EQUAZIONE DEL TRASPORTO (CONTINUITA')

Sia $u \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, sia $c \in \mathbb{R}$ (parametro)

$$\boxed{u_t + c u_x = 0}$$ (eq. Trasporto/Continuità)

METODI RISOLUTIVI:

- **METODO DEL CAMBIO VARIABILE** Uso un cambio di variabili per ricondurmi a delle ODE

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

oss: eq. lineare. Provo trasformazione lineare di coordinate.

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta t \\ \eta = \gamma x + \delta t \end{cases}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (Trasformazione invertibile)

Applico teorema della funzione composta per le derivate:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha\frac{\partial}{\partial \xi} + \gamma\frac{\partial}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t}\cdot\frac{\partial}{\partial t} = \beta\frac{\partial}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial}{\partial \eta}$$

Inserisco nell'equazione:

$$u_t + c u_x = \beta u_\xi + \delta u_\eta + c\alpha u_\xi + c\gamma u_\eta =$$

$$= (\beta + c\alpha) u_\xi + (\delta + c\gamma) u_\eta = 0$$

Voglio annullare uno dei due termini, ad esempio la derivata in η (oss: entrambi non posso perché $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$)

$$\begin{cases} \delta + c\gamma = 0 \\ \underline{u_\xi = 0} \end{cases}$$

Se la derivata rispetto a ξ è nulla, allora la soluzione dipende solo da η

$$u = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) = \tilde{u}(\xi, \eta) = u(\eta)$$

(abuso di notazione)

Si ha che $\delta = -c\gamma$ e quindi:

$$\eta = \gamma x + \delta t = \gamma(x - ct)$$

Allora la soluzione generale è

$$\boxed{u = u(\eta) = u(x - ct)}$$ una qualunque funzione di $x - ct$

La forma funzionale esplicita dipenderà dal dato iniziale

Ad esempio, dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} U_t + cU_x = 0 & (1) \\ U(x,0) = \varphi(x) & (2) \end{cases}$$

Devo trovare $U(x-ct)$ tale che $U(x,0) = U(x) = \varphi(x)$

$$\boxed{U(x,t) = \varphi(x-ct)}$$

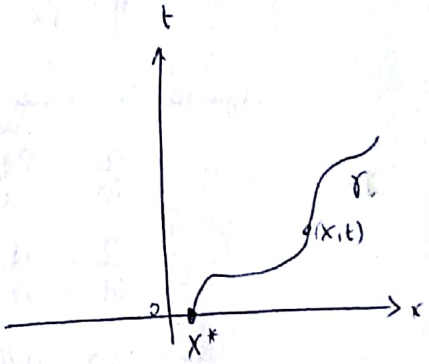
E' l'unica tra la famiglia di funzioni soluzioni di (1) che rispetta anche (2)

<u>OSS:</u> viene detta equazione di trasporto perché trasporta il dato iniziale lungo la curva $x - ct = 0$ (nel piano t,x)

- <u>METODO DELLE CARATTERISTICHE</u>

$$\begin{cases} U_t + cU_x = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Sia $x^* \in \mathbb{R}$. Suppongo che ESISTA una curva $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tale che $U(x,t)|_\gamma = \varphi(x^*)$ sia <u>COSTANTE</u> sulla curva γ



<u>Def:</u> Curva caratteristica $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ tale che la sua immagine è $\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mid U(x,t) = \varphi(x^*)\}$

Dato un punto $(x,t) \in \gamma$ si ha che $U(x,t) = \varphi(x^*)$

Se parametrizzo γ come $\gamma(s) = x(s), t(s)$ si ha che:

$$\boxed{U(\gamma(s)) = \varphi(x^*) = cost \Rightarrow \frac{dU}{ds} = 0}$$

U lungo la caratteristica <u>non cambia</u> da $U(s=0) = \varphi(x^*)$

Ossia:

$$\frac{dU}{ds} = U_x \cdot \frac{dx}{ds} + U_t \frac{dt}{ds} = 0 \text{ , ma: } U_x + cU_t = 0 \text{ , quindi:}$$

$$\boxed{\frac{dx}{ds} = c \qquad \frac{dt}{ds} = 1}$$

Queste relazioni, mi definiscono la curva γ, se trovo che sono accettabili allora la mia supposizione sull'esistenza di γ era corretta

Allora:

$$\begin{cases} x = cs + x^* \\ t = s + \cancel{t_0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = \frac{x - x^*}{c}}$$

Le caratteristiche di (1) sono RETTE nel piano t,x

Se voglio l'unicità del problema, le caratteristiche NON devono INTERSECARSI, ossia

Dato (x', t') ESISTE UNICA la caratteristica passante per esso.
Inoltre, le caratteristiche devono SATURARE tutto il piano (t,x)

OSS: Il campo $U(x,t)$ sulla caratteristica vale $\varphi(x^*)$, inoltre $(x^*, 0) = \gamma'(0)$ è il vettore tangente alla curva in 0
Isolo quindi il valore iniziale

$$t = \frac{x - x^*}{c} \Rightarrow \underline{x^* = x - ct}$$

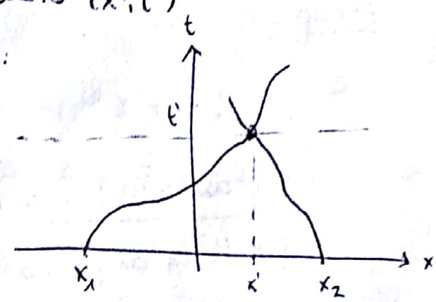
Allora:

$$\boxed{U(x,t) = \varphi(x^*) = \varphi(x - ct) \text{ è la soluzione}}$$

OSS: Se le caratteristiche si intersecano in un dato (x', t')
Non posso più scegliere il dato iniziale, poiché:

$$U(x', t') = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) \quad \text{NON VERO IN GENERALE}$$

NON SI PUÒ DEFINIRE LA SOLUZIONE PER $t \geq t'$



OSS: Se definisco $\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}$ e $\hat{\underline{\tau}} = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$, allora l'equazione del trasporto (1) è equivalente a:

$$\underline{\hat{\tau} \cdot \nabla U = 0} \qquad \text{Derivata direzionale lungo } \hat{\underline{\tau}}$$

Le soluzioni di (1) sono quindi le funzioni la cui derivata direzionale lungo $\hat{\tau}$ è nulla

esercizio: Risolvere

$$\begin{cases} aU_t + bU_x = 0 \\ U(x,0) = x^2 \end{cases} \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

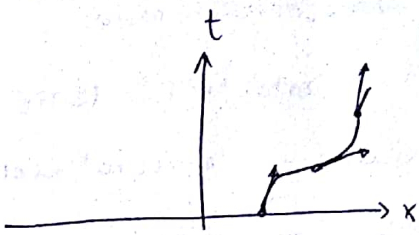
EQUAZIONE DEL TRASPORTO A COEFFICIENTI NON COSTANTI

Data la funzione $c \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, e il problema

$$\begin{cases} u_t + c(x,t)\, u_x = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Applico il metodo delle caratteristiche: Definisco curva

$\gamma : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$



$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = c(x,t)\, u_x + u_t = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = c(x,t) \\ \dfrac{dt}{ds} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = s + \cancel{t_0}^{\,0} \\ \dfrac{dx}{dt} = c(x(t),t) \end{cases}$$

→ Definisce il campo vettoriale Tangente alle caratteristiche

Con dato iniziale $x(0) = x^*$ se $u(x,0) = \varphi(x^*)$

esempio:

$c(x,t) = 1 + x^2$, $\dfrac{dx}{dt} = 1 + x^2$, allora:

$$\operatorname{atan}(x(t)) - \operatorname{atan}(x^*) = t$$

$$\boxed{x(t) = \tan(t + \operatorname{atan}(x^*))}$$ eq. caratteristiche

$\Rightarrow x^* = \tan(\operatorname{atan}(x(t)) - t)$

$u(\gamma(s)) = u(\gamma(0)) = u(x^*) = u(\tan(\operatorname{atan}(x) - t))$

la soluzione con dato iniziale φ è

$$\boxed{u(x,t) = \varphi(\tan(\operatorname{atan}(x) - t))}$$

EQ. TRASPORTO NON OMOGENEA

Sia $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ASSOLUTAMENTE CONTINUA in x

$$\begin{cases} u_t + c u_x = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Applico metodo delle caratteristiche: cerco una curva per cui la derivata di u è uguale a $f(x,t)$ lungo la curva

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = f(x,t) = u_t + c u_x$$

=> L'equazione delle caratteristiche è uguale al caso non omogeneo

$$\frac{dx}{dt} = c$$

Lungo le curve caratteristiche la funzione varia in maniera assegnata.

Soluzione generale (dim. Evans)

Applicando il metodo delle caratteristiche, so che la variazione di u lungo una curva fissata è data da f. Le caratteristiche corrispondono alle rette $\gamma: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ definite da:

$$\gamma(s) = (x + cs, t + s) \quad \text{al variare di } x,t \text{ in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

So allora che: $\frac{d}{ds} u \circ \gamma(s) = f(x,t)$ fissati x,t.

Definisco allora:

$$z(s) = u(x + cs, t + s) \Rightarrow \frac{dz}{ds} = f(x+cs', t+s')$$

Voglio ottenere da ciò un'espressione del tipo $u(x,t) = \dots$ (oss: $z(0) = u(x,t)$), Allora integro tra 0 ed s

$$\int_0^s \frac{dz}{ds'} ds' = z(s) - z(0) = \int_0^s f(x+cs', t+s')\, ds'$$

$$\Rightarrow z(0) = z(s) - \int_0^s f(x+cs', t+s')\, ds' = u(x,t) \quad \forall s \in A$$

In particolare, per $s = -t$ si ha che:

$$z(s) = z(-t) = u(x-ct, 0) = u(y,0) = \varphi(y) = \varphi(x-ct)$$

$$\left[-\int_0^s f(x+cs', t+s')\, ds'\right]_{s=-t} = -\int_0^{-t} [\dots] ds' \overset{s=-s'}{=} \int_0^t [\dots] ds$$

Allora:

$$\boxed{u(x,t) = \varphi(x-ct) + \int_0^t f(x+cs,\, t+s)\, ds}$$

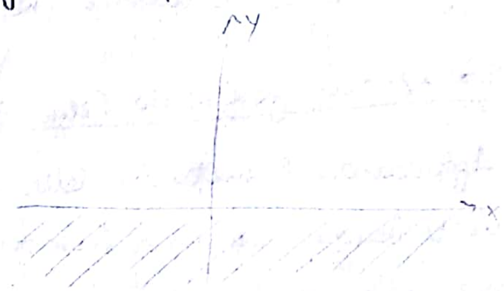
SOLUZIONE GENERALE AL PROBL. CAUCHY NON OMOGENEO

BUONA POSITURA

In generale, assegnata una topologia nello spazio dei dati iniziali, si parla di buona positura per un'equazione se la soluzione dipende in maniera CONTINUA dai dati iniziali, ossia a piccole variazioni del dato iniziale corrispondono piccole variazioni della soluzione

esempio (di cattiva positura): data la seguente equazione

$$U_{xx} + U_{yy} = 0$$



con le condizioni al bordo:

1) $U(x,0) = 0$, $U_y(x,0) = 0$

La soluzione e' $U(x,y) = 0$

Prendo un dato iniziale che tende secondo una norma al dato 1)

2) $\tilde{U}(x,0) = 0$, $\tilde{U}_y(x,0) = \dfrac{\sin(mx)}{m^2}$

OSS: per $m \to \infty$ $\tilde{U}_y = \dfrac{\sin mx}{m^2} \to U_y = 0$, puntualmente

cioe' $\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_0$ t.c. $\forall m \geq m_0$ $\| U_y - \tilde{U}_{y_m} \| < \varepsilon$

La soluzione del problema 2) e'

$$\tilde{U}_m(x,y) = \frac{1}{m^3} \sin(mx) \sinh(my)$$

OSS:

per $m \to \infty$ $\tilde{U}_m(x,y) \sim \sinh my \to \underline{\infty}$ DIVERGE

allora:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists m_0$ t.c. $\forall m > m_0$ $\| U(x,y) - \tilde{U}_m(x,y) \| > \varepsilon$

Problema con CATTIVA POSITURA