

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI
MILANO BICOCCA



TESI DI LAUREA TRIENNALE IN FISICA

Solitoni topologici in teorie di campo classiche

CANDIDATO:
MATRICOLA:

Massimo FRIGERIO
789933

RELATORE:

Alberto ZAFFARONI

Anno Accademico 2016/2017

Indice

1	DEFINIZIONE DI SOLITONE E SOLITONE TOPOLOGICO	2
2	CASO MONODIMENSIONALE PER UN CAMPO SCALARE	3
2.1	Emergenza dei solitoni topologici dalle condizioni al contorno	3
2.2	Analogie con i sistemi di particelle	4
2.3	Kink e anti-kink	6
2.3.1	Corrente topologica e carica topologica	6
2.3.2	Espressione analitica per kink e anti-kink	7
2.3.3	Forza tra due kink	9
2.4	Solitoni di tipo sine-Gordon	10
3	CASO DI n CAMPI SCALARI IN d DIMENSIONI SPAZIALI	11
3.1	In una dimensione spaziale	11
3.2	In due o più dimensioni spaziali	11
3.2.1	Teorie con un insieme di vuoto numerabile	13
3.2.2	Teorie con una varietà differenziabile di stati di vuoto	13
3.3	Il teorema di Derrick	14
4	SOLITONI TOPOLOGICI IN TEORIE DI GAUGE	18
4.1	Vortici di gauge in due dimensioni spaziali	18
4.1.1	Un esempio di vortici di gauge in laboratorio: i superconduttori del II tipo	21
4.2	Monopoli in tre dimensioni spaziali	22
4.2.1	Monopoli di Dirac e aspetti generali	22
4.2.2	Monopoli di 't Hooft-Polyakov e il caso non-abeliano	25
A	AZIONI DI GRUPPO	29
B	CENNI DI TOPOLOGIA	30
C	OMOTOPIA	31
C.1	Gruppi di omotopia	33
D	CENNI SULLE TEORIE DI GAUGE CLASSICHE	36
D.1	Teorie di gauge abeliane: l'elettrodinamica classica	36
D.1.1	Elettrodinamica classica in due dimensioni spaziali	37
D.2	Teorie di gauge non-abeliane	37
	Riferimenti bibliografici	40

1 DEFINIZIONE DI SOLITONE E SOLITONE TOPOLOGICO

Il nome *solitone* è usato in svariati contesti, in fisica ed in matematica, per descrivere oggetti differenti tra loro: nell'ambito della fisica matematica si parla di solitoni come particolari soluzioni di equazioni differenziali non-lineari, ad esempio la famosa equazione di Korteweg - De Vries, in fisica applicata si studiano i solitoni ottici, interessanti ad esempio nella propagazione della luce in fibre ottiche, in fluidodinamica si osservano comportamenti solitonici in perturbazioni vorticosi, infine in teoria dei campi si studiano solitoni intesi come particolari configurazioni di minimo dell'energia associata al campo. Basandosi sulle caratteristiche comuni di questi oggetti, di per sé piuttosto diversi, è possibile dare la seguente definizione approssimativa di solitone¹:

Definizione 1.0.1. *Un **solitone** è una perturbazione (di un mezzo o di un campo) che non è singolare², è caratterizzata da una dimensione finita, da un'energia finita, e che, in assenza di altre perturbazioni, propaga inalterata la propria densità di energia³.*

Tale definizione richiama naturalmente le ben note proprietà dell'equazione delle onde; tuttavia è possibile trovare soluzioni solitoniche anche per alcune equazioni non lineari, come anticipato, per le quali, esprimendoci con il linguaggio della meccanica ondulatoria, gli effetti dissipativi e gli effetti dispersivi si controbilanciano permettendo la propagazione inalterata della perturbazione.

I solitoni sono particolarmente interessanti in teoria dei campi poiché presentano l'opportunità di ricavare risultati non scontati e rilevanti nelle applicazioni, ad un livello classico, permettendo di dedurre l'esistenza di comportamenti particellari per alcuni campi anche prima che questi vengano quantizzati. La presente trattazione si concentra su una particolare sottoclasse dei solitoni delle teorie di campo classiche, quella dei **solitoni topologici**⁴:

Definizione 1.0.2. *Data una teoria di campo classica per il campo ϕ descritta da una densità lagrangiana \mathcal{L} , si definisce **solitone topologico** una qualsiasi configurazione del campo ϕ_s che rispetti le seguenti proprietà:*

1. ϕ_s deve essere un minimo dell'energia, in particolare deve essere una soluzione delle equazioni del moto con un'energia finita e non nulla.
2. ϕ_s deve essere topologicamente distinta dagli **stati di vuoto** della teoria, che qui definiamo come gli stati ϕ_0 che hanno densità di energia nulla ovunque: in altre parole, non deve poter essere trasformata in modo continuo in un vuoto della teoria senza attraversare configurazioni di energia infinita.

Vedremo che le caratteristiche topologiche di tali soluzioni, che verranno in seguito chiarite e declinate, danno origine a quantità conservate a prescindere dalle equazioni del moto, dette *cariche topologiche*, le quali conferiscono a loro volta stabilità ai solitoni topologici, poiché impediscono a questi di decadere in uno stato di vuoto.

¹La definizione è in accordo con ciò che *Rajaraman* ([6] Cap. 2, sez. 2.2) definisce *solitary waves*. Viceversa *Rajaraman* chiama *solitoni* solo quelle *solitary waves* che non vengono alterate da una mutua collisione, a meno di un fattore di fase; questa ulteriore richiesta, tuttavia, è molto stringente e spesso difficile da verificare, pertanto è comune chiamare solitone una generica onda solitaria, con leggero abuso di linguaggio, come del resto fa *Rajaraman* stesso dal Cap. 3 in poi.

²Con questo si può intendere che sia continua, o talvolta anche differenziabile, a seconda del contesto specifico. Il requisito imprescindibile è che non presenti divergenze.

³Anche qualora le equazioni del moto da essa rispettate descrivano fenomeni dissipativi. In letteratura si trova spesso la richiesta più stringente che sia l'intera perturbazione a propagarsi inalterata, ma questo escluderebbe dalla definizione alcuni casi che qui vorremmo invece considerare solitoni.

⁴In accordo con *Percacci* ([4] inizio sez. 1)

2 CASO MONODIMENSIONALE PER UN CAMPO SCALARE

2.1 Emergenza dei solitoni topologici dalle condizioni al contorno

Si consideri una generica densità lagrangiana Lorentz-invariante per un campo scalare reale in $(1+1)$ dimensioni⁵ $\phi(t, x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - U(\phi) \quad (1)$$

Si assuma inoltre che $U(\phi)$, che chiameremo d'ora in avanti *potenziale*, sia limitato dal basso e, senza perdita di generalità, che il suo valore minimo U_{min} sia zero⁶. In analogia con la scrittura $L = T - V$ d'uso in meccanica classica, si può separare la densità lagrangiana \mathcal{L} in due termini che integrati nelle variabili spaziali danno:

$$T[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \phi)^2 dx$$

$$E_s[\phi] = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + U(\phi) dx$$

Chiameremo $T[\phi]$ *energia cinetica* e $E_s[\phi]$, indipendente dalle derivate temporali, *energia statica*; si noti che quest'ultima si distingue dall'energia potenziale totale per un termine che dipende dalle derivate spaziali del campo e al quale ci riferiremo chiamandolo *energia elastica*. L'azione \mathcal{S} si scrive:

$$\mathcal{S} = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L} dt = \int_{t_a}^{t_b} (T[\phi] - E_s[\phi]) dt$$

dove le condizioni ai bordi prevedono di specificare il campo ϕ in tutti i punti del dominio spaziale agli istanti iniziale e finale t_a e t_b .

Nello studio di una teoria di campo, per ricavare l'evoluzione temporale si estremizza il funzionale azione; nel caso specifico descritto dalla lagrangiana (1) si ottiene, dall'equazione di Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad \implies \quad \partial^\mu \partial_\mu \phi = \partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = -\frac{dU(\phi)}{d\phi}$$

È utile esaminare innanzitutto i casi più semplici, corrispondenti a configurazioni di campo statiche, ovvero indipendenti dal tempo, ed in tal caso l'estremizzazione dell'azione equivale ovviamente alla minimizzazione dell'energia stazionaria, ottenuta risolvendo l'equazione sopra scritta nel caso in cui le derivate temporali siano nulle:

$$\partial_x^2 \phi = \frac{dU(\phi)}{d\phi} \quad (2)$$

Affinché ad una configurazione di campo ϕ corrisponda un'energia statica finita prima ancora che minima, tuttavia, questa deve tendere asintoticamente ad uno dei vuoti della teoria, ovvero ad uno dei campi costanti $\varphi = c$ che annullano l'energia potenziale, al tendere all'infinito della variabile spaziale:

$$|E_s(\phi)| < +\infty \quad \implies \quad \phi \rightarrow c_{\pm} \quad \text{per} \quad x \rightarrow \pm\infty \quad \text{t.c.} \quad U(c_{\pm}) = 0 \quad (3)$$

⁵Una dimensione spaziale ed una temporale. La convenzione metrica adottata da qui in poi è: $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ con le ovvie modifiche nei casi con dimensioni spaziali $d \neq 3$.

⁶Per qualsiasi potenziale limitato dal basso è possibile porre a zero il valor minimo aggiungendo una costante alla lagrangiana e quindi senza alterare le equazioni del moto.

Distinguiamo allora due possibilità:

1. *Il potenziale U ha un solo minimo*: in questo caso una soluzione della (2) che rispetta la condizione (3) è certamente quella banale di campo costante e pari al minimo. Poiché tale minimo è unico, qualsiasi altra configurazione ad energia statica finita può essere ottenuta da quella banale per aggiunta di un generico campo ψ che tenda a zero all'infinito in modo sufficientemente rapido, quindi tutte le configurazioni possibili sono omotope.
2. *Il potenziale U ha più minimi distinti*⁷: iniziamo col notare che se U è polinomiale, dovendo essere limitato dal basso, questo secondo caso si può verificare solo per U di grado pari e ≥ 4 . Avendo a disposizione più minimi distinti, tra le soluzioni della (2) che rispettano la (3), oltre a quelle costanti, avremo anche quelle per cui:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = c_1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = c_2$$

con $c_1 \neq c_2$ tali che $U(c_1) = U(c_2) = 0$: sono i solitoni topologici della teoria. Questi campi non possono essere trasformati in modo continuo nei campi costanti, poiché ciò comporterebbe configurazioni intermedie che effettuino il cambio di comportamento asintotico per le quali il comportamento all'infinito non coincide con alcuno stato di vuoto e pertanto avrebbero energia statica infinita.

Il numero di configurazioni di minimo dell'energia statica non equivalenti tra loro, ovvero non trasformabili l'una nell'altra, è quindi, al più, il quadrato del numero di zeri distinti di U . In linguaggio topologico, detto \mathcal{Q} lo spazio dei campi che rispettano la condizione (3), si avrà che $\pi_0(\mathcal{Q})$, l'insieme delle componenti connesse per archi⁸ di \mathcal{Q} , è costituito da $n \times n$ settori del tipo:

$$\mathcal{Q}_{ij} = \left\{ \phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = c_i \wedge \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = c_j \right\}$$

$$U(c_i) = U(c_j) = 0 \quad i, j = \{1, \dots, n\}$$

Cogliamo dunque un primo indizio di un legame stretto tra i solitoni e la topologia dello spazio delle configurazioni \mathcal{Q} della teoria in esame. É forse utile precisare che alcuni dei settori connessi per archi \mathcal{Q}_{ij} in cui si divide lo spazio delle configurazioni potrebbero non contenere alcun elemento, poiché non abbiamo provato che per ogni comportamento asintotico sia sempre possibile trovare soluzioni ad energia statica finita.

2.2 Analogie con i sistemi di particelle

L'equazione (2) consente anche un'analogia con il moto di una particella: corrisponde all'equazione di Newton per un punto materiale in un potenziale $-U$, immaginando che la posizione della particella sia descritta dal numero reale ϕ e che la coordinata temporale di tale sistema sia data dalla variabile x da cui dipende ϕ ⁹; l'energia statica, invece, corrisponde all'azione associata al moto della particella. Tale analogia permette di trarre parecchie conclusioni: se U ha un solo minimo allora l'unica traiettoria fisica per la particella che si muove nel potenziale $-U$ e che parte dal punto di massimo e vi ritorna è quella costante, che estremizza anche l'azione e quindi corrisponde ad un minimo banale dell'energia statica del campo, analogamente al primo

⁷Ci limitiamo a considerare i casi in cui il numero dei minimi di U sia al più numerabile.

⁸Poiché si parla di deformare un campo nell'altro in modo continuo e ciò corrisponde a cammini continui in \mathcal{Q} , è veramente necessario richiedere la connessione per archi, che è in genere più una proprietà topologica più restrittiva della semplice connessione.

⁹Ricordando che la variabile temporale del campo è soppressa perché si tratta di soluzioni statiche.

dei due casi analizzati sopra.

Viceversa, supponiamo che U abbia tre minimi distinti, per fissare le idee.

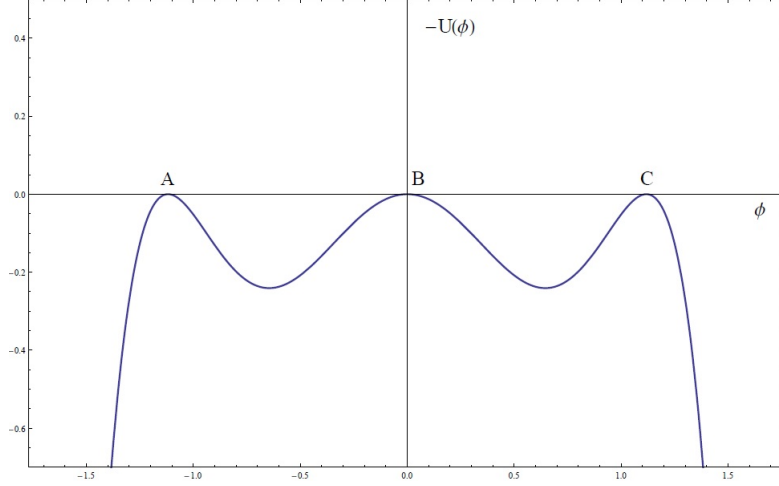


Figura 1: Potenziale $-U(\phi)$ a tre massimi per la particella.

Oltre alle tre orbite stazionarie e degeneri che corrispondono ad avere la particella ferma in A , B o C , sono possibili altre quattro orbite critiche: quella in cui la posizione ϕ della particella tende asintoticamente ad A al tendere a $-\infty$ del tempo e a B al tendere a $+\infty$ del tempo, l'equivalente tra i punti B e C ed infine le due orbite corrispondenti a quelle appena citate percorse in verso opposto.

Poiché i tre massimi di $-U(\phi)$ sono equipotenziali, è inoltre ovvio che una particella che parta dal punto A nell'infinito passato non potrà mai arrivare a C : ha energia appena sufficiente a raggiungere asintoticamente B . Questo ci permette di dire, invertendo l'analogia, che per campi scalari in una dimensione spaziale soggetti ad un potenziale con n minimi degeneri *non sono realizzabili* $(n^2 - n)$ *solitoni topologici*¹⁰, come suggeriva l'analisi preliminare, *ma solo* $2(n - 1)$ tra minimi adiacenti.

Moltiplicando ambo i lati della (2) per $\partial_x \phi$ ed integrando in x si ottiene l'equivalente del teorema del viriale per la particella che simula il sistema:

$$\begin{aligned} \int \partial_x \phi \partial_x^2 \phi \, dx &= \int \partial_x \phi \frac{dU(\phi)}{d\phi} \, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 \, dx = \int \frac{dU(\phi)}{dx} \, dx \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 = U(\phi) \end{aligned} \quad (4)$$

dove la costante di integrazione è nulla per la condizione (3). L'equazione (4), detta anche equazione di Bogomolny, permette di ricavare una soluzione implicita dell'equazione differenziale (2) con il metodo della quadratura, infatti si ha:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{d\tilde{\phi}}{\sqrt{2U(\tilde{\phi})}} \quad (5)$$

che, data la forma esplicita di $U(\phi)$, può essere risolta ed invertita per calcolare la forma esplicita di $\phi(x)$.

¹⁰Occorre sottrarre n da n^2 perché stiamo contando solo i solitoni topologici, ovvero i minimi non banali.

2.3 Kink e anti-kink

Consideriamo ora un esempio di lagrangiana covariante a vista per un campo scalare in $(1+1)$ dimensioni¹¹:

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2 \quad (6)$$

Il potenziale:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2 = -\frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^4 + \eta^4) \quad , \quad m := \eta \sqrt{\lambda} \quad (7)$$

è definito positivo, di quarto grado ed ha due minimi distinti, $\phi_1 = -\eta$ e $\phi_2 = +\eta$, pertanto ci aspettiamo solitoni topologici. La lagrangiana (6) è anche invariante per trasformazioni del tipo $\phi \rightarrow -\phi$, ovvero per simmetria interna corrispondente al gruppo ciclico di ordine due, \mathbb{Z}_2 : in particolare, ciascuno dei due minimi del potenziale è trasformato nell'altro da tale simmetria. Poiché gli stati di vuoto non sono invarianti per la simmetria esibita dalla lagrangiana questa teoria presenta una *rottura spontanea della simmetria*.

Applicando le equazioni di Euler-Lagrange, si ottiene:

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi = -\partial_\phi V(\phi) = -\lambda \phi (\phi^2 - \eta^2)$$

che nel caso stazionario diventa:

$$\partial_x^2 \phi = \lambda \phi (\phi^2 - \eta^2) \quad (8)$$

Evidentemente i campi costanti $\phi_1 = -\eta$ e $\phi_2 = +\eta$ sono soluzioni; a partire da queste si possono creare degli stati eccitati del tipo:

$$\phi'_{1,2} = \phi_{1,2} + \psi = \pm\eta + \psi$$

dove ψ è un campo di eccitazione che tende a zero a $\pm\infty$ in x in modo sufficientemente rapido da garantire un'energia stazionaria finita a $\phi'_{1,2}$: queste eccitazioni, quantizzate, corrispondono ai *mesoni* della teoria.

Avremo poi due soluzioni stazionarie, ϕ_3 e ϕ_4 , con un comportamento asintotico misto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_3 &= -\eta & \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_3 &= +\eta \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_4 &= +\eta & \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_4 &= -\eta \end{aligned}$$

Tali configurazioni prendono il nome, rispettivamente, di **kink** e **anti-kink**.

2.3.1 Corrente topologica e carica topologica

Prima di calcolarne la forma analitica notiamo che, come era stato anticipato, ϕ_1 , ϕ_2 , ϕ_3 e ϕ_4 sono minimi dell'energia stazionaria *non trasformabili l'uno nell'altro* poiché una qualunque trasformazione continua da una delle quattro configurazioni ad un'altra comporterebbe un cambio continuo del comportamento asintotico, proibito da una barriera energetica infinita. Esiste un altro modo di esprimere l'impossibilità per kink e anti-kink di decadere negli stati di vuoto, basato sulla conservazione della carica associata alla corrente:

$$j_T^\mu = \frac{1}{2\eta} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \quad (9)$$

¹¹Per kink e anti-kink vedasi *Vachaspati* ([9], Cap.1), *Rajaraman* ([6] Cap.2, Sez. 2.3), *Percacci* ([4] Sez. 1.1). Quest'ultimo, tuttavia, usa la convenzione metrica opposta.

dove $\epsilon^{\mu\nu}$ è il tensore totalmente antisimmetrico di rango due in due dimensioni. La (9) è detta **corrente topologica** e, a differenza delle correnti di Noether generate da simmetrie continue della lagrangiana, è conservata *indipendentemente dalle equazioni del moto*:

$$\partial_\mu j_T^\mu = \frac{1}{2\eta} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} \phi = 0$$

la corrispondente carica conservata, detta **carica topologica**, è data da:

$$Q_T = \int j_T^0 dx = \frac{1}{2\eta} \lim_{x \rightarrow +\infty} [\phi(x) - \phi(-x)]$$

La corrente topologica, a prima vista, può sembrare priva di contenuto fisico di interesse: la quantità definita dalla (9) è conservata indipendentemente dalla teoria e dal campo scalare ϕ . Tuttavia, calcolando i valori della carica topologica per le quattro soluzioni dell'equazione del moto (8), troviamo:

$$Q_T(\phi_1) = Q_T(\phi_2) = 0 \quad Q_T(\phi_3) = 1 \quad Q_T(\phi_4) = -1$$

ovvero la carica topologica contiene effettivamente informazioni sulle proprietà topologiche delle soluzioni oltre a fornire una spiegazione, in termini di legge di conservazione, dei decadimenti proibiti per kink e anti-kink.

2.3.2 Espressione analitica per kink e anti-kink

Una possibilità per calcolare esplicitamente $\phi_3(x)$ e $\phi_4(x)$ è risolvere direttamente l'equazione del moto stazionaria (8). Proponiamo tuttavia un'alternativa che porta a conti più semplici sfruttando la formula di quadratura (5) ricavata in precedenza dall'equazione di Bogomolny:

$$x - x_0 = \pm \int_{\phi(x_0)}^{\phi(x)} \frac{\sqrt{2} d\tilde{\phi}}{\sqrt{\lambda(\tilde{\phi}^2 - \eta^2)}} = \pm \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi}{\varphi^2 - 1} \quad \varphi := \frac{\phi}{\eta}$$

Risolvendo l'integrale noto e ricordando che $m^2 = \lambda\eta^2$, si giunge a:

$$x - x_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{m} \left[\tanh^{-1}(\varphi(x)) - \tanh^{-1}(\varphi(x_0)) \right]$$

Poiché ϕ_3 passa da $-\eta$ a $+\eta$ in modo continuo, esisterà certamente un punto x_0 tale che $\varphi(x_0) = \phi_3(x_0) = 0$, e lo stesso vale per ϕ_4 . Scegliendo così x_0 , si ha:

$$\varphi(x) = \pm \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]$$

e quindi, passando di nuovo a ϕ e tenendo conto dei comportamenti asintotici:

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \\ \phi_4(x) &= -\frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right] \end{aligned} \tag{10}$$

che sono le forme esplicite di kink e anti-kink in una dimensione.

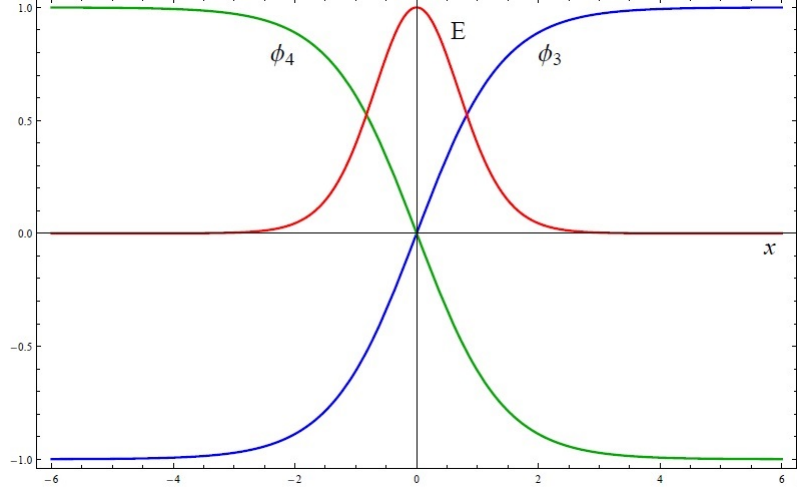


Figura 2: Kink, anti-kink e relativa densità di energia con $m = \lambda = 1$ e $x_0 = 0$.

La Figura 2. mostra il grafico del kink in blu, dell'anti-kink in verde ed infine, in rosso, la loro densità di energia \mathcal{E} ¹², definita come l'integranda dell'energia statica:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \partial_x^2 \phi + V(\phi) = \frac{m^4}{2\lambda \cosh^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]} \quad (11)$$

Come si può notare, il parametro x_0 rappresenta proprio il centro del kink e la densità di energia è fortemente localizzata in un intorno di tale punto. Inoltre ϕ_3 e ϕ_4 corrispondono ad un'infinita famiglia di soluzioni, al variare della posizione del centro x_0 , in virtù dell'invarianza per traslazioni della lagrangiana (6) e della corrispondente energia statica; poiché la lagrangiana è anche invariante per trasformazioni di Lorentz, ne segue che eseguendo un boost sulle soluzioni statiche troviamo due famiglie continue, di kink e anti-kink, in moto relativo uniforme:

$$\phi'_{3,4} = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x - x_0) - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right] \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad (c = 1) \quad (12)$$

Al kink è possibile assegnare una *lunghezza caratteristica* (o *dimensione del solitone*) l , determinata dall'inverso del coefficiente che rende adimensionale l'argomento della tangente iperbolica¹³, che quantifica la regione in cui il campo del kink è apprezzabilmente distinto dai vuoti:

$$l = \frac{1}{m} = \frac{1}{\eta\sqrt{\lambda}} \quad (13)$$

e corrisponde anche alla larghezza tipica della densità di energia. La costante m è invece detta *massa del solitone*¹⁴. Il kink minimizza l'energia stazionaria assumendo una lunghezza caratteristica (o, inversamente, una massa) determinata da un compromesso tra l'energia potenziale $V(\phi)$, la quale diminuisce all'avvicinarsi di ϕ agli asintoti, e quindi al diminuire di l , e l'energia elastica, che diminuisce al diminuire della derivata del kink in zero e dunque all'aumentare di l .

Si può infine facilmente notare che le soluzioni boostate equivalgono a dei kink di lunghezza contratta di un fattore $\sqrt{1 - v^2}$ rispetto alla lunghezza a riposo l , e quindi, per la (13), di massa aumentata del reciproco dello stesso fattore, in accordo con la relatività ristretta e con il comportamento atteso per la densità di energia e le dimensioni di una particella fisica.

¹²In realtà moltiplicata per due nella figura per comodità di visualizzazione.

¹³a meno di un fattore $\sqrt{2}$ che *Percacci* e *Rajaraman* omettono, mentre *Vachaspati* mantiene.

¹⁴Per giustificare questo nome si può vedere che sviluppando la lagrangiana (6) al secondo ordine in ϕ si ricavano delle equazioni del moto di Klein-Gordon il cui termine di massa è proporzionale a m .

2.3.3 Forza tra due kink

Prima di passare ad altre teorie, vorremmo poter ricavare qualche risultato dinamico per la teoria di quarto grado (6) a partire dalle soluzioni statiche calcolate in precedenza. Consideriamo il seguente campo, dato dalla somma di un kink ϕ_k centrato in $x = -a$ e di un anti-kink ϕ_{-k} centrato in $x = a$, opportunamente traslati per ripristinare il comportamento asintotico necessario a garantire un'energia statica finita¹⁵:

$$\Psi(0, x) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \left[\tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x+a)\right) - \tanh\left(\frac{m}{\sqrt{2}}(x-a)\right) - 1 \right] \quad (14)$$

Il campo è assegnato al tempo zero; è sensato attendersi che non sia una soluzione stazionaria, poiché tende allo stesso vuoto ad entrambi gli estremi della retta reale e abbiamo stabilito che l'unica soluzione stazionaria con tale proprietà è quella costante. Di seguito è riportato un grafico rappresentativo di questa situazione, in cui kink e anti-kink sono separati da una distanza dieci volte maggiore della loro dimensione caratteristica:

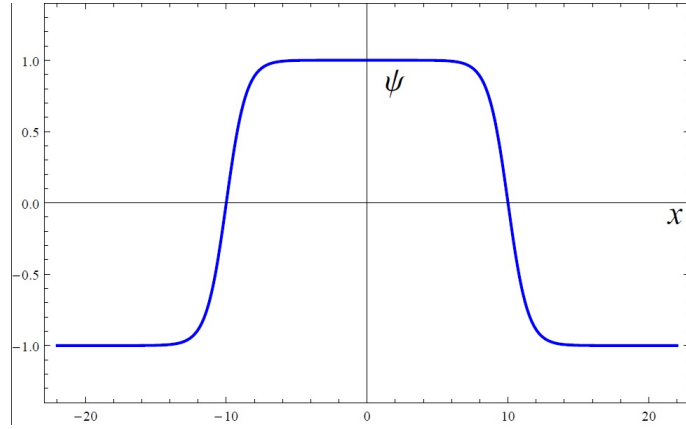


Figura 3: Sovrapposizione di kink e anti-kink con $m = \lambda = 1$ e $a = 10$.

Calcolare esplicitamente l'evoluzione temporale data la (14) come condizione iniziale non è immediato; è tuttavia possibile determinare la forza che ciascuno dei due solitoni esercita sull'altro all'istante iniziale tramite il tensore energia-impulso:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \phi)} \partial^\mu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (\partial_\alpha \phi)^2 - V(\phi) \right] \\ F_\Omega^i &= \frac{dP^i}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\Omega T^{0i} dx = - \frac{d}{dt} \int_\Omega \partial_t \phi \partial_{x_i} \phi dx \end{aligned} \quad (15)$$

dove F_Ω^i è la componente i -esima della forza esercitata sulla regione di campo Ω . Nel nostro caso, supponendo che la distanza $2a$ tra i centri dei due solitoni sia molto maggiore della loro dimensione caratteristica l , per cui le due densità di energia non si sovrappongono apprezzabilmente, la regione sulla quale vogliamo calcolare la forza agente è il segmento centrato in $-a$ e di raggio l corrispondente alla zona di maggior densità di energia del kink (e, per il principio di azione e reazione, sarà di conseguenza nota la forza che agisce sulla regione di campo di centro a e raggio l , ovvero sull'anti-kink). I conti sono abbastanza lunghi¹⁶, ma non presentano particolari ostacoli concettuali e quindi ci limitiamo a riportare l'espressione della forza esercitata sul kink dall'anti-kink al primo ordine in l/a , al tendere all'infinito della distanza $2a$ tra i centri:

$$F_k = \frac{4m_\psi^4}{\lambda} e^{-2m_\psi a} \quad m_\psi := \sqrt{2}m \quad (16)$$

¹⁵Incidentalmente, il motivo per cui non esaminiamo la somma di due kink o di due anti-kink è che per essi non è possibile traslarli per ripristinare il comportamento asintotico sia a $-\infty$ che a $+\infty$, pertanto non corrispondono a soluzioni con energia statica finita.

¹⁶Il calcolo completo può essere seguito su *Vachaspati* ([9] Cap. 1, Sez. 1.8)

Notiamo che è positiva per il kink in $-a$ e dunque attrattiva, ma esponenzialmente decrescente con la distanza e ha la forma di una forza di Yukawa in una dimensione, come ci si aspetta per un'interazione mediata da una particella massiva.

2.4 Solitoni di tipo sine-Gordon

Passiamo ad un esempio di teoria in una dimensione spaziale con un potenziale a più di due zeri; si consideri la seguente lagrangiana¹⁷:

$$\mathcal{L}_{sg} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{m^4}{\lambda} \left[1 - \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) \right] \quad (17)$$

In questo caso il potenziale ha un'infinità numerabile di zeri scrivibili come:

$$c_k = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} k \quad \implies \quad V(c_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (18)$$

La teoria descritta dalla (17) è detta **modello di sine-Gordon**¹⁸. La corrente topologica e la relativa carica sono definite come per il kink, ma questa volta, a priori, la carica topologica può essere un qualsiasi numero intero. La generica configurazione di campo ϕ ad energia finita avrà un comportamento asintotico caratterizzato da due numeri interi i e j tali che¹⁹:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = c_i \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = c_j$$

Tuttavia, come abbiamo dedotto dall'analogia con la particella, non esistono solitoni topologici nei settori \mathcal{Q}_{ij} dello spazio delle configurazioni dove $i = j$ né in quelli dove $|i - j| > 1$; queste condizioni ci dicono che la carica topologica, opportunamente normalizzata, può assumere solo i valori $Q_T = 0$, in corrispondenza delle configurazioni omotope ai vuoti, e $Q_T = \pm 1$, per gli unici solitoni topologici possibili. Un altro modo di esprimere l'impossibilità di solitoni topologici con $|Q_T| > 1$ è scrivere l'equazione del moto associata alla lagrangiana (17) per un campo statico:

$$\partial_x^2 \phi = \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right)$$

Se φ è un campo statico ad energia finita con carica topologica $|Q_T| > 1$, ovvero connette due stati di vuoto caratterizzati da numeri interi non consecutivi, allora esisterà almeno un punto x_0 tale per cui $\varphi(x_0) = c_k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$; inoltre dall'equazione di Bogomolny per la lagrangiana (17) segue che $\partial_x \varphi|_{x_0} = 0$. Pertanto in x_0 si annulla il membro destro dell'equazione del moto e il vuoto banale $\varphi(x) = \varphi(x_0) \forall x \in \mathbb{R}$ è certamente una soluzione; applicando poi il teorema di Cauchy di esistenza ed unicità in un intorno di x_0 se ne conclude che è anche l'unica soluzione possibile.

Con conti simili a quelli fatti per i kink si ottengono le forme esplicite dei due solitoni che minimizzano l'energia statica nei settori $\mathcal{Q}_{0,1}$ e $\mathcal{Q}_{0,-1}$:

$$\phi_{sg}(x) = \pm \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \arctan \left[e^{m(x-x_0)} \right] \quad (19)$$

Il grafico di queste funzioni è visivamente identico a quello di kink e anti-kink; aggiungendo alle (19) i valori di vuoto c_k definiti dalla (18), si ottengono i solitoni topologici nei settori $\mathcal{Q}_{k,k\pm 1} \forall k \in \mathbb{Z}$.

¹⁷Vedasi *Percacci* ([4] fine sez. 1.1), *Vachaspati* ([9] Cap. 1, sez. 1.9) per questa sottosezione.

¹⁸È un gioco di parole su "Klein-Gordon" dovuto al fatto che l'equazione del moto corrispondente somiglia a quella di Klein-Gordon a meno di una funzione seno.

¹⁹Con riferimento alla (18) per definire c_i e c_j .

3 CASO DI n CAMPI SCALARI IN d DIMENSIONI SPAZIALI

3.1 In una dimensione spaziale

La densità lagrangiana sarà della forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - U(\underline{\phi})$$

$$\phi^a(t, \underline{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad a \in \{1, \dots, n\}$$

dove sono sottintese le somme su tutti i valori dell'indice a che identifica i diversi campi scalari, $\underline{\phi}$ indica la ennupla di campi e $U \geq 0$.

Questa situazione non manifesta molte differenze sostanziali rispetto alla precedente, pertanto proponiamo il seguente confronto schematico:

- Anche in questo caso è possibile fare un'analogia con il moto di una particella classica descritta da n coordinate spaziali ϕ^a e da una variabile temporale x che equivale alla variabile spaziale comune a tutti gli n campi scalari.
- Nel caso in cui U abbia un solo minimo non è detto che l'unica soluzione delle equazioni del moto sia quella statica: per $n \geq 2$ possono esistere orbite chiuse, per la particella in moto nel potenziale $-U$ avente un solo massimo nel punto p , che partono e ritornano in p per tempi $x \rightarrow \pm\infty$ senza tuttavia rimanere ferme in tal punto ad ogni tempo. Queste soluzioni sono dette *solitoni non topologici* perché, pur essendo distinte dai vuoti banali, non sono topologicamente differenti da questi e sono metastabili; i solitoni non topologici non verranno ulteriormente approfonditi nella presente trattazione.
- É in generale possibile creare solitoni topologici che connettano una qualsiasi coppia di minimi assoluti di U (almeno se questi sono al più numerabili) poiché per collegarne due non è strettamente necessario passare per un terzo, come accadeva in alcuni casi per $n = 1$.
- Le equazioni del moto sono accoppiate per i vari campi; nel caso statico si ha:

$$\partial_x^2 \phi^a = \frac{\partial U(\underline{\phi})}{\partial \phi^a}$$

A differenza del caso per un solo campo scalare, qui le equazioni del moto statiche non ammettono una formula risolutiva generica, implicita o esplicita, indipendente dal potenziale U . Esistono metodi per trovare alcune soluzioni statiche, che non tratteremo qui²⁰, ed il compito è facilitato nel caso in cui U dipenda solo da $|\underline{\phi}|$ per cui è presente una simmetria interna di tipo $SO(n)$ della lagrangiana.

3.2 In due o più dimensioni spaziali

La densità lagrangiana è ancora scrivibile come:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - U(\underline{\phi}) \tag{20}$$

dove di nuovo $U \geq 0$. Ora, tuttavia, i campi sono n funzioni di $(d+1)$ variabili:

$$\phi^a(t, \underline{x}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \quad a \in \{1, \dots, n\}$$

²⁰Si veda *Rajaraman* ([6] Cap.2, fine sez 2.3, pag. 26-31)

e non è quindi più utile l'analogia tra i campi statici e il moto di una particella classica. Le teorie di campo di questo tipo, in cui $\underline{\phi}$ ha valori in \mathbb{R}^n , sono dette *teorie* (o *modelli*) *lineari* poiché \mathbb{R}^n è uno spazio vettoriale. Rientrano in questa categoria tutti i casi esaminati sin qui.

Sia \mathcal{Q} lo spazio delle configurazioni statiche ad energia finita, ovvero lo spazio delle funzioni lisce²¹ da $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ tali che:

$$E_s[\underline{\phi}] := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \nabla \phi^a \cdot \nabla \phi^a + U(\underline{\phi}) d^d x < +\infty \quad \forall \underline{\phi} \in \mathcal{Q} \quad (21)$$

La formula (53) dell'Appendice C ci dice che da un punto di vista topologico l'insieme che ci interessa conoscere è $\pi_0(\mathcal{Q})$ poiché è isomorfo all'insieme di tutte le configurazioni statiche ad energia finita non omotope tra loro.

Denotiamo con \mathcal{W} il sottoinsieme di \mathbb{R}^n definito da:

$$\mathcal{W} := \{ \underline{w} \in \mathbb{R}^n \mid U(\underline{w}) = 0 \}$$

che prende il nome di *insieme* (o talvolta *varietà*) *di vuoto*.

Ad ogni elemento di \mathcal{Q} corrisponde una funzione continua su S_∞^{d-1} , la sfera all'infinito di \mathbb{R}^d , a valori in \mathcal{W} . Infatti la condizione di energia statica finita impone che²²:

$$\forall \underline{\varphi} \in \mathcal{Q} \quad \implies \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \underline{\varphi}(x_R) = \underline{w} \in \mathcal{W} \quad \forall x_R \in S_R^{d-1} \quad (22)$$

Si indichi con $\phi^\infty : S_\infty^{d-1} \rightarrow \mathcal{W}$ tale funzione associata al campo $\underline{\phi} \in \mathcal{Q}$. Siano ora $\underline{\phi}_1, \underline{\phi}_2 \in \mathcal{Q}$ due configurazioni di campo corrispondenti alla stessa condizione all'infinito ϕ^∞ . Evidentemente:

$$\underline{\phi}_2 = \underline{\phi}_1 + \underline{\psi}$$

dove $\underline{\psi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una funzione che va a zero rapidamente ad infinito. Poiché la teoria è lineare, consideriamo:

$$F(\tau, \underline{x}) = (\underline{\phi}_1 + \tau \underline{\psi})(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^d \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

E avremo che $F(\tau, \underline{x}) \in \mathcal{Q} \quad \forall \tau \in [0, 1]$. La funzione F effettua l'omotopia tra $\underline{\phi}_1$ e $\underline{\phi}_2$ o, in altre parole, descrive un cammino continuo tra i due campi su \mathcal{Q} : $\underline{\phi}_1$ e $\underline{\phi}_2$ appartengono cioè allo stesso settore connesso in $\pi_0(\mathcal{Q})$; viceversa, se due campi in \mathcal{Q} hanno condizioni all'infinito ϕ^∞ e $\tilde{\phi}^\infty$ omotope, sono anch'essi evidentemente omotopi. Abbiamo allora il seguente risultato²³:

Lemma 3.2.1. *In una teoria lineare (20) descritta da uno spazio delle configurazioni statiche ad energia finita \mathcal{Q} e da un insieme di vuoto \mathcal{W} , l'insieme dei campi topologicamente distinti in \mathcal{Q} è isomorfo all'insieme delle condizioni all'infinito per tali campi, modulo omotopia:*

$$\mathcal{Q}/\sim \simeq \pi_0(\mathcal{Q}) \simeq \pi_{d-1}(\mathcal{W}) \equiv \Gamma(S_\infty^{d-1}, \mathcal{W})/\sim$$

Ciò ci permette di suddividere la trattazione in base ai possibili insiemi di vuoto \mathcal{W} .

²¹Di nuovo, la precisa condizione di regolarità può essere stabilita all'occorrenza e non è molto rilevante per noi: chiedere che siano C^2 è il minimo necessario per dare senso alle equazioni del moto.

²²Con S_R^{d-1} si intende la sfera in \mathbb{R}^n di centro nell'origine e raggio R .

²³La definizione del simbolo $\pi_{d-1}(\mathcal{W})$ è data da (C.1.1) nell'Appendice C; nella stessa Appendice si trova anche la definizione di $\Gamma_*(N, M)$.

3.2.1 Teorie con un insieme di vuoto numerabile

Supponiamo che \mathcal{W} sia al più numerabile.

Emerge allora un'importante differenza tra i casi in cui $d > 1$ ed il caso precedentemente esaminato di campi scalari in una sola dimensione spaziale: in quest'ultima circostanza è stato possibile trattare la frontiera all'infinito di $\mathbb{R}^{d=1}$ come l'unione di due punti disgiunti $\{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ ²⁴, permettendo così ai campi $\phi \in \mathcal{Q}$ di tendere a vuoti distinti ai due estremi della retta reale; per $d > 1$, invece, la frontiera di \mathbb{R}^d è necessariamente connessa, poiché isomorfa ad S^{d-1} . Possiamo allora pensare a \mathcal{Q} come al sottoinsieme dei campi lisci su S^d a valori in \mathbb{R}^n che mappano un particolare punto $p_0 \in S^d$, che d'ora in avanti chiameremo *punto base*, in uno dei punti di \mathcal{W} , ovvero $\mathcal{Q} \simeq \Gamma_*(S^d, \mathbb{R}^n)$: infatti la *d-sfera* è isomorfa²⁵ alla compattificazione di \mathbb{R}^d e possiamo assimilare S_∞^{d-1} con il punto all'infinito di tale spazio euclideo, corrispondente a p_0 , poiché tutti i punti di S_∞^{d-1} devono tendere allo stesso vuoto, per continuità, essendo \mathcal{W} un insieme discreto. Ma, poiché \mathbb{R}^n è contraibile, $\pi_0(\mathcal{Q}) \simeq \pi_d(\mathbb{R}^n) = I$ è il gruppo costituito dalla sola identità e tutti gli elementi di \mathcal{Q} sono topologicamente banali²⁶.

In altre parole *per una teoria di campo lineare in $d \geq 2$ dimensioni spaziali e con un insieme al più numerabile di stati di vuoto tutte le configurazioni statiche ad energia finita sono topologicamente banali, quindi non possono esistere solitoni topologici.*

3.2.2 Teorie con una varietà differenziabile di stati di vuoto

Esaminiamo invece il caso in cui \mathcal{W} sia una varietà differenziabile di dimensione $m \leq n$. Poiché in tale circostanza può esistere un'infinità continua di stati di vuoto, le mappe da S_∞^{d-1} a \mathcal{W} non devono necessariamente essere costanti: $\pi_{d-1}(\mathcal{W})$ può essere non banale e possiamo distinguere vari casi a seconda del valore di d ²⁷.

- $d = 1$: allora S^0 è la coppia di punti $\{-1\}, \{+1\}$ e, poiché non stiamo fissando alcun punto base, l'insieme delle configurazioni topologicamente distinte sarà dato, in accordo con il Lemma (3.2.1), da $\pi_0(\mathcal{Q}) \simeq \pi_0(\mathcal{W}) \times \pi_0(\mathcal{W})$ ovvero dal quadrato del numero di componenti connesse per archi dell'insieme di vuoto \mathcal{W} . In particolare *tutte le teorie di campo lineari in una dimensione spaziale con varietà di vuoto connessa per archi non ammettono solitoni topologici.*
- $d = 2$: ci interessa il gruppo fondamentale dell'insieme di vuoto, $\pi_1(\mathcal{W})$ ²⁸. Quindi *in due dimensioni spaziali, le uniche teorie di campo lineari che ammettono soluzioni statiche topologicamente non banali hanno una varietà di vuoto non semplicemente connessa.* Tipicamente, allora, l'elemento di $\pi_1(\mathcal{W})$ al quale corrisponde una data configurazione di campo non banale ci dice il suo **winding number** all'infinito, come chiariremo di seguito.
- $d = 3$: è il caso dello spazio fisico; in genere $\pi_2(\mathcal{W})$ non ha un'interpretazione semplice.

La topologia di \mathcal{W} può essere molto esotica, ma spesso le teorie fisiche che comprendono più campi scalari presentano qualche tipo di simmetria interna che vincola il potenziale ad assumere una particolare struttura²⁹. Ad esempio, si supponga che U sia una funzione solo di $|\phi|$, ovvero

²⁴La frontiera di \mathbb{R} è isomorfa a S^0 che è costituito dalla coppia di punti $\{-1\} \cup \{+1\}$

²⁵Una mappa che effettua l'isomorfismo tra S^d e $\mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ è la nota *proiezione stereografica*.

²⁶Si veda Percacci ([4] inizio sez. 1.2) e Lemma (C.0.5) dell'Appendice C.

²⁷Si veda Manton & Sutcliffe ([1] Cap. 4, sez. 4.1)

²⁸Per $d \geq 2$ non è più importante distinguere tra le mappe che preservano il punto base e le altre, come chiarito nell'Appendice C.

²⁹Si ricordi che stiamo esaminando teorie lineari in questa sezione, pertanto \mathcal{W} è pur sempre una sottovarietà di \mathbb{R}^n .

che la lagrangiana (20) sia invariante per trasformazioni appartenenti al gruppo $SO(n)$. Avremo dunque:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - U(|\bar{\phi}|) \\ \mathcal{L}[\bar{\phi}] &= \mathcal{L}[\mathbf{R} \cdot \bar{\phi}] \quad \forall \mathbf{R} \in SO(n)\end{aligned}\tag{23}$$

Ovviamente, poiché $|\bar{\phi}|$ è costante sulle $(n-1)$ -sfere di \mathbb{R}^n , \mathcal{W} sarà dato dall'unione di una famiglia di tali sfere con vari possibili valori dei raggi $r_i \in \mathbb{R}^+$, tali che $U(r_i) = 0$. Per semplicità, chiediamo che esista un solo valore $r_0 > 0$ tale che $U(r_0) = 0$ ³⁰. Allora \mathcal{W} coincide con la sfera centrata in $\underline{0} \in \mathbb{R}^n$ e di raggio r_0 , omeomorfa a S^{n-1} .

In tal caso possiamo avere configurazioni non banali solo per $n \geq d$, poiché altrimenti $\pi_{d-1}(S^{n-1}) = I$ è il gruppo banale, come mostrato nell'Appendice C, e tutte le configurazioni sono omotopiche allo stato di vuoto. In particolare, per $n = d$, $\pi_{d-1}(S^{d-1}) \simeq \mathbb{Z}$ e giungiamo alla seguente conclusione³¹:

Lemma 3.2.2. *Per una teoria di campo lineare in $d > 1$ dimensioni spaziali con varietà di vuoto omeomorfa a S^{d-1} , ogni configurazione topologicamente non banale è caratterizzata da un numero intero $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ detto **winding number**.*

Il winding number è l'analogo multidimensionale della carica topologica.

3.3 Il teorema di Derrick

Nella sottosezione precedente abbiamo esaminato la possibilità di configurazioni topologicamente distinte dai vuoti, in teorie di campo lineari, che rispettino le opportune condizioni all'infinito dettate dal potenziale senza però occuparci di minimizzare né limitare l'energia statica, dipendente anche dalle derivate spaziali, condizione invece necessaria per poter parlare di solitoni topologici. In particolare, anche qualora \mathcal{W} sia una varietà differenziabile, aggiungendo alle condizioni all'infinito la richiesta che l'intera energia statica sia finita, troviamo che ciascun campo deve tendere allo stesso elemento di \mathcal{W} in qualunque direzione, perché si annullino asintoticamente le derivate: sembra che anche in questo caso non ci siano soluzioni topologicamente non banali ad energia statica finita.

Uno dei più importanti teoremi nell'ambito della teoria dei solitoni topologici, il **teorema di Derrick**, nega proprio l'esistenza di tali soluzioni statiche, mostrando che, sotto opportune ipotesi, gli unici campi stazionari invarianti al primo ordine per riscaldamento delle coordinate spaziali sono gli stati di vuoto³²:

Teorema 3.3.1 (di Derrick). *Si consideri una qualsiasi teoria lineare per n campi scalari in $d > 2$ dimensioni spaziali descritta dalla lagrangiana covariante a vista (20) con potenziale U semidefinito positivo. Allora tutte e sole le configurazioni statiche che estremizzano l'azione sono costanti, ovvero sono stati di vuoto.*

Dimostrazione. Ricordiamo che estremizzare l'azione per una configurazione statica equivale ad estremizzare l'energia statica.

Scriviamo l'energia statica $E_s[\phi]$ come la somma di due contributi, l'energia elastica E_1 :

$$E_1[\phi] = \sum_{a=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{2} \nabla \phi^a \cdot \nabla \phi^a d^d x$$

³⁰ $r_0 = 0$ coinciderebbe con il caso in cui \mathcal{W} sia di cardinalità finita. Stiamo guardando momentaneamente ad U come una funzione da \mathbb{R} in \mathbb{R} per comodità di scrittura.

³¹Si veda il teorema di Hopf (54) nell'Appendice C.

³²Si veda Percacci ([4] sez. 1.2) e Manton & Sutcliffe ([1] Cap. 4, sez. 4.2)

e l'energia potenziale totale E_2 :

$$E_2[\underline{\phi}] = \int_{\mathbb{R}^d} U(\underline{\phi}) d^d x$$

Sia allora $\underline{\phi}_1(\underline{x})$ un campo indipendente dal tempo che estremizza l'energia statica e consideriamo la famiglia di campi riscaldati³³:

$$\underline{\phi}_\lambda(\underline{x}) := \underline{\phi}_1(\lambda \underline{x}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

I campi riscaldati conservano le proprietà asintotiche all'infinito del campo originale, pertanto hanno energia statica finita, infatti quest'ultima cambia in accordo con:

$$E_s[\underline{\phi}_\lambda] = E_1[\underline{\phi}_\lambda] + E_2[\underline{\phi}_\lambda] = \lambda^{2-d} E_1[\underline{\phi}_1] + \lambda^{-d} E_2[\underline{\phi}_1]$$

dove un fattore λ^2 proviene dal prodotto scalare dei gradienti, in E_1 , ed un fattore λ^{-d} dal cambio di variabile di integrazione, in entrambi i termini. Perché $\underline{\phi}_1$ sia un estremo deve essere nulla la variazione dell'energia statica per piccole variazioni di λ attorno al valore 1, ovvero deve valere:

$$0 = \left. \frac{dE[\underline{\phi}_\lambda]}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = (2-d)E_1[\underline{\phi}_1] - dE_2[\underline{\phi}_1] \quad (24)$$

Per $d = 1$ la (24) restituisce una equazione simile al teorema del viriale, affermando che il contributo elastico $E_1[\underline{\phi}]$ all'energia statica è uguale a quello potenziale $E_2[\underline{\phi}]$. Poiché E_1 ed E_2 sono entrambe semidefinite positive (per ipotesi su U , nel caso di E_2) per $d \geq 3$ la (24) implica invece che $E_1[\underline{\phi}_1] = 0$ e $E_2[\underline{\phi}_1] = 0$ identicamente in \mathbb{R}^d , ovvero che $\underline{\phi}_1$ sia costante ed uguale ad uno stato di vuoto su tutto il suo dominio spaziale.

Se infine $d = 2$ la (24) implica che $\underline{\phi}_1$ abbia valori solo su \mathcal{W} , la varietà di vuoto della teoria³⁴, ma in tal caso $\underline{\phi}_1$ è un minimo di U e combinando la condizione di minimo con le equazioni del moto otteniamo:

$$0 = \left. \frac{\partial U(\underline{\phi})}{\partial \phi^a} \right|_{\underline{\phi}=\underline{\phi}_1} = -\partial^\mu \partial_\mu \underline{\phi}_1$$

Ovvero $\underline{\phi}_1$ deve essere lineare nelle coordinate x^μ . Tuttavia la condizione che l'energia statica sia finita impone che le derivate di $\underline{\phi}_1$ tendano a zero all'infinito e che il campo tenda ad un unico valore di vuoto, dunque deve essere anche in questo caso un campo costante. \square

Benché il teorema di Derrick sia un risultato di grande generalità, esistono certamente dei casi in cui degli estremanti topologicamente non banali dell'energia statica sono ancora possibili; elenchiamo sinteticamente le alternative:

- In una dimensione spaziale, come è evidente dalla dimostrazione, il teorema non si applica e sono possibili solitoni topologici, che vengono genericamente chiamati **kinks**, poiché hanno tutti forme simili al modello ϕ^4 precedentemente esaminato.
- Opportune variazioni della lagrangiana rispetto alla (20), la più semplice immaginabile, rompono l'argomento basato sul riscaldamento dei campi: in particolare si possono considerare lagrangiane di ordine più alto del secondo nelle derivate, o contenenti derivate di ordine superiore al primo: quest'ultimo è il caso degli skirmioni.

³³Si noti che $\underline{\phi}_1$ coincide effettivamente con $\underline{\phi}_\lambda$ per $\lambda = 1$.

³⁴Poiché il potenziale U non è mai negativo ed è continuo, questa è l'unica possibilità perché il suo integrale su tutto il dominio spaziale di $\underline{\phi}_1$ sia nullo.

- Se si considerano teorie di campo *non* lineari, ovvero se lo spazio dei valori accessibili a priori da ϕ non è tutto \mathbb{R}^n ma ad esempio una sottovarietà \mathcal{M} non invariante per riscalamenti, allora il teorema di Derrick non si applica. Più precisamente, non rimane vero che due generici campi che corrispondono alle stesse condizioni all'infinito sono già omotopi, poiché la trasformazione di uno nell'altro potrebbe richiedere di passare da configurazioni in cui i campi assumono valori esterni alla varietà target \mathcal{M} . Per definire esplicitamente una densità lagrangiana, in questo caso, dobbiamo dare sufficiente struttura ad \mathcal{M} affinché sia possibile definire la derivata covariante ed esista una metrica che permetta di scrivere gli integrali sulla varietà. Se allora \mathcal{L} è quadratica nella derivata covariante, non ha alcun termine di potenziale e \mathcal{M} non è uno spazio vettoriale, la teoria viene detta **modello sigma non-lineare**. Se invece \mathcal{L} ha una dipendenza più complicata dalla derivata covariante, allora la teoria in questione è soprannominata **modello di Skyrme**.

Accenniamo un semplice esempio qualitativo di modello non-lineare: si consideri un campo $\mathbf{m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$, detto **parametro d'ordine**, che ad ogni punto del piano euclideo associa un vettore unitario. Qualsiasi sia la lagrangiana della teoria, è evidente che la configurazione mostrata nella Figura 4. non è omotopa ad un vuoto, perché non può essere deformata in modo continuo in una configurazione con \mathbf{m} uniforme. Se la lagrangiana dipende solo dalle derivate in modo quadratico, questa configurazione ha anche energia finita poiché \mathbf{m} tende ad uniformarsi all'infinito, ed è quindi un solitone topologico. Tali solitoni, noti come **difetti topologici**, sono osservati in fisica della materia, in particolare nei ferromagneti, dove \mathbf{m} è la magnetizzazione. In altri mezzi materiali ordinati non è invece possibile distinguere un verso del corrispondente campo \mathbf{m} , ma solo una direzione, come ad esempio accade per i **cristalli liquidi nematici**, cristalli organici a simmetria cilindrica che presentano una caratteristica anisotropia ottica nella fase liquida.³⁵

- Per teorie lineari rimane la possibilità di soluzioni topologicamente non banali ad energia *infinita*: in due dimensioni queste configurazioni sono chiamate **vortici globali**, in tre dimensioni **monopoli globali**: questi non verranno ulteriormente approfonditi nella presente trattazione.
- Se alla lagrangiana (20) si aggiunge un campo di gauge, cambiando opportunamente la derivata covariante, allora si può verificare che il teorema di Derrick viene indebolito, lasciando aperta la possibilità di solitoni topologici in due e tre dimensioni spaziali: questi prendono i rispettivi nomi di **vortici di gauge** e **monopoli di gauge**. Intuitivamente, il campo di gauge permette alla derivata covariante di annullarsi all'infinito senza che le derivate parziali del campo scalare ϕ si annullino, reintroducendo la possibilità per i campi di tendere a valori di vuoto diversi in direzioni spaziali differenti.

³⁵Per una breve descrizione dei difetti topologici si veda ad esempio Nakahara ([2] Cap. 4, sez. 4.8 e 4.9)

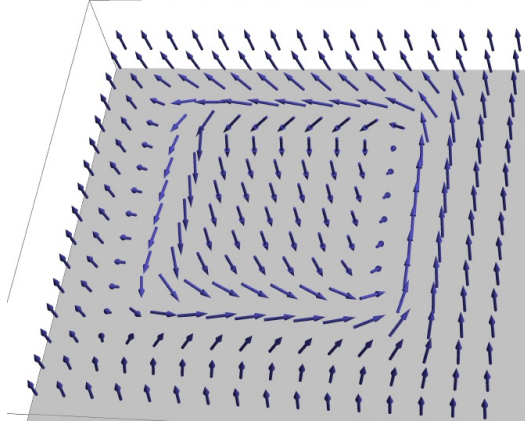


Figura 4: Esempio di difetto topologico di Belavin-Polyakov per un campo $\boldsymbol{m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$.

4 SOLITONI TOPOLOGICI IN TEORIE DI GAUGE

4.1 Vortici di gauge in due dimensioni spaziali

Consideriamo l'elettrodinamica classica in due dimensioni spaziali; in accordo con quanto definito nella Sezione D.1 dell'Appendice D costruiamo la seguente densità lagrangiana per un campo scalare ϕ ³⁶:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi - \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - f^2\right)^2 \quad (25)$$

$$D^\mu := \partial^\mu - iqA^\mu \quad (\lambda, f, q \in \mathbb{R})$$

con potenziale analogo a quello della (6) per i kink, ma ora con $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Con l'ormai consolidato procedimento di separare la lagrangiana in un termine cinetico dipendente dal tempo ed uno potenziale indipendente dalle derivate temporali, scriviamo l'energia corrispondente alla (25) come:

$$E_K[\phi] + E_S[\phi] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[E_i^2 + |D^0\phi|^2 \right] + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left[B^2 + |D^i\phi|^2 + \frac{\lambda}{2} \left(|\phi|^2 - f^2 \right)^2 \right] \quad (26)$$

Il funzionale (26) è detto **funzionale energia di Ginzburg-Landau**.

Scegliendo il gauge di modo che $A^0 = 0$ e limitandoci alla ricerca di soluzioni statiche per il campo complesso ϕ ed il campo elettromagnetico A^μ ³⁷, il termine cinetico $E_K[\phi]$ è identicamente nullo.

Tenendo presente che gli addendi nell'energia statica sono tutti non-negativi, cerchiamo innanzitutto i vuoti della teoria, imponendo le seguenti condizioni:

$$D_i\phi = 0 \quad |\phi| = f \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad (27)$$

Le quali già implicano che:

$$\begin{aligned} [D_1, D_2]\phi &= 0 = -iq(\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)\phi = -iqF_{12}\phi = iqB\phi \implies \\ \implies B(\underline{x}) &= 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

poiché $|\phi| = f \neq 0$, e dunque realizzano effettivamente il minimo assoluto.

Le condizioni (27) sono soddisfatte, in particolare, dallo stato di vuoto banale per i campi ϕ e A^μ espresso da:

$$A_0^i(\underline{x}) = 0 \quad \phi_0(\underline{x}) = f \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \{1, 2\}$$

Si ottengono poi altri vuoti da questa particolare configurazione applicando una trasformazione di gauge $g = e^{iq\alpha(\underline{x})}$ indipendente dal tempo³⁸:

$$\begin{cases} A_0 = -\partial_0\alpha(\underline{x}) = 0 \\ A_i(\underline{x}) = \partial_i\alpha(\underline{x}) \\ \varphi = g\phi_0 = e^{iq\alpha(\underline{x})}f \end{cases} \quad (28)$$

³⁶In questa sezione la barra orizzontale sopra una quantità denota il coniugato complesso.

³⁷Ovvero le derivate rispetto al tempo di ϕ , A^1 e A^2 si suppongono tutte nulle. È implicita la richiesta non banale che nel gauge in cui $A^0 = 0$ si possa avere effettivamente A^1 e A^2 indipendenti dal tempo: non stiamo cioè considerando il più generico campo elettromagnetico in due dimensioni.

³⁸ $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

Questa scelta soddisfa ancora la condizione $D^\mu \varphi = 0$, per le proprietà della derivata covariante sotto trasformazioni di gauge, e dunque anche $B = 0$, come mostrato sopra. È possibile dimostrare³⁹ che questi sono *tutti* i vuoti della teoria impiegando le equazioni del moto associate alla lagrangiana (25). Poiché siamo in presenza di un campo di gauge, tuttavia, il teorema di Derrick non esclude che vi siano altre soluzioni statiche topologicamente distinte dai vuoti.

Per descrivere il comportamento dei campi all'infinito spaziale nella ricerca delle altre soluzioni statiche è comodo passare in coordinate polari:

$$\begin{aligned} A_\rho &= A_1 \cos \theta + A_2 \sin \theta & D_\rho &= \partial_\rho \phi - iq A_\rho \\ A_\theta &= -A_1 \rho \sin \theta + A_2 \rho \cos \theta & D_\theta &= \partial_\theta \phi - iq A_\theta \\ F_{\rho\theta} &= \partial_\rho A_\theta - \partial_\theta A_\rho = \rho B \\ E_S[\phi] &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{\rho^2} F_{\rho\theta}^2 + |D_\rho \phi|^2 + \frac{1}{\rho^2} |D_\theta \phi|^2 + \frac{\lambda}{2} (|\phi|^2 - f^2)^2 \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Ogni configurazione ad energia finita deve rispettare⁴⁰:

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \phi(\rho, \theta) &= f e^{i\sigma(\theta)} & \theta \in [0, 2\pi] & \quad \sigma(0) = \sigma(2\pi) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \lim_{\rho \rightarrow +\infty} D_\theta \phi &= 0 \implies \partial_\theta \sigma &= \lim_{\rho \rightarrow +\infty} q A_\theta \end{aligned} \quad (30)$$

dove la seconda condizione è necessaria altrimenti il termine in D_θ nell'energia stazionaria divergerebbe logaritmicamente. La prima equazione delle (30) suggerisce che ad ogni campo ϕ nello spazio delle configurazioni statiche ad energia finita \mathcal{Q} sia associata una mappa continua da S_∞^1 in $U(1)$ che è isomorfo ad S^1 . Poiché la teoria è lineare ciascuna configurazione di campo, a livello topologico, è caratterizzata esclusivamente dal suo comportamento all'infinito e l'insieme dei campi topologicamente distinti in \mathcal{Q} è dunque $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$: ad ogni classe di omotopia corrisponde un **winding number** W , in accordo con il Lemma (3.2.2), che è il multiplo k di 2π che la fase del campo ϕ accumula lungo un giro completo sul cerchio all'infinito S_∞^1 . In formule:

$$W(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \partial_\theta \sigma \, d\theta = \frac{1}{2\pi} [\sigma(\theta = 2\pi) - \sigma(\theta = 0)] \quad (31)$$

All'interno dello spazio delle configurazioni \mathcal{Q} , dove si svolge la dinamica, W è un *invariante topologico* e pertanto è conservato, poiché ogni sua variazione richiederebbe una trasformazione discontinua dei campi.

La seconda delle (30), combinata con la definizione di winding number (31), fornisce⁴¹:

$$\begin{aligned} W(\phi) &= \frac{q}{2\pi} \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} A_\theta \, d\theta = \frac{q}{2\pi} \oint_{S_\infty^1} \underline{A} \cdot d\underline{s} = \frac{q}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} B \, d^2x = k \in \mathbb{Z} \implies \\ &\implies \Phi_B = \frac{2\pi}{q} k \end{aligned} \quad (32)$$

dove si è riscritto l'integrale in θ come un integrale di contorno sul cerchio all'infinito ed è stato usato il teorema di Stokes in due dimensioni nell'ultimo passaggio. L'equazione (32) esprime la *quantizzazione del flusso* Φ_B del campo magnetico su tutto il piano⁴² in termini del winding

³⁹Si veda *Manton & Sutcliffe* ([1] Cap. 7, sez. 7.1, pag. 161-162)

⁴⁰In *Manton & Sutcliffe* ([1] Cap. 7, sez. 7.3, pag. 164) si trovano motivazioni precise sul perché questi limiti esistano e le fasi all'infinito siano ben definite.

⁴¹ $d\underline{s} = (-\rho \sin \theta d\theta, \rho \cos \theta d\theta)$ è l'elemento d'arco sul cerchio all'infinito e l'integrale di contorno è normalizzato per il raggio prima di prendere il limite per $\rho \rightarrow \infty$. Per una generica varietà spaziale bidimensionale il winding number è definito in termini dell'integrale della 1-forma A lungo una curva chiusa all'infinito, mentre $B = dA$ è una 2-forma data dalla derivata esterna della 1-forma.

⁴²Parlare di flusso è improprio poiché in due dimensioni il campo magnetico è un campo scalare; possiamo però concepire il piano come una sottovarietà di \mathbb{R}^3 e in tal caso B è un vettore ortogonale al piano in \mathbb{R}^3 .

number k associata al campo ϕ : questo risultato è stato ricavato come conseguenza di una teoria puramente classica⁴³.

I campi ϕ_v con $W \neq 0$ sono distinti dai vuoti poiché questi ultimi hanno $B = 0$ ovunque, come mostrato in precedenza, e a fortiori $\Phi_B = 0$. Le configurazioni ϕ_v ad energia statica finita, che rispettano cioè le (30), con $W(\phi_v) = 1$ sono dette **vortici di gauge** e sono solitoni topologici.

Supponendo che la fase del campo ϕ_v sia una funzione continua, il percorso chiuso all'infinito usato nel calcolo del winding number può essere arbitrariamente deformato e contratto senza che il valore di W possa cambiare (poiché ciò richiederebbe una discontinuità della fase) fintanto che non attraversi punti in cui la fase non è ben definita, ovvero in cui $|\phi_v| = 0$; se tuttavia si avesse $|\phi_v| \neq 0$ su tutto \mathbb{R}^2 , allora sarebbe possibile contrarre il percorso chiuso attorno ad un arbitrario punto del piano, finché la continuità della fase non implicherebbe che l'integrale di linea della sua derivata lungo una curva chiusa infinitesima sia nullo, ovvero $W = 0$. Ne concludiamo che *qualsiasi vortice deve avere almeno un punto in cui $\phi_v = 0$* perché il suo winding number possa essere unitario.

Consideriamo poi una configurazione topologicamente non banale con $|W| = n > 1$ e contraiamo il contorno all'infinito attorno ad un arbitrario punto q di \mathbb{R}^2 nel quale $\phi_v(q) \neq 0$; ogniquale volta il percorso attraverserà un punto $p \in \mathbb{R}^2$ in cui $\phi_v(p) = 0$ avremo una discontinuità di W di un numero intero $m \in \mathbb{Z}$ ($|m| \leq n$) poiché il suo winding number, in modulo, vale n all'infinito e diventa zero calcolato sul loop infinitesimo attorno a q . Diremo allora che p è uno **zero di ordine m** se m è positivo, o un **antizero di ordine $-m$** se è negativo; la configurazione ad energia statica finita con $n \geq 1$ viene detta invece **multivortice** e il suo winding number all'infinito è la somma degli zeri di ϕ_v , ciascuno pesato per il suo ordine⁴⁴. È bene precisare che la condizione di stabilità dei vortici, dettata dalla conservazione del winding number, è una condizione posta solo sul calcolo di W all'infinito: in particolare non è proibito il decadimento di un multivortice in più vortici semplici, né l'unione di più vortici in un multivortice. Esaminando gli aspetti dinamici dei vortici, si può dimostrare che le configurazioni di campo con più vortici semplici sono preferite rispetto a quelle a multivortice, che sono invece tendenzialmente instabili⁴⁵.

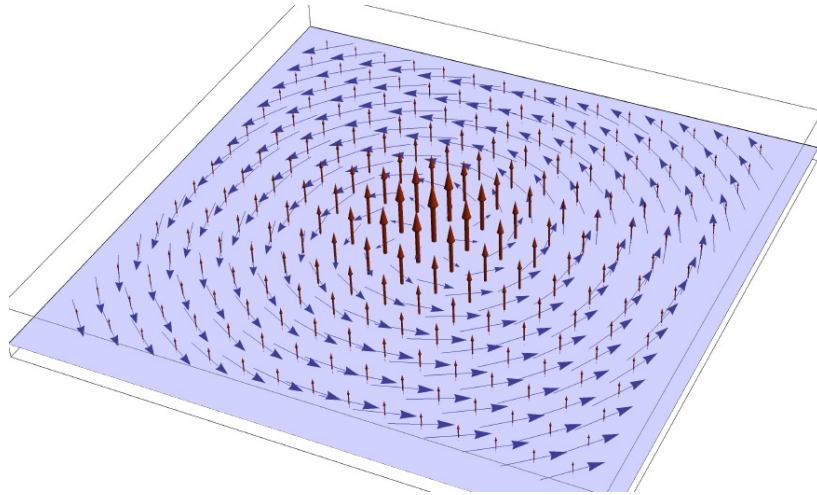


Figura 5: Una rappresentazione grafica di un vortice: in blu e sul piano è rappresentato il potenziale vettore \underline{A} , mentre i vettori ortogonali al piano e in rosso descrivono il corrispondente campo magnetico \underline{B} .

⁴³A sostegno del fatto che il flusso totale del campo magnetico possa essere una quantità finita, si consideri che la seconda delle (30), combinata con la rispettiva equazione per le componenti radiali, che abbiamo ommesso nella trattazione, ci dice che il potenziale vettore \underline{A} è un puro gauge all'infinito, ovvero il gradiente di una funzione scalare; pertanto B , il suo rotore dal punto di vista tridimensionale, tende a zero all'infinito.

⁴⁴Il winding number di un multivortice è talvolta chiamato **vorticità**.

⁴⁵Si veda anche Weinberg ([10] Cap. 3, sez. 3.1).

Per trovare l'espressione analitica dei vortici è necessario fissare, oltre al winding number, altre condizioni iniziali o proprietà che permettano di restringere la classe delle soluzioni solitoniche cercate; una richiesta naturale, ad esempio, è quella di imporre una simmetria circolare. Benché sia stato dimostrato che le equazioni del moto associate al funzionale energia di Ginzburg-Landau (26) ammettono solitoni topologici a vortice, invarianti per rotazioni, con qualsiasi winding number $W \neq 0$ e per ogni valore della costante di accoppiamento $\lambda > 0$, nessuna soluzione analitica è stata fino ad ora trovata ed è indispensabile ricorrere ai metodi numerici per calcolarne le espressioni esplicite⁴⁶. Diversi sistemi fisici esibiscono vortici topologici simili a quelli appena descritti: l'esempio più pertinente è quello dei superconduttori del II tipo, ma si sono osservati vortici analoghi anche in un sistema di ^4He superfluido in un cilindro rotante: in questo caso, il "flusso" quantizzato è di momento angolare, mentre il campo ϕ descrive il flusso del superfluido (Nakahara [2] Cap. 4 sez. 4.8.2)

4.1.1 Un esempio di vortici di gauge in laboratorio: i superconduttori del II tipo

In termini semplificati, i superconduttori del II tipo sono materiali che, in regime di superconduzione, se sottoposti a campi magnetici di intensità superiore al primo valore critico H_{c1} sviluppano al loro interno dei vortici di campo magnetico detti **vortici di Abrikosov**⁴⁷; per questo motivo si dice che in questi superconduttori l'effetto Meissner, l'espulsione del campo magnetico dall'interno del materiale, è solo parziale. Se il campo magnetico viene applicato ad un superconduttore del II tipo lungo una direzione spaziale i vortici che si formano sono dei vortici di gauge su ogni sezione piana ortogonale al campo, con gli zeri allineati lungo una curva che segue le linee di campo e l'energia statica totale di ogni vortice di gauge è ora interpretabile come una densità di energia lungo tale curva. I vortici nei superconduttori, a volte chiamati *flussoni*, esibiscono la quantizzazione del flusso di campo magnetico che abbiamo calcolato dal modello classico⁴⁸ e si osserva che il loro numero aumenta con l'aumentare dell'intensità del campo. Un esempio di superconduttore del II tipo, nonché uno dei superconduttori più usati a scopo dimostrativo grazie alla sua temperatura critica relativamente alta, è l'YBCO, un ossido misto di formula empirica $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$, i cui vortici sono mostrati in Figura 6.⁴⁹

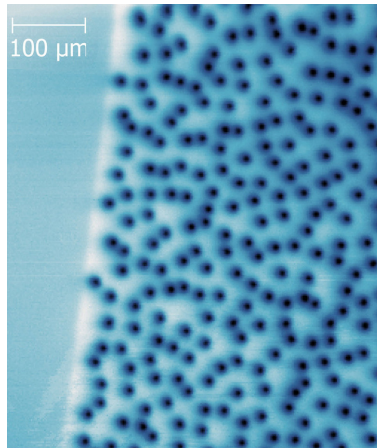


Figura 6: Vortici di Abrikosov in YBCO di spessore 200 nm, immagine ottenuta con la tecnica SQUID.

⁴⁶Si veda Percacci ([4] sez. 1.6) e Manton & Sutcliffe ([1] Cap. 7, sez. 7.4).

⁴⁷Per essere precisi, la struttura a vortice è assunta dal potenziale vettore o, analogamente, dal gradiente della fase del campo ϕ che, nei i superconduttori, è il campo delle coppie di Cooper; si veda la Figura 5.

⁴⁸A meno di un fattore \hbar deducibile solo dalla teoria quantistica.

⁴⁹Immagine liberamente tratta da: Wells, Frederick S.; Pan, Alexey V.; Wang, X. Renshaw; Fedoseev, Sergey A.; Hilgenkamp, Hans (2015). "Analysis of low-field isotropic vortex glass containing vortex groups in $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-x}$ thin films visualized by scanning SQUID microscopy". *Scientific Reports*. 5: 8677.

4.2 Monopoli in tre dimensioni spaziali

4.2.1 Monopoli di Dirac e aspetti generali

La teoria dei monopoli magnetici è ricca e complessa, nonostante non siano mai stati osservati fino ad ora; ci limitiamo ad accennarne gli aspetti più generali.

Una carica magnetica puntiforme $Q_M = 4\pi g$ posta nell'origine genera un campo di monopolo magnetico che ha la stessa struttura del campo coulombiano elettrostatico:

$$\underline{B}_M = \frac{Q_M}{4\pi r^3} \underline{r} = \frac{g}{r^3} \underline{r} \quad \underline{E}_M = 0 \quad (33)$$

La dinamica di un sistema di particelle con cariche elettriche e magnetiche è perfettamente definita⁵⁰; le equazioni di Maxwell subiscono due sostanziali modifiche, corrispondenti all'introduzione di una densità di carica magnetica ρ_m e della rispettiva densità di corrente J_m ; in particolare, ora si ha, in unità razionalizzate:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 4\pi \rho_m \quad (34)$$

Le difficoltà emergono quando si passa al formalismo lagrangiano e, ancor peggio, al caso quantistico; entrambe le teorie, infatti, sono basate sull'uso del quadripotenziale A_μ , le cui componenti spaziali sono legate al campo magnetico da:

$$\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \quad (35)$$

E quest'ultima equazione non è compatibile nell'origine con la (34) e vanifica ogni tentativo di trovare un potenziale vettore \underline{A} ovunque definito e non singolare in presenza di monopoli magnetici.

Un esempio di potenziale vettore *singolare* che corrisponde al campo di monopolo (33) è dato, in coordinate sferiche, da:

$$A_\mu^D(\underline{r}) = g \left[\frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \sin \varphi \right] dx - g \left[\frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta} \cos \varphi \right] dy \quad (36)$$

che è stato espresso come 1-forma differenziale per comodità in ciò che segue⁵¹. Il potenziale A_μ^D è noto come **potenziale di Dirac** ed è singolare lungo il semiasse z positivo (in cui $\theta = 0$), compreso il punto dove $r = 0$ nel quale, del resto, è singolare anche \underline{B}_M ; il corrispondente campo di monopolo è detto **monopolo di Dirac**. In termini informali, ma che possono essere resi precisi⁵², il potenziale di Dirac rappresenta un punto nell'origine rispetto al quale le linee di campo sono uscenti in tutte le direzioni, meno che in quella individuata da $\hat{e}_z = (0, 0, 1)$, lungo la quale tutto il flusso di campo rientra verso l'origine stessa: il monopolo di Dirac è analogo ad una delle estremità di un solenoide infinitamente lungo ed infinitamente sottile (dove i limiti sono presi in modo tale da mantenere il flusso totale uscente dall'estremità del solenoide finito e non nullo).

Possiamo restringere il problema della ricerca di un potenziale vettore alla regione spaziale $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ per escludere almeno la singolarità nell'origine; questo, tuttavia, non è sufficiente, poiché se esistesse \underline{A} ovunque definito su tale dominio si avrebbe:

$$\int_{S^2} dA = \int_{S^2} (\underline{\nabla} \times \underline{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{S^2} \underline{B} \cdot d\mathbf{a} = 4\pi g$$

⁵⁰Si veda *Shnir* ([7] Cap. 1, sez. 1.1); a differenza del campo elettrostatico coulombiano, un campo di monopolo magnetico contiene momento angolare; tuttavia l'idea che anche campi elettromagnetici statici possano contenere momento angolare è già presente nell'elettromagnetismo classico senza monopoli e non dovrebbe stupire.

⁵¹ dx e dy sono i covettori indotti dalle rispettive coordinate cartesiane; la componente in dz è nulla per costruzione, mentre la componente in dt è nulla perché siamo in assenza di campi elettrici.

⁵²Con la teoria delle distribuzioni ed il teorema di Stokes si può dimostrare che il flusso di campo magnetico attraverso una superficie chiusa contenente il monopolo di Dirac è nullo; vedi *Shnir* ([7] Cap. 1, sez. 1.3)

dove S^2 è una sfera centrata nell'origine, $d\mathbf{a}$ è l'elemento di superficie orientato come la normale esterna alla sfera e si è usato il teorema di Gauss nell'ultimo passaggio. Detti S_n e S_s gli emisferi sud e nord di S^2 , rispettivamente, e C l'equatore (in senso antiorario) che li divide, il teorema di Stokes implica invece che:

$$\int_{S^2} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{S_n + S_s} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

dove $d\mathbf{s}$ è lo spostamento d'arco infinitesimo lungo C : l'esistenza di un potenziale vettore ovunque definito in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ per il campo (33) porta dunque ad una contraddizione. Le origini del problema possono essere rintracciate nella topologia del dominio spaziale: affinché un campo vettoriale differenziabile \mathbf{F} su un dominio spaziale D ammetta un potenziale scalare φ , tale cioè che $\mathbf{F} = \nabla\varphi$, è necessario garantire che D sia semplicemente connesso, ovvero che $\pi_1(D) = I$. Similmente, si può dimostrare che una condizione necessaria da porre su D affinché \mathbf{F} ammetta un potenziale vettore $\mathbf{\Phi}$ tale che $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{\Phi}$ è che $\pi_2(D) = I$, ovvero che ogni 2-sfera in D contenga solo punti di D e questo non è palesemente vero per $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ⁵³.

L'unica strategia rimanente per definire un potenziale vettore per il campo di monopolo sul dominio $D \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ consiste nel rinunciare a cercarne uno globale, definendo piuttosto due potenziali vettori in due regioni diverse che coprano D , di modo che ciascuno sia singolare solo fuori dalla regione in cui è definito. Ad esempio, definiamo la regione U_- come:

$$U_- := \left\{ (x, y, z) \in D \mid z < \alpha\sqrt{x^2 + y^2} \right\} \quad 0 < \alpha \ll 1$$

(visivamente U_- è lo spazio privato di un cono chiuso di vertice nell'origine, con asse coincidente con il semiasse z positivo e con un angolo di apertura prossimo a π dettato da α) e la sua regione speculare U_+ :

$$U_+ := \left\{ (x, y, z) \in D \mid z > -\alpha\sqrt{x^2 + y^2} \right\} \quad 0 < \alpha \ll 1$$

Su U_+ e U_- definiamo, rispettivamente, i potenziali di Dirac A_μ^\pm , ciascuno singolare all'infuori del suo dominio:

$$\begin{aligned} A_\mu^+(\underline{r}) &= -g(1 - \cos\theta)d\varphi & \forall \underline{r} \in U_+ \\ A_\mu^-(\underline{r}) &= g(1 + \cos\theta)d\varphi & \forall \underline{r} \in U_- \\ (r \sin\theta)d\varphi &:= d\hat{e}_\varphi = -(\sin\varphi)dx + (\cos\varphi)dy \end{aligned} \quad (37)$$

avendo indicato con $d\hat{e}_\varphi$ l'elemento relativo alla coordinata azimutale della base duale di quella polare ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$) di \mathbb{R}^3 . Ciò mette in luce il fatto che i due quadripotenziali trovati sono indipendenti dalla coordinata radiale⁵⁴.

È evidente dalle (37) che, nella regione $U_+ \cap U_-$ di intersezione dei loro domini, le due 1-forme differenziali sono legate tra loro da una trasformazione di gauge:

$$A_\mu^+(\underline{r}) = A_\mu^-(\underline{r}) - 2gd\varphi = \Omega^{-1}A_\mu^-(\underline{r})\Omega + \frac{i}{q}\Omega^{-1}d\Omega \quad \Omega := e^{2igq\varphi} \quad (\forall \underline{r} \in U_+ \cap U_-)$$

dove $\Omega \in U(1)$ è un elemento del gruppo di gauge e q è una costante reale con le dimensioni di una carica elettrica, matematicamente del tutto superflua, ma utile in contesto fisico; con riferimento alla Figura 7, i vettori di A_μ^\pm nella zona di intersezione tra i domini U_+ (verde) e U_- (giallo) andrebbero in direzione opposta e la loro differenza ha modulo $2gd\varphi$.

⁵³Ciò è una diretta conseguenza del lemma di Poincaré nell'ambito della teoria generale delle forme differenziali; si veda *Naber* ([3] Cap. 0, sez. 0.2)

⁵⁴Si noti che ora $d\varphi$ è singolare su tutto l'asse z , ma i fattori $(1 - \cos\theta)$ e $(1 + \cos\theta)$ permettono di risolvere le singolarità delle (37) nei rispettivi domini.

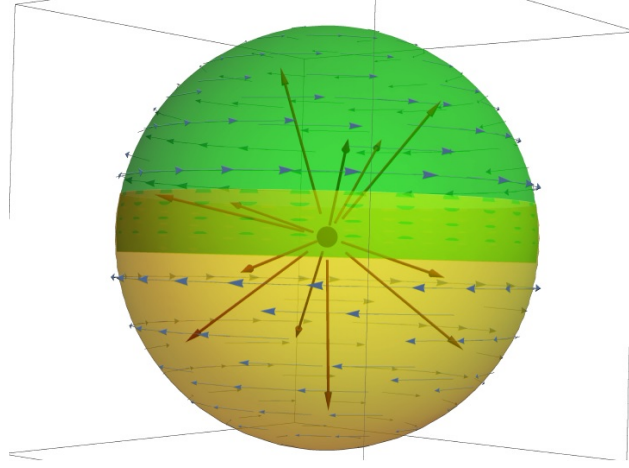


Figura 7: Campo magnetico di monopolo (in rosso) e potenziali vettori A_μ^+ ed A_μ^- (in blu) nei rispettivi domini.

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico questa è dunque la soluzione al problema del monopolo. Tuttavia, come mostrato dal famoso esperimento di Aharonov-Bohm, in meccanica quantistica, e più in generale in una qualsiasi teoria di campo per un campo scalare complesso ϕ che descrive una particella massiva e carica accoppiata al campo elettromagnetico, i potenziali hanno un effetto fisico osservabile poiché modificano la fase di ϕ , come visto per i vortici:

$$A_\mu \rightarrow \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \frac{i}{q} \Omega^{-1} d\Omega = A_\mu - \nabla \alpha \quad \Rightarrow \quad \phi \rightarrow e^{-iq\alpha} \phi = \Omega^{-1} \phi$$

e questo può essere mostrato sperimentalmente con fenomeni di interferenza. Affinché la fase di ϕ su $U_+ \cap U_-$ per il campo di monopolo sia ben definita per entrambe le scelte del potenziale vettore A_μ^\pm su tale regione, si deve avere che⁵⁵:

$$e^{-i2gq\theta} \phi_- = \phi_+ = e^{-2igq(\theta+2\pi)} \phi_- \quad \Rightarrow \quad \boxed{gq = \frac{n}{2}} \quad (38)$$

che è la **condizione di quantizzazione di Dirac** e ci dice che *se esistesse un solo monopolo magnetico in tutto l'Universo allora tutte le cariche elettriche sarebbero multiple di una stessa quantità discreta*. Poiché si osserva precisamente che la carica elettrica è quantizzata, ma attualmente non se ne conosce la ragione, comprendiamo uno dei motivi dell'interesse suscitato dai monopoli magnetici.⁵⁶

La condizione (38) ha origini topologiche: perché A_μ^\pm siano ben definiti su $U_+ \cap U_-$ tra tutte le trasformazioni di gauge bisogna scegliere quelle che, sull'equatore, si riducono ad una mappa continua $\Omega : S^1 \rightarrow U(1)$ e dunque si hanno $\pi_1(U(1)) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ possibilità non equivalenti tra loro indicizzate anche qui da un **winding number** che, fissata la carica elettrica unitaria $q \equiv e$, è riconducibile alla carica magnetica del monopolo e al corrispondente flusso totale, attraverso il teorema di Gauss, in totale analogia con i vortici di gauge. Poiché però il winding number è un invariante topologico, possiamo contrarre arbitrariamente attorno all'origine la sfera lungo il cui equatore abbiamo definito la trasformazione di gauge Ω senza modificarlo; questo ci porta a concludere che la carica magnetica g del monopolo è confinata in uno spazio arbitrariamente

⁵⁵È legittimo richiedere che la fase sia ben definita, trattandosi di una condizione imposta all'interno del dominio spaziale di ciascuna delle due scelte locali del campo di gauge.

⁵⁶In Weinberg ([10] Cap. 5, sez. 5.1) si trova un'altra derivazione della condizione di quantizzazione, basata sull'arbitrarietà della posizione della stringa di Dirac. La (38) vale per cariche elettriche e magnetiche separate; per particelle che hanno simultaneamente cariche elettriche e magnetiche non nulle, dette **dioni**, vale una condizione simile.

piccolo, quindi il sistema, similmente all'elettrone puntiforme classico, ha energia infinita e *non* è un solitone topologico⁵⁷.

4.2.2 Monopoli di 't Hooft-Polyakov e il caso non-abeliano

A partire dal 1960 circa, molti sforzi vennero investiti nella ricerca di teorie fisiche volte a unificare tutte le forze fondamentali (ad eccezione della gravità, che presenta difficoltà a se stanti), descrivendole con un unico gruppo corrispondente ad una simmetria poi rotta a basse energie. Queste prendono il nome di *Grand Unified Theories* (GUT) e fornirono ragioni concettuali per la quantizzazione della carica, facendo momentaneamente calare l'interesse per i monopoli; tuttavia non si tardò a scoprire non solo che grazie a questo ampliamento della simmetria le singolarità e le problematiche che affliggono il monopolo di Dirac potevano essere risolte, ma anzi che molte GUT prevedono necessariamente l'esistenza di soluzioni con un comportamento asintotico corrispondente ad un monopolo magnetico. Discutiamo allora i requisiti generali perché una teoria che presenti un gruppo di simmetria G più grande di quello dell'elettromagnetismo possa avere monopoli magnetici, prima di passare ad un esempio specifico.

Ricordando il Lemma 3.2.1, per avere monopoli di gauge, ovvero solitoni topologici per n campi scalari ϕ in tre dimensioni spaziali accoppiati ad un campo di gauge \mathcal{A}_μ , abbiamo bisogno che la varietà di vuoto \mathcal{W} abbia $\pi_2(\mathcal{W})$ non banale. Se la lagrangiana della teoria è simmetrica per l'intero gruppo di gauge G e se il potenziale per il campo scalare complesso ϕ rompe tale simmetria di modo che il sottogruppo di G che lascia invariati gli stati di vuoto sia H , in accordo con il Teorema A.0.4 dell'Appendice A avremo che $\mathcal{W} \simeq G/H$ ⁵⁸. Trattandosi di una teoria per il campo elettromagnetico, chiediamo poi che il gruppo di simmetria non rotto H sia $U(1) \simeq SO(2)$. Allora una semplice possibilità per estendere tale simetria è scegliere come gruppo di gauge $G = SO(3) \simeq SU(2)$, che ovviamente ha $U(1)$ come sottogruppo e quindi:

$$\mathcal{W} \simeq G/H \simeq SO(3)/SO(2) \simeq S^2 \implies \pi_2(\mathcal{W}) = \mathbb{Z} \quad (39)$$

Dunque, estendendo il gruppo di gauge a $SU(2)$, ci aspettiamo ancora una carica topologica che contraddistingua ogni soluzione rispetto all'elemento in $\pi_2(\mathcal{W}) = \mathbb{Z}$ a cui è omotopa.

Un primo passo verso una elegante teoria dei monopoli magnetici in $SU(2)$ fu fatto da T.T. Wu e C.N. Yang nel 1969. Detta $\mathcal{A}_\mu = A_\mu^a \sigma_a / 2$ la 1-forma differenziale a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ ⁵⁹, possiamo recuperare il campo di gauge del monopolo di Dirac scrivendo $\mathcal{A}_\mu^D = A_\mu^D \sigma_3 / 2$, ovvero scegliendo $A_\mu^1 = A_\mu^2 = 0$ e $A_\mu^3 = A_\mu^D$. É adesso auspicabile sfruttare l'intera simmetria $SU(2)$ per trovare una trasformazione di gauge che risolva la singolarità di \mathcal{A}_μ^D lungo la semiretta $z > 0$; a tal fine risulta conveniente parametrizzare $SU(2)$ con tre angoli $(\theta, \varphi, \alpha)$: θ e φ possono essere pensati come gli angoli corrispondenti ad S^2 , che descrive la simmetria spaziale del monopolo, mentre α come la fase del sottogruppo di gauge $U(1)$. In particolare, scegliendo la seguente trasformazione di gauge:

$$\Omega(\theta, \varphi, \alpha = 0) = e^{-i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} e^{-i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} \in SU(2) \quad (40)$$

⁵⁷Questo problema può essere risolto per l'elettrone poiché la sua carica, in forma adimensionale, è piccola e quindi può essere approcciato perturbativamente; ma la stessa condizione di Dirac impone, di conseguenza, che la carica unitaria di monopolo magnetico sia grande e perciò non è possibile adottare la stessa strategia in questo secondo caso.

⁵⁸Nell'ipotesi che \mathcal{W} sia costituito da una sola orbita non degenera di G e cioè che $\exists \phi_0 \in \mathcal{W}$ t.c. $G \star \phi_0 \equiv \mathcal{W}$

⁵⁹In questo caso non è necessario scegliere una rappresentazione diversa da quella fondamentale, i cui elementi coincidono con quelli dell'algebra stessa; si veda la Sez. D.2 dell'Appendice D per la notazione.

con qualche conto si ottiene la forma del nuovo campo di gauge \mathcal{A}_μ^{WY} a partire da quello di Dirac esteso; le componenti spaziali di \mathcal{A}_μ^{WY} sono⁶⁰:

$$\mathcal{A}_m^{WY} = \Omega^{-1} \mathcal{A}_m^D \Omega + \frac{i}{q} \Omega^{-1} \partial_m \Omega = \epsilon_{amn} \frac{x^m \sigma^a}{qr^2} \frac{1}{2} \quad (41)$$

mentre la componente temporale rimane nulla poiché la trasformazione Ω è indipendente da t . \mathcal{A}_μ^{WY} non è più singolare lungo l'intera semiretta, ma solo nell'origine: questo è possibile grazie al fatto che la stessa trasformazione di gauge (40) è singolare nel termine in $\Omega^{-1} \partial_m \Omega$ e compensa la singolarità di \mathcal{A}_μ^D ; poiché la cancellazione avvenga in modo esatto è necessario assumere $gq = 1$ per legare la costante g presente nel potenziale di Dirac con la q della trasformazione di gauge. Sostituendo la (41) nella definizione di curvatura per una teoria di gauge non-abeliana, si ottiene:

$$\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{D}_m \mathcal{A}_n^{WY} - \mathcal{D}_n \mathcal{A}_m^{WY} = \epsilon_{mnk} \frac{x^a x^k \sigma^a}{2qr^4} \quad (42)$$

che ha precisamente il comportamento asintotico $\sim 1/r^2$ atteso dal campo magnetico di monopolo. Il monopolo di Wu-Yang presenta però ancora due criticità: l'energia è anche qui infinita, perché la singolarità nell'origine permane, e calcolando il flusso di \mathcal{F}_{mn} (che identifichiamo con il flusso del "campo magnetico generalizzato" e quindi, tramite il teorema di Gauss, con la carica di colore) su una superficie sferica all'infinito si ottiene zero.

Una soluzione ad energia finita per il monopolo magnetico nella teoria di gauge $SU(2)$ venne trovata indipendentemente da Gerard 't Hooft e Alexander Polyakov nel 1974 e si basa sull'accoppiamento del campo di gauge non-abeliano \mathcal{A}_μ con una terna di campi scalari complessi ϕ^a ($a \in \{1, 2, 3\}$). La lagrangiana di questo modello, noto come **modello di Georgi-Glashow**, è la seguente:

$$\mathcal{L}_{GG} = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \text{Tr} \overline{D^\mu \phi} D_\mu \phi - V(\phi) = -\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{2} \overline{D^\mu \phi^a} D_\mu \phi^a - V(\phi^a) \quad (43)$$

avendo scelto una rappresentazione $\{T^a\}$ di $\mathfrak{su}(2)$ di dimensione tre e normalizzata in modo tale che $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ ⁶¹. Il potenziale scelto è il solito potenziale di quarto grado:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 \quad (44)$$

La corrispondente energia statica è evidentemente minimizzata per:

$$\phi^a \phi^a = v^2 \quad F_{mn}^a = 0 \quad D_n \phi^a = 0 \quad (45)$$

Quindi la varietà di vuoto \mathcal{W}_ϕ per ϕ è la sfera S_{int}^2 nello spazio degli isospin. Poiché le soluzioni solitoniche sulla sfera all'infinito spaziale S_∞^2 devono tendere ad un vuoto, ma non necessariamente allo stesso grazie al campo di gauge, le possibilità topologicamente distinte sono $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$ e sono ancora indicizzate da un winding number W e nuovamente la stabilità delle soluzioni con $W \neq 0$ è garantita da solide basi topologiche, come precedentemente sottolineato.

Data una soluzione ϕ , è possibile calcolarne il winding number tramite il seguente integrale di superficie sulla sfera all'infinito spaziale⁶²:

$$W_\phi = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{lmn} \int_{S_\infty^2} dS^l \hat{\phi} \cdot (\partial_m \hat{\phi} \times \partial_n \hat{\phi}) \quad (46)$$

⁶⁰Si veda *Shnir* ([7] Cap. 5, sez. 5.1.1, p. 142)

⁶¹Si veda la Sezione D.2 dell'Appendice D

⁶²Questa formula si ottiene parametrizzando la mappa $\phi_\infty : S_\infty^2 \rightarrow S_{int}^2$ in coordinate polari su entrambe le sfere per definire W e poi passando in coordinate cartesiane.

con $\hat{\phi} = \underline{\phi}/|\underline{\phi}|$ e dS^l componente l -esima della normale alla superficie infinitesima dS . Possiamo inoltre sfruttare la condizione (45) per la derivata covariante per scrivere:

$$0 = \frac{1}{8\pi} \epsilon^{ijk} \int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi} \cdot (D_j \hat{\phi} \times D_k \hat{\phi}) \quad (47)$$

Scelta la rappresentazione aggiunta $(T^a)_{mn} = -i\epsilon_{amn}$ per $\mathfrak{su}(2)$ ⁶³, esplicitiamo le derivate covarianti nella (47) ottenendo, dopo qualche manipolazione:

$$\begin{aligned} W_\phi &= \frac{1}{8\pi} \epsilon^{ijk} \int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi} \cdot (\partial_j \hat{\phi} \times \partial_k \hat{\phi}) = \frac{q}{4\pi} \int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi} \cdot \mathbf{B}_i \\ B_i^a &:= -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk}^a \end{aligned} \quad (48)$$

Se interpretiamo \mathbf{B}_i come la i -esima componente del campo magnetico generalizzato di $SU(2)$, $\hat{\phi} \cdot \mathbf{B}_i$ è la sua proiezione lungo la direzione dello stato di vuoto ad infinito: in altre parole, il campo scalare $\underline{\phi}$ ad infinito rompe la simmetria $SU(2)$, perché soggetto al potenziale $V(\phi)$, e permette di identificare una direzione lungo la quale il campo magnetico non-abeliano si riduce al campo magnetico classico, con simmetria di gauge $U(1)$. La prima delle (48) può essere riespressa come:

$$\begin{aligned} Q_M &= 4\pi g = \frac{4\pi}{q} k \quad (k \in W_\phi \in \mathbb{Z}) \\ Q_M &:= \int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi} \cdot \mathbf{B}_i \end{aligned} \quad (49)$$

Si è sostanzialmente definita la carica magnetica Q_M tramite il flusso del campo magnetico non-abeliano proiettato, in analogia con il teorema di Gauss; si noti, in particolare, che la più piccola carica di monopolo prevista da questa teoria è tale che $gq = 1$, ovvero il doppio della minima compatibile con la condizione di quantizzazione di Dirac⁶⁴. Benché non si conoscano soluzioni esatte e topologicamente non banali delle equazioni di campo associate al modello di Georgi-Glashow, 't Hooft e Polyakov proposero di considerare, per il caso $W_\phi = 1$, configurazioni con la seguente struttura (nella rappresentazione aggiunta):

$$\begin{aligned} \phi^a &= \frac{x^a}{r} h(r) \\ A_i^a &= \epsilon^{aim} \frac{x^m}{r} \left[\frac{1 - u(r)}{qr} \right] \quad A_0^a = 0 \end{aligned} \quad (50)$$

con $h(r)$ e $u(r)$ funzioni della sola variabile radiale, da determinarsi con metodi numerici. Tale ansatz è solitamente chiamato **campo a riccio** (in inglese **hedgehog field**) a causa dell'aspetto della soluzione⁶⁵. Inserendo l'espressione dell'ansatz nelle equazioni del moto del modello di Georgi-Glashow si ottengono delle equazioni differenziali per $h(r)$ e $u(r)$; a queste si aggiungono le condizioni al contorno $h(0) = 0$ e $u(0) = 1$, necessarie per mantenere finiti i campi nell'origine, e $h(\infty) = v$ con $u(\infty) = 0$, necessarie affinché la configurazione dell'ansatz tenda ad uno stato di vuoto all'infinito. Con queste premesse si ricavano delle espressioni asintotiche per $h(r)$ e $u(r)$, le quali, sostituite nel campo magnetico non-abeliano B_i^a corrispondente al campo a riccio (50), permettono infine di dare l'espressione a grandi distanze di quest'ultimo, ignorando contributi esponenzialmente soppressi:

$$B_i^a(r \rightarrow \infty) \sim \frac{x^a x^i}{qr^4} \quad (51)$$

⁶³Dove a è l'indice che scorre sulla base di $\mathfrak{su}(2)$, mentre m e n scorrono sulle componenti matriciali del rappresentante T^a ; poiché si è scelta una rappresentazione di dimensione $3 = \dim \mathfrak{su}(2)$ si ha che $a, m, n \in \{1, 2, 3\}$

⁶⁴Si veda Weinberg ([10] Cap. 5, sez. 5.2) per qualche ulteriore dettaglio su questo punto e sull'intera sottosezione.

⁶⁵I campi ϕ^a e A_i^a hanno carattere puramente radiale all'infinito.

che ha una struttura del tutto simile alla (42) valida per il monopolo di Wu e Yang, ma ha ora un flusso totale proiettato su $\underline{\phi}$ non nullo, infatti⁶⁶:

$$\int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi} \cdot \mathbf{B}_i = \int_{S_\infty^2} dS^i \hat{\phi}^a B_i^a = \int_{S_\infty^2} dS^i \left(\frac{x^a x^a x^i}{qr^5} \right) = \int_{S_\infty^2} \left(\frac{1}{qr^3} \right) \underline{x} \cdot d\underline{a} = \frac{4\pi}{q} \quad (52)$$

e quindi il monopolo di 't Hooft-Polyakov ha winding number $W_\phi = 1$, secondo (48) e (49).

A livello qualitativo, possiamo immaginarlo composto da una zona centrale, di raggio finito R_0 stimabile dall'ansatz e dalle equazioni del moto, nella quale il campo di gauge completo \mathcal{A}_μ ed i campi scalari ϕ assumono una struttura complessa, e un comportamento all'infinito che invece ha la semplice forma asintotica del campo di monopolo di Dirac: l'estensione ad $SU(2)$ del gruppo di gauge ha permesso di risolvere la singolarità puntuale nell'origine ad una zona estesa in cui è concentrata, in modo non banale, la carica magnetica.

⁶⁶Si ricordi che ϕ^a tende a v in modulo, perciò $\hat{\phi}^a = \phi^a/|\phi|$ tende a 1.

A AZIONI DI GRUPPO

Definizione A.0.1. Sia (G, \circ) un gruppo e X un insieme non vuoto. Si consideri l'operazione binaria:

$$\star : G \times X \longrightarrow X$$

definita dalle seguenti proprietà:

1. *Identità:*

$$I \star x := x \quad \forall x \in X$$

dove I è l'identità di G

2. *Compatibilità:*

$$(g \circ h) \star x := g \star (h \star x) \quad \forall g, h \in G \quad \forall x \in X$$

Allora (G, X, \star) si dice **azione di gruppo** di G su X da sinistra (o **G-azione** sinistra).

Si noti che se V è uno spazio vettoriale, la rappresentazione di un gruppo G su V è un particolare tipo di azione di gruppo, pertanto quest'ultima definizione generalizza quella di rappresentazione.

Definizione A.0.2. Sia (G, X, \star) una azione di gruppo. Si definisce **orbita** dell'elemento $x \in X$ l'insieme:

$$G \star x := \{y \in X \mid \exists g \in G \text{ t.c. } g \star x = y\}$$

Ovvero è l'insieme delle immagini dell'elemento x rispetto all'azione di tutti i possibili elementi di G .

Definizione A.0.3. Sia (G, X, \star) una azione di gruppo. Si definisce **stabilizzatore** dell'elemento $x \in X$ l'insieme:

$$H_x := \{h \in G \mid h \star x = x\}$$

Pertanto le orbite sono sottoinsiemi di X , gli stabilizzatori sono sottoinsiemi di G .

Teorema A.0.4. Lo spazio quoziente G/H_x di un'azione di gruppo (G, X, \star) rispetto allo stabilizzatore di $x \in X$ è isomorfo all'orbita di x , $G \star x$.

Dimostrazione. Occorre dimostrare che gli elementi di G/H_x possono essere messi in relazione biunivoca con quelli di $G \star x$. Sia $\{g_1\} \in G/H_x$; per definizione di spazio quoziente e di classe di equivalenza:

$$\{g_1\} := \{g \in G \mid \exists h \in H_x \text{ t.c. } g = g_1 \circ h\}$$

Allora a $\{g_1\}$ possiamo associare il sottoinsieme di $G \star x$ che corrisponde all'azione di tutti gli elementi della classe di equivalenza di g_1 su x . Tale associazione è iniettiva, poiché:

$$g_1 \star x = g_2 \star x \implies x = (g_1^{-1} \circ g_2) \star x \implies$$

$$\exists h = g_1^{-1} \circ g_2 \in H_x \text{ t.c. } g_2 = g_1 \circ h \implies \{g_1\} = \{g_2\}$$

L'associazione appena definita è anche suriettiva, poiché qualsiasi elemento nell'orbita $G \star x$ verrà generato dall'azione su x di un qualche elemento in una classe di equivalenza in G/H_x . Ovvero, ad ogni elemento dell'orbita di x corrisponde una ed una sola classe di equivalenza del gruppo rispetto allo stabilizzatore di x . \square

B CENNI DI TOPOLOGIA

Partiamo con il dare una definizione precisa di topologia e spazio topologico⁶⁷:

Definizione B.0.1. *Sia Ω un insieme. Una **topologia** ϑ_Ω su Ω è un sottoinsieme dell'insieme delle parti di Ω ⁶⁸ soddisfacente le seguenti tre condizioni (o assiomi di topologia):*

1. $\emptyset \in \vartheta_\Omega \wedge \Omega \in \vartheta_\Omega$
2. $\forall U, V \in \vartheta_\Omega \implies U \cap V \in \vartheta_\Omega$
3. $\{U_i\}_{i \in I} \in \vartheta_\Omega \implies \bigcup_{i \in I} U_i \in \vartheta_\Omega$

*Dove I è un'arbitraria famiglia di indici. La coppia $(\Omega, \vartheta_\Omega)$ è allora detta **spazio topologico**. Gli elementi di ϑ_Ω si dicono **insiemi aperti**.*

Useremo principalmente spazi topologici che siano interpretabili come sottoinsiemi di \mathbb{R}^n . Sceglieremo come aperti quelli dell'analisi reale, che rispettano la definizione (B.0.1). La corrispondente topologia viene chiamata *topologia standard*.

Uno spazio topologico è la più semplice struttura richiesta per poter parlare di continuità, come chiarisce la seguente definizione:

Definizione B.0.2 (Continuità, omeomorfismo). *Siano (M, ϑ_M) e (N, ϑ_N) due spazi topologici; sia poi:*

$$f : M \longrightarrow N$$

*una mappa tra essi. f si dice **continua** se e solo se:*

$$\forall U \in \vartheta_N \quad f^{-1}(U) \in \vartheta_M$$

dove $f^{-1}(U)$ denota la controimmagine dell'insieme U . A parole diciamo che una funzione tra spazi topologici è continua se la controimmagine di ogni aperto nel codominio è un aperto nel dominio.

*Se f è continua, invertibile (quindi iniettiva e suriettiva) e la sua inversa è continua, allora f è detta **isomorfismo topologico** o **omeomorfismo**. Se due spazi topologici ammettono almeno un omeomorfismo tra loro allora sono detti **omeomorfi**.*

Due spazi topologici omeomorfi sono "uguali" dal punto di vista della topologia: gli elementi della topologia dell'uno possono essere mappati in modo univoco ed invertibile negli elementi della topologia dell'altro; gli omeomorfismi sono dunque la classe delle mappe che preservano la struttura topologica. In linguaggio gergale e pittorico si dice che due spazi topologici sono omeomorfi quando possono essere deformati l'uno nell'altro senza effettuare "tagli o cuciture" tra essi, quindi in modo continuo.

Nell'ambito degli spazi topologici non è ancora definita la nozione di *dimensione*; per far ciò introduciamo una sovrastruttura sugli spazi topologici di importanza capitale in fisica: la varietà differenziabile. La definizione precisa di varietà differenziabile richiede un certo numero di altre nozioni non scontate, che però appesantirebbero la trattazione; ritengo tuttavia utile riportare qui la definizione di varietà differenziabile a cui si fa riferimento nel testo, per completezza⁶⁹:

⁶⁷Vedasi Nakahara ([2] Cap. 2, sez. 2.3) per gran parte di questa sezione.

⁶⁸L'insieme delle parti di un insieme Ω è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω .

⁶⁹Vedasi Nakahara ([2] Cap. 5). A tal proposito è importante notare che in inglese esistono i termini *manifold* e *variety*, con significati diversi, entrambi tradotti con l'italiano *varietà*; nella presente trattazione le varietà sono i *manifold*. Un altro riferimento bibliografico molto preciso per lo studio delle varietà differenziabili in fisica è Thirring ([8] Cap. 2)

Definizione B.0.3. Uno spazio topologico (M, ϑ_M) paracompatto⁷⁰ di Hausdorff⁷¹ è detto **varietà differenziabile di dimensione d** se:

1. Ad M è associata una famiglia di coppie $\{U_i, x_i\}$, dove $U_i \in \vartheta_M$ sono degli aperti tali che l'unione di tali insiemi $\cup_i U_i$ contenga M (sono una **copertura aperta** di M) e $x_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^d$ sono degli omeomorfismi da U_i a sottoinsiemi aperti di \mathbb{R}^d .
2. Per ogni coppia U_i e U_j tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ la mappa $\psi_{ij} = x_i \circ x_j^{-1}$ da $x_j(U_i \cap U_j) \in \mathbb{R}^d$ a $x_i(U_i \cap U_j) \in \mathbb{R}^d$ che effettua il cambio di coordinate è $C^\infty(\mathbb{R}^d)$

Gli omeomorfismi locali x_i prendono il nome di **carte** e l'insieme di tali carte è detto **atlante**.

C OMOTOPIA

Attualmente non è ancora nota alcuna lista completa di proprietà che, qualora vengano condivise da due generici spazi topologici, permettano di stabilire che essi sono omeomorfi⁷². Esistono viceversa diversi parametri, detti *invarianti topologici*, che se non coincidono per due spazi topologici permettono di escludere che siano omeomorfi e quindi garantiscono che non siano topologicamente equivalenti, nel senso chiarito precedentemente. Una di queste è legata al concetto di omotopia⁷³.

Definizione C.0.1 (Omotopia). Siano (M, ϑ_M) e (N, ϑ_N) due spazi topologici. Denotiamo con $\Gamma(M, N)$ l'insieme delle funzioni continue da M ad N e con $\Gamma_*(M, N)$ il sottoinsieme di $\Gamma(M, N)$ formato da quelle funzioni continue che mappano un punto designato $x_0 \in M$ in un designato punto $y_0 \in N$. x_0 e y_0 prendono il nome di **punti base** e si dice che le funzioni in $\Gamma_*(M, N)$ **preservano i punti base**.

Date $f, g \in \Gamma(M, N)$, queste si dicono **omotope**, e si scrive $f \sim g$, se esiste una funzione continua:

$$F : [0, 1] \times M \rightarrow N$$

che soddisfa la seguente proprietà:

1. F interpola tra f e g :

$$F(0, x) = f(x) \quad \wedge \quad F(1, x) = g(x) \quad \forall x \in M$$

Se in particolare $f, g \in \Gamma_*(M, N)$, allora f e g sono omotope in $\Gamma_*(M, N)$ se F soddisfa anche l'ulteriore proprietà:

2. F preserva i punti base:

$$F(\tau, x_0) = y_0 \quad \forall \tau \in [0, 1]$$

⁷⁰La nozione di paracompattatezza è molto più generica di quella di compattatezza ed è indispensabile nella teoria delle varietà topologiche. Purtroppo non è possibile restringersi ai soli casi compatti, poiché si perderebbero molti casi utili, come tutti gli spazi euclidei, che vogliamo invece considerare valide varietà topologiche.

⁷¹Uno spazio topologico si dice di Hausdorff se per ogni coppia di punti non coincidenti esiste un intorno aperto per ciascuno dei punti della coppia tale che l'intersezione dei due aperti sia vuota. Insieme alla paracompattatezza, le due richieste garantiscono che le varietà siano spazi metrizzabili e separabili, in accordo con Thirring([8] Cap. 2, def. 2.1.6)

⁷²Nakahara ([2] Cap. 2, sez. 2.4)

⁷³Per questa sezione si fa riferimento a Percacci ([4], Appendice A delle note disponibili al link) e Manton & Sutcliffe ([1] Cap. 3, sez. 3.1). Per una trattazione matematicamente più precisa e completa si veda Nakahara ([2] Cap. 4).

A parole, due funzioni continue sono omotope se possono essere trasformate in modo continuo l'una nell'altra. La funzione F è detta **funzione di omotopia** e, al variare di τ , descrive un cammino continuo in $\Gamma_{(*)}(M, N)$, quindi f e g sono omotope se e solo se appartengono alla stessa componente connessa per archi di $\Gamma_{(*)}(M, N)$.

Poiché l'omotopia in $\Gamma_*(M, N)$ è più restrittiva, faremo riferimento a quest'ultima, con l'idea che tutti i risultati validi in tale circostanza sono a fortiori validi in $\Gamma(M, N)$.

Lemma C.0.2. *La relazione di omotopia \sim è una relazione di equivalenza.*

Dimostrazione. È riflessiva perché data f in $\Gamma_*(M, N)$ la mappa $F(\tau, x) = f(x) \quad \forall \tau \in [0, 1]$ è continua ed interpola f con se stessa, quindi $f \sim f \quad \forall f \in \Gamma_*(M, N)$.

È simmetrica perché se $f \sim g$ allora esiste $F(\tau, x)$ che deforma in modo continuo f in g preservando i punti base. Ma allora $\tilde{F}(\tau, x) := F(1 - \tau, x)$ deforma in modo continuo g in f preservando i punti base, ovvero $f \sim g \implies g \sim f \quad \forall f, g \in \Gamma_*(M, N)$.

È transitiva: date $f \sim g$ e $g \sim h$, $f, g, h \in \Gamma_*(M, N)$, sia $F_1(\tau, x)$ la funzione che interpola tra f e g e $F_2(\tau, x)$ quella che interpola tra g ed h . Definiamo:

$$F_3 : [0, 1] \times M \rightarrow N \quad , \quad F_3(\tau, x) = \begin{cases} F_1(2\tau, x) & \forall \tau \in [0, 1/2] \\ F_2(2\tau - 1, x) & \forall \tau \in [1/2, 1] \end{cases} \quad \forall x \in M$$

F_3 interpola in modo continuo tra f e h preservando i punti base. □

Definizione C.0.3. *Si dice che due spazi topologici (M, ϑ_N) e (M, ϑ_M) hanno lo stesso **tipo di omotopia** se esistono due funzioni continue $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow M$ tali che $f \circ g$ sia omotopa all'identità su N e $g \circ f$ sia omotopa all'identità su M .*

Nota:

- Due spazi topologici omeomorfi hanno evidentemente lo stesso tipo di omotopia poiché basta scegliere come f l'omeomorfismo e come g il suo inverso f^{-1} . Non è necessariamente vero il contrario.

Definizione C.0.4. *Uno spazio topologico (N, ϑ_N) è detto **contraibile** se la mappa identità:*

$$I : N \rightarrow N \quad t.c. \quad I(x) = x \quad \forall x \in N$$

(che evidentemente preserva qualunque punto base scelto $x_0 \in N$) è omotopa alla mappa costante:

$$\hat{x}_0 : N \rightarrow N \quad t.c. \quad \hat{x}_0(x) = x_0 \quad \forall x \in N$$

Nota:

- Ogni spazio vettoriale reale o complesso è contraibile: basta scalare in modo continuo ogni vettore moltiplicandolo per lo scalare $\tau \in [0, 1]$ per passare dalla mappa nulla alla mappa identità. In particolare, gli spazi euclidei \mathbb{R}^n sono contraibili. Le sfere S^n con $n \geq 1$, invece, non sono contraibili, intuitivamente perché per contrarle ad un punto bisogna tagliarle in un altro.

Lemma C.0.5. *Se (N, ϑ_N) è uno spazio topologico contraibile, allora tutti gli elementi di $\Gamma_*(M, N)$ sono omotopi (indipendentemente dalla scelta dei punti base).*

Dimostrazione. Sia x_0 il punto base di M e y_0 il punto base di N . Mostriamo che ogni elemento di $\Gamma_*(M, N)$ è omotopo alla mappa costante di $\Gamma_*(M, N)$:

$$\hat{y}_{0,M}(x) = y_0 \quad \forall x \in M$$

Infatti sia $f \in \Gamma_*(M, N)$ e sia Id_N l'identità su N . Poiché N è contraibile, $Id_N \sim \hat{y}_{0,N}$, dove $\hat{y}_{0,N}$ è la mappa costante in $\Gamma_*(N, N)$. Evidentemente $f = Id_N \circ f \sim \hat{y}_{0,N} \circ f = \hat{y}_{0,M}$, che prova la tesi. □

C.1 Gruppi di omotopia

Un importante strumento nella classificazione degli spazi topologici, legato all'omotopia, è costituito dai **gruppi di omotopia**:

Definizione C.1.1. Sia S^d la sfera di raggio unitario in \mathbb{R}^d , ovvero l'insieme dei punti la cui distanza euclidea dall'origine è 1; si scelga un generico punto base $p_0 \in S^d$. Sia poi (M, ϑ_M) un generico spazio topologico di punto base x_0 . Allora lo spazio quoziente di $\Gamma_*(S^d, M)$ rispetto alla relazione di omotopia si denota con $\pi_d(M)$ e prende il nome di **gruppo di omotopia di ordine d di M** :

$$\pi_d(M) := \left\{ [f_i]_{\sim} \mid f_i \in \Gamma_*(S^d, M) \right\}$$

$$[f_i]_{\sim} := \left\{ g \in \Gamma_*(S^d, M) \mid g \sim f_i \right\}$$

(la classe di equivalenza $[f_i]_{\sim}$ è detta **classe di omotopia** di $f_i \in \Gamma_*(S^d, M)$). Il gruppo di omotopia di ordine uno, $\pi_1(M)$, è detto **gruppo fondamentale**.

Teorema C.1.2. Il gruppo di omotopia $\pi_d(M)$ per $d \geq 1$ è un gruppo con l'opportuna regola di composizione tra mappe. Se $d \geq 2$ il gruppo è anche abeliano.

Dimostrazione. È particolarmente facile dimostrare il teorema per $d = 1$: parametrizziamo S^1 con la variabile $\theta \in [0, 2\pi]$ e riformuliamo la proprietà di preservamento del punto base con la richiesta $f(0) = f(2\pi) = x_0$, $\forall f \in \Gamma_*(S^1, M)$, dove x_0 è il punto base di M . Allora date due mappe $f, g \in \Gamma_*(S^1, M)$ appartenenti a classi di equivalenza diverse, cioè ad elementi distinti di $\pi_1(M)$, possiamo comporle come segue:

$$(f \circ g)(\lambda) = \begin{cases} f(2\lambda) & \forall \lambda \in [0, \pi] \\ g(2\lambda - \pi) & \forall \lambda \in [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

È facile verificare che $f \circ g$ così definita è ancora un elemento di $\Gamma_*(S^1, M)$, che $f \circ \hat{x}_0 \sim f$ dove \hat{x}_0 è la mappa costante che manda ogni punto di S^1 nel punto base x_0 di M , che ad ogni f corrisponde un'inversa $f^{-1}(\lambda) = f(-\lambda)$ tale che $f \circ f^{-1} \sim \hat{x}_0$ ed infine che la composizione \circ è associativa: dunque $(\pi_1(M), \circ)$ è un gruppo⁷⁴. In genere, tuttavia, non è abeliano.

Nel caso di $d \geq 2$ è tedioso scrivere esplicitamente la composizione tra mappe, quindi ci limiteremo a darne una descrizione qualitativa: similmente a quanto fatto per S^1 , si parametrizza S^d con un ipercubo $[0, 2\pi]^d$ con la condizione aggiuntiva che ogni faccia del cubo sia considerata coincidente al punto base p_0 della sfera, ovvero che ogni punto di S^d per il quale almeno uno dei d parametri vale 0 o 2π sia già il punto base p_0 . Si sfrutta poi una sola delle d variabili per

⁷⁴Per essere precisi, poiché $\pi_1(M)$ è uno spazio quoziente, occorre anche verificare che tali proprietà non dipendono dalla scelta del rappresentante all'interno di una stessa classe di equivalenza.

effettuare la composizione tra due mappe, lasciando le altre libere. Un'illustrazione schematica di questa situazione permette anche di cogliere perché in tal caso il gruppo è abeliano:

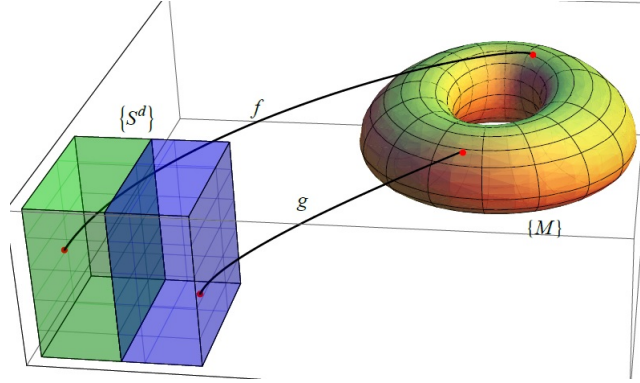


Figura 8: Rappresentazione simbolica della composizione di mappe in $\pi_p(M)$

Infatti, in due o più dimensioni spaziali, è intuitivamente possibile deformare in modo continuo la divisione dell'ipercubo di modo da invertire l'ordine dei domini di f e g e comporle in ordine inverso, ovvero $(f \circ g) \sim (g \circ f)$. È importante notare che, con riferimento alla Figura 8, tutti i punti sulla superficie del cubo e sull'iperpiano che lo divide devono essere mappati nel punto base $x_0 \in M$. \square

La scelta del punto base è un espediente molto comodo per definire la composizione di mappe nella costruzione dei gruppi di omotopia; tuttavia, poiché le sfere S^d per $d > 1$ sono insiemi connessi per archi, è possibile spostare il punto base dello spazio di partenza a piacere e qualora anche N sia connesso per archi il gruppo di omotopia $\pi_d(N)$ è del tutto indipendente dalla scelta dei punti base. Chiariamo adesso l'importanza dei gruppi di omotopia:

Lemma C.1.3. *Se due spazi topologici hanno lo stesso tipo di omotopia, allora i rispettivi gruppi di omotopia di qualsiasi ordine sono isomorfi.*

La dimostrazione è semplice: si sfruttano le mappe f e g che definiscono il tipo di omotopia dei due spazi per costruire esplicitamente l'isomorfismo. Combinando il Lemma (C.1.3) appena enunciato con la Nota alla Definizione (C.0.3) si perviene all'importante conclusione:

Teorema C.1.4. *I gruppi di omotopia sono invarianti topologici: se due spazi topologici non hanno tutti i gruppi di omotopia coincidenti allora non sono omeomorfi.*

Esaminiamo ora più dettagliatamente le proprietà dei gruppi di omotopia:

- $\pi_0(M)$ è un caso particolare, perché non è necessariamente un gruppo. Pensiamo ad S^0 come alla superficie della palla unitaria di centro 0 in \mathbb{R} , ovvero S^0 è parametrizzata dalla coppia di punti $\{-1\}, \{+1\}$. Scegliamo arbitrariamente $\{-1\}$ come punto base e quindi imponiamo $f(-1) = x_0 \in M \quad \forall f \in \Gamma_*(S^0, M)$. Tutte le mappe in $\Gamma_*(S^0, M)$, dunque, si distinguono solo per il punto di M che associano ad $\{1\}$: in particolare, se $f(1)$ e $g(1)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di M , allora evidentemente $f, g \in \Gamma_*(S^0, M)$ sono omotope, poiché possono essere trasformate l'una nell'altra grazie alla curva continua che connette $f(1)$ e $g(1)$. Dunque $\pi_0(M)$, come insieme, è isomorfo al numero di componenti connessi per archi di M ; se M è connesso per archi $\pi_0(M)$ contiene un solo elemento che possiamo chiamare I , l'identità, ed in tal caso π_0 è effettivamente un gruppo: il gruppo banale.

Si pensi adesso ad un generico insieme di mappe continue tra due spazi topologici che

preservano i punti base, $\mathcal{Q} := \Gamma_{(*)}(M, N)$. Secondo la Definizione (C.0.1), due elementi in \mathcal{Q} sono omotopi in tale insieme se e solo se esiste un cammino continuo in \mathcal{Q} che connette i due elementi; ne segue che lo spazio quoziente di \mathcal{Q} rispetto all'omotopia, indicato con \mathcal{Q}/\sim , è isomorfo all'insieme delle componenti connesse per archi di \mathcal{Q} , ovvero vale la formula:

$$\mathcal{Q} := \Gamma_{(*)}(M, N) \quad \implies \quad \mathcal{Q}/\sim \simeq \pi_0(\mathcal{Q}) \quad (53)$$

- $\pi_1(M)$, il gruppo fondamentale, è un esempio famoso: è l'insieme delle classi di equivalenza delle curve chiuse su M passanti per un dato punto base x_0 rispetto alla relazione di omotopia. Se tutte le curve chiuse su M possono essere contratte in modo continuo ad un punto M si dice **semplicemente connesso** e avremo che $\pi_1(M) = I$ è il gruppo banale. Consideriamo invece il toro bidimensionale, \mathbb{T}^2 , come varietà differenziabile immersa in \mathbb{R}^3 : tutte le curve chiuse che girano attorno alla circonferenza maggiore (in blu nella Figura 9) non sono contraibili nel punto base e due curve di tal genere che hanno versi differenti e/o fanno un numero di giri differenti non sono omotope. Vi è poi una classe di omotopia per ciascuna curva che gira in un determinato verso e per un determinato numero di volte attorno al toroide passando per l'interno del buco centrale (in rosso nella Figura 9): ognuna di queste può essere combinata con ciascuna delle precedenti. Infine c'è la classe di omotopia della curva costante, ovvero l'insieme di tutte le curve contraibili. É facile rendersi conto, dunque, che $\pi_1(\mathbb{T}^2)$ è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$, dove la coppia $(0, 0)$ rappresenta la classe di omotopia dell'identità e la coppia (n, m) rappresenta l'insieme delle curve che si avvolgono n volte attorno alla circonferenza maggiore e passano m volte dal buco del toroide.

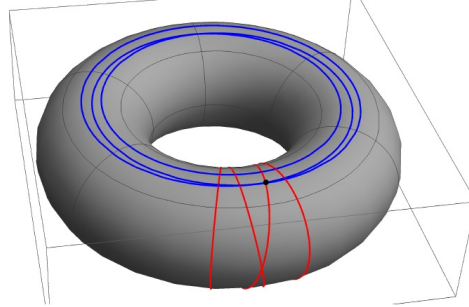


Figura 9: Due curve non contraibili nel punto base (in nero) e non omotope, sul toroide \mathbb{T}^2 .

- Se N è contraibile $\pi_d(N) \simeq I$ è il gruppo banale, in virtù del lemma (C.0.5). Si noti che la condizione di contraibilità per N è più forte della richiesta che sia connesso per archi e/o semplicemente connesso: ad esempio tutte le sfere S^d per $d \geq 1$ sono connesse per archi e per $d \geq 2$ anche semplicemente connesse, ma non sono contraibili.
- Un importante teorema di Hopf asserisce che:

$$\pi_d(S^d) \simeq \mathbb{Z} \quad \forall d \geq 1 \quad (54)$$

Confrontandolo con il precedente esempio del toroide, notiamo che è relativamente comune trovare un'associazione tra un numero intero \mathbb{Z} e una particolare classe di omotopia di una varietà differenziabile: questo numero, quando esiste, prende il nome di **winding number**, è un invariante topologico e caratterizza topologicamente gli elementi di $\Gamma_{*}(M, N)$. Intuitivamente quantifica il numero di volte ed il verso in cui N viene ricoperto da M da parte degli elementi di quella classe di equivalenza.

- Vale che:

$$\pi_m(S^n) \simeq I \quad \forall n > m \geq 1$$

Nel caso $\pi_1(S^2)$ questo si riduce alla semplice affermazione che S^2 è semplicemente connessa.

- I gruppi di omotopia delle sfere $\pi_m(S^n) \quad \forall n < m$ sono invece notoriamente difficili da calcolare; diamo tre risultati importanti:

$$\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z} \qquad \pi_4(S^2) \simeq \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2$$

dove \mathbb{Z}_2 è il gruppo ciclico di ordine due. Ironicamente, alcuni di questi risultati sui gruppi di omotopia delle sfere di ordini alti vennero annunciati da Heinz Hopf nel 1931, lo stesso anno in cui Dirac pubblicò il suo articolo sui monopoli magnetici, che solo più tardi si rivelarono intimamente legati al lavoro di Hopf ([3] Cap. 0, sec. 0.3).

D CENNI SULLE TEORIE DI GAUGE CLASSICHE

D.1 Teorie di gauge abeliane: l'elettrodinamica classica

Consideriamo una densità lagrangiana Lorentz-invariante per un campo complesso in 3 dimensioni spaziali, $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ ⁷⁵:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \bar{\phi} \partial_\mu \phi - V(|\phi|) \quad (55)$$

\mathcal{L} è invariante per trasformazioni di fase globali, rappresentate dal gruppo $U(1)$:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi \quad \implies \quad \mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[\phi'] \quad (e^{i\theta} \in U(1) \quad \forall \theta \in \mathbb{R})$$

Immaginiamo ora di voler promuovere questa simmetria della lagrangiana ad un'invarianza per trasformazioni di fase *locali*:

$$\phi \longrightarrow \phi' = \Omega \phi = e^{iq\alpha(t,x)} \phi \quad \forall \alpha \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}) \quad q \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (56)$$

Questo richiede che le derivate parziali nella lagrangiana vengano sostituite con la *derivata covariante* definita da:

$$D_\mu := \partial_\mu - iqA_\mu$$

dove $A_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ è un campo quadrivettoriale. Per lasciare invariata la lagrangiana D_μ deve essere invariante per trasformazioni di fase locali, ovvero deve trasformare in accordo con:

$$\begin{aligned} D_\mu = D'_\mu &= \Omega^{-1} D_\mu \Omega = iq \partial_\mu \alpha + (\partial_\mu - iqA_\mu) = \partial_\mu - iqA'_\mu \implies \\ \implies A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu \alpha = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \frac{i}{q} \Omega^{-1} d\Omega \end{aligned} \quad (57)$$

La trasformazione (57) per il campo A^μ è detta **trasformazione di gauge**. La lagrangiana gauge-invariante è dunque:

$$\mathcal{L}_g = \frac{1}{2} \overline{D^\mu \phi} D_\mu \phi - V(|\phi|) \quad (58)$$

Nel caso dell'elettromagnetismo, A^μ rappresenta il quadripotenziale e il numero reale q , detto **costante di accoppiamento**, è la carica dell'elettrone.

Per formulare una teoria nella quale si conservino energia e quantità di moto è necessario tener

⁷⁵In questa sezione una barra orizzontale sopra una quantità complessa denota il coniugato di tale quantità.

conto anche della dinamica del campo elettromagnetico⁷⁶. Ciò può essere fatto definendo il **tensore elettromagnetico**:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

con il quale si costruisce una lagrangiana, corrispondente al campo elettromagnetico libero:

$$\mathcal{L}_{e.m.} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

le cui equazioni del moto sono le equazioni di Maxwell; è facile verificare che il tensore elettromagnetico e dunque anche $\mathcal{L}_{e.m.}$ sono invarianti per trasformazioni di gauge (57).

Se $\mathcal{L}_{e.m.}$ viene aggiunta a \mathcal{L}_g definita dalla (58) si ottiene finalmente una lagrangiana Lorentz-invariante, con simmetria di gauge $U(1)$, per un campo scalare ϕ accoppiato con il campo elettromagnetico, la cui corrispondente dinamica conserva energia e quantità di moto:

$$\mathcal{L}_{g.e.m.} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi - V(|\phi|) \quad (59)$$

D.1.1 Elettrodinamica classica in due dimensioni spaziali

Il potenziale vettore $\tilde{A} = (A^1, A^2)$ ⁷⁷ ha ora due componenti, mentre il potenziale scalare $\varphi = A^0$ non cambia sostanzialmente, tranne per l'ovvia dipendenza da una variabile $x \in \mathbb{R}^2$ e non più di \mathbb{R}^3 . Il potenziale $\tilde{A}^\mu = (A^0, A^1, A^2)$, pertanto, può essere visto come la proiezione sulle prime tre componenti di un quadripotenziale A^μ in tre dimensioni, che non dipenda da x^3 . Il tensore elettromagnetico è:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\mu\nu} &:= \partial_\mu \tilde{A}_\nu - \partial_\nu \tilde{A}_\mu \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2\} \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & E^1 & E^2 \\ -E^1 & 0 & -B \\ -E^2 & B & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si ha cioè una sola componente B del campo magnetico, che è ora un campo scalare, e due componenti del campo elettrico, E^1 ed E^2 .

D.2 Teorie di gauge non-abeliane

Per comprendere meglio il senso delle teorie di gauge nel caso non abeliano può essere utile astrarre la costruzione fatta per l'elettromagnetismo, con lo scopo di coglierne la struttura matematica soggiacente. Le teorie di gauge sono naturalmente ambientate nell'ambito della geometria differenziale; la trattazione precisa è molto complessa e mi limito ad un richiamo generico e non rigoroso, volto principalmente a dare supporto alla terminologia usata nell'elaborato e a fornire un'idea qualitativa dei concetti. Una esposizione più completa di tali argomenti si può trovare nelle fonti [2], [3], [7], [8] della bibliografia.

Data una sottovarietà differenziabile M dello spaziotempo di Minkowski, detta **spazio base**, ed un gruppo di Lie G , detto **gruppo di struttura** (di gauge), è possibile costruire una varietà P , chiamata **spazio totale**, localmente omeomorfa al prodotto cartesiano degli aperti U_i di M per G . Su P è poi definita una mappa π detta **proiezione** che ad ogni punto $p \in P$ associa il corrispondente punto $x \in M$; la quaterna (P, π, M, G) prende il nome di **G-fibrato principale**. Una **1-forma di connessione** (o **connessione**) su P è una 1-forma differenziale ω che agisce sul fibrato tangente di P e ha valori nell'algebra di Lie \mathfrak{g} di G ed è definita *globalmente* su P ⁷⁸. Qualora però si voglia rapportare tale concetto a quello più familiare e concreto

⁷⁶Che \mathcal{L}_g non conservi energia e quantità di moto lo si può vedere dal tensore energia-impulso.

⁷⁷Laddove è possibile che nasca confusione, useremo la tilde per indicare le quantità nel caso bidimensionale.

⁷⁸Non si tratta di una generica 1-forma a valori in \mathfrak{g} : vi sono ulteriori condizioni non approfondite qui.

di campo di gauge, che assegna un elemento dell'algebra di Lie ad ogni punto del dominio spaziotemporale M , non è possibile farlo globalmente, ma solo *localmente*, specificando una mappa $\sigma : U_i \subseteq M \rightarrow P$ tale che $\pi \circ \sigma = Id_M$ detta **sezione locale** del fibrato principale. Allora, tramite l'operazione di **pull-back**, è possibile trasportare la 1-forma di connessione ω dagli spazi tangenti $T_{\sigma(x)}P$ di P agli spazi tangenti $T_x M$ di M (con $x \in M$); la 1-forma di pull-back definita localmente su M e a valori in \mathfrak{g} si indica con $\sigma^*(\omega)$ ed è chiamata **campo di gauge** (o **campo di Yang-Mills**). Nel caso dell'elettromagnetismo G è $U(1)$, la sua algebra di Lie è costituita dai soli numeri immaginari puri e $\sigma^*(\omega)$ è il quadripotenziale $A_\mu(x) : U_i \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ ⁷⁹. Dati M e G , in genere la costruzione di P è tutt'altro che univoca e non è solitamente possibile privilegiare un fibrato principale rispetto ad un altro, se non sulla base di considerazioni fisiche e/o di informazioni aggiuntive; se M è un generico dominio spaziotemporale, un fibrato principale su M può non essere *globalmente banale*, ovvero P non è scrivibile come $M \times G$, quindi non è possibile definire A_μ contemporaneamente su tutto M , come precisamente accade per il campo di monopolo magnetico di Dirac. Se invece $M = \mathbb{R}^n$ è possibile dimostrare che tutti i fibrati principali P sono equivalenti al prodotto cartesiano $M \times G$ ed ammettono perciò campi di gauge globalmente definiti su M .

Si consideri ora una generica teoria di gauge su un dominio spaziotemporale M e siano U_i e U_j due aperti in M con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$; su questi possono essere definite due sezioni diverse del fibrato principale (P, π, M, G) che inducono campi di gauge locali \mathcal{A} e \mathcal{A}' diversi sull'intersezione dei due aperti. Allora esiste un'unica mappa $\Omega : U_i \cap U_j \rightarrow G$, detta **trasformazione di gauge**, tale che:

$$\mathcal{A}' = \Omega^{-1} \mathcal{A} \Omega + \frac{i}{q} \Omega^{-1} d\Omega \quad (60)$$

dove q è la costante di accoppiamento della teoria. La principale differenza tra la trasformazione nel caso abeliano espressa dalla (57) e quella non-abeliana (60) sta nel fatto che in quest'ultima non è possibile commutare \mathcal{A} con Ω per semplificare la trasformazione.

Il campo di gauge locale \mathcal{A} , in quanto 1-forma a valori in \mathfrak{g} , può essere scritto come⁸⁰:

$$\mathcal{A}(r) = A_\mu^a(r) \mathcal{T}^a dx_r^\mu \quad \forall r \in U_i \subseteq M \quad (61)$$

dove dx_r^μ è una base di covettori dello spazio tangente ad M in r indotta dalle coordinate, le $A_\mu^a(r)$ sono funzioni a valori complessi su U_i e i \mathcal{T}^a sono una base dell'algebra di Lie e soddisfano dunque le regole di commutazione:

$$[\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = i f_c^{ab} \mathcal{T}^c \quad f_c^{ab} \in \mathbb{R} \quad (62)$$

dove le quantità f_c^{ab} sono le **costanti di struttura** di \mathfrak{g} relativamente alla base scelta. Poiché \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale di dimensione n su \mathbb{C} , la relazione (62) può essere usata per definire una rappresentazione di \mathfrak{g} su se stesso, detta **rappresentazione aggiunta**, definita da⁸¹:

$$ad : \mathbf{l} \equiv c_a \mathcal{T}^a \in \mathfrak{g} \quad \longrightarrow \quad [\mathbf{l}, \cdot] \in \text{Hom}(\mathfrak{g}) \quad (63)$$

$$ad_{\mathbf{l}}(\mathbf{h}) = [c_a \mathcal{T}^a, c_b \mathcal{T}^b] = i c_a c_b f_c^{ab} \mathcal{T}^c \in \mathfrak{g} \quad \forall \mathbf{l} = c_a \mathcal{T}^a, \mathbf{h} = c_b \mathcal{T}^b \in \mathfrak{g} \quad (64)$$

con $a, b, c \in \{1, \dots, n\}$ ⁸². Quindi, scelta una base sull'algebra di Lie, le costanti di struttura f_c^{ab} inducono un isomorfismo tra \mathfrak{g} e $\text{Hom}(\mathbb{C}^n)$.

⁷⁹Vi è un fattore i di differenza tra i campi di gauge dei fisici e quelli dei matematici.

⁸⁰Sono sottintese le somme sull'indice a .

⁸¹Consideriamo solo algebre di Lie di dimensione finita; scegliamo \mathbb{C} come campo anziché \mathbb{R} per maggiore generalità. Ad esempio se $G = SU(N)$ allora $\dim(\mathfrak{g}) = N^2 - 1$.

⁸²Le parentesi quadre indicano il commutatore e $\text{Hom}(\mathfrak{g})$ indica lo spazio vettoriale degli omomorfismi su \mathfrak{g} ; le costanti c_a sono elementi di \mathbb{C} .

Come esempio si scelga il gruppo di gauge non-abeliano $G \equiv SU(2)$ la cui algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$ ha dimensione 3 e una cui base è data da $\boldsymbol{\sigma}^a/2$ tali che:

$$\left[\frac{\boldsymbol{\sigma}^a}{2}, \frac{\boldsymbol{\sigma}^b}{2} \right] = -i\epsilon^{abc} \frac{\boldsymbol{\sigma}^c}{2} \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (65)$$

(dove $\boldsymbol{\sigma}^a$ sono le matrici di Pauli e ϵ^{abc} è il tensore completamente antisimmetrico in 3 dimensioni con $\epsilon^{123} = 1$)⁸³. Si ha dunque $f_c^{ab} \equiv -\epsilon_{abc}$.

Possiamo anche definire una **derivata covariante** \mathcal{D}_μ e una **curvatura di gauge** (o tensore degli sforzi non-abeliano) $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ come⁸⁴:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu &:= \partial_\mu - iq\mathcal{A}_\mu \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &:= \mathcal{D}_\mu\mathcal{A}_\nu - \mathcal{D}_\nu\mathcal{A}_\mu = \partial_\mu\mathcal{A}_\nu - \partial_\nu\mathcal{A}_\mu - iq[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu] \end{aligned} \quad (66)$$

La derivata covariante trasforma compatibilmente con la (57); data una generica trasformazione di gauge $\Omega \in G$, infatti:

$$\Omega^{-1}\mathcal{D}_\mu\Omega = \partial_\mu + \Omega^{-1}(\partial_\mu\Omega) - iq\Omega^{-1}\mathcal{A}_\mu\Omega = \partial_\mu - iq\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{D}'_\mu \quad (67)$$

Nella rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{su}(2)$, ad esempio, avremo i rappresentanti D_μ e $F_{\mu\nu}^a$:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi^a(r) &= \partial_\mu\phi^a(r) - q\epsilon_{abc}A_\mu^b(r)\phi^c(r) \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - q\epsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \end{aligned} \quad (68)$$

Scelta una rappresentazione $\{T^a\}$ di $\{\mathcal{T}^a\} \in \mathfrak{g}$ di dimensione n su \mathbb{C} normalizzata in modo tale che $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ ⁸⁵, possiamo allora scrivere la lagrangiana di una teoria di gauge non-abeliana per n campi scalari complessi ϕ^a accoppiati al campo di gauge:

$$\mathcal{L}[\phi] = -\frac{1}{2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + \frac{1}{2} \overline{D^\mu \phi^a} D_\mu \phi^a - V(\phi^a) \quad (69)$$

E, per costruzione, $\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[R^{-1}(\Omega)\phi]$ per ogni trasformazione $R(\Omega) = e^{i\xi_a(\underline{r})T^a}$ nella rappresentazione di G indotta dalla rappresentazione $\{T^a\}$ di \mathfrak{g} tramite la mappa esponenziale.

⁸³Gli indici a, b, c non sono spaziotemporali, dunque la loro posizione in alto o in basso è meramente convenzionale.

⁸⁴ \mathcal{A}_μ indica la μ -esima componente della 1-forma \mathcal{A} , relativamente all'indice spaziotemporale.

⁸⁵ Tr indica la traccia del prodotto matriciale $T^a T^b$.

Riferimenti bibliografici

- [1] Manton N., Sutcliffe P. - "Topological Solitons", *Cambridge University Press*, 2007
- [2] Nakahara M. - "Geometry, Topology and Physics", *Institute of Physics Publishing* 2003
- [3] Naber G.L. - "Topology, Geometry and Gauge fields", *Springer: Texts in Applied Mathematics* 25, 2011
- [4] Percacci R. - Note su solitoni e relative appendici di matematica disponibili online all'indirizzo: <http://people.sissa.it/~percacci/lectures/topmet/index.html>
- [5] Preskill J. - "Vortices and Monopoles", Lecture at Caltech, May 1986
disponibile online all'indirizzo: <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/pubs/preskill-1987-vortices.pdf>
- [6] Rajaraman R. - "Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory", *North-Holland Publishing Company*, 1982
- [7] Shnir Y. M. - "Magnetic Monopoles", *Springer*, 2005
- [8] Thirring W. - "Dinamical Systems and Field Theories", *Springer*, 2003 (terza edizione)
- [9] Vachaspati T. - "Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons", *Cambridge University Press*, 2006
- [10] Weinberg E. J. - "Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics", *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, 2012
- [11] Wu T.T, Yang C.N., *Phys. Rev. D* 12, 3845 (1975) - "Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields"

Tutte le Figure, ad eccezione di dove diversamente indicato, sono state create dall'autore del presente elaborato con l'utilizzo del programma *Wolfram Mathematica 11.2*