 + u_2) = 0 + 0 = 0$$

TEORIE CLASSICHE DI CAMPO

• ELETTROMAGNETISMO

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla\cdot \underline{B} = 0 & &\nabla\cdot \underline{E} = 4\pi\rho \\ &\nabla\times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} & &\nabla\times \underline{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}\end{aligned}}$$

equazioni di MAXWELL:

Sono 8 PDE 1+1 scalari, 3+3 vettoriali

Le incognite sono però 10: $\underline{E}, \underline{B}, \rho, \underline{J}$

SISTEMA NON CHIUSO (# equazioni ≠ # incognite)

→ Manca Forza di Lorentz

Equazione di CONTINUITÀ

$$\nabla\cdot(\nabla\times B) = \nabla\cdot\left(\mu_0 \underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right) = \mu_0 \nabla\cdot\underline{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

$$\boxed{0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + K\,\nabla\cdot\underline{J}}$$

Equazione delle ONDE ($\rho = 0$, $\underline{J} = 0$ nel vuoto)

$$\nabla\times(\nabla\times \underline{B}) = \nabla\times\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

OSS: $\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\,\varepsilon_{klm}\,\partial_l B_m = \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j\partial_l B_m =$

$$= \left(\delta_i^l\delta_j^m - \delta_i^m\delta_j^l\right)\partial_j\partial_l B_m = \partial_j\partial_i B_j - \partial_j\partial_j B_i$$

$$\rightarrow \nabla\times(\nabla\times\underline{B}) = \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\underline{B}}}_{0 \text{ da eq. maxwell}}) - \nabla^2 B$$

$$\boxed{B_{tt} - c^2\nabla^2\underline{B} = 0}$$

equazione delle onde

Se osservo inoltre che $E = -\nabla\varphi$

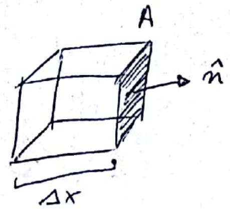
$$\nabla\cdot\underline{E} = -\nabla\cdot(\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = 4\pi\rho$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = -4\pi\rho} \quad \text{eq. Poisson}$$

(nel vuoto) $$\boxed{\nabla^2\varphi = 0} \quad \text{eq. Laplace}$$

- IDRODINAMICA

→ Suppongo volume incomprimibile, arbitrario $\Delta V = A \Delta x$, la conservazione della massa nel tempo:



$$M(t+\Delta t) - M(t) = -\rho A \Delta x$$

divido per Δt e faccio il limite $\Delta t \to 0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\Delta V} \rho \, d^3x \right) = - \int_{\partial \Delta V} \underline{J} \cdot \hat{n} \, d^2x$$

definisco $\underline{J} = \rho \frac{\Delta x}{\Delta t} = \rho \underline{u}$

$$\Rightarrow \int_{\Delta V} (\rho_t + \nabla \cdot \underline{J}) \, d^3x = 0$$

per ogni volume ΔV

$$\Rightarrow \boxed{\rho_t + \bar{\nabla}(\rho \cdot \underline{v}) = 0}$$

eq. continuità (NON LINEARE!)

→ Dato un volume arbitrario, la forza agente sul volume è:

$$F = \int_{\partial V} \underline{P} \cdot \underline{n} \, d^2x = - \int_{\partial V} P \, d^2x$$

(Flusso della pressione)

$$F = M \frac{du}{dt} = \int_V \rho \frac{du}{dt} \, d^3x$$

$$\int_V \rho \frac{dv}{dt} \, d^3x = - \int_{\partial V} P \, d^2x = - \int_V \underline{\nabla} P \, d^3x$$

$$\int_V \left(\rho \frac{du}{dt} + \underline{\nabla} P \right) d^3x = 0 \quad \forall V$$

$$\boxed{\frac{du}{dt} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \phi(x)}$$

campi esterni

incognite $\underline{v}, P, \rho$

OSS: $\frac{du}{dt} = v_t + \underline{v}_x \cdot v = \underline{v}_t + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$ → NON LINEARE

equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} \rho_t + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{v}) = 0 \\ \dfrac{du}{dt} = - \dfrac{\nabla P}{\rho} + \phi(x) \; (+ \alpha \nabla^2 v) \\ \nabla \cdot \underline{v} = 0 \end{cases}$$

Termini dissipativi

(incomprimibilità)

Se considero moto idrostatica: $\underline{v} = 0$, calcolo divergenza della seconda equazione

$$-\nabla \cdot \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla \cdot \underline{\phi} = 0$$

$$\boxed{-\nabla^2 P + \rho \nabla \cdot \underline{\phi} = 0}$$

Stessa struttura equazione di Poisson
$(\nabla^2 P = f(x))$

Se invece considero piccole velocità $|\underline{v}| \ll 1$ e campi esterni NULLI $\phi(x) = 0$ e pressione trascurabile rispetto alla densità

$$\boxed{u_t = \alpha \nabla^2 u}$$ eq. del Calore

CLASSIFICAZIONE:

Sia $u: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$

- EQ. TRASPORTO (sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$) $\quad u_t + \underline{v} \cdot \nabla u = 0$

- EQ. ONDE (sia $c \in \mathbb{R}$) $\quad u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0$

- EQ. LAPLACE (sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$) $\quad \nabla^2 u = 0$
  $\nabla^2 u = f$ (eq. Poisson)

- MAXWELL (VUOTO)

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0, \quad \nabla \cdot \underline{B} = 0, \quad \nabla \times \underline{B} = E_t, \quad \nabla \times \underline{E} = -B_t$$

- NAVIER-STOKES

$$\begin{cases} u_t + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 u \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$