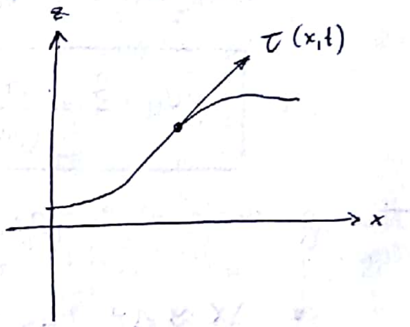
EQUAZIONE DELLE ONDE

$$\boxed{U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0}$$

• <u>DERIVAZIONE (DI D'ALAMBERT)</u>

Considero un filo in un piano XZ (senza gravita')
Sia $z = U(x,t)$ la posizione delle corde in corrispondenza del punto x all'istante t. Suppongo che:



1) TENSIONE e' sempre <u>Tangente al filo</u>

Se la curva del filo e' parametrizzata da $\gamma(s)$, lo spostamento infinitesimo ds e':

$$ds = \lim_{\|\Delta\gamma\| \to 0} \Delta s$$

dove:

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta z^2} + o(\|\Delta x\|) = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2} + o(\|\Delta x\|)$$

$$\boxed{ds = dx \sqrt{1 + (U_x(x,t))^2}}$$

Il versore Tangente alla curva e' dato da:

$$\underline{\hat{h}} = \frac{1}{\|\frac{dx}{ds}\|} \cdot \frac{d\underline{x}}{ds} = \frac{1}{\frac{dx}{ds}\sqrt{1+u_x^2}} \begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ u_x \frac{dx}{ds} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix}$$

Quindi l'ipotesi e' che:

$$\underline{\tau} = \tau \underline{\hat{h}} \quad , \quad \boxed{\underline{\hat{h}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix}}$$

• Per un Tratto di curva lungo Δs, la forza agente sul tratto e'

$$\tau(x + \Delta x) - \tau(x,t)$$

(poiche' localmente posso scrivere $z = z(x)$)

$$\rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \tau(x + \Delta x, t) - \tau(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \tau_x(x,t)\Delta x + o(\|\Delta x\|)$$

$$\underline{F(x,t) = \lim_{\Delta x \to 0} \tau_x(x,t)\Delta x + o(\|\Delta x\|)}$$

Forza su un Tratto infinitesimo

2) L'accelerazione è TRASVERSALE

sia l'accelerazione data da $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{tt} \end{pmatrix}$, Trasversale.

Da eq di Newton: $\underline{f} = \rho \underline{a}$ (localmente) $= \dfrac{\underline{F}}{\Delta x}$ (per unità di lunghezza)
densità forza

$$\rho \underline{a} = \frac{\partial}{\partial x}(\underline{\tau}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix}\right)$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \rho U_{tt} \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix}\frac{\tau}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)$$, oppure per le componenti ?

$$\boxed{\rho U_{tt} \cdot \hat{\underline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} \tau \hat{\underline{h}}}$$

equazione delle onde di D'Alambert
OSS: le incognite sono τ e U

In generale è troppo complicata da risolvere

- $\Delta X \approx \Delta Z$ => derivate $\frac{\Delta z}{\Delta x} = u_x$ NON troppo alte
  → approssimo equazione al primo ordine.

$$\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{2}u_x^2 + o(u_x^2)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + o(U_x) \\ U_x + o(U_x) \end{pmatrix}$$

- U_{tt} e U_{xx} suppongo abbiano lo stesso peso (*)

$$\begin{cases} 0 = \tau_x \\ \rho U_{tt} = (\tau U_x)_x \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = \text{cost} \\ \rho U_{tt} = \tau U_{xx} \end{cases} \qquad \text{definendo } c^2 := \frac{\tau}{\rho}$$

$$\Rightarrow \underline{U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0}$$

(*) Se voglio che $\|U_{tt}\| \sim \|U_{xx}\|$, poiché c^2 funge da peso per U_x devo avere che U_t è PICCOLO rispetto a c

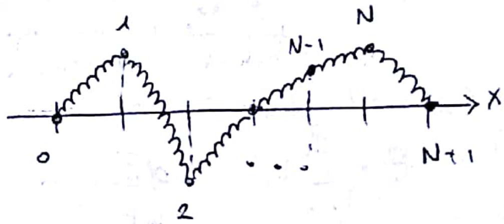
<u>Velocità spostamento Trasversale piccole rispetto a velocità onda</u>

- DERIVAZIONE (DI LAGRANGE)

Limite dal discreto al continuo.

Considero una catena di punti collegati da una molla, con passo a. Sia m la massa dei punti e k la costante della molla. Suppongo che gli estremi siano fissi e che il moto possa avvenire solo in direzione TRASVERSALE

Scrivo le equazioni del moto:



$$\mathcal{L} = T - V \;, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \,, \forall i$$

Prendo per coordinate: $q_i = U_i \;, \; \dot{q}_i = U_{it}$

$$V = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2} k (\Delta r_i)^2 = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2} k \left(a^2 + (U_{i+1} - U_i)^2\right) = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2} k (U_{i+1} - U_i)^2 + cost$$

$$T = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{1}{2} m \, U_{it}^2 \;, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_i} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\partial}{\partial U_i}\left(\frac{1}{2} k (U_{i+1} - U_i)^2\right) =$$

$$= -k(U_i - U_{i+1}) - k(U_i - U_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad m U_{itt} = K(U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i)$$

OSS:

$$\frac{U_{i+1} + U_{i-1} - 2U_i}{a^2} = D^2 U_i \quad \text{(Derivata seconda Numerica)}$$

Definendo:

$$\rho := \frac{m}{a} \;, \quad \tau := ka \;, \quad c^2 = \frac{\tau}{\rho} \quad \text{(Devono essere FINITI)}$$

E prendendo il limite $a \to 0$, $N \to \infty$ si ottengono infinite equazioni equivale ad assegnare una funzione della x

$$\boxed{U_{tt} = c^2 U_{xx}}$$

Inoltre devo dare le condizioni:

N-1: $U_i(0)$ e $\dot{U}_i(0)$ $\rightarrow$ equivale a: $U(x,0)$ e $U_t(x,0)$

OSSERVAZIONE.

La forza che agisce su m_j è dato da

$$F = k \Delta r_j = k\sqrt{a^2 + (U_{j-1} - U_j)^2} \approx ka = \tau$$

nel limite in cui $U_{j-1} - U_j \simeq 0$ PICCOLI SPOSTAMENTI

QUANTITA' CONSERVATE, ENERGIA

OSS: la lagrangiana NON dipende dal Tempo $\Rightarrow$ $E = T + U$ CONSERVATA

$$E = \sum_{i=0}^{N+1} \frac{1}{2} m \dot{u}_i^2 + \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2} k \left(u_{i+1} - u_i\right)^2$$

Voglio farne il limite al continuo:

$$E = \underbrace{a}_{\text{MISURA}} \Big[\sum_{i=0}^{N} \underbrace{\frac{1}{2} \rho \dot{u}_i^2 + \frac{1}{2} \tau \frac{(u_{i+1} - u_i)^2}{a^2}}_{\text{DENSITA' DI ENERGIA}} \Big] \longrightarrow E = \int d\mu\, \mathcal{E}$$

$\begin{pmatrix} N \to \infty, \; a \to 0 \\ ka \to \tau, \; \frac{m}{a} \to \rho \end{pmatrix}$

OSS: Nel caso FINITO

$$E = \sum_{i=0}^{N} \mathcal{E}_i \; , \quad \frac{dE}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} \frac{dE}{dt} = 0$$

Definisco il limite continuo:

$$\boxed{E := \int_0^L dx \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\tau}{2} u_x^2 \right)}$$

$\mathcal{E} = \frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\tau}{2} u_x^2$ Densita' di energia

OSS: $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} \neq 0$

TEOREMA: $\frac{dE}{dt} = 0$, se valgono:

CONDIZIONI AL BORDO:

1) $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \; ; \forall t$ (NEUMANN)

2) $u(0,t) = u(L,t) = 0, \; \forall t$ (DIRICHLET)

3) $\begin{cases} u(0,t) = u(L,t) \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) \end{cases}, \; \forall t$ (PERIODICHE)

DIMOSTRAZIONE:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \;\Rightarrow\; u_t \left(\rho u_{tt} - \tau u_{xx} \right) = 0$$

$$\left(\frac{\rho}{2} u_t^2 \right)_t - \tau u_t u_{xx} = \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 \right)_t - \tau \left((u_t u_x)_x - u_{tx} u_x \right) =$$

$$0 \quad = \left(\frac{\rho}{2} u_t^2 \right)_t - \tau (u_t u_x)_x + \tau \left(\frac{u_x^2}{2} \right)_t$$

e' un' equazione di continuita'

$$\underbrace{\left(\frac{\rho}{2} u_t^2 \right)_t + \left(\frac{\tau}{2} u_x^2 \right)_t}_{\text{Densita'}} + \underbrace{\left(-\tau u_t u_x \right)_x}_{\text{corrente}} = 0$$

Integro ora su tutte le x, per ottenere E, supponendo che $\mathcal{E}$, $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ siano L^1 e che sia lecito commutare $\frac{\partial}{\partial t}$ e integrale

$$\int_0^L dx \left(\underbrace{\frac{\rho}{2} u_t^2 + \frac{\tau}{2} u_x^2}_{\mathcal{E}} \right)_t = \int_0^L dx \left(\tau u_t u_x \right)_x$$

$$\int_0^L dx \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L dx \, \mathcal{E} = \frac{\partial}{\partial t} E = \frac{d}{dt} E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \tau u_t u_x \Big|_{x=L} - \tau u_t u_x \Big|_{x=0} = 0$$

se valgono 1), 2) o 3) ∎

QUANTITA' CONSERVATE, Q. MOTO TOTALE

Definisco $\Pi := \int dx \, \rho u_t$

Allora: $\Pi_t = \int dx \, \rho u_{tt} = \int dx \, \tau u_{xx}$ (dall'equazione delle onde)

$$\Rightarrow \quad (\rho u_t)_t + (-\tau u_x)_x = 0$$

$$(\rho_\Pi)_t + (J_\Pi)_x = 0$$

eq. di continuita' per Π: e' eq. onde stessa

SOLUZIONE EQUAZIONE ONDE SULLA RETTA (D'ALAMBERT)

Introduco l'operatore D'Alambertiano

$$\Box := \partial_t^2 - c^2 \partial_x^2 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)$$

Questo mi suggerisce di introdurre le nuove coordinate:

$$\eta = x - ct \,, \quad \xi = x + ct \quad \text{(coordinate caratteristiche)}$$

Allora:

$$\partial_x = \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\partial_t = \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = -c\frac{\partial}{\partial \eta} + c\frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$\Box = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x) = \left(-c\frac{\partial}{\partial \eta} + \cancel{c\frac{\partial}{\partial \xi}} - c\frac{\partial}{\partial \eta} - \cancel{c\frac{\partial}{\partial \xi}}\right)\left(-\cancel{c\frac{\partial}{\partial \eta}} + c\frac{\partial}{\partial \xi} + \cancel{c\frac{\partial}{\partial \eta}} + c\frac{\partial}{\partial \xi}\right) =$$

$$= \left(-2c\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\left(2c\frac{\partial}{\partial \xi}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box = -4c^2 \partial_\eta \partial_\xi}$$

Voglio risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \Box U = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \xRightarrow{(\eta,\xi)} \boxed{U_{\xi\eta} = 0}$$

che implica: $\begin{cases} (U_\xi)_\eta = 0 \\ (U_\eta)_\xi = 0 \end{cases}$

Deduco quindi che l'equazione deve essere separabile (additivamente)

$$U(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) = \underline{f(x+ct) + g(x-ct)}$$

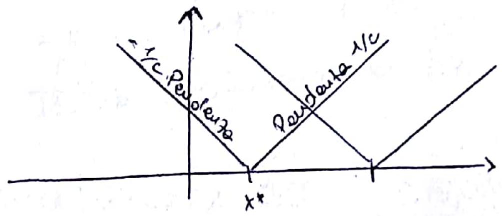
La soluzione $U(x,t)$ è scomponibile in una parte che propaga a destra e una che propaga a sinistra

Inoltre, al tempo $t=0$

$$U(x,0) = f(x) + g(x) = \varphi(x)$$ f e g TRASPORTANO il Dato iniziale (hanno ruolo di caratteristiche)

Il problema ha ora DUE caratteristiche:

$$x^* = x - ct \quad , \quad x^* = x + ct$$



• QUANTITA' TRASPORTATE

Quantità che hanno valore costante lungo le caratteristiche (In generale non sarà U, come per eq. Trasporto)

Riscrivo l'equazione delle onde come un sistema del primo ordine, introducendo il campo v tale che:

$$\begin{cases} U_t = c\,v_x \\ v_t = c\,U_x \end{cases} , \quad \begin{pmatrix} U_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_x \\ v_x \end{pmatrix} , \quad \underline{U}_t = M\,\underline{U}_x$$

Voglio ottenere due equazioni del trasporto. Diagonalizzo il sistema.

$$\underline{U}_t = O^{-1} D\, O\, \underline{U}_x$$, D, O matrici costanti. Le porto dentro le derivate

$$\Rightarrow (O\underline{U})_t = D(O\underline{U})_x$$ Valido sempre per matrici costanti

Per questo caso posso semplicemente sommare/sottrarre le equazioni

$$\begin{cases} (U+v)_t = c(U+v)_x \\ (U-v)_t = -c(U-v)_x \end{cases}$$ DUE EQUAZIONI DEL TRASPORTO → So risolverle

OSS: La quantità $(U+v)|(U-v)$ viene Trasportata lungo le caratteristiche NEGATIVE | POSITIVE

Voglio ora trovare la forma esplicita di f e g per risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad U(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$$

oss:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f'(x+ct)\big|_{t=0} + g'(x-ct)\big|_{t=0} \\ \psi(x) = c f'(x+ct)\big|_{t=0} - c g'(x-ct)\big|_{t=0} \end{cases}$$

Riscrivendo il sistema:

$$\begin{cases} f' = \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\psi}{c}\right) \\ g' = \frac{1}{2}\left(\varphi' - \frac{\psi}{c}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2c}\int_0^s \psi \, ds' + A \\ g = \frac{1}{2}\varphi \;\; \frac{1}{2c}\int_0^s \psi \, ds' + B \end{cases}$$

Inoltre:

$$f + g = \varphi + A + B = \varphi \Rightarrow \underline{B = -A}$$

Allora:

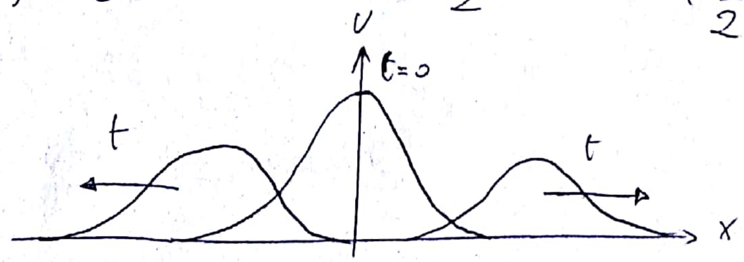
$$\begin{cases} f(x+ct) = \frac{1}{2}\varphi(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} \psi(s)\, ds + A \\ g(x-ct) = \frac{1}{2}\varphi(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} \psi(s)\, ds - A \end{cases}$$

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\Big) + \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\, ds}$$

Soluzione generale equazione delle onde sulla retta

esempio:

$$\begin{cases} U(x,0) = e^{-x^2} \\ U_t(x,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow U(x,t) = \frac{1}{2} e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{2} e^{-(x-ct)^2}$$

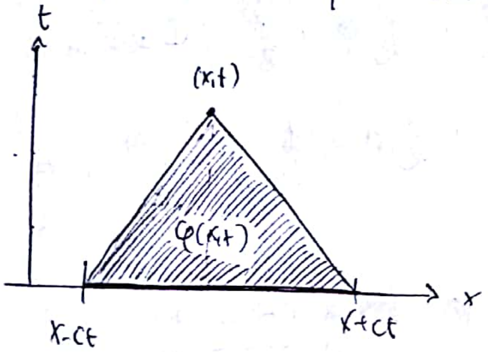


esercizio: Trovare quantità conservata e verificare che si conserva

CAUSALITA':

Considero la soluzione a partire da un generico punto (,t) e applico l'evoluzione temporale inversa. Osservo che:
per conoscere il valore di U in un punto generico (x,t) sono sufficienti i valori di φ dentro il cono delimitato dalle caratteristiche e i valori di ψ sul segmento $[x-ct, x+ct]$

→ CONO CAUSALE (del passato/del futuro)



EQUAZIONE ONDE SU DOMINI FINITI

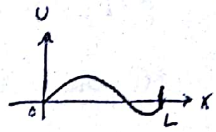
Sia $\boxed{0 < x < L \,, \; t > 0}$, Voglio risolvere il problema:

Cauchy:

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Condizioni di Dirichlet:

$U(0,t) = U(L,t) = 0 \quad \forall t$



IPOTESI: Separazione delle variabili

$U(x,t) = F(x)G(t)$

L'equazione diventa:

$$-c^2 \frac{F''(x)}{F(x)} + \frac{\ddot{G}(t)}{G(t)} = 0$$

le due quantità devono quindi essere uguali alla stessa costante $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \ddot{G}(t) = \alpha c^2 G(t) \\ F''(x) = \alpha F \end{cases}$$

- Risolvo la parte spaziale F. Ho i tre casi:

$$\begin{cases} \alpha > 0 & F(x) = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x} \\ \alpha = 0 & F(x) = Ax + B \\ \alpha < 0 & F(x) = \tilde{A}e^{i\sqrt{\alpha}x} + \tilde{B}e^{-i\sqrt{\alpha}x} = A\cos(kx) + B\sin(kx) \end{cases}$$

1) $\alpha > 0$. Pongo condizioni di Dirichlet

$F(0) = A + B = 0$

$F(L) = Ae^{\sqrt{\alpha}L} + Be^{-\sqrt{\alpha}L} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\alpha}L} & e^{-\sqrt{\alpha}L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistema invertibile. La unica soluzione è $A = 0$, $B = 0$, (Autovettore nullo)

$\rightarrow$ $\alpha > 0$ NON accettabile

2) $\alpha = 0$. Pongo condizioni di Dirichlet

$F(0) = B = 0$

$F(L) = AL + B = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ L & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Invertibile. Unica soluzione è autovettore Nullo

$\rightarrow$ $\alpha = 0$ NON accettabile

3) $\alpha < 0$. Pongo condizioni di Dirichlet

$$F(0) = A = 0 \qquad \begin{cases} A = 0 & (B \neq 0) \\ \sin(KL) = 0 \end{cases}$$

$$F(L) = A\cos(KL) + B\sin(KL) = 0$$

Mi pone delle condizioni su K.

$$\sin(KL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi$$

$$\boxed{K = \frac{n\pi}{L}}$$

$\rightarrow$ $\alpha < 0$, $K_n = \frac{n\pi}{L}$

$$F_n(x) = B_n \sin(K_n x)$$

, Trovo B_n dalle condizione di Normalizzazione

$$\int^L dx\, F_n(x) F_n(x) = 1 \qquad \boxed{B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}}$$

OSS: $F_n(x)$ e' un sistema ortonormale.

$$\langle F_n | F_m \rangle = \delta_{n,m} \qquad (\text{Prodotto } L^2)$$

- Risolvo la parte temporale G

$$\ddot{G} = \alpha c^2 G \Rightarrow G(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

OSS: $\ddot{G} = -\omega_n^2 G$, $F'' = -K_n^2 F$

$$\frac{\ddot{G}}{G} - c^2 \frac{F''}{F} = -\omega_N^2 + c^2 K_n^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_N = c K_N}$$ Relazione di dispersione (lineare)

La soluzione dell'equazione e'

$$U_N(x,t) = F_N(x) G_N(t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(K_N x)\left(a_N \cos(\omega_N t) + b_N \sin(\omega_N t)\right)$$

Poiche' l'equazione e' lineare, la soluzione generale e'

$$\boxed{U(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} U_N(x,t) = \sum_{N=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(K_N x)\left(a_N \cos(\omega_N t) + b_N \sin(\omega_N t)\right)}$$

SOLUZIONE EQ. ONDE SU DOMINIO FINITO

I dati iniziali devono quindi essere esprimibili in serie di Fourier:

$$\varphi(x) = \sum_{N=1}^{\infty} U_N(x,0) = \sum_{N=1}^{\infty} a_N \sin(K_N x) \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\psi(x) = \sum_{N=1}^{\infty} U_{Nt}(x,0) = \sum_{N=1}^{\infty} b_N \sqrt{\frac{2}{L}}\, \omega_N \sin(K_N x)$$

Per ottenere i coefficienti a_N e b_N è sufficiente calcolare:

$$a_N = \langle \varphi | F_N \rangle \quad , b_N = \langle \psi | F_N \rangle$$

QUANTITA' CONSERVATE:

Calcolo l'energia

$$E = \int_0^L dx \left(\frac{u_t^2}{2} + \frac{c^2}{2} u_x^2 \right) \quad , \text{dove } \quad u = \sum_N F_N G_N$$

- $$\int_0^L dx \, \frac{u_t^2}{2} = \frac{1}{2}\int_0^L dx \underbrace{\left(\sum_N F_N \dot{G}_N\right)\left(\sum_M F_M \dot{G}_M\right)}_{\text{Serie convergenti, uniformemente}} = \frac{1}{2}\sum_{M,N} \dot{G}_N \dot{G}_M \int_0^L \underbrace{F_N F_M \, dx}_{\delta_{NM}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_N \dot{G}_N^2$$

- $$\int_0^L dx \, \frac{c^2}{2} u_x^2 = \int_0^L dx \, \frac{c^2}{2} \underline{\left(\sum_N F'_N G_N\right)\left(\sum_M F'_M G_M\right)} = \frac{c^2}{2}\sum_{N,M} G_N G_M \int_0^L dx \, F'_N F'_M =$$
$$= \frac{c^2}{2}\sum_{N,M} G_N G_M \, K_N^2 \int_0^L F_N F_M \, dx = \sum_N \frac{K_N^2 c^2}{2} G_N^2$$
$$= \sum_N \frac{\omega_N^2}{2} G_N^2$$

Allora

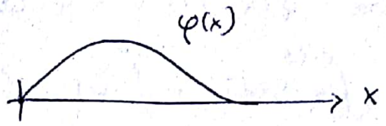
$$E = \sum_{N=1}^{\infty} \left(\frac{\dot{G}_N^2}{2} + \frac{\omega_N^2}{2} G_N^2 \right)$$

Somma di infiniti oscillatori armonici

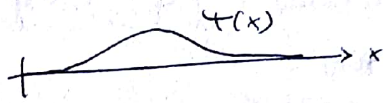
EQUAZIONE DELLE ONDE SULLA SEMIRETTA

Voglio risolvere il problema:

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x > 0 \\ U(0,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$



Osservo il seguente:

TEOREMA: Sia U soluzione dell'equazione delle onde sulla retta, con dato iniziale $\varphi(x)$ DISPARI. Allora

$U(x,t)$ è dispari $\forall t$ $\quad U(-x,t) = -U(x,t)$

DIMOSTRAZIONE:

$$U(-x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(-x+ct) + \varphi(-x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{-x-ct}^{-x+ct} \psi(s)\,ds = \text{inverto estremi di integrazione}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\varphi(-(x-ct)) + \varphi(-(x+ct))\Big) + \frac{1}{2c}\Big(-\int_{-(x-ct)}^{-(x+ct)} \psi(s)\,ds\Big) = \text{sia } y=-s,\ dy=-ds$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(-y)\,dy = -U(x,t) \quad \blacksquare$$

COROLLARIO: Nelle ipotesi precedenti: $U(x,t)|_{x=0} = U(0,t) = 0 \ \forall t$

esercizio: Trovare un'equazione per cui il teorema precedente non vale
→ equazione del Trasporto

Forte di questo Teorema, estendo il dominio a tutto $\mathbb{R}$, estendendo il dato iniziale in modo dispari:

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - c^2\tilde{U}_{xx} = 0 \\ \tilde{U}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \\ \tilde{U}_t(x,0) = \tilde{\psi}(x) \end{cases} \qquad \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & x \geq 0 \\ -\varphi(-x) & x < 0 \end{cases} \qquad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x) & x \geq 0 \\ \psi(-x) & x < 0 \end{cases}$$

$x \in \mathbb{R}$

$U(0,t) = 0 \ \forall t$ automaticamente verificato per il corollario precedente

Di questo problema conosco la soluzione:

$$\tilde{U}(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\tilde{\varphi}(x+ct) + \tilde{\varphi}(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)\,ds$$

e vorrei restringerla alle $x>0$ per avere $U(x,t)$, ma devo fare

ATTENZIONE: $x - ct$ può essere negativo

• ① per $x > ct$ $\tilde{U}(x,t) = U(x,t)$ senza alcun problema
in particolare $\tilde{\varphi}(x-ct) = \varphi(x-ct)$

② per $0 < x < ct$ invece $\tilde{\varphi}(x-ct) = -\varphi(ct-x)$, allora osservo che:

$$\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{\psi}(s)\,ds = \int_0^{x+ct} \psi(s)ds + \int_{x-ct}^{0} \tilde{\psi}(s)\,ds = \int_0^{x+ct}\psi(s)ds - \underbrace{\int_{x-ct}^{0}\psi(-s)ds}_{y=-s,\, dy=-ds} =$$

$$= \int_0^{x+ct}\psi(s)ds + \int_{ct-x}^{0}\psi(y)\,dy =$$

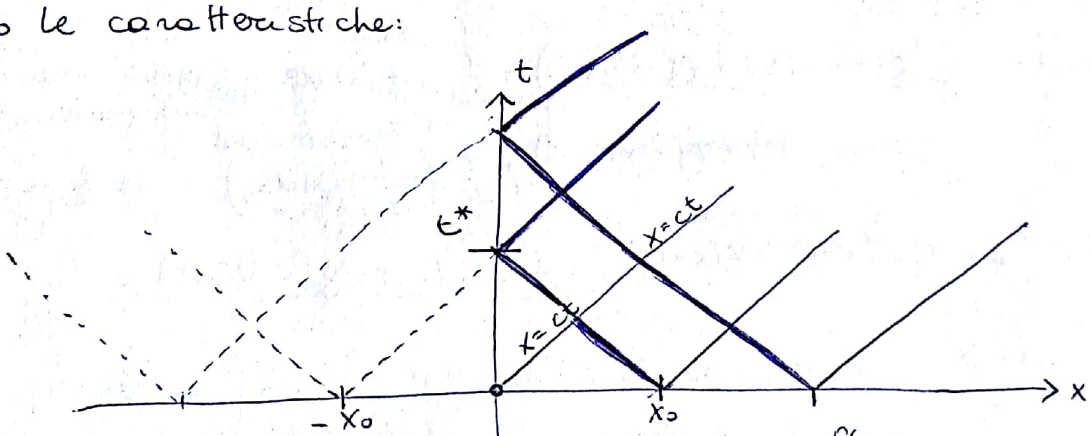
$$= \int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,ds$$

Quindi:

$$\boxed{U(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct) - \varphi(ct-x)\right) + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,ds}$$ in ②

③ per $x = ct$ le due soluzioni devono coincidere

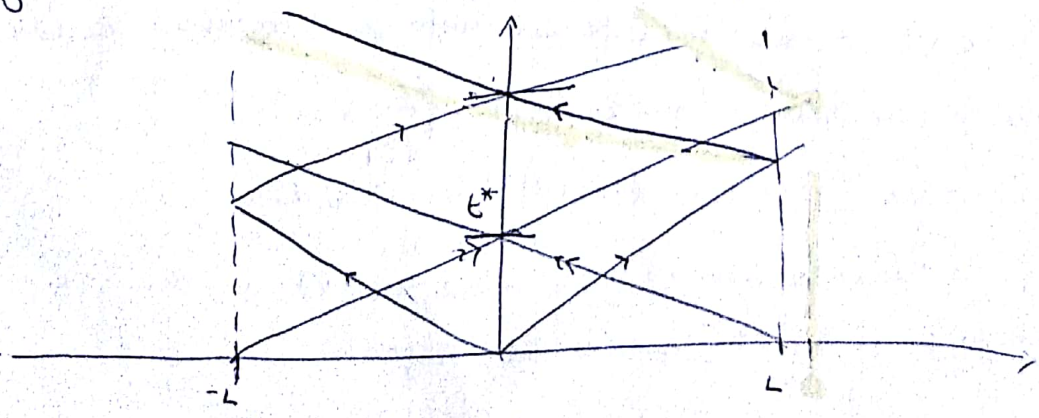
Valuto le caratteristiche:



OSS: Esiste un t^* oltre il quale si ha riflessione
$\Rightarrow$ le caratteristiche si trasformano (diventano la famiglia speculare

$X + ct = x_0 \longmapsto -(-x+ct) = -x_0$
fino a t^* dopo t^*

• Per un problema sul SEGMENTO $[0, L]$
scelgo estensione per PERIODICITA' del dato iniziale
ad ogni riflessione, scelgo la caratteristica che proviene dal settore opportuno



EQUAZIONE ONDE CON CONDIZIONI DI NEUMANN

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} U_x(0,t) = 0 \\ U_x(L,t) = 0 \\ 0 < x < L \end{cases}$$

Separazione variabili: $U(x,t) = Q(t)S(x)$ $\begin{cases} S'' = \alpha S \\ \ddot{Q} = \alpha c^2 Q \end{cases}$

$\alpha > 0$ $\begin{cases} S = Ae^{\sqrt{\alpha}x} + Be^{-\sqrt{\alpha}x} \\ S' = A\sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}x} - B\sqrt{\alpha}e^{-\sqrt{\alpha}x} \end{cases}$ $\begin{cases} S'(0) = 0 \\ S'(L) = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ e^{\sqrt{\alpha}L} & -e^{-\sqrt{\alpha}L} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0$

→ NON HA SOLUZIONI

(se $S'(0) \neq 0$, $S'(L) \neq 0$ il sistema ammette soluzioni)

$\alpha = 0$ $\begin{cases} S = Ax + B \\ S' = A \end{cases}$ $S'(0) = S'(L) = 0$

$\Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow \boxed{S(x) = B}$ $B = \frac{1}{\sqrt{L}}$ normalizz.

→ ESISTE AUTOVALORE NULLO
(spettro diverso a condizioni di Dirichlet)

$\alpha < 0$ $S = A\cos kx + B\sin kx$ $\alpha = -k^2$

$S' = -kA\sin kx + kB\cos kx$

$S'(0) = kB = 0 \Rightarrow B = 0$

$S'(L) = -kA\sin kL = 0 \rightarrow \sin kL = 0$ $kL = m\pi$

$\boxed{k = \frac{m\pi}{L}}$ $\boxed{S_m(x) = A_m\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}$ $A_m = \sqrt{\frac{2}{L}}$ normalizz.

$\alpha = 0$ $Q_0 = b_0 t + a_0$

$\alpha < 0$ $Q_m = a_m \cos\omega_m t + b_m \sin\omega_m t$ $\boxed{\omega_m = k_m c}$

$\alpha > 0$ No soluzioni

$$\boxed{U(x,t) = (\tilde{b}_0 t + \tilde{a}_0) + \sum_{m=1}^{\infty} Q_m S_m}$$ $(\tilde{b}_0, \tilde{a}_0) = \frac{1}{\sqrt{L}}(b_0, a_0)$

$\varphi = \tilde{a}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m S_m$, $\psi = \tilde{b}_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \omega_m S_m$

Scanned by CamScanner

CONDIZIONI DI PERIODICITÀ

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} \qquad \begin{cases} U(-L,t) = U(L,t) \\ U_x(-L,t) = U_x(L,t) \end{cases}$$

equazione onde su S^1

$U = QS$

$\underline{\alpha = 0}$ $\left.\begin{array}{l} S = Ax + B \\ S(-L) = S(L) \end{array}\right\} \Rightarrow S = B$

$\underline{\alpha < 0}$ $\alpha = -k^2$ $S = A\cos kx + B\sin kx$

$S' = -Ak\sin kx + kB\cos kx$

$S(L) = S(-L)$

$A\cancel{\cos kL} + B\sin kL = A\cancel{\cos kL} - B\sin kL$

$\Rightarrow B\sin kL = -B\sin kL$

$S'(L) = S'(-L)$

$-Ak\sin kL + \cancel{Bk\cos kL} = Ak\sin kL + \cancel{Bk\cos kL}$

$\underline{\text{OSS}}$: Non ho posto condizioni su A e B

$\Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$

$$\begin{cases} S_n = A_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ Q_n = a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t \end{cases}$$

$\rightarrow \boxed{\omega_n = c k_n}$

Esistono altri tipi di condizioni

- condizioni miste
- condizioni di Robin $\begin{cases} \gamma U(0,t) + \alpha U_x(0,t) = \varphi_R \\ \delta U(0,t) + \beta U_x(0,t) = \psi_R \end{cases}$

$\underline{\text{ESERCIZIO}}$:

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0 \\ U(0,t) = \alpha \\ U_x(L,t) = \beta \\ U(x,0) = \varphi(x) \\ U(x,0) = \psi(t) \end{cases}$$

$\underline{\text{OSS}}$: Se sommo a una soluzione una retta, è ancora una retta

$\rightarrow$ Sommo retta: $U_R = \left(\frac{\beta - \alpha}{L}\right)x + \alpha$

Definisco: $\tilde{U} = U - U_R$ (soddisfa $\tilde{U}_{tt} - c^2\tilde{U}_{xx} = 0$)

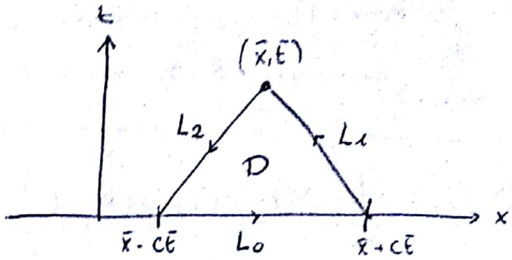
Modifico $\underline{\text{PbC}}$ per conoscere nuova funzione

$$\begin{cases} \tilde{U}(0,t) = U(0,t) - U_R(0,t) = 0 \\ \tilde{U}(L,t) = U(L,t) - U_R(L,t) = 0 \end{cases}$$

EQ. ONDE NON OMOGENEA (CON SORGENTI)

Dato il problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$



Fissato un punto $(\bar{x},\bar{t})$ le caratteristiche trasportano il dato iniziale di u, con una variazione pari a f

Sia D il cono del passato di $(\bar{x},\bar{t})$ con bordo $\partial D = L_0 \cup L_1 \cup L_2$ (orientato in senso antiorario). Integro ambo lati dell'equazione su D

$$\int_D dx\,dt\,(u_{tt} - c^2 u_{xx}) = \int_D dx\,dt\, f(x,t)$$

Per il primo membro voglio applicare il teorema di Green

$$\oint_{\partial D} A(x,t)\,dx + B(x,t)\,dt = \int_D dx\,dt\,\big(B_x(x,t) - A_t(x,t)\big)$$

$$\int_D dx\,dt\,(\underbrace{-c^2 u_x}_{B})_x - (\underbrace{-u_t}_{A})_t = \oint_{\partial D} (-c^2 u_x)\,dt + (-u_t)\,dx$$

Calcolo ora l'integrale su $\partial D = L_0 \cup L_1 \cup L_2$:

$$\oint_{\partial D} A\,dx + B\,dt = \underbrace{\int_{L_0} A\,dx + B\,dt}_{I_0} + \underbrace{\int_{L_1} A\,dx + B\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{L_2} A\,dx + B\,dt}$$

① Integrale su L_0: parametrizzo il segmento con la curva $\gamma(s) = (s,0)$ con $s \in [\bar{x} - c\bar{t}, \bar{x} + c\bar{t}]$

$$I_0 = \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} A\,dx + \cancel{\int_{L_0} B\,dt}^{\,0} = -\int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} u_t(s,0)\,ds = -\int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(s)\,ds$$

② Integrale su L_1: parametrizzo con la retta di equazione

$$(x - \bar{x}) = -c(t - \bar{t}) \Rightarrow dx = -c\,dt$$

$$I_1 = \int_{L_1} A(-c\,dt) + B\left(-\frac{dx}{c}\right) = \int_{L_1} +u_t c\,dt + c\,u_x\,dx =$$

$$= \int_{L_1} c\,du = c\,u(x,t)\Big|_{\partial L_1} = c\big(u(\bar{x},\bar{t}) - u(\bar{x}+c\bar{t},0)\big)$$

poiché L_1 connette $(\bar{x}+c\bar{t},0)$ a $(\bar{x},\bar{t})$

$$\underline{I_1 = c\,u(\bar{x},\bar{t}) - c\,\varphi(\bar{x}+c\bar{t})}$$

③ Integrale su L_2: analogamente, poiché L_2 connette $(\bar{x}-c\bar{t},0)$ a $(\bar{x},\bar{t})$:

$$\underline{I_2 = c\,u(\bar{x},\bar{t}) - c\,\varphi(\bar{x}+c\bar{t})}$$

Allora, unendo i pezzi trovo

$$\int_D d^2x\, f(x,t) = \int_{\bar{x}-c\bar{t}}^{\bar{x}+c\bar{t}} \psi(s)\,ds - c\big(\varphi(\bar{x}+c\bar{t}) + \varphi(\bar{x}-c\bar{t})\big) + 2c\, u(\bar{x},\bar{t})$$

cioe' $\forall (x,t)$

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds + \frac{1}{2c}\int_D dx\,dt\, f(x,t)}$$

Soluzione dell'equazione delle onde non omogenea

OSS: Se pongo $f(x,t) = 0$ trovo la soluzione precedente

NOTA: L'equazione delle onde ammette la simmetria di INVERSIONE TEMPORALE, a differenza dell'equazione del Trasporto
eq. Trasporto $t \to -t$ inverte pendenze delle caratteristiche e cambia anche il dato iniziale la soluzione non e' la stessa

BUONA POSITURA

- Def: Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\|\varphi\|_\infty := \max_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$
- Def: Sia $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\|f\|_{\infty,T} := \max_{x\in\mathbb{R},\, 0<t<T} |f(x,t)|$ oss: finita $\forall\, T$ finito (Non diverge)

TEOREMA: L'equazione delle onde gode di BUONA POSITURA ($\Box u = f$)

DIMOSTRAZIONE: Sia $u(x,t)$ soluzione dell'equazione delle onde (φ, ψ dati iniziali)
Innanzi tutto noto che la norma della soluzione u e' maggiorabile:

$$\|u(x,t)\|_{\infty,T} \le \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2c}\|\psi\|_\infty \cdot \underbrace{(2ct)}_{\text{lunghezza segmento di integrazione}} + \frac{1}{2c}\|f(x,t)\|_{\infty,T} \cdot \underbrace{(ct^2)}_{\substack{\text{Area del triangolo } D \\ (2ct\cdot t)\cdot 1/2}}$$

$$\le \|\varphi\|_\infty + \|\psi\|_\infty T + \frac{1}{2}\|f(x,t)\|_{\infty,T} T^2 \qquad (\forall\, T \ge 0)$$

Siano ora u_1 e u_2 due soluzioni del problema di Cauchy rispettivamente φ_1, ψ_1 e φ_2, ψ_2 (dati iniziali arbitrari). Valuto la norma della differenza

$$\|u_1 - u_2\|_{\infty,T} \le \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty + T\|\psi_1 - \psi_2\|_\infty + \frac{T^2}{2}\|f_1 - f_2\|_{\infty,T}$$

$$\le \delta\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right), \text{ dove } \delta = \max\{\|\varphi_1-\varphi_2\|, \|\psi_1-\psi_2\|, \|f_1 - f_2\|\}$$

Per l'arbitrarieta' della scelta dei dati iniziali, posso scegliere $\forall\, \varepsilon > 0$ dati iniziali tali che $\delta\left(1 + T + \frac{T^2}{2}\right) < \varepsilon$, allora:

$$\Rightarrow \|u_1 - u_2\|_{\infty,T} < \varepsilon \quad \blacksquare$$

INVARIANZA EQ. ONDE PER TRASFORMAZIONI LINEARI

Data $U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0$, definisco $s = ct$; così $U_{ss} - U_{xx} = 0$

Voglio trovare una trasformazione lineare di coordinate che rende invariata l'equazione:

$$\begin{pmatrix} s' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} \quad \text{t.c.} \quad U_{s's'} - U_{x'x'} = 0$$

Riscrivo l'operatore $\Box$ in funzione delle nuove coordinate

$$\begin{cases} s' = \alpha s + \beta x \\ x' = \gamma s + \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial s} = \dfrac{\partial x'}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial s'}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial}{\partial s'} = \gamma\dfrac{\partial}{\partial x'} + \alpha\dfrac{\partial}{\partial s'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial x'}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x'} + \dfrac{\partial s'}{\partial s}\cdot\dfrac{\partial}{\partial s'} = \delta\dfrac{\partial}{\partial x'} + \beta\dfrac{\partial}{\partial s'} \end{cases}$$

$$\Box = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \left(\gamma\frac{\partial}{\partial x'} + \alpha\frac{\partial}{\partial s'}\right)^2 - \left(\delta\frac{\partial}{\partial x'} + \beta\frac{\partial}{\partial s'}\right)^2 =$$

$$= (\gamma^2 - \delta^2)\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + (\alpha^2 - \beta^2)\frac{\partial^2}{\partial s'^2} + 2(\alpha\gamma - \beta\delta)\frac{\partial}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial s'} = -\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial s'^2}$$

Deve essere allora che:

$$\begin{cases} \gamma^2 - \delta^2 = -1 \\ \alpha^2 - \beta^2 = 1 \\ \alpha\gamma - \beta\delta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta^2 - \gamma^2 = \cosh^2\theta - \sinh^2\theta \\ \alpha^2 - \beta^2 = \cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi \\ \alpha\gamma - \beta\delta = \cosh\varphi\sinh\theta - \sinh\varphi\cosh\theta = \\ \quad = \underline{\sinh(\theta - \varphi) = 0} \end{cases}$$

La condizione è verificata da:

$$\underline{\theta = \varphi} \quad \text{(ad esempio)}$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} s' \\ x' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}}_{\text{Rotazione iperbolica}} \begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ L'equazione delle onde è invariante per <u>boost di LORENTZ</u>

$$\cosh\theta = \gamma, \quad \sinh\theta = -\gamma\beta \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

PRINCIPIO DI HUYGENS

Ogni punto del fronte d'onda al tempo t è sorgente per il fronte d'onda al tempo $t+\Delta T$

<u>OSS</u>: servono i punti sul BORDO della sfera, non i punti interni

⚠ Vale in dimensione 3, ma non in dimensione 2

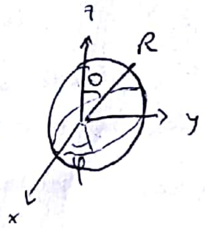
Per dimensioni superiori: le pari si comportano come 2 e le dispari come 3 (qualitativamente)

Dato il problema:

$$\begin{cases} U_{tt} - c^2 \nabla^2 U = 0 \\ U(\underline{x},0) = \varphi(\underline{x}) \\ U_t(\underline{x},0) = \psi(\underline{x}) \end{cases} \qquad \nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

→ Costruisco la soluzione
dipenderà solo dai dati sul bordo del cono causale
⇒ Spazio di dimensione $\underline{2}$

Voglio scrivere un'equazione per la MEDIA di U, su una sfera



$$\bar{U}(r,t) = \int_{|\underline{x}|=r} d^2x \; U(\underline{x},t) \cdot \frac{1}{4\pi r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi \cancel{r^2}} \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; \cancel{r^2} \sin\theta \; U(\underline{x},t)$$

$$\rightarrow \quad \underline{\bar{U}(r,t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; U(\underline{x},t)}$$

• Dimostro che $\overline{\nabla^2 U} = \nabla^2 \bar{U}$, $\nabla = \underbrace{\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r}_{R} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \sin\theta \, \partial_\theta}_{T} + \underbrace{\frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi^2}_{F}$

$$\overline{\nabla^2 U} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \, r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \; \nabla^2 U(r,\theta,\varphi) =$$

$$T = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \int_0^{\pi} d\theta \; \partial_\theta \left(\underline{\underline{\sin\theta \, U_\theta}}\right) = 0$$

$$F = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\pi} d\theta \frac{1}{\sin\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \; \partial_\varphi^2 U = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\sin\theta} \; U_\varphi \Big|_0^{2\pi} = 0$$

cerco soluzioni continue, quindi U_φ deve essere periodica

Allora:

$$\overline{\nabla^2 U} = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^{\pi} d\theta \, r^2 \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(U_{rr} + \frac{2}{r} U_r\right) = \frac{1}{\underline{4\pi r^2}} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right) r^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \; U}_{} =$$

$$= \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right) \bar{U}(r,t) = \nabla^2 \bar{U} \quad ■$$

Inoltre:

$$\overline{\partial_t^2 u} = \frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi} d\theta\, r^2 \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, u_{tt} = \partial_t^2\left(\frac{1}{4\pi r^2}\int_0^{\pi} d\theta\, r^2\sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, u\right) = \partial_t^2 \bar{u}$$

Allora:

$$0 = \overline{u_{tt} - c^2\nabla^2 u} = \overline{u_{tt}} - \overline{c^2\nabla^2 u} = (\bar{u})_{tt} - c^2\nabla^2\bar{u}\ , \quad \underline{\text{oss:}}\ \bar{u} = \bar{u}(r,t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{u}_{tt} - c^2\bar{u}_{rr} - \frac{2c^2}{r}\bar{u}_r = 0}$$

equazione per la media su una sfera di raggio r

→ NON è equazione delle onde

eq. di EULERO-POISSON-DARBOUX

dati iniziali:

$$\begin{cases} \bar{u}(r,0) = \bar{\varphi}(\underline{x}) \\ \bar{u}_t(r,0) = \bar{\psi}(\underline{x}) \end{cases}$$

$\bar{u}(0,t) = ?$

↳ $\underline{\text{oss:}}$ $r > 0$, quindi è un problema sulla semiretta, mi serve allora il valore al bordo

Il problema si può però mappare su un problema delle onde monodimensionale

→ definisco il campo accessorio

$$v(r,t) := r\,\bar{u}(r,t)$$

dati iniziali diventano:

Condizione di Dirichlet

$$v(r,0) = r\bar{\varphi}(r)\ , \quad v_t(r,0) = r\bar{\psi}(r)\ , \quad \underline{v(0,t) = 0}$$

L'equazione differenziale diventa:

$$\underline{v_{tt} - c^2 v_{rr} = 0}$$

equazione onde sulla semiretta

Allora la soluzione è

$$v(r,t) = \frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} ds\, s\bar{\psi}(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\varphi}(s)\, ds$$

$\underline{\text{oss:}}$

$$\frac{1}{2}\Big((ct+r)\bar{\varphi}(ct+r) + (ct-r)\bar{\varphi}(ct-r)\Big) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{ct-r}^{ct+r}\bar{\varphi}(s)\cdot s\, ds$$

$\underline{\text{oss:}}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{A(x)}^{B(x)} ds\, f(s) = B' f(B) - A' f(A) \quad (*)$$

Per $\bar{u}$ la soluzione è $\bar{u} = \frac{v(r,t)}{r}$

Per valutare una funzione in un punto, faccio la media in una piccola sfera attorno al punto

$$\underline{u(\underline{0},t)} = \lim_{r\to 0}\bar{u}(r,t) = \lim_{r\to 0}\frac{v(r,t)}{r} = \underline{v_r(r,t)} \qquad \text{perché } v(0,t) = 0$$

$$\underline{u(\underline{0},t) = v_r(0,t)}$$

ossia:

$$U_r(0,t) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2c}\int_{ct-r}^{ct+r} ds\, s\bar{\Psi}(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\varphi}(s)\, ds\right)\right]\Bigg|_{r=0} =$$

$$= \frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial r}\left[\int_{ct-r}^{ct+r} ds\, s\bar{\Psi}(s) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\int_{ct-r}^{ct+r} s\bar{\varphi}(s)\, ds\right]\Bigg|_{r=0} =$$

Poiché: $\frac{\partial}{\partial r}\int_{F(r)}^{G(r)} h(s)\,ds = h(\cdot)\,G'(r) - h(\cdot)\,F'(r)$

$$= \left(\frac{1}{2c}\left[s\bar{\Psi}(s)\Big|_{ct+r} + s\bar{\Psi}(s)\Big|_{ct-r}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[s\bar{\varphi}(s)\Big|_{ct+r} + s\bar{\varphi}(s)\Big|_{ct+r}\right]\right)\Bigg|_{r=0} =$$

$$= \left(\frac{1}{2c}\left[(ct+r)\bar{\Psi}(ct+r) + (ct-r)\bar{\Psi}(ct-r)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[(ct+r)\bar{\varphi}(ct+r) + (ct-r)\bar{\varphi}(ct-r)\right]\right)\Bigg|_{r=0} =$$

$$= \frac{1}{2c}\left[ct\,\bar{\Psi}(ct) + ct\,\bar{\Psi}(ct)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[ct\bar{\varphi}(ct) + ct\bar{\varphi}(ct)\right] =$$

$$= \underline{t\bar{\Psi}(ct) + \frac{\partial}{\partial t}\, t\bar{\varphi}(ct)}$$

Ricordo ora che, per definizione $\bar{\Psi}(r) = \int_{|x|=r} d^2\underline{x}\, \Psi(\underline{x}) \cdot \frac{1}{4\pi r^2}$

Allora:

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x|=ct} d^2\underline{x}\, \Psi(\underline{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|x|=ct} d^2\underline{x}\, \varphi(\underline{x})\right)$$

Per un generico punto x, pongo

$W(y,t) := u(\underline{y}-\underline{x}, t)$, $w(\underline{y},0) := \varphi(\underline{y}-\underline{x})$, $w_t(\underline{y},0) := \Psi(\underline{y}-\underline{x})$

trovo allora che:

$$\boxed{u(\underline{x},t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\underline{x}|=ct} d^2\underline{x}\, \Psi(\underline{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\underline{x}|=ct} d^2\underline{x}\, \varphi(\underline{x})\right)}$$

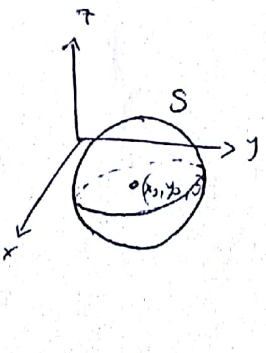
soluzione generale equazione delle onde in 3 dimensioni

<u>OSSERVAZIONE</u>: per conoscere la forma della soluzione al tempo t sono necessari e sufficienti i valori della soluzione sulla sfera centrata in ogni punto x

$\to$ PRINCIPIO DI HUYGENS

Ripetendo lo stesso ragionamento in due dimensioni, non avvengono molte cancellazioni

Un metodo per trovare la soluzione in due dimensioni è restringere la soluzione in 3 dimensioni, considerando una soluzione che non dipende da una coordinata. Allora

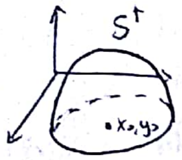


$$\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$$

Sia $(x_0, y_0, 0)$ il centro della sfera ($z_0 = 0$ senza perdita di generalità)

Il dominio di integrazione è $\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2=c^2t^2\} = S$

$$u(x_0,y_0,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_S d^2x\, \psi(x,y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_S \varphi(x,y)\, d^2x\right) =$$



$$= \frac{1}{4\pi c^2 t}\cdot 2\int_{S^+} d^2x\, \psi(x,y) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi c^2 t^2}\cdot 2\int_{S^+}\varphi(x,y)\, d^2x$$

dove $S^+ = \left\{ z = \sqrt{-(x-x_0)^2 \ (y-y_0)^2 + c^2t^2} \right\}$ la calotta superiore

Eseguo l'integrale di superficie: la misura d^2x è

$$d^2x = \left\| \begin{pmatrix}1\\0\\z_x\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\z_y\end{pmatrix} \right\| dx\,dy = \left\| \begin{pmatrix}-z_x\\-z_y\\1\end{pmatrix} \right\| dx\,dy = \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\; dx\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{z^2} + \frac{(y-y_0)^2}{z^2} + 1}\; dx\,dy = \sqrt{\frac{ct^2}{z^2}}\; dx\,dy$$

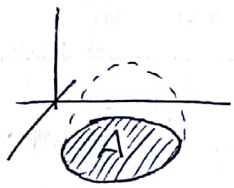
$$= \frac{ct\, dx\, dy}{\sqrt{ct^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}}$$

<u>OSSERVAZIONE</u>: Il dominio x, y sul quale devo integrare è

$$A = \{(x,y) \text{ t.c. } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2 \leq (ct)^2\}$$

in 2 dimensioni NON si integra sul BORDO, ma sull'<u>interno</u> del cerchio su uno spazio che ha la stessa dimensione dello spazio ambiente $\mathbb{R}^2$

<u>NON VALE PRINCIPIO DI HUYGENS</u> IN 2D



UNICITA' DELLA SOLUZIONE dell'equazione delle onde

Sia dato il seguente problema e siano u_1 e u_2 soluzioni distinte

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \nabla^2 u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

Anche $W = u_1 - u_2$ è soluzione dell'equazione, ma con i dati iniziali

$$\begin{cases} W(x,0) = 0 \\ W_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Mostro che $W \equiv 0$ tramite la conservazione dell'energia

calcolo la potenza: $w_t(w_{tt} - c^2 \nabla^2 w) = 0$

$$w_t w_{tt} - c^2 w_t w_{xx} - c^2 w_t w_{yy} - c^2 w_t w_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{(w_t)^2}{2} - c^2\Big((u_t u_x)_x - u_{tx}u_x + (u_t u_y)_y - u_{ty}u_y + (u_t u_z)_z - u_{tz}u_z\Big) =$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{w_t^2}{2} + c^2\frac{|\nabla w|^2}{2}}_{\mathcal{E}}\Big)_t - c^2 \nabla\cdot(\underbrace{w_t \nabla w}_{\underline{J}}) = 0$$

eq. continuità $\quad \mathcal{E}_t - c^2 \underline{\nabla}\cdot\underline{J} = 0$

quindi:

$$0 = \int_V d^3x\, \mathcal{E}_t - c^2\int_V d^3x\, \underline{\nabla}\cdot\underline{J} = \int_V d^3x\, \mathcal{E}_t - c^2 \cancel{\int_{\partial V} \underline{J}\cdot\hat{n}\, d\Sigma}^{\,0} =$$

$$= \int d^3x\, \mathcal{E}_t$$

Perché J tende a zero all'infinito più rapidamente di ogni potenza

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E = \int_V d^3x\, \mathcal{E}_t = 0 \quad \text{conservazione dell'energia}$$

L'energia assume ad ogni tempo il valore INIZIALE, ma

$$\mathcal{E}(0) = \frac{1}{2}w_t^2(0,x) + \frac{1}{2}|\nabla w(0,x)|^2 = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\cdot\nabla\cdot 0 = 0$$

poiché $\mathcal{E}(t)$ è somma di due termini quadrati ed è nulla, devono essere nulli entrambi i termini, in particolare:

$\nabla W(x,t) = 0 \Rightarrow W$ è costante sullo spazio, ma poiché

$W(0,x) = 0$ si ha

$$\underline{W \equiv 0} \Rightarrow u_1 \equiv u_2 \quad \blacksquare$$