Appendix A

Cenni di topologia e geometria differenziale

Per una trattazione completa degli argomenti qua accennati si vedano le referenze.

A.1 Definizioni di base

Definizione A.0.1. (Topologia) Sia X un insieme, è detta *topologia* una collezione di sottoinsiemi di X che rispettino i seguenti assiomi ($T = \{A_\alpha\} \subset X$):

- $\varnothing \in T$ e $X \in T$
- $\bigcup_\alpha A_\alpha \in T,\ \forall \alpha$ t.c. $A_\alpha \in T$
- $A_\alpha \cap A_\beta \in T\ \forall A_\alpha, A_\beta \in T$

Si sottolinea che la seconda condizione richiede che l'unione **qualsiasi** (finita, infinita, numerabile, non numerabile, etc) di elementi della topologia appartienga alla topologia, mentre la terza richiede solamente che l'intersezione di due elementi della topologia appartienga ad essa (è immediato generalizzare a una qualsiasi intersezione **finita** di elementi della topologia)

Lo spazio X, dotato della topologia T viene detto **spazio topologico**. Gli elementi della topologia $A \in T$ vengono detti *aperti* di X.

Piccoli esempi più commenti. Si veda [2] per ulteriori esempi di spazi topologici [1].

Definizione A.0.2. (Intorno) Sia (X, T) uno spazio topologico e $x \in X$. Un insieme $U \subset X$ è detto *intorno di* x se esiste un aperto contenuto in U, contenente x.

$$\exists A \in T,\ A \subset U \text{ t.c. } x \in A \to U \textit{ intorno} \text{ di } x.$$

Definizione A.0.3. (Base della topologia) Sia (X, T) spazio topologico, $x \in X$. Una *Base* per la topologia T è una famiglia $\mathfrak{B}$ di aperti tale che ogni aperto $A \in T$ è unione di insiemi di $\mathfrak{B}$

$$\forall A \in T\ A = \bigcup_i B_i\ ,\ \{B_i\} \in \mathfrak{B}$$

Definizione A.0.4. (Secondo assioma di Numerabilità) Lo spazio X ha una base con cardinalità numerabile.

Esempio di $\mathbb{R}^n$

[1] Capitoli 1 e 2

Definizione A.0.5. (Continuità) Sia $f : X \to Y$ una funzione tra gli spazi topologici X, Y dotati rispettivamente delle topologie T_X, T_Y tale che la *controimmagine* di ogni aperto in Y è un aperto in X

$$\forall A_Y \in T_Y \to f^{-1}(A_Y) \in T_X$$

allora f è detta una funzione *continua*

Per funzioni $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ questa definizione coincide con la usuale definizione di continuità di Analisi Matematica (si veda [1] per una dimostrazione per funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).[2]

Se una funzione f continua è invertibile e la sua inversa f^{-1} è continua allora f è detta un **omeomorfismo**.

Definizione A.0.6. (Varietà topologica) Sia (X, T) uno spazio topologico con le seguenti proprietà:

- (Proprietà di Hausdorff) Punti distinti di X hanno intorni disgiunti

$$\forall x_\alpha, x_\beta \in X,\ x_\alpha \neq x_\beta,\ \exists A_\alpha, A_\beta \in T\ (x_\alpha \in A_\alpha,\ x_\beta \in A_\beta,\ \text{intorni}),\ \text{t.c. } A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$$

- (Localmente n-Euclideo) Ciascun punto di X ha un intorno che è omeomorfo a un aperto di $\mathbb{R}^n$.

$$\forall x \in X\ \exists U \in T\ ,\ \exists \phi : U \to \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \phi \text{ omeomorfismo}$$

- (Secondo assioma di Numerabilità) Lo spazio X rispetta il secondo assioma di Numerabilità (A.0.4).

X è allora detto una *varietà topologica*

Il numero n è detto la *dimensione* della varietà. Si può dimostrare che è unico.
La coppia (U, ϕ) è detta *intorno coordinato* o *carta*. Una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ è detta *atlante* se rispetta le seguenti proprietà:

- L'insieme degli intorni $\{U_\alpha\}$ ricopre X : $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$
- Gli intorni coordinati sono a due a due *compatibili*: per ogni coppia di intorni coordinati $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ le funzioni di transizione (cambio di coordinate)

$$\psi = \phi_\beta \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$
$$\psi^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

  sono funzioni continue

Si veda [2] per esempi di varietà topologiche

Si sottolinea che una varietà topologica è uno spazio che può essere descritto localmente con un sistema di coordinate euclidee e applicare quindi tutti i metodi noti di Analisi. Ad esempio si può richiedere che le funzioni coordinate siano funzioni differenziabili di classe $C^k(U)$, per qualche k (senza perdita di generalità, si richiedere che le funzioni siano C^∞). Questo porta alla definizione di **varietà differenziale** (si veda A.3).

Cosa significa "in coordinate locali"

Teoremi

dimostrazioni di invarianti topologici per omeomorfismo

[2] Soardi, capitolo 7, sezione 7.3

A.2 Omotopia e gruppi di omotopia

A.3 Varietà differenziali

In relazione alla definizione A.0.6.

Definizione A.0.7. (Varietà differenziale) Uno spazio topologico M si dice *varietà differenziale* se è una varietà topologica in cui le funzioni coordinate e le funzioni di transizione sono funzioni differenziabili C^∞

Struttura differenziale e dipendenza da atlante

Una funzione differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile si dice **diffeomorfismo** (quando serve, viene indicata la classe C^k di differenziabilità).

A.3.1 Spazio tangente e cotangente

Si vuole generalizzare la nozione di vettore tangente ad uno spazio $M \subset \mathbb{R}^n$ (si pensi pure a una superficie in $\mathbb{R}^3$ o una curva in $\mathbb{R}^2$). Un vettore identifica univocamente una direzione in $\mathbb{R}^n$. Si vuole associare ad ogni vettore l'operazione derivata direzionale lungo la direzione individuata dal vettore, valutata nel punto $p \in \mathbb{R}^n$.
Scelta una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di $\mathbb{R}^n$, ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si può esprimere in maniera unica come combinazione lineare degli elementi della base

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

Sia f una funzione differenziabile definita in un opportuno intorno U del punto p (per semplicità nel seguito si indica con $C^\infty(p)$ l'insieme delle funzioni lisce definite su opportuni intorni del punto $p \in \mathbb{R}^n$).
La derivata direzionale di f lungo $\mathbf{v}$ è quindi data da

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_p = v_1 \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_p + \cdots + v_n \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_p$$

Inoltre, per le proprietà delle derivate $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in C^\infty(p)$:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(\alpha f + \beta g)\right|_p = \alpha \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_p + \beta \left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}\right|_p \quad \text{e} \quad \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}(fg)\right|_p = \left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}\right|_p g(p) + f(p)\left.\frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}}\right|_p$$

Il vettore $\mathbf{v}$ è allora individuato in maniera univoca dal modo in cui agisce la derivata direzionale su tutte le funzioni differenziabili in un intorno di p. Si definisce allora il *vettore tangente* alla varietà M nel punto p:

Definizione A.0.8. (Vettore tangente) Sia M una varietà differenziale e $p \in M$. Si dice *vettore tangente* a X nel punto p un'applicazione $\mathbf{V}_p : C^\infty(p) \to \mathbb{R}$ tale che:

- $\mathbf{V}_p[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbf{V}_p[f] + \beta \mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p)$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{V}_p[fg] = \mathbf{V}_p[f]g(p) + f(g)\mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p)$

L'insieme dei vettori tangenti a una varietà M nel punto p è detto **spazio tangente** alla varietà nel punto p e si indica con $T_p(M)$. Si può mostrare facilmente che $T_p(M)$ è uno spazio vettoriale.

Si definisce **spazio cotangente** $T^*_p(M)$ a una varietà M nel punto $p \in M$ il duale[3] dello spazio tangente $T_p(M)$.

Data una base di $\mathbb{R}^n$ si definiscono:

- $e_i = \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$ le derivate parziali lungo la coordinata i-esima sono base di $T_p(M)$.

[3] Si ricorda che il duale V^* di uno spazio vettoriale V è l'insieme delle applicazioni lineari $\phi : V \to \mathbb{R}$. Data una base $\{e_i\}$ di V, la base canonica per V^* è definita dalle proiezioni nella i-esima coordinata dx^i, quindi $dx^i(e_j) = \delta^i_j$. Data una qualsiasi $\phi \in V^*$ applicazione lineare su V, si ha $\phi = \sum_i a_i dx^i$ per $\{a_i\} \in \mathbb{R}$.

- $e^i = \mathrm{d}x^i$ gli elementi di linea differenziali lungo la coordinata i-esima sono base di $T^*_p(M)$.

Si definisce **campo vettoriale** un'applicazione che a un punto p della varietà M associa un vettore tangente al punto. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia dal punto base p[4]. Lo spazio dei campi vettoriali sulla varietà M si indica con $\mathcal{X}(M)$

$$\mathbf{V} : M \to T_p(M)\ ,\ p \mapsto \mathbf{V}_p$$

Si definisce **campo covettoriale** un'applicazione che a un punto p della varietà M associa un vettore cotangente al punto. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia dal punto base p.

$$\mathbf{U} : M \to T^*_p(M)\ ,\ p \mapsto \mathbf{U}_p$$

Siano $V = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $U = u_i dx^i$ campi vettoriali/covettoriali e si consideri una generica trasformazione di coordinate $x \mapsto y(x)$ V e U sono invarianti (indipendenti dalla scelta della base). Si ha che:

$$dy^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

In base a queste leggi di trasformazione in seguito a cambio di coordinate, i vettori tangenti si dicono **covarianti** e i vettori cotangenti si dicono **controvarianti**.
(o il contrario?)
due parole su funzioni tra varietà e Differenziali F_*

Per le coordinate si deve quindi avere:

$$v'^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} v^j \quad \text{e} \quad u'_i = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} u_j$$

Di conseguenza il prodotto interno $< U, V >$ è invariante: $< U, V >= \sum_i u_i v^i = \sum_j u'_j v^j$
(lo metto?)

A.3.2 Varietà con bordo

Orientazione

A.4 Tensori e Forme differenziali

Sia V uno spazio vettoriale su su $\mathbb{R}$.
Si definisce **tensore** misto con r indici covarianti e s indici controvarianti un'*applicazione multilineare* $F : V^r \times V^{*s} \to \mathbb{R}$, dove $V^r = V \times \cdots \times V$ e $V^{*s} = V^* \times \cdots \times V^*$.

Si indica con $\mathcal{T}^{(r,s)}(V)$ lo spazio dei (r,s)-tensori su V

Si definisce il **prodotto tensoriale** (indicato col simbolo $\otimes$) tra $F \in \mathcal{T}^r(\mathrm{V})$ e $G \in \mathcal{T}^s(V)$ il $r+s$ tensore definito da:

$$F \otimes G(v_1, \ldots, v_{r+s}) = F(v_1, \ldots, v_r) G(v_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$$

dove a destra dell'uguale si ha il prodotto tra i due numeri reali $F(v_1, \ldots, v_r)$ e $G(v_{r+1}, \ldots, v_{r+s})$.
Analogamente, si definisce il prodotto tensoriale tra due tensori controvarianti.

Si può facilmente dimostrare la seguente

Proposizione A.0.1. *Sia M varietà differenziale e $p \in M$. Siano $V = T_p(M)$ e $V^* = T^*_p(M)$ Sia $F \in \mathcal{T}^{(r,s)}(V)$, allora esistono $a^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots i_r}$ tali che in coordinate locali*

$$F = \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_r) \\ (j_1,\ldots,j_s)}} a^{j_1,\ldots,j_s}_{i_1,\ldots,i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

[4]Si veda B.1.1 per chiarificare questa affermazione.

Ovvero le basi di $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ inducono una base per $\mathcal{T}^r(T_p(M))$ e $\mathcal{T}^s(T_p^*(M))$.

Si definisce **campo tensoriale** sulla varietà M con r indici covarianti e s indici controvarianti un'applicazione $M \to \mathcal{T}^{(r,s)}(T_p^*(M))$ che a ogni p associa un tensore con punto base p. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia da p.

Si definice **r-forma** un r-tensore covariante *totalmente antisimmetrico*.

Lo spazio delle r-forme sulla varietà M nel punto p si indica con $\Lambda^r(p)$. La dimensione di $\Lambda^r(p)$ è $\binom{n}{k}$ se n è la dimensione di M [5].

Definizione A.0.9. (Forma differenziale) Si definice *r-forma differenziale* un campo tensoriale covariante totalmente antisimmetrico, ossia un'applicazione multilineare $\omega : M \to \Lambda^r(p)$ che a $p \in M$ associa la r-forma ω_p

Lo spazio delle r-forme differenziali su M si indica con $\Omega^r(M)$.

Analogamente a quanto fatto per il prodotto tensoriale, si vuole definire un prodotto tra r e s forme differenziali che dia una $r{+}s$ forma differenziale (cioè un prodotto tensoriale che mantenga l'antisimmetria del tensore).

Si definisce **prodotto esterno** o **prodotto wedge** tra due forme differenziali $\alpha \in \Omega^r(M)$ e $\omega \in \Omega^s(M)$ la $r+s$ forma differenziale definita da:

$$\alpha \wedge \omega(V_1, \dots, V_{r+s})(p) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S^{r+s}} (-1)^\sigma \alpha_p \otimes \omega_p(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r), V_{\sigma(r+1)}, \dots, V, \sigma(r+s)})$$

Dove S^{r+s} è il gruppo delle permutazioni di $r+s$ elementi e $(-1)^\sigma$ è il segno della permutazione σ. E gode delle seguenti proprietà, di immediata dimostrazione:

1. $(\alpha + \beta) \wedge \omega = \alpha \wedge \omega + \beta \wedge \omega$ e $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$
2. $(c\alpha) \wedge \omega = c(\alpha \wedge \omega) = \alpha \wedge (c\omega)$
3. $\omega \wedge \alpha = (-1)^{r+s} \alpha \wedge \omega$
4. $(\alpha \wedge \omega) \wedge \tau = \alpha \wedge (\omega \wedge \tau)$ (valida grazie alla normalizzazione scelta nella definizione di $\wedge$)

$\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha, \beta \in \Omega^r(M)$, $\forall \omega \in \Omega^s(M)$, $\forall \tau \in \Omega^k(M)$

Analogamente alla A.0.1, vale anche

Proposizione A.0.2. *Sia M varietà differenziale e $p \in M$. Sia $\omega \in \Omega^r(T_p(M))$, allora esistono le funzioni $a_{i_1,\dots i_r}$ tali che in coordinate locali*

$$\omega = \sum_{(i_1,\dots,i_r)} a_{i_1,\dots,i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Si osservi che per la proprietà di antisimmetria se $u = v$ si ha

$$\omega(v, \dots, u, \dots) = -\omega(u, \dots, v, \dots) = -\omega(v, \dots, u, \dots) = 0$$

Per una varietà di dimensione n si ha al massimo n vettori linearmente indipendenti. Se si prende in considerazione un vettore aggiuntivo, esso è combinazione lineare dei precedenti.
Di conseguenza **tutte le (r>n)-forme** su una varietà di dimensione n sono **nulle**.
Se $u = a_1 v^1 + \dots + a_n v^n$

$$\omega(v^1, \dots, v^n, u) = \dots = a_1 \omega(v^1, \dots, v^n, v^1) + \dots + a_n \omega(v^1, \dots, v^n, v^n) = 0$$

[5] []

Differenziale esterno: si definisce l'operatore che a una r-forma $\omega \in \Lambda^r(p)$ associa la (r+1)-forma $d\omega \in \Lambda^{r+1}(p)$, definita in coordinate locali da

$$\omega = \sum_{(i_1,\dots,i_r)} a_{i_1,\dots,i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \to d\omega = \sum_{(i_1,\dots,i_r)} da_{i_1,\dots,i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

ossia

$$d : \Lambda^r(p) \to \Lambda^{r+1}(p) \quad \omega \mapsto d\omega = \sum_{(i_1,\dots,i_r,k)} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Dall'antisimmetria del prodotto wedge discende immediatamente che $d^2\omega = d(d\omega) = 0$

$$d^2\omega = d\left(\sum_{(i_1,\dots,i_r,k)} \frac{\partial a_{i_1,\dots,i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right) = \sum_{(i_1,\dots,i_r,k)} d\left(\frac{\partial a_{i_1,\dots,i_r}}{\partial x^k} \right) \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$
$$= \sum_{(i_1,\dots,i_r,k,j)} \frac{\partial^2 a_{i_1,\dots,i_r}}{\partial x^k \partial x^j} \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0$$

in quanto contrazione del termine simmetrico $\frac{\partial^2 a_{i_1,\dots,i_r}}{\partial x^k \partial x^j}$ e del termine antisimmetrico $dx^j \wedge dx^k$

Si definisce forma **esatta** una r-forma ω se esiste una (r-1)-forma α che verifica $\omega = d\alpha$
Si definisce forma **chiusa** una r-forma ω tale che $d\omega = 0$.
Segue immediatamente che ogni forma esatta è chiusa. L'inverso è vero solo localmente.

Lemma A.0.1. *(di Poincarè) Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una palla aperta. Una r-forma ω chiusa definita su M è esatta.*

Coomologia di de Rham
Integrazione: l'integrazione di una forma su una varietà può essere definita tramite coordinate locali e ricondotta a integrazione su aperti di $\mathbb{R}^n$. Una trattazione rigorosa richiederebbe l'introduzione del concetto di *partizione dell'unità*, che esula dallo scopo di questo elaborato. Si vedano [],[],[] per una trattazione rigorosa.
In maniera intuitiva, sia (U, ϕ) una carta della varietà M, dove U intorno del punto $p \in M$, e $R = \phi(U)$ e $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n-forma. Sia $f : U \to \mathbb{R}$ una funzione integranda. Si definisce automaticamente la misura di integrazione $d\mu = dx^1 \dots dx^n$. e si può dare senso all'espressione in coordinate locali:

$$\int_U f\omega = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \dots dx^n$$

Si vuole poi ripetere questa operazione per tutte le carte di un atlante dato e "incollare" assieme i risultati in maniera che l'integrale sulla varietà sia uguale alla somma degli integrali sulle singole carte.

Si osserva che è possibile integrare solamente n-forme su varietà di dimensione n perchè le forme con $r > n$ sono tutte nulle, e gli spazi di dimensione $r < n$ hanno misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Hodge star:
Teorema di Stokes:

A.4.1 Varietà Riemanniane

Definizione A.0.10. Una *metrica Riemanniana* g su una varietà M è un (2,0)-campo tensoriale su M che per ogni punto $p \in M$ soddisfa:

1. $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2. $g_p(U, U) \geq 0$ dove $g(U, U) = 0 \iff U = 0$

dove $U, V \in T_p(M)$.

Una *metrica pseudo-Riemanniana* g su una varietà M è un (2,0)-campo tensoriale su M che per ogni punto $p \in M$ soddisfa:

1. $g_p(U,V) = g_p(V,U)$
2. $g_p(U,V) = 0 \, \forall U \in T_p(M) \Rightarrow V = 0$

Data una carta (U,ϕ) di M con coordinate $\{x^\mu\}$ il tensore g può essere scritto come

$$g_p = g_{\mu\nu}(p)dx^\mu dx^\nu =: ds^2$$

Dove $g_{\mu\nu}(p)$ può essere considerato come la $\mu\nu$-esima entrata di una matrice.
Il numero (p,n) di autovalori positivi p e negativi n è detto *indice* della metrica. Se $n = 1$ la metrica è detta Lorentziana.
Si può diagonalizzare la metrica e riscalare gli autovettori in modo da ottenere solamente ± 1 sulla diagonale. Ad esempio si ha la metrica Euclidea $\delta = diag(1,1,\ldots,1)$ o Minkowskiana $\eta = diag(-1,1,...,1)$.

Se una varietà differenziale M è dotata di una metrica Riemanniana g, la coppia (M,g) è detta **varietà Riemanianna** (analogamente se g è pseudo-Riemann).

Si vuole estendere il concetto di derivata direzionale agli (r,s)-tensori, analogamente a quanto fatto nella sezione A.3 per i vettori.

Sia X un campo vettoriale sulla varietà M (supponiamo $M = \mathbb{R}^n$, per semplicità), $p \in M$ e $h \in M$ pensato come piccolo spostamento da p, in M. Volendo definire la derivata direzionale di un campo vettoriale nel modo usuale

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{X_{p+h} - X_p}{|h|}(f)$$

si riscontra subito un problema. I due vettori $X_{p+h} \in T_{p+h}(M)$ e $X_p \in T_p(M)$ appartengono a due spazi differenti e non possono essere confontati.
Occorre un modo di trasportare il vettore X_{p+h} da $T_{p+h}(M)$ a $T_p(M)$ lasciandolo inalterato. Questo processo è chiamato **trasporto parallelo**. Purtroppo non esiste una maniera univoca per trasportare un vettore tangente in una varietà, quindi è necessario specificare come viene effettuato il trasporto parallelo.

Definizione A.0.11. (Connessione affine): Una connessione affine ∇ è una mappa $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ t.c $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ che verifica

1. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3. $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$

per $f \in C^\infty(M)$ e $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$

Sia (U,ϕ) una carta di M con coordinate $x = \phi(p)$, $p \in M$. L'azione di ∇ sugli elementi $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$ della base di $T_p(M)$ ne determina univocamente l'azione su qualsiasi vettore X_p.

Si definiscono i **coefficienti di connessione** $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$ da (per semplicità di notazione si indica $\nabla_{e_\nu} = \nabla_\nu$):

$$\nabla(e_\nu, e_\mu) = \nabla_\nu e_\mu = e_\lambda \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$$

Presi allora due campi $X = X^\mu e_\mu$, $Y = Y^\nu e_\nu \in \mathcal{X}(M)$ si ha:

$$\nabla_X Y = X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu e_\nu) = X^\mu (e_\mu[Y^\nu] e_\nu + Y^\nu \nabla_\mu e_\nu) = X^\mu \left(\frac{\partial Y^\lambda}{\partial x^\mu} + Y^\nu \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \right)$$

il risultato dipende solo dalle $(\dim M)^3$ funzioni $\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$.

Una connessione ∇ è dette simmetrica se in coordinate vale $\Gamma^\lambda_{\nu\mu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$

Teorema A.0.1. *(Teorema fondamentale della geometria (pseudo-)Riemanniana): Sia* (M, g) *una varietà (pseudo-)Riemanniana. Esiste un unica connessione* simmetrica *che è* compatibile *con la metrica* g*. Questa connessione è chiamata* ***connessione di Levi-Civita*** *definita da*

$$\Gamma^{\kappa}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda}(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) =: \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{smallmatrix} \kappa \\ \mu\nu \end{smallmatrix} \right\}$ è detto simbolo di Christoffel. Si veda [5] per la dimostrazione del teorema.

Appendix B

Gruppo e azione di gruppo

Definizione B.0.1. (Gruppo): Sia G un insieme e $*$ un'operazione binaria su G. G si definisce *gruppo* con l'operazione $*$ se valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall f, g, h \in G \rightarrow f * (g * h) = (f * g) * h$ associativa
2. $\exists e \in G$ t.c. $e * g = g * e = g, \quad \forall g \in G$ esistenza elemento neutro
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ t.c. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ esistenza dell'inverso

Se vale anche la proprietà commutativa, il gruppo è detto *abeliano*

4. $\forall g, h \in G \rightarrow g * h = h * g$ commutativa

Sovente si usa omettere il simbolo dell'operazione: $g * h = gh$

Definizione B.0.2. (Azione di gruppo): Sia G un gruppo e X un insieme non vuoto.
Si definisce l'azione destra di G su X una funzione $\phi : X \times G \rightarrow X$ che $(x, g) \mapsto \phi(x, g) = x \cdot g$ con le seguenti proprietà:

1. $x \cdot e = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G\, ,\, \forall x \in X \rightarrow x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ compatibilità

Si definisce l'azione sinistra di G su X una funzione $\phi : G \times X \rightarrow X$ che $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = g \cdot x$ con le seguenti proprietà:

1. $e \cdot x = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G\, ,\, \forall x \in X \rightarrow (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ compatibilità

La differenza tra azione destra e azione sinistra sta nell'ordine in cui gh agisce sull'insieme, evidente per gruppi non abeliani.

L'azione di G su X si dice:

- *transitiva*: $\forall x, y \in X\ \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$
- *libera*: Sia $g \in G$. Se $\exists x \in X$ t.c.$g \cdot x = x \Rightarrow g$ è l'identità

Si veda la sezione A.3 per una breve trattazione su varietà differenziali, spazi tangenti e campi vettoriali.

Definizione B.0.3. (Gruppo di Lie): Un gruppo di Lie G è una varietà differenziale[1], dotata di di una struttura di gruppo in cui la moltiplicazione e l'inverso sono funzioni lisce. In altre parole è liscia la mappa

$$(x.y) \mapsto x^{-1}y \quad \forall x, y \in G$$

La dimensione del gruppo equivale alla dimensione della varietà. Esempi di gruppi di Lie sono $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ i gruppi delle matrici quadrate $n \times n$ non singolari a coefficenti reali/complessi.
Vale il seguente Teorema che non verrà qui dimostrato.

[1] Si veda la sezione A.3

Teorema B.0.1. *Ogni sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo di Lie*

Che garantisce che $O(n), SO(n), SL(n, \mathbb{R})$ sono sottogruppi di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$.

Definizione B.0.4. (Algebra di Lie): Un'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale (su un opportuno campo) dotato di un'operazione binaria $[,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ che rispetta le seguenti proprietà:

1. *Bilinearità* $\quad [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z] \quad$ e $\quad [x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$ per tutti gli scalari a, b e $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$
2. *Identità di Jacobi* $\quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$
3. *Anticommutatività* $\quad [x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$
4. *Alternanza* $\quad [x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g} \quad$ (discende dalla precedente)

La dimensione dell'algebra di Lie è la sua dimensione come spazio vettoriale.
Un set di elementi dell'algebra $\mathfrak{g}$ si dice set di *generatori* se la sottoalgebra più piccola che lo contiene è $\mathfrak{g}$ stessa.

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'algebra di Lie.

Siano $a, g \in G$. Si definiscono la **traslazione destra** $R_a : G \to G$ e la **traslazione sinistra** $L_a : G \to G$

$$R_a(g) = ga \quad , \quad L_a(g) = ag$$

R_a e L_a sono diffeomorfismi di G in se stesso per costruzione e inducono quindi le mappe sugli spazi tangenti $L_{a*} : T_g(G) \to T_{ag}(G)$ e $R_{a*} : T_g(G) \to T_{ga}(G)$ (si veda B.1).

Dato un gruppo di Lie G esiste una speciale classe di campi vettoriali (si veda B.1) che sono invarianti sotto l'azione di gruppo[2].

Sia X un campo vettoriale sul gruppo di Lie G. X si dice campo vettoriale **invariante a sinistra** se vale $L_{a*}X|_g = X|_{ag}$ (analogamente, invariante a destra).

Un vettore tangente all'identità e del gruppo di Lie $V \in T_e(G)$ definisce un unico campo vettoriale X_V su G invariante a sinistra tramite l'azione sinistra (analogamente a destra)

$$X_V|_g := L_{g*}V \quad , \quad g \in G$$

Poichè

$$X_V|_{ag} = L_{ag*}V = (L_a L_g)_* V = L_{a*}L_{g*}V = L_{a*}X_V|_g$$

Viceversa, un campo vettoriale X_V invariante a sinistra (analogamente a destra) definisce un unico vettore V tangente all'identità in G

$$V := X_V|_e \quad \in T_e(G)$$

Definizione B.0.5. Si indica con $\mathfrak{g}$ l'insieme dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra (denotando con $\mathcal{X}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali su G)

$$\mathfrak{g} := \{X_V \in \mathcal{X}(G) \text{ t.c. } L_{a*}X_V|_g = X_V|_{ag} \forall a \in G\}$$

La mappa che a un vettore tangente all'identità in G associa un campo vettoriale invariante a sinistra

$$T_e(G) \to \mathfrak{g} \quad V \mapsto X_V$$

è un isomorfismo.
Si dimostra che $\mathfrak{g}$ è uno spazio vettoriale con l'operazione di traslazione a sinistra (?), e quindi $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$. In particolare dim $\mathfrak{g}$ = dim G.

Resta da definire un'operazione di parentesi di Lie affinchè lo spazio dei campi invarianti a sinistra sia un'algebra di Lie.

[2] Ciò non accade, ad esempio, con le varietà differenziali usuali, in cui non vi è modo di evidenziare una classe privilegiata di campi vettoriali

Definizione B.0.6. Si definisce parentesi di Lie tra due campi $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ l'operazione $[,] : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \to \mathcal{X}(G)$ definita da

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \forall f \in C^{\infty}(G)$$

Si sottolinea che Xf così scritto è una funzione liscia definita su G da $Xf : G \in \mathbb{R}$ che agisce $p \mapsto X_p[f] \in \mathbb{R}$

Si verifica immediatamente che l'operazione così definita rispetta le proprietà definite in B.0.4[3]

Siano $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ e si fissino due punti $g, ag \in G$ dove $ag = L_a g$. Applicando L_{a*} a $[X,Y]$ si ha

$$L_{a*}[X,Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X,Y]|_{ag} \in \mathfrak{g}$$

quindi $\mathfrak{g}$ è chiuso rispetto all'operazione $[,]$ così definita.

Definizione B.0.7. L'insieme $\mathfrak{g}$ dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra () dotato delle parentesi di lie B.0.6 si definisce **Algebra di Lie** associata al gruppo di Lie G.

L'algebra di Lie associata a un gruppo viene indicata con lo stesso nome del gruppo, in carattere gotico minuscolo, ad esempio $SO(n) \to \mathfrak{so}(\mathfrak{n})$.

Poichè si ha che $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$ sia $\{V_1, \dots, V_n\}$ una base per $T_e(G)$. Questa definisce, tramite l'azione sinistra, un set di campi vettoriali $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathfrak{g}$ linearmente indipendenti in ogni punto $g \in G$

$$X_\mu|_g := L_{g*}V_\mu \quad \forall \mu = 1, \dots, n$$

che per ogni $T_g(G)$ è una base. Poichè anche $[X_\mu, X_\nu]|_g \in \mathfrak{g}$ nel punto g, può essere sviluppato $\forall g \in G$ in termini dei vettori $\{X_\mu|_g\}$, e quindi si ha:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_\lambda c_{\mu\nu}{}^{\lambda} X_\lambda$$

i coefficienti $c_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ si chiamano **costanti di struttura**. Si dimostrano essere indipendenti dal particolare $g \in G$ preso in considerazione, e determinano quindi completamente la struttura del gruppo di Lie G (Teorema di Lie).

Nel caso di un gruppo di Lie G di matrici reali, l'algebra di Lie può essere formulata in termini della funzione esponenziali di matrici, ovvero

$$\mathfrak{g} = \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \ \to \exp(tA) \in G\}$$

Gli elementi dell'algebra di Lie vengono detti *generatori* del gruppo di Lie e, come visto sopra, la struttura del gruppo G è completamente determinata dalle costanti di struttura. In questo caso in cui G è un gruppo di matrici, la parentesi di Lie è il commutatore di matrici e quindi le costanti di struttura si dice sono determinate dalle regole di commutazione dei generatori $\{T_\mu\}$:

$$[T_\mu, T_\nu] = T_\mu T_\nu - T_\nu T_\mu = c_{\mu\nu}{}^{\lambda} T_\lambda$$

B.1 Fibrati

Si vuole iniziare con un esempio per rendere più chiaro l'argomento.

[3] Intuitivamente, $[X,Y]$ è il commutatore dei campi X e Y, ed è noto che un commutatore rispetti suddette proprietà.

B.1.1 Fibrato Tangente

Sia M una varietà differenziale di dimensione n. Si definisce il *fibrato tangente* su M (detta *spazio base*) l'unione di tutti gli spazi tangenti alla varietà, indicato con TM.

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

Si consideri una carta (U, ϕ), U intorno di $p \in M$ e $x^i = \phi^i(p)$ coordinate. Gli elementi dello spazio $TU = \cup_{p \in U} T_p(M)$ sono individuati da un punto $p \in U$ e un vettore tangente $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p \in T_p(M)$. Per costruzione U è omeomorfo all'aperto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $T_p(M)$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ stesso tramite l'identificazione tra derivata direzionale e vettore (si veda la sezione A.3).
Allora ogni punto $P \in TU$ può essere identificato con il punto $(x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in maniera univoca. TU è quindi una varietà differenziale di dimensione $2n$.
Inoltre TU è identificato con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ed è esattamente decomposto nel prodotto diretto $U \times \mathbb{R}^n$, cioè ogni $P \in TU$ può essere scritto come (p, V), $p \in UV \in T_p(M)$.
Si può quindi definire la *proiezione* $\pi : TU \to U$, $P = (p, V) \mapsto p$. Lo spazio $T_p(M) = \pi^{-1}(p)$ viene detto *fibra* in p.
Se $M = \mathbb{R}^n$ si ha che $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e si dice che il fibrato ha struttura *banale*. In generale però si ha una struttura non banale ed occorre tener conto di tutte le carte possibili.
Siano (U, ϕ) e (V, ψ) due carte tali che $U \cap V \neq \varnothing$, $p \in U \cap V$. Siano $x^i = \phi^i(p)$ e $y^j = \psi^j(p)$, e sia $V \in T_p(M)$. V in coordinate è espresso come

$$V = \sum_i V^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p = \sum_j V'^j \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p = \sum_{j,k} V^k \left.\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^j}\right|_p$$

dove $V'^j = \sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\Big|_p V^k$. L'applicazione $\psi \circ \phi$ deve essere invertibile, quindi la matrice Jacobiana deve essere non singolare, cioè $J^j_i = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \in GL(n, \mathbb{R})$. Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ viene chiamato *gruppo di struttura* di TM. Le coordinate delle fibre, in seguito a un cambio di coordinate, risultano ruotate per un elemento del gruppo di struttura.
Infine si definisce *sezione* di TM una mappa liscia $s : M \to TM$ tale che $\pi \circ s = id_M$, ossia che a $p \in M$ associa un elemento di TM (p, V) , $V \in T_p(M)$. Se s è definita solo in un intorno U viene detta sezione locale.

Avendo definito una struttura differenziale su TM, un campo vettoriale su M può essere visto come una mappa liscia $M \to TM$ che a $p \in M$ associa $V_p \in T_p(M)$

B.1.2 Fibrato

Siano M (detta *spazio base*) e F (detta *fibra*) varietà diferenziali (si pensi all'analogia con il fibrato tangente in cui $F = T_p(M)$) e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M.

Intuitivamente, un *fibrato* E su M con fibra F è una varietà diferenziale (detta anche *spazio totale*) che è localmente un prodotto diretto di M e F, ossia il fibrato E è descritto topologicamente in ogni intorno U_i dalla varietà prodotto $U_i \times F$.

Si definisce una funzione $\pi : E \to M$ continua e suriettiva (la *proiezione di fibra*) che mappa ogni fibra $F_p = \{(p, f) | f \in F\} \subset E$ nel punto $p \in M$, e che rispetti la seguente condizione.

B.1.1. Condizione di non trivialità: Per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $U_i \in \mathcal{U}$ di p e un isomorfismo $\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i) \subset E$ tale che per ogni $(p, f) \in U_i \times F$ si ha $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$

Occorre specificare inoltre un insieme di *funzioni di transizione* $\{\Phi_{ij}\}$ che descrivono come si trasformano le coordinate delle fibre nella regione di sovrapposizione tra due intorni $U_i \cap U_j$. Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ fissato si cosidera $\phi_{i,x}$ come una mappa di F in F_x. Allora si definiscono le mappe

$$\Phi_{ij} : F \to F \quad , \quad \Phi_{ij} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j$$

che rispettano le condizioni:

$$\Phi_{ii} = id \quad , \quad \Phi_{ij} \circ \Phi_{jk} = \Phi_{ik} \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k$$

Grazie a queste proprietà, le funzioni di transizione formano un gruppo G detto *gruppo di struttura* del fibrato, che agisce su F a sinistra.
Gli elementi di G, le funzioni di transizione, sono anche detti *local trivialization.*

Sebbene la topologia locale del fibrato sia banale, le funzioni di transizione possono essere fortemente influenzate dalla topologia globale a causa di torsioni relative tra fibre adiacenti (si veda l'esempio del nastro di Möbius). Un fibrato è completamente determinato dalle sue funzioni di transizione.

Definizione B.0.8. Un *fibrato* E con fibra F sullo spazio base M è uno spazio topologico E dotato di una proiezione $\pi : E \to M$ che soddisfa la condizione di non trivialità B.1.1.

Esempio B.0.1. *(Cilindro):* Il cilindro è il primo esempio di fibrato banale, ossia la cui topologia globale è quella prodotto diretto $E = M \times F$. Sia lo spazio base $M = S^1$ il cerchio unitario, parametrizzato dall'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ e sia F il segmento parametrizzato da $t \in [-1, 1]$. Sia $\mathcal{U} = U_+ \cup U_-$ un ricoprimento formato dai due intorni semicircolari:

$$U_+ = \{\theta : \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} \quad , \quad U_- = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon = \epsilon\}$$

Il fibrato consiste in

$$U_+ \times F \; , \; (\theta_+, t_+) \quad \text{e} \quad U_- \times F \; , \; (\theta_-, t_-)$$

e le funzioni di transizione che legano t_+ e t_- sono definite in $U_+ \cap U_- = A \cup B$

$$A = \{-\epsilon < \theta < \epsilon\} \quad , \quad B = \{\pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}$$

Le funzione di transizione sono:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = t_- \text{ in } B \end{cases}$$

Si ha quindi un fibrato banale uguale al cilindro $E = S^1 \times [-1, 1]$.

Esempio B.0.2. *(Nastro di Möbius):* Con la stessa notazione dell'esempio precedente, si scelgano le funzioni di transizione:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = -t_- \text{ in } B \end{cases}$$

L'identificazione di t con $-t$ nella regione B torce il fibrato e gli dà la topologia non banale del Nastro di Möbius.

Si definisce un'operazione duale alla proiezione, la *sezione* del fibrato come una mappa tra lo spazio base M ed il fibrato E

$$s : M \to E \quad \text{t.c.} \quad \pi \circ s(p) = p \quad \forall p \in M$$

Se definita solo in un intorno U di un punto p è detta *sezione locale.*

B.1.3 Fibrato Principale e Connessione

Definizione B.0.9. (Fibrato principale): Un *fibrato principale* è un fibrato la cui fibra F è un gruppo di Lie e coincide con il gruppo di struttura G[4].

Si vuole ora generalizzare il concetto di connessione[5] (e di trasporto parallelo) estendendolo alla struttura del fibrato principale. Per la definizione generale, si veda [5].
In questa trattazione si definirà la connesione su un fibrato principale come una 1-forma sul fibrato E[6] a valori nell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ associata al gruppo di struttura G

Sia M lo spazio base di dimensione n, G il gruppo di struttura e fibra ed E il fibrato principale. Sia (U, ϕ) una carta con coordinate $x_\mu = \phi_\mu(p) \, , p \in M$.

[4] Si veda [5], [7], [6] per una definizione più completa
[5] Il concetto di connessione generalizza quello di derivata direzionale ai tensori
[6] Si ricorda che è una varietà differenziale

Appendix C

Notazione

Coordinate polari:
$\theta \in [0, \pi]$ Angolo polare
$\phi \in [0, 2\pi]$ Angolo azimutale
$r \in (0, \infty)$ Raggio

Versori:
$\mathbf{u}_x = (1, 0, 0)$ Versore asse x
$\mathbf{u}_y = (0, 1, 0)$ Versore asse y
$\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)$ Versore asse z

$\mathbf{u}_\theta = (, ,)$ Versore angolo polare
$\mathbf{u}_\phi = (-x, y, 0)$ Versore angolo azimutale
$\mathbf{u}_r = (, ,) = \frac{\mathbf{r}}{r}$ Versore radiale

Funzioni:
Θ funzione di Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Bibliography

[1] Paolo Maurizio Soardi. *Analisi Matematica*. Città Studi Edizioni, 2010.

[2] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.

[3] William Fulton. *Algebraic Topology, a first course*. Springer, 1995.

[4] William M. Boothby. *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1975.

[5] Mikio Nakahara. *Titolo*. Institute of Physics publishing, Bristol and Philadelphia, 2003.

[6] T. Eguchi, P.B Gilkey, A.J. Hanson. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North Holland Publishing Company, 1980.

[7] Yakov M. Shnir. *Magnetic Monopoles*. Springer, 2005.

[8] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.

[9] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.

[10] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.

[11] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.