Università degli Studi di Milano Bicocca
Facoltà di Fisica
Corso di Laurea Triennale in Fisica

Aspetti classici e quantistici dei monopoli magnetici in teorie di gauge

-

Classical and quantum analysis of magnetic monopoles in gauge theories

---

Relatore: *Prof. Zaffaroni Alberto*

Seduta del: 24/09/2018
Tesi di laurea di: *Danilo BONDÌ*
Matr. N. 801827
Recapito: 3486652802

Anno Accademico 2017/2018

Aspetti classici e quantistici dei monopoli magnetici in teorie di gauge

In natura non sono mai stati osservati i monopoli magnetici. La ragione non è però spiegata dall'elettrodinamica classica, in quanto le equazioni di Maxwell si limitano a constatarne la non-esistenza. Le leggi dell'elettrodinamica sono basate su osservazioni sperimentali, non teoremi derivati da assiomi primi. Non si esclude quindi a priori l'esistenza dei monopoli magnetici, ma non se ne è trovata, ad oggi, conferma sperimentale.
Nonostante lo scarso successo dell'ipotesi del monopolo magnetico a livello sperimentale, nel corso del secolo scorso non è cessato l'interesse nel formularne una teoria completa e consistente. Una delle ragioni principali per cui tale ricerca viene portata avanti, oltre alle numerose implicazioni a livello teorico e sperimentale, è la mancata comprensione della motivazione per cui non siano mai stati osservati monopoli magnetici in natura.

Un primo approccio per introdurre una teoria del monopolo magnetico, volto solamente a evidenziarne le problematiche, è la costruzione di un elementare modello classico: assumendo l'esistenza di una carica magnetica g, si scrivono le equazioni del moto di un elettrone immerso in un campo magnetico di monopolo, analogo al campo elettrico coulombiano prodotto da una carica elettrica isolata (monopolo elettrico). Occorre quindi modificare le equazioni di Maxwell, eguagliando la divergenza del campo magnetico $\mathbf{B}$ alla densità di carica magnetica locale ρ_g. Emerge però subito una contraddizione: se si vuole definire un potenziale elettromagnetico $\mathbf{A}$, il cui rotore è il campo magnetico $\mathbf{B}$, si ha incompatibilità tra le due condizioni $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Il motivo è l'impossibilità di definire ovunque un potenziale vettore regolare: esiste sempre un semiasse in cui il potenziale è singolare.

Per costruire una teoria non contradditoria bisogna rinunciare alla definizione di un potenziale globale, in favore di una descrizione con più potenziali definiti localmente e che si raccordino in maniera corretta nelle regioni in cui si intersecano.
Il formalismo più adatto a questa descrizione è quello delle teorie di gauge, in cui l'accento è posto sul comportamento locale dei campi.

Ricordando che l'elettrodinamica classica è una teoria di gauge con simmetria di gruppo $U(1)$, si inizia tentando di definire, su due aperti, due potenziali di gauge legati nella regione di intersezione da una trasformazione di gauge di tipo $U(1)$. Si arriva dunque a costruire il campo di monopolo con l'andamento corretto (già definito nell'esempio "alla Coulomb"), risolvendo la contraddizione evidenziata in precedenza. Associando la carica magnetica alle classi di Chern della varietà in esame, viene ad essa associato un significato topologico.
Osservazioni sulla non-polidromia della trasformazione dei campi permettono di ottenere una relazione tra le cariche elettrica e magnetica - relazione che costiuisce uno dei principali interessi nel costruire una teoria del monopolo magnetico.
Nell'estendere il modello a una teoria di campo quantistica, il modello abeliano presenta tuttavia alcuni punti critici.

Teorie di campo che generalizzano l'elettrodinamica prendono il nome di teorie di *Yang-Mills*.
Si vuole pertanto generalizzare la teoria a un gruppo di gauge non abeliano di cui $U(1)$ è sottogruppo, al fine di ridurla alla precedente teoria abeliana in condizioni normali - ad esempio a basse energie. Questo processo di rottura spontanea della simmetria comprende tutte le previsioni del modello abeliano ed ha il vantaggio di risolverne le criticità. Il caso più semplice è quello in cui viene preso come gruppo di gauge il gruppo $SU(2)$, che ha appunto $U(1)$ come sottogruppo. Vengono presi in esame due modelli di monopolo magnetico. Il primo, proposto da Wu e Yang nel 1969, risolve i problemi del modello abeliano, ma deficita di una appropriata definizione delle energie di configurazione dei campi, la quale risulta divergente. Il secondo modello, invece, è un caso particolare del modello proposto da Georgi e Glashow nel 1974, in cui si accoppia il potenziale di gauge a un campo, il campo di Higgs. Si manifesta immediatamente il processo di rottura di simmetria da $SU(2)$ a $U(1)$ e viene risolto il problema delle configurazioni a energia divergente. Si arriva inoltre a dare un'ulteriore definizione della carica magnetica, associandola alla conservazione del tensore elettromagnetico, facendola discendere quindi dalle equazioni di Maxwell stesse.

Le difficoltà di un modello non abeliano sono certamente anche di natura computazionale. Si danno allora alcuni cenni, in conclusione, al modello di soluzione proposto da 't Hooft e Polyakov, che è un punto di partenza per le soluzioni numeriche del modello di Georgi-Glashow.

Classical and quantum analysis of magnetic monopoles in gauge theories

No magnetic monopole has ever been observed in nature. Classical electrodynamics, however, does not provide a reason for their non-existence. Since Maxwell equations merely formalize the experimental observations on electric and magnetic phenomena, no *a priori* rejection of the monopole is made. Despite the lack of experimental results, the interest in a consistent theory of magnetic monopoles has not vanished throughout the past century, since Dirac first published his original paper in 1931.

Our first step in introducing a theory of the magnetic monopole will be a naive construction of an elementary classical model, aimed at writing the equations of motion of an electron in a Coulomb-like magnetic field. This is only meant to stress the central issues of the subject. We begin by assuming the existence of a magnetic charge, analogous to the electric charge. Consequently modify Maxwell's equations, including the non-zero divergence of the magnetic field $\mathbf{B}$, which has to be equal to the local magnetic charge density, namely ρ_g.
Here arises the first contraddiction. If one defines the electromagnetic potential $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ being the curl of $\mathbf{A}$, it is impossible to have both $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ and $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g$ at the same time. This is due to the fact that $\mathbf{A}$ is not defined everywhere in space, but it will always have a string of singularities.

A non-contradictory monopole theory is incompatible with a global vector potential. We are required to describe our model using only local potentials, which must agree on their overlap region via an appropriate trasformation. The frame which fits this picture the most is that of gauge theories.

Since classical electrodynamics is a $U(1)$ gauge theory, we define local potentials on two open sets, requiring that a $U(1)$ gauge transformation connects them within the overlapping region. This way, it is possibile to define the correct monopole field and to remove the previous contradiction. We also assing a topological meaning to the magnetic charge, via the Chern characteristic classes of the considered manifold. Due the condition of the fields transformation to be single-valued, a relationship between magnetic and electric charges is obtained. One of the main issues with this Abelian model arises when we try to extend our theory to a quantum field theory.

Theories that generalize electrodynamics are named *Yang-Mills theories*.
The next step is to generalize our theory to a non-Abelian gauge group, having $U(1)$ as a subgroup, and which will reduce to our previous abelian theory under normal conditions. This spontaneous symmetry-breaking process preserves all the previous predictions, giving a solution to the problems of the afore-mentioned model.

The first and simplest case is to consider $SU(2)$ as the gauge group. We will analyze two models of this type.
Onw proposed by Wu and Yang in 1969 is capable of solving all the problems with the abelian model, but gives badly-defined energy configurations, leading to divergencies.
The second one is a special case of the more general model proposed by Georgi and Glashow in 1974. Here, the gauge potential is coupled with another complex field, the Higgs field. This immediatly breaks the symmetry of $SU(2)$ down to $U(1)$, and solves the infinite-energies problem. The last achievement is a definition of the magnetic charge directly derived from the conservation of the field-strength tensor, therefore from Maxwell equations themselves.

Unfortunately, the model has no analytic solution in general: numerical solutions to the problem need to be found. We conclude our dissertation by briefly mentioning a solution proposed by 't Hooft and Polyakov, a starting point for numerical solutions of the Georgi-Glashow model.