

Università degli studi di Milano Bicocca

Facoltà di Fisica

Corso di laurea triennale in Fisica



**ASPETTI CLASSICI E QUANTISTICI
DEI MONOPOLI MAGNETICI IN
TEORIE DI GAUGE**

Relatore: Prof. Zaffaroni Alberto

Tesi di laurea di:

Danilo BONDÌ

Matr. N. 801827

Anno Accademico 2017/2018

Contents

1	Monopolo di Dirac	2
1.1	Potenziale di Dirac	2
1.2	Trasformazione di gauge	3
1.3	Calcoli	3
1.3.1	Calcolo del potenziale vettore di Dirac	3
1.3.2	Calcolo del flusso del campo regolarizzato	4
2	Monopoli in teorie di gauge abeliane	6
2.1	Elettrodinamica classica	6
2.2	Fibrato di Monopolo di Wu–Yang	6
2.3	Fibrato di Hopf	6
3	Monopoli in teorie di gauge non abeliane	7
3.1	Monopolo di 't Hooft–Polyakov	7
A	Cenni preliminari di matematica	8
A.1	Topologia Generale e Algebrica	8
A.2	Definizioni base	8
A.2.1	Omotopia e Classi di omotopia	10
A.3	Varietà differenziali	10
A.3.1	Spazio tangente e cotangente	10
A.3.2	Mappe tra varietà	11
A.3.3	Varietà con bordo	11
A.4	Tensori e Forme differenziali	12
A.4.1	Forme differenziali	12
A.4.2	Differenziale esterno	13
A.4.3	Coomologia di de Rham	13
A.4.4	Integrazione	13
A.4.5	Varietà Riemanniane	14
A.4.6	Derivata covariante	14
A.5	Gruppo e azione di gruppo	15
A.5.1	Gruppi e Algebre di Lie	16
A.6	Fibrati	18
A.6.1	Fibrato Tangente	19
A.6.2	Fibrato	19
A.6.3	Fibrato Principale e Connessione	21
A.6.4	Classi caratteristiche	24
B	Notazione	25
	Bibliography	26

Chapter 1

Monopolo di Dirac

1.1 Potenziale di Dirac

introduzione, dire cose bla bla bla Campo magnetico generato da una carica magnetica g situata nell'origine

$$B = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ il versore radiale.

Le equazioni del moto di una carica elettrica e nel campo \mathbf{B} , generate dalla Lagrangiana di minima interazione tra una carica elettrica e un campo magnetico

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

sono

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{eg}{r^3} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$$

dove il vettore potenziale che compare nella Lagrangiana deve soddisfare $B = \nabla \times \mathbf{A} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Come calcolato nella sezione 1.3.1 un potenziale che soddisfa questa relazione è:

$$\mathbf{A} = g(1 + \cos \theta) \left(\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \frac{-\cos \phi}{r \sin \theta}, 0 \right)$$

Si presenta immediatamente il seguente problema. Se si ammette l'esistenza di una carica magnetica, il teorema di Gauss garantisce che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\mathbf{r})$, ossia che il flusso del campo attraverso una qualsiasi superficie chiusa contenente la carica magnetica g è pari a $4\pi g$, in contraddizione con $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, che genera un flusso nullo.

Il potenziale \mathbf{A} presenta però delle discontinuità per $\sin \theta = 0$. Si verifica immediatamente che $\theta = 0$ è un punto singolare, mentre \mathbf{A} è continuo in $\theta = \pi$. Il calcolo fatto non è quindi corretto lungo l'asse z positivo ($\theta = 0$), e occorre regolarizzare il potenziale.

Siano $\epsilon > 0$ e $r_\epsilon = \sqrt{r^2 + \epsilon^2}$. Si definiscono ora

$$\mathbf{A}_\epsilon := \frac{g}{r_\epsilon} \frac{1}{r_\epsilon - z} \mathbf{u}_\phi$$

$$\mathbf{B}_\epsilon = \nabla \times \mathbf{A}_\epsilon = \frac{g}{r_\epsilon^3} \mathbf{r} - g\epsilon^2 \left(\frac{1}{r_\epsilon^3(r_\epsilon - z)} + \frac{1}{r_\epsilon^2(r_\epsilon - z)^2} \right) \mathbf{u}_z$$

e si vuole definire $\tilde{\mathbf{B}} := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\epsilon$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 2g\epsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \epsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \mathbf{u}_z \right]$$

dove $\Theta(z)$ è la funzione di Heaviside per l'asse z .

Si vuole ora valutare il flusso del campo magnetico regolarizzato $\tilde{\mathbf{B}}$ attraverso una superficie chiusa S centrata nell'origine e di raggio unitario, supponendo che sia possibile scambiare il limite e l'integrale

$$\int_S d\sigma \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma \mathbf{B}_\epsilon$$

Si veda la sezione 1.3.2 per il calcolo esplicito. L'unico termine in ϵ che porta contributo al flusso è il secondo e si ha:

$$\int_S d\sigma \tilde{\mathbf{B}} = \int_S d\sigma \left(\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \mathbf{u}_z \right) = 4\pi g - 4\pi g = 0$$

Il campo regolarizzato è composto da due termini:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{string} = \frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \mathbf{u}_z$$

L'effetto del campo generato dalla stringa di singolarità lungo l'asse z positivo è quello di annullare il flusso del campo prodotto dalla carica, risolvendo la contraddizione evidenziata in precedenza.

1.2 Trasformazione di gauge

Come evidenziato nella sezione precedente, non è possibile definire ovunque un potenziale di monopolo continuo e derivabile

1.3 Calcoli

1.3.1 Calcolo del potenziale vettore di Dirac

Si consideri il campo classico di monopolo generato da una carica magnetica g posta nell'origine del sistema di riferimento, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Si vuole trovare un potenziale vettore $\mathbf{A} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ in U . Si osserva innanzitutto che per la simmetria sferica del campo \mathbf{B} , il potenziale vettore può essere scritto come:

$$\mathbf{A} = g \cdot a(\theta) \nabla \phi$$

per un'opportuna funzione $a(\theta)$. L'espressione del rotore in coordinate sferiche è:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_\phi$$

ove i versori sono dati da:

$$\begin{cases} u_r = \sin \theta \cos \phi u_x + \sin \theta \sin \phi u_y + \cos \theta u_z \\ u_\theta = \cos \theta \cos \phi u_x + \cos \theta \sin \phi u_y - \sin \theta u_z \\ u_\phi = -\sin \phi u_x + \cos \phi u_y \end{cases}$$

Inoltre

$$\nabla \phi = \left(\frac{-\sin \phi}{r \sin \theta}, \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, 0 \right)$$

Si deve avere che $\nabla \times \mathbf{A} = g \cdot \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$, ossia

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) = g \cdot \frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases}$$

Osservando che $A_\theta = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{A}$ e $A_\phi = \mathbf{u}_\phi \cdot \mathbf{A}$ e inserendo $\mathbf{A} = g \cdot a(\theta) \nabla \phi$

$$A_\phi = (-\sin \phi \mathbf{u}_x + \cos \phi \mathbf{u}_y) \cdot a(\theta) g \nabla \phi = a(\theta) g \left(-\sin \phi \frac{-\sin \phi}{r \sin \theta} + \cos \phi \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) = \frac{a(\theta) g}{r \sin \theta}$$

$$A_\theta = (\cos \theta \cos \phi u_x + \cos \theta \sin \phi u_y - \sin \theta u_z) \cdot a(\theta) g \nabla \phi = a(\theta) g \left(\frac{-\sin \phi}{r \sin \theta} \cos \theta \cos \phi + \frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \cos \theta \sin \phi \right) = 0$$

Segue quindi che

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{g}{r} \frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta} = \frac{g}{r}$$

Da cui si ricava facilmente l'espressione di $a(\theta)$ integrando ambo i lati

$$\int_0^\theta \frac{\partial a(\theta')}{\partial \theta'} d\theta' = \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \Rightarrow a(\theta) = -(\cos \theta + 1) + \cos \theta = -(\cos \theta + 1)$$

Ponendo a zero la costante arbitraria di integrazione.

Si ottiene allora:

$$\mathbf{A} = -g(1 + \cos \theta) \nabla \phi = g(1 + \cos \theta) \left(\frac{\sin \phi}{r \sin \theta}, \frac{-\cos \phi}{r \sin \theta}, 0 \right)$$

È di immediata verifica che $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$.

Inoltre, si nota che

$$\nabla \phi = \left(\frac{-\sin \phi}{r \sin \theta}, \frac{\cos \phi}{r \sin \theta}, 0 \right) = \frac{1}{(r \sin \theta)^2} (-x, y, 0) = \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \mathbf{u}_\phi = \frac{1}{r^2(1 - \cos^2 \theta)} \mathbf{u}_\phi$$

Allora

$$A = -g(1 + \cos \theta) \nabla \phi = -\frac{g}{r^2} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \mathbf{u}_\phi = -\frac{g}{r^2} \frac{1}{1 - \cos \theta} \mathbf{u}_\phi = -\frac{g}{r} \frac{1}{r - r \cos \theta} \mathbf{u}_\phi = -\frac{g}{r(r - z)} \mathbf{u}_\phi$$

Ciò giustifica la definizione della forma differenziale $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ che mappa ogni punto $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $p = (x, y, z)$ nella forma

$$A_p = \frac{g}{r(r - z)} (x dy - y dx) = \frac{g}{r(r - z)} d\phi$$

con $r = |p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.3.2 Calcolo del flusso del campo regolarizzato

Supponendo valga (dimostrare)

$$\int_S d\sigma \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma \mathbf{B}_\epsilon$$

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 \leq \epsilon^2, -h < z < h\}$, cilindro centrato attorno all'asse z di raggio ϵ e altezza $2h$, con $h > 0$.

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma \tilde{\mathbf{B}} &= \int_S d\sigma \left[\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 2g\epsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \epsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \right] \\ &= \int_S d\sigma \frac{g}{r^3} \mathbf{r} - \int_S d\sigma \left[2g\epsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \epsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \right] \\ &= \int_S d\sigma [1] - \int_S d\sigma [2] \end{aligned}$$

Il secondo integrale ha contribuito non nullo solamente sulla faccia superiore del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 \leq \epsilon^2, z = h\}$ poichè l'integranda è nulla per $z < 0$ e il campo è parallelo all'asse z , quindi il flusso attraverso le pareti del cilindro è nullo.

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma [2] &= 2g\epsilon^2 \int_C d\sigma \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \epsilon^2)^2} \right) \\ &= 2g\epsilon^2 \int_0^\epsilon \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \epsilon^2)^2} \right) \end{aligned}$$

I punti di C hanno $r^2 = \epsilon^2 + h^2$, $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, quindi

$$= 2g\epsilon^2 \int_0^\epsilon \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \left(\frac{1}{(\epsilon^2 + h^2)(\rho^2 + \epsilon^2)} + \frac{2}{(\rho^2 + \epsilon^2)^2} \right)$$

Sia $u := \rho^2 + \epsilon^2$ e $du = 2\rho d\rho$

$$\begin{aligned} &= 4\pi g \epsilon^2 \int_{\epsilon^2}^{2\epsilon^2} du \left(\frac{1}{(\epsilon^2 + h^2)u} + \frac{2}{u^2} \right) = 4\pi g \epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2 + h^2} (\log(2\epsilon^2) - \log(\epsilon^2)) - 2 \left(\frac{1}{2\epsilon^2} - \frac{1}{\epsilon^2} \right) \right) \\ &= 4\pi g \epsilon^2 \left(\frac{1}{\epsilon^2 + h^2} \log \left(\frac{2\epsilon^2}{\epsilon^2} \right) - \frac{2}{\epsilon^2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) = 4\pi g \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + h^2} \log 2 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2} \right) \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma[2] = 4\pi g \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + h^2} \log 2 + \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2} \right) = 4\pi g$$

Chapter 2

Monopoli in teorie di gauge abeliane

Si faccia riferimento all'appendice per il formalismo dei fibrati.

2.1 Elettrodinamica classica

2.2 Fibrato di Monopolo di Wu–Yang

In the following, we shall restrict our consideration to the so-called principal bundles. We can construct such a bundle by choosing the fiber to be identical to the structure group: $F = G$. The reason is that a gauge theory has a natural structure of the principal bundle with the gauge group as a fiber. In the following we shall consider only principal bundles.

2.3 Fibrato di Hopf

Chapter 3

Monopoli in teorie di gauge non abeliane

3.1 Monopolo di 't Hooft–Polyakov

Appendix A

Cenni preliminari di matematica

A.1 Topologia Generale e Algebrica

Per una trattazione completa degli argomenti qua accennati si vedano le referenze.

A.2 Definizioni base

Definizione A.0.1. (Topologia) Sia X un insieme, è detta *topologia* una collezione di sottoinsiemi di X che rispettino i seguenti assiomi ($T = \{A_\alpha\} \subset X$):

- $\emptyset \in T$ e $X \in T$
- $\bigcup_{\alpha} A_\alpha \in T$, $\forall \alpha$ t.c. $A_\alpha \in T$
- $A_\alpha \cap A_\beta \in T \forall A_\alpha, A_\beta \in T$

Si sottolinea che la seconda condizione richiede che l'unione **qualsiasi** (finita, infinita, numerabile, non numerabile, etc) di elementi della topologia appartenga alla topologia, mentre la terza richiede solamente che l'intersezione di due elementi della topologia appartenga ad essa (è immediato generalizzare a una qualsiasi intersezione **finita** di elementi della topologia)

Lo spazio X , dotato della topologia T viene detto **spazio topologico**. Gli elementi della topologia $A \in T$ vengono detti *aperti* di X .

Piccoli esempi più commenti. Si veda [2] per ulteriori esempi di spazi topologici ¹.

Definizione A.0.2. (Intorno) Sia (X, T) uno spazio topologico e $x \in X$. Un insieme $U \subset X$ è detto *intorno di x* se esiste un aperto contenuto in U , contenente x .

$$\exists A \in T, A \subset U \text{ t.c. } x \in A \rightarrow U \text{ intorno di } x.$$

Definizione A.0.3. (Base della topologia) Sia (X, T) spazio topologico, $x \in X$. Una *Base* per la topologia T è una famiglia \mathfrak{B} di aperti tale che ogni aperto $A \in T$ è unione di insiemi di \mathfrak{B}

$$\forall A \in T \ A = \bigcup_i B_i, \{B_i\} \in \mathfrak{B}$$

Definizione A.0.4. (Secondo assioma di Numerabilità) Lo spazio X ha una base con cardinalità numerabile.

Esempio di \mathbb{R}^n

¹Capitoli 1 e 2

Definizione A.0.5. (Continuità) Sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione tra gli spazi topologici X, Y dotati rispettivamente delle topologie T_X, T_Y tale che la *controimmagine* di ogni aperto in Y è un aperto in X

$$\forall A_Y \in T_Y \rightarrow f^{-1}(A_Y) \in T_X$$

allora f è detta una funzione *continua*

Per funzioni $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ questa definizione coincide con la usuale definizione di continuità di Analisi Matematica (si veda [1] per una dimostrazione per funzioni $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).²

Se una funzione f continua è invertibile e la sua inversa f^{-1} è continua allora f è detta un **omeomorfismo**.

Definizione A.0.6. (Varietà topologica) Sia (X, T) uno spazio topologico con le seguenti proprietà:

- (Proprietà di Hausdorff) Punti distinti di X hanno interni disgiunti

$$\forall x_\alpha, x_\beta \in X, x_\alpha \neq x_\beta, \exists A_\alpha, A_\beta \in T (x_\alpha \in A_\alpha, x_\beta \in A_\beta, \text{interni}), \text{ t.c. } A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

- (Localmente n-Euclideo) Ciascun punto di X ha un intorno che è omeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^n .

$$\forall x \in X \exists U \in T, \exists \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \phi \text{ omeomorfismo}$$

- (Secondo assioma di Numerabilità) Lo spazio X rispetta il secondo assioma di Numerabilità (A.0.4).

X è allora detto una *varietà topologica*

Il numero n è detto la *dimensione* della varietà. Si può dimostrare che è unico.

La coppia (U, ϕ) è detta *intorno coordinato* o *carta*. Una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ è detta *atlante* se rispetta le seguenti proprietà:

- L'insieme degli interni $\{U_\alpha\}$ ricopre $X : X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$
- Gli interni coordinati sono a due a due *compatibili*: per ogni coppia di interni coordinati $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ le funzioni di transizione (cambio di coordinate)

$$\begin{aligned} \psi &= \phi_\beta \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \psi^{-1} &= \phi_\alpha \circ \phi_\beta : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \end{aligned}$$

sono funzioni continue

Si veda [2] per esempi di varietà topologiche

Si sottolinea che una varietà topologica è uno spazio che può essere descritto localmente con un sistema di coordinate euclidee e applicare quindi tutti i metodi noti di Analisi. Ad esempio si può richiedere che le funzioni coordinate siano funzioni differenziabili di classe $C^k(U)$, per qualche k (senza perdita di generalità, si richiedere che le funzioni siano C^∞). Questo porta alla definizione di **varietà differenziale** (si veda A.3).

Cosa significa "in coordinate locali"

Teoremi

dimostrazioni di invarianti topologici per omeomorfismo

²Soardi, capitolo 7, sezione 7.3

A.2.1 Omotopia e Classi di omotopia

A.3 Varietà differenziali

In relazione alla definizione A.0.6.

Definizione A.0.7. (Varietà differenziale) Uno spazio topologico M si dice *varietà differenziale* se è una varietà topologica in cui le funzioni coordinate e le funzioni di transizione sono funzioni differenziabili C^∞ .

Nel seguito viene usato "differenziabile" come sinonimo di " C^∞ ", senza perdita di generalità della trattazione.

La compatibilità tra due carte è una relazione di equivalenza. L'insieme delle classi di equivalenza di compatibilità è detto *struttura differenziale*.

Di norma non vi è un unico atlante che appartiene a una struttura differenziale, ma si dimostra che dato un atlante è unica la struttura differenziale a cui appartiene.

Una funzione differenziabile, invertibile e con inversa differenziabile si dice **diffeomorfismo** (quando serve, viene indicata la classe C^k di differenziabilità).

A.3.1 Spazio tangente e cotangente

Si vuole generalizzare la nozione di vettore tangente ad uno spazio $M \subset \mathbb{R}^n$ (si pensi pure a una superficie in \mathbb{R}^3 o una curva in \mathbb{R}^2). Un vettore identifica univocamente una direzione in \mathbb{R}^n . Si vuole associare ad ogni vettore l'operazione derivata direzionale lungo la direzione individuata dal vettore, valutata nel punto $p \in \mathbb{R}^n$.

Scelta una base $\{\mathbf{e}_i\}$ di \mathbb{R}^n , ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si può esprimere in maniera unica come combinazione lineare degli elementi della base

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + v_n \mathbf{e}_n$$

Sia f una funzione differenziabile definita in un opportuno intorno U del punto p (per semplicità nel seguito si indica con $C^\infty(p)$ l'insieme delle funzioni lisce definite su opportuni intorno del punto $p \in \mathbb{R}^n$).

La derivata direzionale di f lungo \mathbf{v} è quindi data da

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p = v_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p + \cdots + v_n \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p$$

Inoltre, per le proprietà delle derivate $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in C^\infty(p)$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\alpha f + \beta g) \right|_p = \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p + \beta \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \right|_p \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (fg) \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p g(p) + f(p) \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \right|_p$$

Il vettore \mathbf{v} è allora individuato in maniera univoca dal modo in cui agisce la derivata direzionale su tutte le funzioni differenziabili in un intorno di p . Si definisce allora il *vettore tangente* alla varietà M nel punto p :

Definizione A.0.8. (Vettore tangente) Sia M una varietà differenziale e $p \in M$. Si dice *vettore tangente* a X nel punto p un'applicazione $\mathbf{V}_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\mathbf{V}_p[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbf{V}_p[f] + \beta \mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p) \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{V}_p[fg] = \mathbf{V}_p[f]g(p) + f(p)\mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p)$

L'insieme dei vettori tangenti a una varietà M nel punto p è detto **spazio tangente** alla varietà nel punto p e si indica con $T_p(M)$. Si può mostrare facilmente che $T_p(M)$ è uno spazio vettoriale.

Si definisce **spazio cotangente** $T_p^*(M)$ a una varietà M nel punto $p \in M$ il duale³ dello spazio tangente $T_p(M)$.

Data una base di \mathbb{R}^n si definiscono:

³Si ricorda che il duale V^* di uno spazio vettoriale V è l'insieme delle applicazioni lineari $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$. Data una base $\{e_i\}$ di V , la base canonica per V^* è definita dalle proiezioni nella i -esima coordinata dx^i , quindi $dx^i(e_j) = \delta_j^i$. Data una qualsiasi $\phi \in V^*$ applicazione lineare su V , si ha $\phi = \sum_i a_i dx^i$ per $\{a_i\} \in \mathbb{R}$.

- $e_i = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p$ le derivate parziali lungo la coordinata i -esima sono base di $T_p(M)$.
- $e^i = dx^i$ gli elementi di linea differenziali lungo la coordinata i -esima sono base di $T_p^*(M)$.

Si definisce **campo vettoriale** un'applicazione che a un punto p della varietà M associa un vettore tangente al punto. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia dal punto base p ⁴. Lo spazio dei campi vettoriali sulla varietà M si indica con $\mathcal{X}(M)$

$$\mathbf{V} : M \rightarrow T_p(M), p \mapsto \mathbf{V}_p$$

Si definisce **campo covettoriale** un'applicazione che a un punto p della varietà M associa un vettore cotangente al punto. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia dal punto base p .

$$\mathbf{U} : M \rightarrow T_p^*(M), p \mapsto \mathbf{U}_p$$

(togliere?) Siano $V = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $U = u_i dx^i$ campi vettoriali/covettoriali e si consideri una generica trasformazione di coordinate $x \mapsto y(x)$ V e U sono invarianti (indipendenti dalla scelta della base). Si ha che:

$$dy^i = \sum_j \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

In base a queste leggi di trasformazione in seguito a cambio di coordinate, i vettori tangenti si dicono **covarianti** e i vettori cotangenti si dicono **controvarianti**.

A.3.2 Mappe tra varietà

Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa tra le due varietà differenziali M e N . Sia (U, ϕ) una carta per M e (V, ψ) una carta per N . Sia $p \in U$ e $q = F(p) \in V$.

Definizione A.0.9. La mappa F è detta differenziabile in p se è differenziabile in senso tradizionale la mappa tra gli aperti di \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n

$$f : \phi(U) \rightarrow \psi(V) \quad , \quad f = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

Definizione A.0.10. Una mappa $F : M \rightarrow N$ tra due varietà induce una mappa $F_* : T_p M \rightarrow T_q N$ tra gli spazi tangenti denominata *mappa differenziale*, definita da:

$$(F_* X)_q[g] := X_p[g \circ F]$$

per ogni vettore $X_p \in T_p M$ e ogni funzione $g \in C^\infty(N)$.

Siano $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow O$ e $G \circ F : M \rightarrow O$, vale che

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$$

Definizione A.0.11. Una mappa $F : M \rightarrow N$ tra due varietà induce una mappa $F^* : T_q^* N \rightarrow T_p^* M$ tra gli spazi cotangenti denominata *pullback*, definita da:

$$F_* \omega(X_p) := \omega(F_* X_p)$$

per ogni $\omega \in T_q^* N$ e ogni vettore $X_p \in T_p M$.

Si noti che la mappa differenziale agisce nella stessa direzione di F (covariante), mentre il pullback agisce in direzione opposta (controvariante).

Per trasportare campi vettoriali occorre che F sia un diffeomorfismo, per problemi di iniettività e suriettività.

A.3.3 Varietà con bordo

Orientazione

⁴Si veda A.6.1 per chiarificare questa affermazione.

A.4 Tensori e Forme differenziali

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} .

Si definisce **tensore** misto con r indici covarianti e s indici controvarianti un'applicazione *multilineare* $F : V^r \times V^{*s} \rightarrow \mathbb{R}$, dove $V^r = V \times \dots \times V$ e $V^{*s} = V^* \times \dots \times V^*$.

Si indica con $\mathcal{T}^{(r,s)}(V)$ lo spazio dei (r,s) -tensori su V

Si definisce il **prodotto tensoriale** (indicato col simbolo \otimes) tra $F \in \mathcal{T}^r(V)$ e $G \in \mathcal{T}^s(V)$ il $r+s$ tensore definito da:

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_{r+s}) = F(v_1, \dots, v_r)G(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$$

dove a destra dell'uguale si ha il prodotto tra i due numeri reali $F(v_1, \dots, v_r)$ e $G(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$. Analogamente, si definisce il prodotto tensoriale tra due tensori controvarianti.

Si può facilmente dimostrare la seguente

Proposizione A.0.1. *Sia M varietà differenziale e $p \in M$. Siano $V = T_p(M)$ e $V^* = T_p^*(M)$ Sia $F \in \mathcal{T}^{(r,s)}(V)$, allora esistono $a_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s}$ tali che in coordinate locali*

$$F = \sum_{\substack{(i_1, \dots, i_r) \\ (j_1, \dots, j_s)}} a_{i_1, \dots, i_r}^{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

Ovvero le basi di $T_p(M)$ e $T_p^*(M)$ inducono una base per $\mathcal{T}^r(T_p(M))$ e $\mathcal{T}^s(T_p^*(M))$.

Si definisce **campo tensoriale** sulla varietà M con r indici covarianti e s indici controvarianti un'applicazione $M \rightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(T_p^*(M))$ che a ogni p associa un tensore con punto base p . Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia da p .

Si definisce **r-forma** un r -tensore covariante *totalmente antisimmetrico*.

Lo spazio delle r -forme sulla varietà M nel punto p si indica con $\Lambda^r(p)$. La dimensione di $\Lambda^r(p)$ è $\binom{n}{r}$ se n è la dimensione di M ⁵.

A.4.1 Forme differenziali

Definizione A.0.12. (Forma differenziale) Si definisce *r-forma differenziale* un campo tensoriale covariante *totalmente antisimmetrico*, ossia un'applicazione multilineare $\omega : M \rightarrow \Lambda^r(p)$ che a $p \in M$ associa la r -forma ω_p

Lo spazio delle r -forme differenziali su M si indica con $\Omega^r(M)$.

Analogamente a quanto fatto per il prodotto tensoriale, si vuole definire un prodotto tra r e s forme differenziali che dia una $r+s$ forma differenziale (cioè un prodotto tensoriale che mantenga l'antisimmetria del tensore).

Si definisce **prodotto esterno** o **prodotto wedge** tra due forme differenziali $\alpha \in \Omega^r(M)$ e $\omega \in \Omega^s(M)$ la $r+s$ forma differenziale definita da:

$$\alpha \wedge \omega(V_1, \dots, V_{r+s})(p) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S^{r+s}} (-1)^\sigma \alpha_p \otimes \omega_p(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r)}, V_{\sigma(r+1)}, \dots, V_{\sigma(r+s)})$$

Dove S^{r+s} è il gruppo delle permutazioni di $r+s$ elementi e $(-1)^\sigma$ è il segno della permutazione σ . E gode delle seguenti proprietà, di immediata dimostrazione:

1. $(\alpha + \beta) \wedge \omega = \alpha \wedge \omega + \beta \wedge \omega$ e $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$
2. $(c\alpha) \wedge \omega = c(\alpha \wedge \omega) = \alpha \wedge (c\omega)$

⁵ Si veda [2],[4],[5]

$$3. \omega \wedge \alpha = (-1)^{r+s} \alpha \wedge \omega$$

$$4. (\alpha \wedge \omega) \wedge \tau = \alpha \wedge (\omega \wedge \tau) \text{ (valida grazie alla normalizzazione scelta nella definizione di } \wedge \text{)}$$

$$\forall c \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \Omega^r(M), \forall \omega \in \Omega^s(M), \forall \tau \in \Omega^k(M)$$

Analogamente alla A.0.1, vale anche

Proposizione A.0.2. *Sia M varietà differenziale e $p \in M$. Sia $\omega \in \Omega^r(T_p(M))$, allora esistono le funzioni a_{i_1, \dots, i_r} tali che in coordinate locali*

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Si osservi che per la proprietà di antisimmetria se $u = v$ si ha

$$\omega(v, \dots, u, \dots) = -\omega(u, \dots, v, \dots) = -\omega(v, \dots, u, \dots) = 0$$

Per una varietà di dimensione n si ha al massimo n vettori linearmente indipendenti. Se si prende in considerazione un vettore aggiuntivo, esso è combinazione lineare dei precedenti.

Di conseguenza **tutte le ($r > n$)-forme** su una varietà di dimensione n sono **nulle**.

Se $u = a_1 v^1 + \dots + a_n v^n$

$$\omega(v^1, \dots, v^n, u) = \dots = a_1 \omega(v^1, \dots, v^n, v^1) + \dots + a_n \omega(v^1, \dots, v^n, v^n) = 0$$

A.4.2 Differenziale esterno

Si definisce l'operatore che a una r -forma $\omega \in \Lambda^r(p)$ associa la $(r+1)$ -forma $d\omega \in \Lambda^{r+1}(p)$, definita in coordinate locali da

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \rightarrow d\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} da_{i_1, \dots, i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

ossia

$$d : \Lambda^r(p) \rightarrow \Lambda^{r+1}(p) \quad \omega \mapsto d\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Dall'antisimmetria del prodotto wedge discende immediatamente che $d^2\omega = d(d\omega) = 0$

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d \left(\sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right) = \sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} d \left(\frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} \right) \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_r, k, j)} \frac{\partial^2 a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0 \end{aligned}$$

in quanto contrazione del termine simmetrico $\frac{\partial^2 a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k \partial x^j}$ e del termine antisimmetrico $dx^j \wedge dx^k$

Si definisce forma **esatta** una r -forma ω se esiste una $(r-1)$ -forma α che verifica $\omega = d\alpha$

Si definisce forma **chiusa** una r -forma ω tale che $d\omega = 0$.

Segue immediatamente che ogni forma esatta è chiusa. L'inverso è vero solo localmente.

Lemma A.0.1. (di Poincarè) *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una palla aperta. Una r -forma ω chiusa definita su M è esatta.*

A.4.3 Coomologia di de Rham

A.4.4 Integrazione

L'integrazione di una forma su una varietà può essere definita tramite coordinate locali e ricondotta a integrazione su aperti di \mathbb{R}^n . Una trattazione rigorosa richiederebbe l'introduzione del concetto di *partizione dell'unità*, che esula dallo scopo di questo elaborato. Si vedano [4],[5] per una trattazione rigorosa.

In maniera intuitiva, sia (U, ϕ) una carta della varietà M , dove U intorno del punto $p \in M$, e $R = \phi(U)$ e $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n -forma. Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integranda. Si definisce automaticamente la misura di integrazione $d\mu = dx^1 \dots dx^n$. e si può dare senso all'espressione in coordinate locali:

$$\int_U f \omega = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \dots dx^n$$

Si vuole poi ripetere questa operazione per tutte le carte di un atlante dato e "incollare" assieme i risultati in maniera che l'integrale sulla varietà sia uguale alla somma degli integrali sulle singole carte.

Si osserva che è possibile integrare solamente n -forme su varietà di dimensione n perchè le forme con $r > n$ sono tutte nulle, e gli spazi di dimensione $r < n$ hanno misura nulla in \mathbb{R}^n .

Hodge star:

Teorema di Stokes:

A.4.5 Varietà Riemanniane

Definizione A.0.13. Una *metrica Riemanniana* g su una varietà M è un $(2,0)$ -campo tensoriale su M che per ogni punto $p \in M$ soddisfa:

1. $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2. $g_p(U, U) \geq 0$ dove $g_p(U, U) = 0 \iff U = 0$

dove $U, V \in T_p(M)$.

Una *metrica pseudo-Riemanniana* g su una varietà M è un $(2,0)$ -campo tensoriale su M che per ogni punto $p \in M$ soddisfa:

1. $g_p(U, V) = g_p(V, U)$
2. $g_p(U, V) = 0 \forall U \in T_p(M) \Rightarrow V = 0$

Data una carta (U, ϕ) di M con coordinate $\{x^\mu\}$ il tensore g può essere scritto come

$$g_p = g_{\mu\nu}(p) dx^\mu dx^\nu =: ds^2$$

Dove $g_{\mu\nu}(p)$ può essere considerato come la $\mu\nu$ -esima entrata di una matrice.

Il numero (p, n) di autovalori positivi p e negativi n è detto *indice* della metrica. Se $n = 1$ la metrica è detta Lorentziana.

Si può diagonalizzare la metrica e riscrivere gli autovettori in modo da ottenere solamente ± 1 sulla diagonale. Ad esempio si ha la metrica Euclidea $\delta = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ o Minkowskiana $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

Se una varietà differenziale M è dotata di una metrica Riemanniana g , la coppia (M, g) è detta **varietà Riemanniana** (analogamente se g è pseudo-Riemann).

A.4.6 Derivata covariante

Cosa cazzo è. Cosa è in questo contesto.

Si vuole estendere il concetto di derivata direzionale agli (r,s) -tensori definiti su una varietà differenziale M

Sia X un campo vettoriale sulla varietà M (supponiamo $M = \mathbb{R}^n$, per semplicità), $p \in M$ e $h \in M$ pensato come piccolo spostamento da p , in M . Volendo definire la derivata direzionale di un campo vettoriale nel modo usuale

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{X_{p+h} - X_p}{|h|}(f)$$

si riscontra subito un problema. I due vettori $X_{p+h} \in T_{p+h}(M)$ e $X_p \in T_p(M)$ appartengono a due spazi differenti e non possono essere confrontati.

Occorre un modo di trasportare il vettore X_{p+h} da $T_{p+h}(M)$ a $T_p(M)$ lasciandolo inalterato. Questo processo è chiamato **trasporto parallelo**. Purtroppo non esiste una maniera univoca per trasportare un vettore tangente in una varietà, quindi è necessario specificare come viene effettuato il trasporto parallelo.

(qua si può tagliare o riassumere ulteriormente)

Definizione A.0.14. (Connessione affine): Una connessione affine ∇ è una mappa $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ t.c. $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ che verifica

1. $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
2. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y$

per $f \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$

Sia (U, ϕ) una carta di M con coordinate $x = \phi(p)$, $p \in M$. L'azione di ∇ sugli elementi $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\}$ della base di $T_p(M)$ ne determina univocamente l'azione su qualsiasi vettore X_p .

Si definiscono i **coefficienti di connessione** $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ da (per semplicità di notazione si indica $\nabla_{e_\nu} = \nabla_\nu$):

$$\nabla(e_\nu, e_\mu) = \nabla_\nu e_\mu = e_\lambda \Gamma_{\nu\mu}^\lambda$$

Presi allora due campi $X = X^\mu e_\mu$, $Y = Y^\nu e_\nu \in \mathcal{X}(M)$ si ha:

$$\nabla_X Y = X^\mu \nabla_\mu (Y^\nu e_\nu) = X^\mu (e_\mu[Y^\nu] e_\nu + Y^\nu \nabla_\mu e_\nu) = X^\mu \left(\frac{\partial Y^\nu}{\partial x^\mu} + Y^\nu \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \right)$$

il risultato dipende solo dalle $(\dim M)^3$ funzioni $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$.

Una connessione ∇ è detta simmetrica se in coordinate vale $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

Teorema A.0.1. (Teorema fondamentale della geometria (pseudo-)Riemanniana): Sia (M, g) una varietà (pseudo-)Riemanniana. Esiste un'unica connessione simmetrica che è compatibile con la metrica g . Questa connessione è chiamata **connessione di Levi-Civita** definita da

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2} g^{\kappa\lambda} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\lambda\mu} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}) =: \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$$

$\left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}$ è detto simbolo di Christoffel. Si veda [5] per la dimostrazione del teorema.

A.5 Gruppo e azione di gruppo

Definizione A.0.15. (Gruppo): Sia G un insieme e $*$ un'operazione binaria su G . G si definisce *gruppo* con l'operazione $*$ se valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall f, g, h \in G \rightarrow f * (g * h) = (f * g) * h$ associativa
2. $\exists e \in G$ t.c. $e * g = g * e = g$, $\forall g \in G$ esistenza elemento neutro
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ t.c. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ esistenza dell'inverso

Se vale anche la proprietà commutativa, il gruppo è detto *abeliano*

4. $\forall g, h \in G \rightarrow g * h = h * g$ commutativa

Sovente si usa omettere il simbolo dell'operazione: $g * h = gh$

Definizione A.0.16. (Azione di gruppo): Sia G un gruppo e X un insieme non vuoto. Si definisce l'azione destra di G su X una funzione $\phi : X \times G \rightarrow X$ che $(x, g) \mapsto \phi(x, g) = x \cdot g$ con le seguenti proprietà:

1. $x \cdot e = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X \rightarrow x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ compatibilità

Si definisce l'azione sinistra di G su X una funzione $\phi : G \times X \rightarrow X$ che $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = g \cdot x$ con le seguenti proprietà:

1. $e \cdot x = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X \rightarrow (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ compatibilità

La differenza tra azione destra e azione sinistra sta nell'ordine in cui gh agisce sull'insieme, evidente per gruppi non abeliani.

L'azione di G su X si dice:

- *transitiva*: $\forall x, y \in X \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$
- *libera*: Sia $g \in G$. Se $\exists x \in X$ t.c. $g \cdot x = x \Rightarrow g$ è l'identità

A.5.1 Gruppi e Algebre di Lie

Si veda la sezione A.3 per una breve trattazione su varietà differenziali, spazi tangenti e campi vettoriali.

Definizione A.0.17. (Gruppo di Lie): Un gruppo di Lie G è una varietà differenziale⁶, dotata di di una struttura di gruppo in cui la moltiplicazione e l'inverso sono funzioni lisce. In altre parole è liscia la mappa

$$(x, y) \mapsto x^{-1}y \quad \forall x, y \in G$$

La dimensione del gruppo equivale alla dimensione della varietà. Esempi di gruppi di Lie sono $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ i gruppi delle matrici quadrate $n \times n$ non singolari a coefficienti reali/complessi. Vale il seguente Teorema che non verrà qui dimostrato.

Teorema A.0.2. Ogni sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo di Lie

Che garantisce che $O(n), SO(n), SL(n, \mathbb{R})$ sono sottogruppi di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$.

Essendo un gruppo di Lie G contemporaneamente gruppo e varietà differenziale, si può definire l'azione di G (come gruppo) su se stesso (come varietà differenziale).

Definizione A.0.18. Sia $h \in G$ si definisce la *rappresentazione aggiunta* di G come l'omomorfismo $ad_h : G \rightarrow G$

$$ad_h : g \mapsto hgh^{-1}$$

E induce la mappa tra gli spazi tangenti $(ad_h)_* : T_g(G) \rightarrow T_{h^{-1}gh}$. Poichè $ad_h e = e$ si può valutare la restrizione di $(ad_h)_*$ al solo $g = e$, ottenendo una mappa di $T_e(G)$ in se stesso

$$Ad_h : T_e(G) \rightarrow T_e(G) \quad Ad_h := (ad_h)_*|_{T_e(G)}$$

Definizione A.0.19. (Algebra di Lie): Un'algebra di Lie \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale (su un opportuno campo) dotato di un'operazione binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ che rispetta le seguenti proprietà:

1. *Bilinearità* $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ e $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$
per tutti gli scalari a, b e $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$
2. *Identità di Jacobi* $\forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$
3. *Anticommutatività* $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$

⁶Si veda la sezione A.3

4. *Alternanza* $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ (discende dalla precedente)

La dimensione dell'algebra di Lie è la sua dimensione come spazio vettoriale.

Un set di elementi dell'algebra \mathfrak{g} si dice set di *generatori* se la sottoalgebra più piccola che lo contiene è \mathfrak{g} stessa.

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'algebra di Lie.

Siano $a, g \in G$. Si definiscono la **traslazione destra** $R_a : G \rightarrow G$ e la **traslazione sinistra** $L_a : G \rightarrow G$

$$R_a(g) = ga \quad , \quad L_a(g) = ag$$

R_a e L_a sono diffeomorfismi di G in se stesso per costruzione e inducono quindi le mappe sugli spazi tangenti $L_{a*} : T_g(G) \rightarrow T_{ag}(G)$ e $R_{a*} : T_g(G) \rightarrow T_{ga}(G)$ (si veda A.6).

Dato un gruppo di Lie G esiste una speciale classe di campi vettoriali (si veda A.6) che sono invarianti sotto l'azione di gruppo⁷.

Sia X un campo vettoriale sul gruppo di Lie G . X si dice campo vettoriale **invariante a sinistra** se vale $L_{a*}X|_g = X|_{ag}$ (analogamente, invariante a destra).

Un vettore tangente all'identità e del gruppo di Lie $V \in T_e(G)$ definisce un unico campo vettoriale X_V su G invariante a sinistra tramite l'azione sinistra (analogamente a destra)

$$X_V|_g := L_{g*}V \quad , \quad g \in G$$

Poichè

$$X_V|_{ag} = (L_{ag})_*V = (L_a L_g)_*V = (L_a)_*(L_g)_*V = (L_a)_*X_V|_g$$

Viceversa, un campo vettoriale X_V invariante a sinistra (analogamente a destra) definisce un unico vettore V tangente all'identità in G

$$V := X_V|_e \in T_e(G)$$

Definizione A.0.20. Si indica con \mathfrak{g} l'insieme dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra (denotando con $\mathcal{X}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali su G)

$$\mathfrak{g} := \{X_V \in \mathcal{X}(G) \text{ t.c. } L_{a*}X_V|_g = X_V|_{ag} \forall a \in G\}$$

La mappa che a un vettore tangente all'identità in G associa un campo vettoriale invariante a sinistra

$$T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g} \quad V \mapsto X_V$$

è un isomorfismo.

Si dimostra che \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale con l'operazione di traslazione a sinistra (?), e quindi $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$. In particolare $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Resta da definire un'operazione di parentesi di Lie affinché lo spazio dei campi invarianti a sinistra sia un'algebra di Lie.

Definizione A.0.21. Si definisce parentesi di Lie tra due campi $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ l'operazione $[,] : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \rightarrow \mathcal{X}(G)$ definita da

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

Si sottolinea che Xf così scritto è una funzione liscia definita su G da $Xf : G \rightarrow \mathbb{R}$ che agisce $p \mapsto X_p[f] \in \mathbb{R}$

⁷ Ciò non accade, ad esempio, con le varietà differenziali usuali, in cui non vi è modo di evidenziare una classe privilegiata di campi vettoriali

Si verifica immediatamente che l'operazione così definita rispetta le proprietà definite in A.0.19⁸

Siano $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ e si fissino due punti $g, ag \in G$ dove $ag = L_a g$. Applicando L_{a*} a $[X, Y]$ si ha

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag} \in \mathfrak{g}$$

quindi \mathfrak{g} è chiuso rispetto all'operazione $[\cdot, \cdot]$ così definita.

Definizione A.0.22. L'insieme \mathfrak{g} dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra (\cdot) dotato delle parentesi di lie A.0.21 si definisce **Algebra di Lie** associata al gruppo di Lie G .

L'algebra di Lie associata a un gruppo viene indicata con lo stesso nome del gruppo, in carattere gotico minuscolo, ad esempio $SO(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$.

Definizione A.0.23. Identificando \mathfrak{g} con $T_e(G)$ tramite l'isomorfismo dell'azione sinistra (indicato qua con $\lambda : T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g}$) e richiamando la definizione A.0.18, si definisce la **mappa aggiunta** del gruppo di Lie G .

$$Ad : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad , \quad (h, X) \mapsto \lambda \circ Ad_h \circ \lambda^{-1}(X)$$

dove $h \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Applicando la definizione si trova che $Ad_a Ad_b = Ad_{ab}$ e $Ad_{a^{-1}} = Ad_a^{-1}$.

Definizione A.0.24. Sia G un gruppo di Lie che agisce sulla varietà M a sinistra. Sia $V \in T_e(G)$ un vettore tangente all'identità di G . Si definisce il **campo vettoriale indotto** da V il campo $V^\#$ su M

$$V^\#|_p = \left. \frac{d}{dt}(\exp(tV)p) \right|_{t=0} \quad p \in M$$

E si definisce quindi una mappa $\# : T_e(G) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ con $V \mapsto V^\#$

Nel caso di un gruppo di Lie G di matrici reali, l'algebra di Lie può essere formulata in termini della funzione esponenziali di matrici, ovvero

$$\mathfrak{g} = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(tA) \in G\}$$

Gli elementi dell'algebra di Lie vengono detti *generatori* del gruppo di Lie e, come visto sopra, la struttura del gruppo G è completamente determinata dalle costanti di struttura. In questo caso in cui G è un gruppo di matrici, la parentesi di Lie è il commutatore di matrici e quindi le costanti di struttura si dice sono determinate dalle regole di commutazione dei generatori $\{T_\mu\}$:

$$[T_\mu, T_\nu] = T_\mu T_\nu - T_\nu T_\mu = c_{\mu\nu}^\lambda T_\lambda$$

(non ancora usato) Poichè si ha che $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$ sia $\{V_1, \dots, V_n\}$ una base per $T_e(G)$. Questa definisce, tramite l'azione sinistra, un set di campi vettoriali $\{X_1, \dots, X_n\} \in \mathfrak{g}$ linearmente indipendenti in ogni punto $g \in G$

$$X_\mu|_g := L_{g*}V_\mu \quad \forall \mu = 1, \dots, n$$

che per ogni $T_g(G)$ è una base. Poichè anche $[X_\mu, X_\nu]|_g \in \mathfrak{g}$ nel punto g , può essere sviluppato $\forall g \in G$ in termini dei vettori $\{X_\mu|_g\}$, e quindi si ha:

$$[X_\mu, X_\nu] = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda X_\lambda$$

i coefficienti $c_{\mu\nu}^\lambda$ si chiamano **costanti di struttura**. Si dimostrano essere indipendenti dal particolare $g \in G$ preso in considerazione, e determinano quindi completamente la struttura del gruppo di Lie G (Teorema di Lie).

A.6 Fibrati

Si vuole iniziare con un esempio per rendere più chiaro l'argomento.

⁸Intuitivamente, $[X, Y]$ è il commutatore dei campi X e Y , ed è noto che un commutatore rispetti suddette proprietà.

A.6.1 Fibrato Tangente

Sia M una varietà differenziale di dimensione n . Si definisce il *fibrato tangente* su M (detta *spazio base*) l'unione di tutti gli spazi tangenti alla varietà, indicato con TM .

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

Si consideri una carta (U, ϕ) , U intorno di $p \in M$ e $x^i = \phi^i(p)$ coordinate. Gli elementi dello spazio $TU = \cup_{p \in U} T_p(M)$ sono individuati da un punto $p \in U$ e un vettore tangente $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p(M)$. Per costruzione U è omeomorfo all'aperto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $T_p(M)$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n stesso tramite l'identificazione tra derivata direzionale e vettore (si veda la sezione A.3).

Allora ogni punto $P \in TU$ può essere identificato con il punto $(x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in maniera univoca. TU è quindi una varietà differenziale di dimensione $2n$.

Inoltre TU è identificato con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ed è esattamente decomposto nel prodotto diretto $U \times \mathbb{R}^n$, cioè ogni $P \in TU$ può essere scritto come (p, V) , $p \in U, V \in T_p(M)$.

Si può quindi definire la *proiezione* $\pi : TU \rightarrow U$, $P = (p, V) \mapsto p$. Lo spazio $T_p(M) = \pi^{-1}(p)$ viene detto *fibra* in p .

Se $M = \mathbb{R}^n$ si ha che $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e si dice che il fibrato ha struttura *banale*. In generale però si ha una struttura non banale ed occorre tener conto di tutte le carte possibili.

Siano (U, ϕ) e (V, ψ) due carte tali che $U \cap V \neq \emptyset$, $p \in U \cap V$. Siano $x^i = \phi^i(p)$ e $y^j = \psi^j(p)$, e sia $V \in T_p(M)$. V in coordinate è espresso come

$$V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j V'^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \sum_{j,k} V^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

dove $V'^j = \sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \Big|_p V^k$. L'applicazione $\psi \circ \phi$ deve essere invertibile, quindi la matrice Jacobiana

deve essere non singolare, cioè $J_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \in GL(n, \mathbb{R})$. Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ viene chiamato *gruppo di struttura* di TM . Le coordinate delle fibre, in seguito a un cambio di coordinate, risultano ruotate per un elemento del gruppo di struttura.

Infine si definisce *sezione* di TM una mappa liscia $s : M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ s = id_M$, ossia che a $p \in M$ associa un elemento di TM (p, V) , $V \in T_p(M)$. Se s è definita solo in un intorno U viene detta *sezione locale*.

Avendo definito una struttura differenziale su TM , un campo vettoriale su M può essere visto come una mappa liscia $M \rightarrow TM$ che a $p \in M$ associa $V_p \in T_p(M)$

A.6.2 Fibrato

Siano M (detta *spazio base*) e F (detta *fibra*) varietà differenziali (si pensi all'analogia con il fibrato tangente in cui $F = T_p(M)$) e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M .

Intuitivamente, un *fibrato* E su M con fibra F è una varietà differenziale (detta anche *spazio totale*) che è localmente un prodotto diretto di M e F , ossia il fibrato E è descritto topologicamente in ogni intorno U_i dalla varietà prodotto $U_i \times F$.

Si definisce una funzione $\pi : E \rightarrow M$ continua e suriettiva (la *proiezione di fibra*) che mappa ogni fibra $F_p = \{(p, f) | f \in F\} \subset E$ nel punto $p \in M$, e che rispetti la seguente condizione.

Si definisce un'operazione duale alla proiezione, la *sezione* del fibrato come una mappa tra lo spazio base M ed il fibrato E

$$s : M \rightarrow E \quad \text{t.c.} \quad \pi \circ s(p) = p \quad \forall p \in M$$

Se la sezione è definita solo in un intorno U di un punto p è detta *sezione locale*.

A.6.1. Condizione di non trivialità: Per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $U_i \in \mathcal{U}$ di p e un isomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset E$ tale che per ogni $(p, f) \in U_i \times F$ si ha $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$

Occorre specificare inoltre un insieme di *funzioni di transizione* $\{\Phi_{ij}\}$ che descrivono come si trasformano le coordinate delle fibre nella regione di sovrapposizione tra due intorni $U_i \cap U_j$. Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ fissato si considera $\phi_{i,x}$ come una mappa di F in F_x . Allora si definiscono le mappe

$$\Phi_{ij} : F \rightarrow F \quad , \quad \Phi_{ij} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j \quad (\text{A.1})$$

che rispettano le condizioni:

$$\Phi_{ii} = id \quad , \quad \Phi_{ij} \circ \Phi_{jk} = \Phi_{ik} \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad (\text{A.2})$$

Grazie a queste proprietà, le funzioni di transizione formano un gruppo G detto *gruppo di struttura* del fibrato, che agisce su F a sinistra.

Gli elementi di G , le funzioni di transizione, sono anche detti *local trivialization*.

Sebbene la topologia locale del fibrato sia banale, le funzioni di transizione possono essere fortemente influenzate dalla topologia globale a causa di torsioni relative tra fibre adiacenti (si veda l'esempio del nastro di Möbius). Un fibrato è completamente determinato dalle sue funzioni di transizione.

Definizione A.2.1. Un *fibrato* E con fibra F sullo spazio base M è uno spazio topologico E dotato di una proiezione $\pi : E \rightarrow M$ che soddisfa la condizione di non trivialità A.6.1.

Esempio A.2.1. (Cilindro): Il cilindro è il primo esempio di fibrato banale, ossia la cui topologia globale è quella prodotto diretto $E = M \times F$. Sia lo spazio base $M = S^1$ il cerchio unitario, parametrizzato dall'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ e sia F il segmento parametrizzato da $t \in [-1, 1]$. Sia $\mathcal{U} = U_+ \cup U_-$ un ricoprimento formato dai due intorni semicircolari:

$$U_+ = \{\theta : \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} \quad , \quad U_- = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon = \epsilon\}$$

Il fibrato consiste in

$$U_+ \times F, (\theta_+, t_+) \quad \text{e} \quad U_- \times F, (\theta_-, t_-)$$

e le funzioni di transizione che legano t_+ e t_- sono definite in $U_+ \cap U_- = A \cup B$

$$A = \{-\epsilon < \theta < \epsilon\} \quad , \quad B = \{\pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}$$

Le funzione di transizione sono:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = t_- \text{ in } B \end{cases}$$

Si ha quindi un fibrato banale uguale al cilindro $E = S^1 \times [-1, 1]$.

Esempio A.2.2. (Nastro di Möbius): Con la stessa notazione dell'esempio precedente, si scelgano le funzioni di transizione:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = -t_- \text{ in } B \end{cases}$$

L'identificazione di t con $-t$ nella regione B torce il fibrato e gli dà la topologia non banale del Nastro di Möbius.

(questa parte serve solo per far capire la notazione nella definizione A.2.5, si può anche togliere).

Un **fibrato vettore** è un fibrato la cui fibra è uno spazio vettoriale.

Il **fibrato cotangente** è definito analogamente al fibrato tangente. $TM^* := \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$

Siano E, E' fibrati con spazio base M, M' e fibra F, F' rispettivamente

Un **fibrato prodotto** $E \times E'$ è un fibrato con spazio base $M \times M'$ e fibra $F \oplus F'$. Gli elementi della fibra $F \oplus F'$ sono vettori del tipo $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, dove $f \in F$ e $f' \in F'$.

Il **fibrato prodotto tensore** $E \otimes E'$ è un fibrato vettore in cui a ogni punto $p \in M$ è assegnato il prodotto di fibre $F_p \otimes F'_p$. Date due basi $\{e_\alpha\}$ ed $\{f_\beta\}$ di F e F' , la fibra prodotto è lo spazio generato da $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$.

Definizione A.2.2. (Forma a valori in un'algebra di Lie): Una k -forma differenziale su una varietà M a valori in un'algebra di Lie è una *sezione* del fibrato $(\mathfrak{g} \times M) \otimes \Lambda^k(T^*M)$

A.6.3 Fibrato Principale e Connessione

Definizione A.2.3. (Fibrato principale): Un *fibrato principale* è un fibrato P sullo spazio base M la cui fibra F è un gruppo di Lie e coincide con il gruppo di struttura G^9 .

Si indica anche con $P(M, G)$ o solamente P dando per scontato la fibra e lo spazio base, per brevità.

Si vuole ora generalizzare il concetto di connessione¹⁰ (e di trasporto parallelo) estendendolo alla struttura del fibrato principale. Tale generalizzazione ha il vantaggio di definire un trasporto parallelo indipendente dalla metrica (a differenza della connessione di Levi-Civita).

Si sceglie di utilizzare due approcci per definire la connessione su un fibrato principale. Il primo è di suddividere lo spazio tangente al fibrato in componente "verticale" e "orizzontale" (l'affermazione verrà chiarita in seguito). Il secondo è di definirla come una 1-forma a valori nell'algebra di Lie che rispetta determinate proprietà. Le due definizioni si dimostrano essere equivalenti¹¹.

Il primo approccio, geometrico, ha il vantaggio di essere globale e non dipendere dalle coordinate scelte, mentre il secondo è più efficace a livello pratico e computazionale.

Sia M lo spazio base di dimensione n , G il gruppo di struttura e fibra e P il fibrato principale. Sia (U, ϕ) una carta con coordinate $x_\mu = \phi_\mu(p)$, $p \in M$.

Definizione geometrica

Sia u un punto del fibrato principale $P(M, G)$, sia $p = \pi(u) \in M$ e G_p la fibra in p

Si definisce **sottospazio verticale** $V_u(P)$ un sottospazio di $T_u(P)$ tangente alla fibra G_p nel punto u . Gli elementi di $V_u(P)$ si costruiscono nel modo seguente.

Sia $A \in \mathfrak{g}$ Richiamando la definizione A.0.24, si definisce il vettore $A^\# \in T_u(P)$ dall'azione su una generica funzione $f \in C^\infty(P)$

$$(A^\#)_u[f] := \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Analogamente a quanto visto per i gruppi di matrici, se A è nell'algebra di Lie $g = \exp(t_0 A)$ per t_0 fissato è un elemento del gruppo di Lie G . Al variare di t , $g_t = \exp(tA)$ è una curva in G , quindi $u = \exp(tA) = u_{g_t}$ è una curva lungo la fibra in $p = \pi(u)$ in quanto trasla u per azione destra di G . La funzione f è quindi ristretta alla curva u_{g_t} .

Allora l'espressione a destra indica il vettore $(\frac{d}{dt})$ tangente alla curva (si pensi al vettore velocità istantanea) u_{g_t} all'istante $t = 0$, cioè nel punto $u \exp(0A) = ue = u$.

Il significato dell'espressione a destra è esattamente definire un vettore tangente alla fibra passante in u , nel punto u , a partire da un elemento dell'algebra A , appunto $A^\#_u \in V_u(P)$.

Definendo il vettore $A^\#_u$ per ogni punto $u \in P$ si costruisce il campo vettoriale $A^\#$, detto il **campo vettoriale fondamentale** generato dall'algebra Lie ($A \in \mathfrak{g}$, infatti).

È immediatamente definito l'isomorfismo $\# : \mathfrak{g} \rightarrow V_u(P)$ da $A \mapsto A^\#$

Si definisce **sottospazio orizzontale** $H_u(P)$ il complemento di $V_u(P)$ in $T_u(P)$ ed è univocamente determinato.

Definizione A.2.4. Sia $P(M, G)$ un fibrato principale, $u \in P$. Una **connessione** su P è una suddivisione univoca dello spazio tangente $T_u(P)$ nei sottospazi orizzontale $H_u(P)$ e verticale $V_u(P)$ tale che:

1. $T_u(P) = H_u(P) \oplus V_u(P)$
2. Ogni campo vettoriale X su P è separato nelle componenti $X = X_h + X_v$
dove $X_h \in H_u(P)$ e $X_v \in V_u(P)$

⁹Si veda [5], [7], [6] per una definizione più completa

¹⁰Il concetto di connessione generalizza quello di derivata direzionale ai tensori

¹¹Si veda [5]

3. spazi orizzontali sulla stessa fibra $H_u(P)$ e $H_{ug}(P)$ sono legati dalla mappa $(R_g)_*$ indotta dall'azione destra, ovvero $H_{ug}(P) = (R_g)_*H_u(P) \quad \forall u \in P, g \in G$

L'idea alla base di questo approccio è la seguente. Per valutare la derivata direzionale di un campo su una varietà M si vuole confrontare i valori del campo in due punti p e p' di M , connessi da un cammino. Si vuole "sollevare" i punti dallo spazio base M in due punti u e u' nel fibrato P e confrontare i due spazi tangenti $T_u(P)$ e $T_{u'}(P)$.

Il fibrato è definito localmente come prodotto $U \times G$ (dove U è un intorno di p in M), quindi un vettore tangente $X_u \in T_u$ può essere scomposto in due componenti (proprietà 2 della definizione): una lungo la base (componente orizzontale) e una lungo la fibra (componente verticale).

Il trasporto verticale è univocamente determinato dall'azione del gruppo G (proprietà 3 della definizione), mentre il trasporto orizzontale non è unico (come non è unico il cammino che unisce i due punti p e p' nello spazio base).

È solamente quest'ultimo, però, di interesse in quanto mappa un cammino tra i due punti u e u' in un cammino attraverso le fibre. Il concetto alla base è quindi quello di scaricare il problema sul trasporto attraverso le fibre del campo vettoriale di cui si vuole calcolare la derivata.

Manca però un metodo pratico di calcolo del trasporto orizzontale, che sarà dato dall'approccio successivo.

Definizione tramite 1-forma

Definizione A.2.5. Una 1-forma di connessione $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P^{12}$ è una proiezione dello spazio $T_u(P)$ su $V_u(P)$, che è isomorfo all'algebra di Lie \mathfrak{g} , tale che

1. $\omega(A^\#) = A \quad A^\# \in T_u(P), A \in \mathfrak{g}$
2. $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega^{13}$

La proprietà 2 corrisponde a

$$R_g^*\omega_u(X) = \omega_{ug}((R_g)_*X) = g^{-1}\omega_u(X)g.$$

Lo spazio orizzontale è definito come il kernel di ω

$$H_u(P) := \{X \in T_u(P) \mid \omega(X) = 0\}$$

La prima proprietà garantisce che ogni vettore verticale venga mandato nell'opportuno elemento dell'algebra, mentre la seconda garantisce il corretto trasporto dello spazio orizzontale lungo una fibra e fa sì che la definizione appena data combaci con la precedente, come dimostrato da:

Proposizione A.2.1. Lo spazio orizzontale verifica

$$(R_g)_*H_uP = H_{ug}P$$

Proof. Sia $u \in P$ e si consideri lo spazio orizzontale $H_u(P) = \ker \omega$. Sia $X \in H_u(P)$ e gli si applichi la mappa indotta dall'azione sinistra $(R_g)_*$, costruendo $(R_g)_*X \in T_{ug}(P)$. Si ha che:

$$\omega((R_g)_*X) = R_g^*\omega(X) = g^{-1}\omega(X)g^{14} = 0^{15}$$

Quindi anche $(R_g)_*X$ sta nel kernel di ω e quindi $(R_g)_*X \in H_{ug}(P)$.

Poichè $(R_g)_*$ è una mappa invertibile, qualsiasi vettore $Y \in H_{ug}(P)$ è esprimibile come $Y = (R_g)_*X$ per qualche $X \in H_u(P)$.

Di conseguenza lo spazio $T_u(P)$ è separato in $H_u(P) \oplus V_u(P)$ da ω , rendendo la definizione di 1-forma di connessione analoga a quella di connessione A.2.4. ■

¹² Cfr. definizione A.2.2

¹³ Definizione A.0.18

¹⁴ Per la proprietà 2.

¹⁵ Poichè $\omega(X) = 0$

La 1-forma di connessione ω così definita prende il nome di *connessione di Ehresmann*.

Si osserva che la 1-forma di connessione è definita *globalmente* su P , quindi assegnare una forma di connessione fornisce un metodo per il trasporto parallelo, unico per tutto il fibrato P .

Si vuole ora trasportare la forma di connessione ω , globale, dagli spazi tangenti a P agli spazi tangenti alla varietà M .

Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M e siano s_i sezioni locali definite su ciascun U_i . Si può allora trasportare ω definendo su U_i la forma

$$A_i := s_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i)$$

Viceversa, sia A_i una 1-forma a valori in una algebra di Lie assegnata su U_i . Si può sempre costruire una 1-forma di connessione ω che trasportata tramite s_i^* sia esattamente A_i .

Teorema A.2.1. *Data una 1-forma A_i a valori in \mathfrak{g} su U_i e una sezione locale $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, esiste una 1-forma di connessione ω tale che $A_i = s_i^* \omega$, che ristretta a $\pi^{-1}(U_i)$ assume la forma*

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_i)} = \omega_i := g_i^{-1} \pi^* A_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i$$

dove d_P è la derivata esterna su P e g_i la canonica local trivialization data da $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ per $u = s_i(p)g_i$

Si veda [5] per la dimostrazione.

Si sottolinea l'importanza di quest'ultimo teorema in quanto la conoscenza di un'unica forma A_i su un aperto U_i di M , unitamente alla condizione di unicità della 1-forma di connessione ω , vincola tutte le altre forme definite sugli aperti $U_{j \neq i}$ del ricoprimento. La condizione da rispettare è la seguente¹⁶. Siano U_i e U_j due aperti del ricoprimento aperto di M a intersezione non vuota. Affinchè la forma di connessione ω sia definita **univocamente** su tutto P , si deve avere sull'intersezione $U_i \cap U_j$ che $\omega_i = \omega_j$.

Affinchè ciò sia verificato, le forme locali ω_i, ω_j devono verificare la seguente condizione di compatibilità. Siano Φ_{ij} le funzioni di transizione definite in A.1

$$s_j^* \omega(X) = \Phi_{ij}^{-1} \omega((s_i)_* X) \Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{-1} d\Phi_{ij}(X)$$

Che deve essere valida per ogni campo $X \in T_p(M)$. Quindi si traduce nella condizione per le forme A_i :

$$A_j = \Phi_{ij}^{-1} A_i \Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{-1} d\Phi_{ij} \quad (\text{A.3})$$

Se, al contrario, sono dati $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di M , $\{s_i\}$ sezioni, e $\{A_i\}$ forme che rispettano A.3, si può ricostruire la forma di connessione ω

Si sottolinea che se il fibrato P non è banale, non è possibile definire in maniera univoca una sezione globale, quindi la forma A_i esiste solo localmente. La forza di questa costruzione è che invece la forma di connessione ω è definita globalmente su P . Si vuole ora definire la derivata covariante di una 1-forma di connessione ω . In maniera intuitiva, la si vuole definire in maniera tale che trasformi allo stesso modo di ω sotto l'azione del gruppo G . Così facendo si può identificare la derivata covariante D con la derivata esterna d .

Se la 1-forma ω trasforma come un vettore $\omega \mapsto g\omega$ per $g \in G$, allora anche la derivata covariante trasforma $D\omega \mapsto gD\omega$. Si definisce allora:

$$D\omega := d\omega + A \wedge \omega$$

dove A è la 1-forma definita in precedenza, che ripetta la legge di trasformazione A.3. In maniera analoga si può definire la derivata covariante di 1-forme di connessione che trasformano come tensori o sono invarianti.

Definizione A.3.1. Sia ω la 1-forma di connessione di un fibrato principale P . Si definisce la 2-forma di curvatura Ω come la derivata covariante di ω

$$\Omega := D\omega$$

¹⁶ Si veda [5] per la derivazione completa.

Poichè A_i è il pullback di ω su un aperto di $U_i \subset M$ tramite una sezione s_i , si definisce una 2-forma su U_i tramite

$$F_i := s_i^* \Omega \quad (\text{A.4})$$

che rispetta la condizione di compatibilità sull'intersezione di due aperti $U_i \cap U_j$

$$F_j = \Phi_{ij}^{-1} F_i \Phi_{ij} \quad (\text{A.5})$$

La 2-forma di curvatura fornisce un metodo di classificazione topologica dei fibrati.

A.6.4 Classi caratteristiche

Si è visto (esempi A.2.1 e A.2.2) che a uno stesso spazio base e a una stessa fibra possono corrispondere diversi fibrati. Si vuole trovare un modo per classificare le diverse tipologie di fibrati principali possibili dato uno spazio base M e un gruppo di struttura G .

Si consideri il seguente esempio. Sia $H^r(M)$ il r -gruppo di Coomologia di de Rham di una varietà M , compatta e senza bordo $\partial M = 0$. Sia $[\omega] \in H^r(M)$.

Un modo per classificare le classi di equivalenza si ottiene integrando una forma nella stessa classe $[\omega]$. Si ricorda che esiste quindi una forma α tale che $\omega' = \omega + d\alpha$. Per il teorema di Stokes:

$$\int_M \omega' = \int_M (\omega + d\alpha) = \int_M \omega + \int_{\partial M} \alpha = \int_M \omega$$

I due integrali si equivalgono perchè la varietà è senza bordo. Allora questo integrale può essere usato come caratteristica, per classificare le classi di equivalenza.

In analogia con l'esempio appena citato, si vuole definire una caratteristica analoga per la forma di curvatura Ω . Una classe di equivalenza è formata da tutte le 1-forme di connessione a cui corrisponde la stessa 2-forma di curvatura.

Si introduce ora il *polinomio caratteristico* della forma Ω una quantità invariante della algebra di Lie \mathfrak{g} nella fibra

$$\det(1 + \Omega) = 1 + \text{tr} \Omega + \frac{1}{2}[(\text{tr} \Omega)^2 - \text{tr}(\Omega^2)] + \dots$$

che permette di definire una forma sullo spazio base M , detta *forma di Chern*

$$\det(1 + \frac{\lambda}{2\pi} F) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k$$

dove $1/2\pi$ è solo un fattore di normalizzazione. Si ricorda che F è il pullback di Ω . I coefficienti di espansione c_k sono forme chiuse invarianti su M , la cui espressione esplicita per $k = 1, 2$ è:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \text{tr} F, \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr}(F \wedge F) - \frac{1}{2} (\text{tr} F)^2] \quad (\text{A.6})$$

I fattori del tipo $1/2\pi$ fanno sì che sia normalizzato l'integrale sulla varietà compatta senza bordo M

$$\int_M c_k = n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.7})$$

Questi integrali sono detti *classi caratteristiche di Chern*.

Esempio A.7.1. Si consideri un fibrato principale con $M = S^2$ e $G = U(1)$. Si hanno i due coefficienti $c_0 = 1$ (fibrato banale) e $c_1 = F/2\pi$. Di quest'ultimo si terrà conto in A.6.

Esempio A.7.2. Si consideri un fibrato principale su $M = S^4$ con gruppo di struttura $G = SU(2)$ la forma di curvatura è a valori in $\mathfrak{su}(2)$ e può essere scritta localmente come $F = 1/2 \sigma_a F^a$ dove σ_a sono le matrici di Pauli con $a = 1, 2, 3$.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Si ha quindi $\text{tr} F = 0$ e i coefficienti $k = 0, 1, 2$ sono

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{32\pi^2} [F^a \wedge F^a] \quad (\text{A.9})$$

Il fibrato caratterizzato dalla seconda classe di Chern è noto come *fibrato di istantone*.

Appendix B

Notazione

Coordinate polari:

$\theta \in [0, \pi]$ Angolo polare

$\phi \in [0, 2\pi]$ Angolo azimutale

$r \in (0, \infty)$ Raggio

Versori:

$\mathbf{u}_x = (1, 0, 0)$ Versore asse x

$\mathbf{u}_y = (0, 1, 0)$ Versore asse y

$\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)$ Versore asse z

$\mathbf{u}_\theta = (, ,)$ Versore angolo polare

$\mathbf{u}_\phi = (-x, y, 0)$ Versore angolo azimutale

$\mathbf{u}_r = (, ,) = \frac{\mathbf{r}}{r}$ Versore radiale

Funzioni:

Θ funzione di Heaviside

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Bibliography

- [1] Paolo Maurizio Soardi. *Analisi Matematica*. Città Studi Edizioni, 2010.
- [2] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [3] William Fulton. *Algebraic Topology, a first course*. Springer, 1995.
- [4] William M. Boothby. *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1975.
- [5] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics publishing, 2003.
- [6] T. Eguchi, P.B Gilkey, A.J. Hanson. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North Holland Publishing Company, 1980.
- [7] Yakov M. Shnir. *Magnetic Monopoles*. Springer, 2005.
- [8] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.
- [9] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.
- [10] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.
- [11] Autore. *Titolo*. Edizione, Anno.