DISTRIBUZIONI

- **Def:** spazi di funzioni TEST

$$\mathcal{D} := \{\phi, C^\infty, \text{ a supporto COMPATTO}\}$$

$$\mathcal{S} := \{\phi, C^\infty \text{ a decrescenza rapida}\}$$

- **Def** (DISTRIBUZIONE): si definisce DISTRIBUZIONE un FUNZIONALE $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\phi \mapsto \langle F | \phi \rangle$, tale che

1) $\langle F | a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \rangle = a_1\langle F|\phi_1\rangle + a_2\langle F|\phi_2\rangle$ LINEARITA'
$\forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

2) $\forall$ successione $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}$ che CONVERGE UNIFORMEMENTE a una funzione $\phi \in \mathcal{D}$ si ha

$$\langle F | \phi_n \rangle \longrightarrow \langle F | \phi \rangle \quad \text{CONTINUITA'}$$

ESEMPI:

- DELTA DI DIRAC: $\delta_{x_0} : \phi \mapsto \phi(x_0)$

$$\langle \delta(x-x_0) | \phi \rangle \equiv \delta_{x_0}[\phi] := \phi(x_0)$$

- Data una $f \in L^1(\mathbb{R})$ definisco F tale che:

$$\langle F | \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx$$

- **Def** (SUPPORTO di una distribuzione): Siano $A_i \subset \mathbb{R}$ aperti connessi tali che: $\langle F|\phi\rangle|_{A_i} = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$. Sia $A := \bigcup_i A_i$ definisco il supporto di F

$$\text{supp } F := \mathbb{R} \setminus A = A^c$$

→ DISTRIBUZIONI REGOLARI: il supporto e' un aperto

→ DISTRIBUZIONI SINGOLARI: il supporto e' un insieme di punti singoli

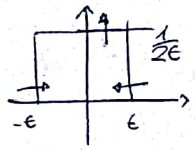
- **Def:** CONVERGENZA DEBOLE: una famiglia di distribuzioni F_α converge alla distribuzione F se

$$\langle F_\alpha | \phi \rangle \to \langle F | \phi \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D} \quad =: F_\alpha \to F$$

convergenza di successioni in $\mathbb{R}$

<u>esempio:</u> Famiglia di funzioni che converge alla δ

Sia $\delta_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon}\chi(-\epsilon,\epsilon)$



sia $\phi \in \mathcal{D}$ e Φ t.c. $\frac{d\Phi}{dx} = \phi \ \forall x$

$$\langle \delta_\epsilon | \phi \rangle = \frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} dx\, \phi(x) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\Phi(\epsilon) - \Phi(-\epsilon)\right) \xrightarrow{\epsilon \to 0} \left.\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x=0} = \phi(0)$$

$$\langle \delta_\epsilon | \phi \rangle = \phi(0) = \langle \delta | \phi \rangle \quad \forall \phi \Rightarrow \delta_\epsilon \to \delta$$

- <u>Def</u> (DERIVATA di funzionale): definisco F' tale che

$$\langle F' | \phi \rangle := -\langle F | \phi' \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

intuizione:

$$\langle F' | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f'(x)\phi(x) = \underbrace{\cancel{f\phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}}_{0 \text{ perché } \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi'(x)\,dx$$

<u>es:</u> Derivata della Delta:

$$\langle \delta'_{x_0} | \phi \rangle = -\langle \delta_{x_0} | \phi' \rangle = -\phi'(x_0) = \delta'_{x_0}[\phi]$$

<u>es:</u> sia $f = xH(x)$ (Heaviside) $\to f'$

$$\langle f' | \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} xH(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty} x\phi'(x)\,dx = \underbrace{\cancel{x\phi(x)\Big|_0^{\infty}}}_{0} + \int_0^{\infty}\phi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi(x)\,dx$$

$$\boxed{(xH)' = H}$$

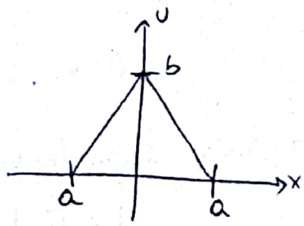
<u>es:</u> sia $f(x) = H(x)$

$$\langle f' | \phi \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\phi'(x)\,dx = -\int_0^{\infty}\phi'(x)\,dx = -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) = \langle \delta | \phi \rangle$$

$$\boxed{H' = \delta}$$

SOLUZIONI DEBOLI

- **equazione delle onde** $U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0$, con dati iniziali $U_t(x,0) = 0$ e $U(x,0) = \Phi(x)$ (vedi figura)



La soluzione e':

$$U = \frac{1}{2}\left(\Phi(x-ct) + \Phi(x+ct)\right)?$$

- Def: definisco la soluzione DEBOLE il funzionale U tale che:

$$\langle U_{tt} - c^2 U_{xx} | \phi \rangle = \langle U | \phi_{tt} - c^2 \phi_{xx} \rangle \quad \forall \phi \in \mathcal{D}$$

Calcolo le derivate:

$$\Phi_x = \left(b - \frac{b}{a}|x+ct|\right)_x = ?$$

$$\langle \Phi_x | \phi \rangle = \langle \Phi | -\phi_x \rangle = \langle b - \frac{b}{a}|x+ct| \,|\, -\phi_x \rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^\infty dt \, \frac{b}{a}|x+ct| \phi_x = \frac{b}{a}\left(\int_{-ct}^{\infty} (x+ct)\phi_x \, dx + \int_{-\infty}^{-ct} (-x-ct)\phi_x \, dx \right) =$$

$$\overset{IBP}{=} -\frac{b}{a}\int_{-ct}^{\infty} dx \, \phi(x) + \frac{b}{a}\int_{-\infty}^{-ct} \phi(x) \, dx = -\frac{b}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \left(H(x+ct) - H(-x-ct)\right)\phi(x) dx$$

$$= -\frac{b}{a}\langle H(x+ct) | \phi(x) \rangle + \frac{b}{a}\langle H(-x-ct) | \phi(x) \rangle$$

Calcolo poi anche Φ_{xx} e Φ_t ...

- **equazione di Laplace (Poisson)**

$\nabla^2 U = \rho$ e $U|_{\partial\Omega} = 0$, la soluzione e':

$$U(\underline{x}) = \int_\Omega d^3x \; G(\underline{x} - \underline{x}_0)\rho(x) = \int_\Omega d^3x \; G(\underline{x} - \underline{x}_0)\nabla^2 U$$

Se $U \in \mathcal{D}$, allora:

$$U(x) = \langle G | \nabla^2 U \rangle = \langle \nabla^2 G | U \rangle = \langle \delta | U \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \nabla^2 G = \delta$$

La funzione di Green G e' il funzionale il cui laplaciano agisca come la delta su ogni funzione di prova.

- **equazione del Calore** $\Gamma_t = D\Gamma_{xx}$

$$\langle \Gamma_t - D\Gamma_{xx} | \phi \rangle = \langle \Gamma | -\phi_t - D\phi_{xx} \rangle = 0 \quad \forall \phi$$

al tempo $t=0$: $\langle \Gamma | -\phi_t - D\phi_{xx} \rangle = \langle \delta | -\phi_t - D\phi_{xx} \rangle$

al $t \to 0$

$$\boxed{\Gamma(x,0) = \delta(x)}$$

In senso distribuzionale

- **Def** (TRASFORMATA DI FOURIER):

per una $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \, e^{-ikx} f(x) \qquad \text{(TRASFORMATA)}$$

$$\check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \, e^{ikx} f(k) \qquad \text{(ANTI-TRASFORMATA)}$$

Per una distribuzione F:

$$\boxed{\langle \hat{F} | \phi \rangle := \langle F | \hat{\phi} \rangle}$$

- **es**: per la Delta: $\langle \hat{\delta} | \phi \rangle = \langle \delta | \hat{\phi} \rangle$

$$\int \delta \, \hat{\phi}(k) \, dk = \left(\hat{\phi}(k_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \, e^{-ikx} \phi(x) \right)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \, \delta(x - x_0) \int_{\mathbb{R}} dk \, \frac{e^{-ixk}}{\sqrt{2\pi}} \phi(k) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk \, \underbrace{e^{-ix_0 k}}_{\text{costante se } x_0 = 0} \phi(k) \overset{\text{se } x_0 = 0}{=} \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| \phi \right\rangle$$

$$\Rightarrow \langle \hat{\delta}_{x_0} | \phi \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \middle| \phi \right\rangle \qquad \boxed{\hat{\delta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

esercizio: come è la trasformata di fourier di una ϕ a supporto compatto?

- **Def** (TRASFORMATA DI FOURIER DI UNA DERIVATA)

$$\hat{\phi}' = ik \hat{\phi} = \int dx \, e^{-ikx} \phi'(x) \overset{\text{IBP}}{=} -(-ik) \int dx \, e^{-ikx} \phi(x)$$

Tornando al problema del Calore

$$\Gamma_t = D \Gamma_{xx}, \quad \Gamma(x,0) = \delta(x) \overset{\wedge}{\Rightarrow} \begin{cases} \hat{\Gamma}_t = D(ik)^2 \hat{\Gamma} & \text{è UNA O.D.E} \\ \hat{\Gamma}(k,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \to \text{Risolvo} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\Gamma}(k,t) = \frac{e^{-k^2 Dt}}{\sqrt{2\pi}}$$, calcolo quindi l'anti trasformata

$$\langle \Gamma | \check{\phi} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dk \, e^{-k^2 Dt} \int_{\mathbb{R}} dy \, \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} \phi(y), \quad \text{sia } \frac{S^2}{2} := k^2 Dt$$

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dS}{\sqrt{2Dt}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-S^2/2} e^{iSx/\sqrt{2Dt}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int ds \, e^{-S^2/2} e^{-is\tilde{x}}}_{\text{anti trosf. Gaussiana} = \text{Gaussiana}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\tilde{x}^2/2} = \underline{\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}} \quad \text{propagatore del calore}$$

OSS: Se voglio risolvere il problema

$$\begin{cases} \Gamma_t = D\,\partial_x^n \Gamma \\ \Gamma(x,0) = \delta(x) \end{cases}$$

Analogamente applico la trasformata:

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_t = (ik)^n \hat{\Gamma} \\ \hat{\Gamma}(k,0) = 1/\sqrt{2\pi} \end{cases}$$

Nel caso $n = 3$

$$\begin{cases} \hat{\Gamma}_t = -ik^3 \hat{\Gamma} \\ \Gamma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \hat{\Gamma} = \frac{e^{-ik^3Dt}}{\sqrt{2\pi}}$$

devo regolarizzare un integrale complesso

equazione di Airy

PROPAGATORE PER LE ONDE

Vorrei risolvere il problema (debole):

$$\Gamma_{tt} - c^2 \Gamma_{xx} = 0 , \quad \Gamma(x,0) = 0 , \quad \Gamma_t(x,0) = \delta(x - x_0)$$

Ricordo che per il problema

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 , \quad U(x,0) = 0 , \quad U_t(x,0) = \psi(x)$$

la soluzione e':

$$U(x,t) = \int_{x-ct}^{x+ct} dy\, \frac{\psi(y)}{2c} = \int_{\mathbb{R}} dy\, \chi[x-ct, x+ct] \frac{\psi(y)}{2c} = \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{2c} \underbrace{H(c^2t^2 - x^2)}_{\text{propagatore}} \psi(y)$$

Allora:

$$\boxed{\Gamma(x,t) = \frac{H(c^2t^2 - x^2)}{2c}\, \mathrm{sign}(t)}$$

in senso distribuzionale

- esercizio: prova a cercare soluzioni autosimilari per l'equazione delle onde. Mi aspetto di trovare qualcosa di simile a Γ ?