

Università degli Studi di Milano Bicocca

Facoltà di Fisica

Corso di Laurea Triennale in Fisica



Aspetti classici e quantistici dei monopoli
magnetici in teorie di gauge

Relatore: *Prof. Zaffaroni Alberto*

Tesi di laurea di:

Daniilo BONDI

Matr. N. 801827

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Monopolo di Dirac	5
1.1	Potenziale di Dirac	5
1.2	Trasformazione della stringa	6
1.3	Condizione di quantizzazione della carica	7
1.4	Calcoli	7
1.4.1	Calcolo del potenziale vettore di Dirac	7
1.4.2	Calcolo del flusso del campo regolarizzato	9
2	Teorie di gauge	10
3	Monopoli in teorie di gauge abeliane	13
3.1	Fibrato di Monopolo di Wu–Yang	14
3.2	Fibrato di Hopf	15
4	Monopoli in teorie di gauge non abeliane	17
4.1	Monopolo di Wu–Yang non Abeliano	17
4.2	Monopolo di 't Hooft–Polyakov	18
4.2.1	Modello di Georgi–Glashow	18
4.2.2	Ansatz di 't Hooft–Polyakov	20
A	Cenni preliminari di matematica	22
A.1	Varietà differenziali	22
A.1.1	Definizioni	22
A.1.2	Spazio tangente e cotangente	23
A.1.3	Mappe tra varietà	24
A.2	Omotopia e Classi di omotopia	24
A.3	Tensori e Forme differenziali	26
A.3.1	Forme differenziali	27
A.3.2	Differenziale esterno	27
A.3.3	Coomologia di de Rham	28
A.3.4	Integrazione	28
A.3.5	Derivata covariante	29
A.4	Gruppo e azione di gruppo	29
A.4.1	Gruppi e Algebre di Lie	30
A.5	Fibrati	32
A.5.1	Fibrato Tangente	33
A.5.2	Fibrato	33
A.5.3	Fibrato Principale e Connessione	35
A.5.4	Classi caratteristiche	37
B	Notazione	39
	Bibliografia	41

Introduzione

$$\begin{array}{ll} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(4\pi \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho & \boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0} \end{array}$$

La quarta delle equazioni di Maxwell asserisce che "non esistono sorgenti del campo magnetico", ossia non esistono monopoli magnetici. Essendo le equazioni di Maxwell di natura fenomenologica, non esiste tutt'ora una teoria che ne escluda totalmente l'esistenza.

La relatività speciale mostra che vi è una quasi totale simmetria tra campo elettrico e campo magnetico. Il campo magnetico prodotto da un filo percorso da corrente diventa un campo puramente elettrostatico se osservato nel sistema di riferimento solidale con la carica in moto, e allo stesso modo il campo elettrostatico prodotto da una carica ferma diventa campo magnetico se osservato in un sistema in moto rispetto alla carica.

Questa simmetria è però rotta dal fatto che non sono mai stati tuttora osservati monopoli magnetici, mentre i monopoli elettrici sono ben noti fin dalle prime formulazioni dell'elettromagnetismo.

L'interesse nello studio dei monopoli magnetici è innanzitutto ripristinare questa rottura di simmetria, processo molto comune in Fisica (ad esempio per le Grandi Teorie Unificative, *GUT*), ma presenta relazioni anche con altri grandi problemi tutt'ora irrisolti della Fisica Teorica, ad esempio il problema del Confinamento in Cromodinamica Quantistica, il problema del decadimento del protone e la quantizzazione della carica elettrica.

Lo scopo di questo elaborato è dare una breve panoramica del monopolio magnetico, secondo i formalismi della relatività ristretta, la meccanica quantistica non relativistica e le teorie di campo classiche. Non verranno trattati in alcun modo aspetti di teorie di campo quantistiche.

Saranno affrontati sostanzialmente tre tipi di monopoli: il monopolio di Dirac, per introdurre il problema a livello classico, il monopolio di Wu-Yang in una teoria di gauge abeliana, e il monopolio di 't-Hooft-Polyakov in teoria di gauge non abeliana.

Capitolo 1

Monopolo di Dirac

1.1 Potenziale di Dirac

Si vuole dare un primo approccio classico al monopolo magnetico. La prima idea è di sostituire la carica elettrica con un'ipotetica carica magnetica g e studiare il problema come in elettrostatica.

Il campo magnetico generato da una carica magnetica g situata nell'origine è

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$$

dove $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ il versore radiale.

Le equazioni del moto di una carica elettrica e nel campo \mathbf{B} , generate dalla Lagrangiana di minima interazione tra una carica elettrica e un campo magnetico

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 + e \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}$$

sono

$$m \ddot{\mathbf{r}} = e \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = \frac{eg}{r^3} (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r})$$

dove il vettore potenziale che compare nella Lagrangiana deve soddisfare $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Come calcolato nella sezione 1.4.1 un potenziale che soddisfa questa relazione è:

$$\mathbf{A} = g(1 + \cos \theta) \left(\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \frac{-\cos \varphi}{r \sin \theta}, 0 \right) \quad (1.1)$$

Si presenta immediatamente il seguente problema. Se si ammette l'esistenza di una carica magnetica, il teorema di Gauss garantisce che $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \delta^{(3)}(\mathbf{r})$, ossia che il flusso del campo attraverso una qualsiasi superficie chiusa contenente la carica magnetica g è pari a $4\pi g$, in contraddizione con $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, che genera un flusso nullo.

$$\int_S d\sigma \mathbf{B} = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi g \quad (1.2)$$

$$\int_S d\sigma \mathbf{B} = \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{B} = \int_V d^3x \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.3)$$

Il potenziale \mathbf{A} presenta però delle discontinuità per $\sin \theta = 0$. Si verifica immediatamente che $\theta = 0$ è un punto singolare, mentre \mathbf{A} è continuo in $\theta = \pi$. Il calcolo fatto non è quindi corretto lungo l'asse z positivo ($\theta = 0$), e occorre regolarizzare il potenziale.

Siano $\varepsilon > 0$ e $r_\varepsilon = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$. Si definiscono ora

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\varepsilon &:= \frac{g}{r_\varepsilon} \frac{1}{r_\varepsilon - z} \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{B}_\varepsilon &= \nabla \times \mathbf{A}_\varepsilon = \frac{g}{r_\varepsilon^3} \mathbf{r} - g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{r_\varepsilon^3(r_\varepsilon - z)} + \frac{1}{r_\varepsilon^2(r_\varepsilon - z)^2} \right) \mathbf{u}_z \end{aligned}$$

e si vuole definire $\tilde{\mathbf{B}} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\varepsilon$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 2g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \mathbf{u}_z \right]$$

dove $\Theta(z)$ è la funzione di Heaviside per l'asse z .

Si vuole ora valutare il flusso del campo magnetico regolarizzato $\tilde{\mathbf{B}}$ attraverso una superficie chiusa S centrata nell'origine e di raggio unitario, supponendo che sia possibile scambiare il limite e l'integrale

$$\int_S d\sigma \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma \mathbf{B}_\varepsilon$$

Si veda la sezione 1.4.2 per il calcolo esplicito. L'unico termine in ε che porta contributo al flusso è il secondo e si ha:

$$\int_S d\sigma \tilde{\mathbf{B}} = \int_S d\sigma \left(\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \mathbf{u}_z \right) = 4\pi g - 4\pi g = 0$$

Il campo regolarizzato è composto da due termini:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{string} = \frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 4\pi g \delta(x) \delta(y) \Theta(z) \mathbf{u}_z$$

L'effetto del campo generato dalla stringa di singolarità lungo l'asse z positivo è quello di annullare il flusso del campo prodotto dalla carica, risolvendo la contraddizione evidenziata in precedenza.

1.2 Trasformazione della stringa

Come evidenziato nella sezione precedente, non è possibile definire ovunque un potenziale di monopolo continuo e derivabile. L'effetto del potenziale singolare 1.1 conduce a un termine extra di campo della stringa, diretto lungo la singolarità. Per rimuovere questo termine singolare, si vuole far sì che non corrisponda a una configurazione fisica.

Naturalmente la scelta del sistema di coordinate per la descrizione del monopolo è arbitraria, quindi il primo approccio è di richiedere che tutte le configurazioni possibili della stringa (θ) siano fisicamente equivalenti. Ossia, si vogliono trovare le trasformazioni tra le varie configurazioni di stringa, e le condizioni che rendano tali configurazioni identiche.

Si ricorda che l'elettrodinamica è invariante per trasformazioni del potenziale vettore del tipo¹

$$\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda(\mathbf{r}) = \mathbf{A} + \frac{i}{e} U^{-1} \nabla U \quad (1.4)$$

dove $U(\mathbf{r}) = \exp(i e \lambda(\mathbf{r}))$ e λ è un'arbitraria funzione delle coordinate. Una trasformazione di questo tipo è detta **trasformazione di gauge** del gruppo $U(1)$, in quanto U appartiene al gruppo $U(1)$ delle matrici unitarie 1×1 a coefficienti complessi (semplicemente, la moltiplicazione per un fattore di fase).

Si vuole trovare la trasformazione di gauge che risolve la singolarità.

Si consideri il flusso del campo magnetico attraverso una superficie chiusa S prima e dopo la trasformazione di gauge e si valuti quale è la sua variazione

$$\int_S d\sigma B' - \int_S d\sigma B = \int_S d\sigma (\nabla \times \nabla \lambda) = \oint_{\partial S} d\mathbf{l} \cdot \nabla \lambda$$

Il flusso non cambia solo se la funzione $\nabla \lambda$ è periodica $\nabla \lambda(\varphi) = \nabla \lambda(\varphi + 2\pi)$. Si consideri allora la trasformazione

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{r}) &= 2g\varphi = 2g \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \rightarrow U = \exp(2ieg\varphi) \\ \mathbf{A}^+ &= \mathbf{A}^- + \nabla(2g\varphi) = \mathbf{A}^- + 2g\nabla\varphi \end{aligned} \quad (1.5)$$

Si nomina \mathbf{A}^- il potenziale di dirac trovato in precedenza (in quanto ben definito per z negative)

$$\mathbf{A}^- = \frac{g-1-\cos\theta}{r} \frac{1}{\sin\theta} \mathbf{u}_\varphi$$

¹ e = carica dell'elettrone

$$\mathbf{A}^- \mapsto \mathbf{A}^- - \frac{i}{e} \exp(-2ieg\varphi) \nabla \exp(2ieg\varphi) = -\frac{g}{r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{u}_\varphi + \frac{2g}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi = \frac{g}{r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{u}_\varphi =: \mathbf{A}^+$$

Il potenziale trasformato è singolare per $\theta = \pi$ e regolare per $\theta = 0$ quindi, analogamente a quanto visto per \mathbf{A}^- produce un termine di campo di stringa lungo l'asse z negativo.

La trasformazione di gauge scelta agisce come una rotazione della stringa di un angolo $\theta = \pi$, quindi il campo generato in questo modo non è considerato fisico (?).

Si sottolinea che l'approccio di regolarizzazione dei potenziali singolari utilizzato in questo capitolo è non rigoroso e serve solo per dare un'introduzione al problema. Lo si potrebbe rendere rigoroso trattandolo in teoria delle distribuzioni, che esula dallo scopo di questo elaborato. Si seguirà quindi un approccio differente nelle sezioni successive.

Si riporta l'espressione dei due potenziali di Dirac definiti in precedenza, che sarà utile nella trattazione successiva.

$$\mathbf{A}^\pm = \frac{g}{r} \frac{\pm 1 - \cos \theta}{\sin \theta} \mathbf{u}_\varphi \quad (1.6)$$

1.3 Condizione di quantizzazione della carica

Si consideri una particella di massa m e di cariche elettrica e e magnetica g in interazione con un campo di monopolo magnetico, descritto dal potenziale A . Sia ψ la funzione d'onda della particella. L'equazione di Schrödinger della particella è

$$\frac{1}{2m} \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \hat{\mathbf{A}} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) = E \psi(\mathbf{r}) \quad (1.7)$$

Siano \mathbf{A}^\pm su U^\pm e le funzioni d'onda ψ^\pm su U^\pm e $\lambda = 2g\varphi$. In seguito alla trasformazione di gauge $\mathbf{A}^+ \mapsto \mathbf{A} + \nabla(2g\varphi)$ (dimostrare) la funzione d'onda trasforma

$$\psi^- \mapsto \exp\left(-\frac{2ige}{\hbar c} \varphi\right) \psi^+$$

Affinchè la funzione d'onda non sia multivalore, la fase deve essere periodica di periodo 2π in φ , ossia

$$\exp\left(-\frac{2ige}{\hbar c} \varphi\right) = \exp\left(-\frac{2ige}{\hbar c} (\varphi + 2\pi)\right) \Rightarrow \exp\left(-\frac{2ige}{\hbar c} 2\pi\right) = 1 \Rightarrow \left(-\frac{2ige}{\hbar c} 2\pi\right) = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$$

Allora si deve avere che

$$\boxed{\frac{2eg}{\hbar c} = n \quad n \in \mathbb{Z}} \quad (1.8)$$

Questa condizione è la celebre **condizione di quantizzazione della carica di Dirac**, da cui risulta che se esiste una carica magnetica di monopolo g , la carica elettrica è quantizzata. Poichè si osserva che la carica elettrica è quantizzata, questa condizione costituirebbe uno spunto di ricerca dei monopoli magnetici.

Esistono altre teorie che spiegano equivalentemente la quantizzazione della carica elettrica, ma non verranno qui indagate.

1.4 Calcoli

1.4.1 Calcolo del potenziale vettore di Dirac

Si consideri il campo classico di monopolo generato da una carica magnetica g posta nell'origine del sistema di riferimento, $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{B} = g \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$$

Si vuole trovare un potenziale vettore $\mathbf{A} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ in U . Si osserva innanzitutto che per la simmetria sferica del campo \mathbf{B} , il potenziale vettore può essere scritto come:

$$\mathbf{A} = g \cdot a(\theta) \nabla \varphi$$

per un'opportuna funzione $a(\theta)$. L'espressione del rotore in coordinate sferiche è:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) \mathbf{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{u}_\varphi$$

ove i versori sono dati da B.1. Inoltre

$$\nabla \varphi = \left(\frac{-\sin \varphi}{r \sin \theta}, \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, 0 \right)$$

Si deve avere che $\nabla \times \mathbf{A} = g \cdot \frac{1}{r^2} \mathbf{u}_r$, ossia

$$\begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) = g \cdot \frac{1}{r^2} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right) = 0 \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases}$$

Osservando che $A_\theta = \mathbf{u}_\theta \cdot \mathbf{A}$ e $A_\varphi = \mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{A}$ e inserendo $\mathbf{A} = g \cdot a(\theta) \nabla \varphi$

$$A_\varphi = (-\sin \varphi \mathbf{u}_x + \cos \varphi \mathbf{u}_y) \cdot a(\theta) g \nabla \varphi = a(\theta) g \left(-\sin \varphi \frac{-\sin \varphi}{r \sin \theta} + \cos \varphi \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \right) = \frac{a(\theta) g}{r \sin \theta}$$

$$A_\theta = (\cos \theta \cos \varphi u_x + \cos \theta \sin \varphi u_y - \sin \theta u_z) \cdot a(\theta) g \nabla \varphi = a(\theta) g \left(\frac{-\sin \varphi}{r \sin \theta} \cos \theta \cos \varphi + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \cos \theta \sin \varphi \right) = 0$$

Segue quindi che

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{g}{r} \frac{\partial a(\theta)}{\partial \theta} = \frac{g}{r}$$

Da cui si ricava facilmente l'espressione di $a(\theta)$ integrando ambo i lati

$$\int_0^\theta \frac{\partial a(\theta')}{\partial \theta'} d\theta' = \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' \Rightarrow \Rightarrow a(\theta) = -(\cos \theta + 1) + \text{cost} = -(\cos \theta + 1)$$

Ponendo a zero la costante arbitraria di integrazione.

Si ottiene allora:

$$\mathbf{A} = -g(1 + \cos \theta) \nabla \varphi = g(1 + \cos \theta) \left(\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}, \frac{-\cos \varphi}{r \sin \theta}, 0 \right)$$

È di immediata verifica che $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{g}{r^2} \mathbf{u}_r$.

Inoltre, si nota che

$$\nabla \varphi = \left(\frac{-\sin \varphi}{r \sin \theta}, \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}, 0 \right) = \frac{1}{(r \sin \theta)^2} (-x, y, 0) = \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{r^2(1 - \cos^2 \theta)} \mathbf{u}_\varphi$$

Allora

$$A = -g(1 + \cos \theta) \nabla \varphi = -\frac{g}{r^2} \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \mathbf{u}_\varphi = -\frac{g}{r^2} \frac{1}{1 - \cos \theta} \mathbf{u}_\varphi = -\frac{g}{r} \frac{1}{r - r \cos \theta} \mathbf{u}_\varphi = -\frac{g}{r(r - z)} \mathbf{u}_\varphi$$

Ciò giustifica la definizione della forma differenziale $A : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ che mappa ogni punto $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $p = (x, y, z)$ nella forma

$$A_p = \frac{g}{r(r - z)} (x dy - y dx) = \frac{g}{r(r - z)} d\varphi$$

con $r = |p| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.4.2 Calcolo del flusso del campo regolarizzato

Supponendo valga (dimostrare)

$$\int_S d\sigma \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{B}_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma \mathbf{B}_\varepsilon$$

Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2, -h < z < h\}$, cilindro centrato attorno all'asse z di raggio ε e altezza $2h$, con $h > 0$.

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma \tilde{\mathbf{B}} &= \int_S d\sigma \left[\frac{g}{r^3} \mathbf{r} - 2g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \right] \\ &= \int_S d\sigma \frac{g}{r^3} \mathbf{r} - \int_S d\sigma \left[2g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right) \Theta(z) \right] \\ &= \int_S d\sigma [1] - \int_S d\sigma [2] \end{aligned}$$

Il secondo integrale ha contribuito non nullo solamente sulla faccia superiore del cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2, z = h\}$ poichè l'integranda è nulla per $z < 0$ e il campo è parallelo all'asse z , quindi il flusso attraverso le pareti del cilindro è nullo.

$$\begin{aligned} \int_S d\sigma [2] &= 2g\varepsilon^2 \int_C d\sigma \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right) \\ &= 2g\varepsilon^2 \int_0^\varepsilon \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{r^2(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)^2} \right) \end{aligned}$$

I punti di C hanno $r^2 = \varepsilon^2 + h^2$, $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, quindi

$$= 2g\varepsilon^2 \int_0^\varepsilon \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)(\rho^2 + \varepsilon^2)} + \frac{2}{(\rho^2 + \varepsilon^2)^2} \right)$$

Sia $u := \rho^2 + \varepsilon^2$ e $du = 2\rho d\rho$

$$\begin{aligned} &= 4\pi g\varepsilon^2 \int_{\varepsilon^2}^{2\varepsilon^2} du \left(\frac{1}{(\varepsilon^2 + h^2)u} + \frac{2}{u^2} \right) = 4\pi g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + h^2} (\log(2\varepsilon^2) - \log(\varepsilon^2)) - 2 \left(\frac{1}{2\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \right) \right) \\ &= 4\pi g\varepsilon^2 \left(\frac{1}{\varepsilon^2 + h^2} \log \left(\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) - \frac{2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) = 4\pi g \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + h^2} \log 2 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) \end{aligned}$$

Allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_S d\sigma [2] = 4\pi g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 + h^2} \log 2 + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \right) = 4\pi g$$

Capitolo 2

Teorie di gauge

Una teoria di gauge è una teoria di campo la cui lagrangiana è invariante sotto l'azione di un gruppo di Lie¹ G , denominato *gruppo di gauge*. Se il gruppo di gauge è un gruppo (non) abeliano la teoria di gauge viene detta (non) abeliana.

Si consideri, ad esempio, la seguente lagrangiana per un campo scalare complesso $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ (dove V è un generico funzionale, il potenziale).

$$\mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + V[\phi^* \phi]$$

È invariante per una trasformazione di fase globale del campo, ossia in seguito alla trasformazione $\phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha} \phi$ (dove $\alpha \in \mathbb{R}$) la lagrangiana non cambia.

$$\mathcal{L}[\phi'] = (\partial_\mu \phi')^* \partial^\mu \phi' + V[(\phi')^* \phi'] = \partial_\mu e^{-i\alpha} \phi^* \partial^\mu e^{i\alpha} \phi + V[e^{-i\alpha} \phi^* e^{i\alpha} \phi] = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + V[\phi^* \phi] = \mathcal{L}[\phi]$$

Una simmetria di questo tipo è detta *simmetria globale*, in quanto non dipende dal punto dello spazio-tempo in cui è applicata (α è infatti una costante).

Un altro esempio di simmetria globale è, nella meccanica Newtoniana, una trasformazione di Galileo tra due sistemi inerziali (es: una rotazione degli assi): in seguito a tale trasformazione non cambia la descrizione fisica del fenomeno, ma solamente i "numeri" che ogni osservatore usa come coordinate. È quindi importante evidenziare quali siano le trasformazioni tra un sistema di coordinate e l'altro.

Un caso più interessante è quello in cui il sistema presenta una simmetria definita non globalmente, ma localmente. Si può pensare, ad esempio, a una trasformazione di coordinate tra un osservatore inerziale e uno non inerziale (ad esempio sottoposto a un moto rotatorio). Le descrizioni che i due osservatori danno del sistema non sono equivalenti: il secondo, ad esempio è costretto ad introdurre l'esistenza di forze fittizie (ad esempio la forza centrifuga), che in generale possono dipendere in maniera non banale dalle coordinate (ad esempio può dipendere dalla distanza un punto dall'osservatore).

In relazione alla lagrangiana scritta in precedenza, si può considerare una trasformazione di fase in cui $\alpha = \alpha(x, t)$ è una generica funzione delle coordinate $\phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha(x, t)} \phi$. Se la lagrangiana è invariante per trasformazione di questo tipo, tale trasformazione è detta *simmetria locale* o simmetria di gauge.

Il principio cardine delle teorie di gauge è allora promuovere le simmetrie globali di una lagrangiana a simmetrie locali (simmetrie che possano essere applicate solamente nell'intorno di un punto, senza affliggere il resto dello spazio), e studiare i casi in cui queste si conservano come simmetrie della teoria.

Matematicamente, una teoria di gauge è descritta da un fibrato principale², in cui la varietà di base M è (ad esempio) lo spaziotempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con metrica Minkowskiana ($g_{\mu\nu} = \eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$) e la fibra G è il gruppo di gauge.

Data la simmetria globale del gruppo di gauge, l'assegnazione di una simmetria locale (ossia la scelta

¹ Cfr. definizioni A.3.2 e A.3.3.

² Cfr. definizione A.6.3.

della particolare funzione $\alpha(x, t)$, nell'esempio precedente) corrisponde alla scelta di un ricoprimento $\{U_i\}$ della varietà e di sezioni locali s_i sul fibrato³, che nelle regioni di intersezione dei rispettivi domini ($U_i \cap U_j$) sono legate dalle funzioni di transizione A.5. Le funzioni di transizione sono dette *trasformazioni di gauge*.

Assegnata una 1-forma di connessione ω sul fibrato e delle sezioni locali s_i , i pullback di ω tramite le sezioni sono 1-forme sullo spaziotempo $A_i = s_i^* \omega$ e sono detti *potenziali di gauge*.

Si sottolinea l'importanza del teorema A.6.1 che dati i potenziali di gauge definiti sugli intorni locali U_i esiste sempre la 1-forma di connessione ω sul fibrato.

Il pullback della curvatura Ω , definita come differenziale esterno della 1-forma di connessione ω , è detto *tensore forza di campo* F .

Se il fibrato è banale, ossia può essere ricoperto da una sola carta ed ha la struttura globale di prodotto diretto $M \times G$, allora esiste una simmetria globale per il sistema. Se invece il fibrato è non banale, ossia non è descritto tramite un'unica carta, non può essere definita una simmetria globale e il potenziale di gauge può essere descritto solo tramite diverse carte locali, concordanti sulle regioni di intersezione tramite una trasformazione di gauge⁴.

Esempio: Elettrodinamica classica

Si vuole descrivere ora l'accoppiamento di un campo complesso ϕ con il campo elettromagnetico (si pensi ad esempio alla funzione d'onda di una particella carica).

Si consideri la lagrangiana \mathcal{L} definita in precedenza, che si è già visto essere invariante per trasformazioni *globali* di fase $\phi \mapsto e^{iq\alpha} \phi = U\phi$, dove il parametro $q \in \mathbb{R}$ è detto la costante di accoppiamento della teoria (in questo caso la carica elettrica).

$$\mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + V[\phi^* \phi] \Rightarrow \mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[\phi'] \quad , \quad \phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha} \phi$$

Si vuole ora promuovere la simmetria a simmetria locale $\alpha \mapsto \alpha(x, t)$ e richiedere che la lagrangiana rimanga invariata per trasformazione di fase locale. Si sostituisce la derivata parziale ∂_μ con la derivata covariante definita da

$$D_\mu := \partial_\mu - iqA_\mu$$

dove il campo $A_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ è il potenziale di gauge (in questo caso, il potenziale elettromagnetico). La lagrangiana gauge-invariante diventa:

$$\mathcal{L}' = D_\mu \phi^* D^\mu \phi + V[\phi^* \phi].$$

La richiesta di invarianza della lagrangiana per trasformazione di fase locale si traduce nella richiesta che la derivata covariante D_μ sia invariante. $D_\mu \mapsto D'_\mu = U^{-1} D_\mu U = D_\mu$.

$$\begin{aligned} iq\partial_\mu \alpha(x, t) + (\partial_\mu - iqA_\mu) &= (\partial_\mu - iqA'_\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \partial_\mu \alpha(x, t) = U^{-1} A_\mu U + \frac{i}{q} U dU \end{aligned} \tag{2.1}$$

che si traduce nella condizione che il potenziale A_μ trasformi secondo la trasformazione di gauge sopra scritta.

Se si calcola il tensore energia impulso della lagrangiana così scritta (si indica $\phi|^\mu = \partial\phi/\partial x_\mu$ e $\phi|_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu$), si vede immediatamente che non si conserva.

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \phi|^\mu} \phi|_\nu - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}' \Rightarrow \partial^\mu T'_{\mu\nu} \neq 0 \tag{2.2}$$

Occorre allora tenere conto anche della dinamica del campo elettromagnetico, costruendo la lagrangiana per l'accoppiamento del campo ϕ con il campo elettromagnetico che è Lorentz-invariante, con simmetria di gauge $U(1)$ e che conserva energia e quantità di moto⁵.

³ Cfr. definizione ??.

⁴ Si veda il monopolio di Wu-Yang nella sezione successiva 3.1.

⁵ Si osserva che definendo la lagrangiana del campo elettromagnetico libero

$$\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^*D_\mu\phi - V[\phi^*\phi] \quad (2.3)$$

Dove $F_{\mu\nu}$ è il **tensore elettromagnetico**, cioè il tensore forza di campo definito da $F = dA$, o in coordinate:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Si ottengono come equazioni del moto esattamente le equazioni di Maxwell nel vuoto.

Capitolo 3

Monopoli in teorie di gauge abeliane

Nella sezione 1.2 si è visto come non è possibile definire globalmente (su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$) un potenziale di monopolo regolare, incorrendo nella stringa di singolarità. Il primo approccio è stato di rendere equivalenti tutte le possibili configurazioni di direzione della stringa, tramite trasformazione di gauge di tipo $U(1)$. Si è arrivato a definire due potenziali (1.6) \mathbf{A}^\pm che hanno la stringa situata rispettivamente lungo l'asse z negativo/positivo, quindi regolari su asse z positivo/negativo rispettivamente.

L'approccio qui seguito, proposto da Wu e Yang (1968) [7], è di rinunciare a una definizione globale del potenziale di Dirac in favore di una descrizione tramite due potenziali definiti localmente su due aperti U^\pm , che concordano nella regione di intersezione tramite una trasformazione di gauge.

Innanzitutto, Poichè $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è equivalente omotopicamente a S^2 , si vuole studiare il problema sulla sfera. Siano allora U^\pm l'emisfero nord e sud della sfera

$$\begin{aligned} U^+ &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\} = \{(r, \theta, \varphi) \in S^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \\ U^- &= \{(x, y, z) \in S^2 \mid z < 0\} = \{(r, \theta, \varphi) \in S^2 \mid \pi/2 \leq \theta \leq \pi\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

La regione di intersezione è l'equatore

$$U^0 = U^+ \cap U^- = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z = 0\} = \{(r, \theta, \varphi) \in S^2 \mid \theta = \pi/2\}$$

Si possono allora definire i potenziali \mathbf{A}^\pm su U^\pm , che nella regione U^0 sono legati, come visto nella sezione 1.2, da

$$\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^- = \nabla \lambda = \nabla(2g\varphi) = \frac{2g}{r \sin \theta} \mathbf{u}_\varphi$$

Si noti che $\nabla \lambda$ è singolare in $\theta = 0, \pi$, ma nella regione U^0 si ha $\theta = \pi/2$.

Si calcola allora il flusso totale come:

$$\begin{aligned} \int_{S^2} d\sigma \nabla \times \mathbf{A} &= \int_{U^+} d\sigma \nabla \times \mathbf{A}^+ + \int_{U^-} d\sigma \nabla \times \mathbf{A}^- = \oint_{U^0} d\mathbf{l} \mathbf{A}^+ - \oint_{U^0} d\mathbf{l} \mathbf{A}^- \\ &= \oint_{U^0} d\mathbf{l} \nabla(2g\varphi) = \int_0^{2\pi} 2g \varphi d\varphi = 4g\pi \end{aligned}$$

In accordo con 1.2.

Il formalismo più naturale per descrivere il potenziale di monopolo in una teoria di gauge è quello di un fibrato principale con spazio base $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e gruppo di struttura G il gruppo di gauge.

Si faccia riferimento all'appendice per la teoria sui fibrati A.5.

Se il fibrato ammette una sezione globale, può essere coperto con un'unica carta. Il fibrato è allora banale e ha struttura globale di prodotto diretto tra la varietà M e la fibra G , e la classe di Chern caratteristica è $c_0 = 1$. La complessità della struttura del fibrato di solito è legata alla contraibilità dello spazio base.

Si consideri una teoria di gauge con gruppo $G = U(1)$, come l'elettrodinamica classica.

Se si prende come base $M = \mathbb{R}^3$, che è uno spazio contraibile, può essere ricoperto da un'unica carta e il potenziale di gauge A è definito globalmente su M , continuo e differenziabile, e il tensore elettromagnetico F è una 2-forma sia chiusa $DF = 0$ che esatta $F = dA$.

Se invece lo spazio base è $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, che non è uno spazio contraibile, la situazione cambia drasticamente. $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è equivalente omotopicamente alla sfera S^2 . In riferimento all'esempio A.11.1, è possibile costruire due fibrati principali: uno con classe di Chern $c_0 = 1$ e uno con $c_1 = F/2\pi$. Quest'ultimo, detto appunto *fibrato di monopolo* è quello che descrive correttamente il monopolo di Wu-Yang.

3.1 Fibrato di Monopolo di Wu–Yang

Si consideri un fibrato principale con $M = S^2$ e $G = U(1)$. Il gruppo di gauge $U(1) = \{e^{i\alpha}\}$ è parametrizzato da un parametro α , che è una coordinata ciclica lungo la fibra, ed è identificato quindi con la sfera S^1 .

Siano U^\pm emisferi nord e sud e U^0 l'equatore come sopra. Si hanno allora le due carte locali per il fibrato

$$\begin{aligned} U^+ \times S^1, & \text{ con coordinate } \{\theta, \varphi, \alpha^+\} \\ U^- \times S^1, & \text{ con coordinate } \{\theta, \varphi, \alpha^-\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Una parametrizzazione per la sfera di raggio unitario è data dalle usuali coordinate polari $\varphi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi)$, quindi si può definire una base per lo spazio tangente $T_p S^2$ come $\{\partial/\partial\theta, \partial/\partial\varphi\}$ e per lo spazio cotangente $T_p^* S^2$ come $\{d\theta, d\varphi\}$. La derivata esterna è data da

$$d = d\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + d\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

La 1-forma di connessione ω^1 definita globalmente sul fibrato, portata su U^\pm tramite pullback, dà il potenziale A

$$A = a(\theta)d\varphi = \begin{cases} A^+ = \frac{n}{2}(1 - \cos\theta)d\varphi & \text{su } U^+ \\ A^- = -\frac{n}{2}(1 + \cos\theta)d\varphi & \text{su } U^- \end{cases}$$

e la 2-forma di curvatura Ω^2 viene portata sul tensore elettromagnetico F

$$F = dA = da(\theta) \wedge d\varphi = \frac{n}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$$

La 2-forma F è chiusa ($dF = d^2A = 0$ su entrambi gli emisferi), analogamente al caso precedente, ma questa volta non è esatta perchè i due potenziali sono definiti su insiemi differenti.

Nella regione di intersezione U^0 i due potenziali sono vincolati dalla condizione di compatibilità A.7, la trasformazione di gauge 1.5

$$A^+ = \Phi A^- \Phi^{-1} + \frac{i}{e} \Phi^{-1} d\Phi = A^- + 2gd\varphi$$

Si osserva che siccome il gruppo di gauge è abeliano si può far commutare A^+ con Φ e semplificarlo nel primo termine. Questo non sarà possibile in una teoria di gauge non abeliana.

Si definiscono allora le funzioni di transizione A.5 che sono elementi di $\Phi = e^{i2eg\varphi} \in U(1)$ che collegano le coordinate delle fibre

$$e^{i\alpha^+} = \Phi e^{i\alpha^-} = e^{i2eg\varphi} e^{i\alpha^-}$$

Si osserva inoltre che anche la funzione d'onda di una particella carica in un campo di monopolo non può essere definita globalmente. Si definiscono su U^\pm le funzioni d'onda ψ^\pm che su U^0 sono collegate da $\psi^+ = \Phi\psi^-$. L'effetto della trasformazione di gauge è di cambiare la fase della funzione d'onda. Affinchè la fase sia ben definita e non multivalore, è necessario che sia rispettato

$$e^{2ig\varphi} \psi^- = \psi^+ = e^{2ig(\varphi+2\pi)} \Rightarrow 2ge = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

¹Si veda A.3.7

²Si veda A.3.7

Che è la condizione di quantizzazione della carica alla Dirac ??.

Le funzioni di transizione Φ sono mappe dell'equatore $S^1 \subset S^2$ nel gruppo di gauge $U(1)$: sono quindi cammini in $U(1)$ e possono essere classificate in base alla classe di omotopia in $\pi_1(U(1))$ a cui appartengono. L'intero n assume il significato topologico di *numero di avvolgimento* della corrispondente classe di omotopia.

Come visto sopra, la topologia del monopolo è caratterizzata dalla classe di Chern relativa a c_1

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{U^+} dA^+ - \int_{U^-} dA^- \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (A^+ - A^-) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n d\varphi = n$$

La carica magnetica coincide quindi con la prima classe di Chern, in quanto può essere interpretata come il flusso del campo magnetico F attraverso una sfera.

Per $n = 0$ il fibrato è banale e ha la forma $S^2 \times S^1$, mentre per $n = 1$ si ha il *fibrato di Hopf*, di seguito descritto.

3.2 Fibrato di Hopf

Il fibrato di Hopf descrive la sfera S^3 come fibrato con spazio base S^2 (parametrizzato dagli angoli θ, φ) e come fibra S^1 (parametrizzato, dal parametro α , come sopra).

La sfera S^3 è definita da:

$$S^3 = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^4 : |\mathbf{p}|^2 = 1\}$$

e può essere parametrizzata in coordinate cartesiane da (p_1, p_2, p_3, p_4) tali che:

$$\begin{cases} p_1 = \cos \frac{\theta}{2} \cos \alpha \\ p_2 = \cos \frac{\theta}{2} \sin \alpha \\ p_3 = \sin \frac{\theta}{2} \cos(\varphi + \alpha) \\ p_4 = \sin \frac{\theta}{2} \sin(\varphi + \alpha) \end{cases} \quad (3.3)$$

Assegnata una base $\{\partial/\partial p_\mu\}$ dello spazio tangente $T_p S^3$, si può definire la metrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{4} d\theta^2 + d\alpha^2 + \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi^2 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} d\varphi d\alpha \quad (3.4)$$

La proiezione $\pi : S^3 \rightarrow S^2$ (mappa di Hopf) è definita nel modo seguente $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto \mathbf{x} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x = 2(p_1 p_3 + p_2 p_4) = \sin \theta \cos \varphi \\ y = 2(p_1 p_4 - p_2 p_3) = \sin \theta \sin \varphi \\ z = p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2 = \cos \theta \end{cases} \quad (3.5)$$

Si osservi che si perde completamente la dipendenza dalla variabile α . L'effetto della mappa di Hopf è di mappare un cerchio S^1 in un punto della sfera S^2 .

La sezione del fibrato può essere presa fissando un particolare valore di α . Si richiede che la metrica sulla sfera S^3 si riduca alla tradizionale metrica $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ sulla sfera S^2 sia nell'emisfero nord $U^+(\theta/2 \mapsto \theta)$ che nell'emisfero sud $U^-(\pi/2 - \theta/2 \mapsto \theta)$. Si vede immediatamente da 3.5 che la condizione è verificata per $\alpha = 0$ e $\alpha = -\varphi$, rispettivamente. Con questa scelta, la forma di connessione globale ω su S^3 viene mappata dal pullback della sezione appena descritta nella forma locale A come prima 3.5

Le funzioni di transizione Φ sono definite nella regione di transizione $U^0 = U^+ \cap U^-$, l'equatore, come mappe $S^1 \rightarrow S^1$

$$\begin{aligned} \Phi_\pm &= \Phi_+ \circ \Phi_-^{-1} = \frac{p_3 + i p_4}{p_1 + i p_2} \sqrt{\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2 + p_4^2}} = e^{i\varphi} \\ \Phi_\mp &= \Phi_- \circ \Phi_+^{-1} = \frac{p_1 + i p_2}{p_3 + i p_4} \sqrt{\frac{p_3^2 + p_4^2}{p_1^2 + p_2^2}} = e^{-i\varphi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si definisce allora la 1-forma di connessione ω

$$\begin{aligned}\omega &= p_1 dp_2 - p_2 dp_1 + p_3 dp_4 - p_4 dp_3 \\ &= d\alpha + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)d\varphi\end{aligned}\tag{3.7}$$

Si osserva, come detto in precedenza che il pullback di questa forma sulla sfera S^2 (ossia, rimuovere la dipendenza da α) porta alla forma A definita sopra, nel caso particolare di $n = 1$.

Si definisce la curvatura Ω

$$\Omega = d\omega = 2(dp_1 \wedge dp_2 + dp_3 \wedge dp_4) = \frac{1}{2} \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$$

Questa forma è chiusa ed esatta su S^3 e si nota subito che corrisponde a $1/2$ della forma di volume della sfera S^2 ³. Si ha allora, integrando su S^2 come sottospazio di S^3 ⁴ $\int_{S^2} \Omega = 2\pi$

³ che è appunto $dS = \sin\theta d\theta \wedge d\varphi$

⁴ Abuso di notazione.

Capitolo 4

Monopoli in teorie di gauge non abeliane

4.1 Monopolo di Wu-Yang non Abeliano

Il monopolo magnetico in una teoria di gauge abeliana può essere definito tramite un potenziale non definito globalmente sulla varietà base. Questo però presenta vari problemi quando lo si vuole estendere a una teoria quantistica¹. La situazione può essere risolta se si considera l'elettrodinamica, teoria di gauge $U(1)$ abeliana, come parte di una teoria unificata più ampia. La versione più semplice è una teoria di gauge $SU(2)$ che ha come sottogruppo il gruppo di gauge dell'elettrodinamica $U(1)$. Una teoria di questo tipo prende il nome di *modello di Yang-Mills*.

Si consideri il potenziale di Dirac 1.1, qui denotato con $\tilde{\mathbf{A}}$, e si definisca il corrispondente quadrivettore \tilde{A}_μ

$$\tilde{\mathbf{A}} = -g(1 + \cos \theta) \nabla \varphi \quad \rightarrow \quad \tilde{A}_\mu = -g(1 + \cos \theta) \partial_\mu \varphi$$

Si vuole costruire ora un potenziale generalizzato A_μ , che trasformi attraverso gli elementi di $SU(2)$. A_μ deve essere una 1-forma locale, a valori in $\mathfrak{su}(2)$, quindi, scelta una base per l'algebra data dalle matrici di Pauli² $\sigma_a/2$, si costruisce il generico potenziale tramite una combinazione degli elementi della base, $A_\mu := A_\mu^a \sigma_a/2$ con $a = 1, 2, 3$.

Affinchè il sottospazio $U(1)$ abbia come potenziale esattamente il potenziale di Dirac, si scelgono i coefficienti A_μ^a come:

$$A_\mu^1 = 0, \quad A_\mu^2 = 0, \quad A_\mu^3 = \tilde{A}_\mu = -g(1 + \cos \theta) \partial_\mu \varphi, \quad (4.1)$$

si ottiene che la trasformazione di gauge tramite $U \in SU(2)$ (come B.2) è:

$$A_\mu \mapsto A'_\mu = U A_\mu U^{-1} + \frac{i}{e} U \partial_i U^{-1} \quad (4.2)$$

Si osserva che in questo caso non è possibile commutare U e A_μ in quanto si tratta di una teoria di gauge non abeliana.

Si ricorda che $\partial_\mu \varphi$, dalla definizione, è singolare lungo l'asse z

$$\partial_\mu \varphi = \frac{1}{r \sin \theta} (0, -\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$$

Sia $\alpha = 0$ in B.2 e si consideri la trasformazione di gauge con matrice data dalla seguente matrice

$$U = U(\theta, \varphi) = e^{i\sigma_3 \frac{\varphi}{2}} e^{i\sigma_2 \frac{\theta}{2}} e^{-i\sigma_3 \frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}^3 \quad (4.3)$$

Inserendo U nella trasformazione di gauge si ottiene (per le componenti spaziali $k = 1, 2, 3$):

¹ Si veda [4].

² Si osservi che $SU(2)$ ha dimensione 3, quindi si sceglie la rappresentazione fondamentale.

³ l'angolo φ varia da 4π in corrispondenza di $\theta = 0$ a 0 per $\theta = \varphi$. Per un gruppo $SU(N)$ φ è periodico di $2\pi N$

$$A'_k = A_k^a \frac{\sigma_a}{2} = \varepsilon_{kbc} \frac{x_b}{r^2} \frac{\sigma_c}{2} \quad (4.4)$$

Questo potenziale è regolare ovunque tranne che nell'origine. Si è rimossa la stringa di singolarità iniziale. Il motivo è che la trasformazione di gauge stessa 4.2 è singolare e ha la stessa singolarità del potenziale \hat{A}_μ . Infatti si ha che

$$(U\partial_i U^{-1})_1 = 0, \quad (U\partial_i U^{-1})_2 = 0, \quad (U\partial_i U^{-1})_3 = -(1 + \cos \theta)\partial_i \varphi \quad (4.5)$$

L'esatta cancellazione delle singolarità è possibile solo se è soddisfatta la condizione di quantizzazione della carica 1.8.

Se ora si inserisce l'espressione di A_μ nel tensore elettromagnetico non-Abeliano definito da

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}^a \sigma_a, \quad (4.6)$$

dove $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a$, si ottiene

$$F_{ij}^a = \varepsilon_{ijb} \frac{x^a x^b}{er^4} \sim \frac{1}{r^2} \quad (4.7)$$

Riottenendo, asintoticamente, l'andamento del campo magnetico di monopolo.

Questa soluzione presenta però ancora alcune problematiche. Se si prova a calcolare il flusso di questo campo su una superficie chiusa, si ottiene zero. Inoltre, si hanno problemi di definizione dell'energia della configurazione.

L'accoppiamento del campo di gauge con 3 campi scalari e il meccanismo di rottura spontanea della simmetria risolveranno questi problemi.

4.2 Monopolo di 't Hooft–Polyakov

Si è visto che il monopolo di Dirac può essere inserito nella teoria di gauge abeliana. In questa sezione si vedrà che un modello non abeliano contiene inevitabilmente soluzioni di tipo monopolo.

4.2.1 Modello di Georgi-Glashow

Siano ϕ^a con $a = 1, 2, 3$ tre campi scalari complessi e $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^4$. Sia \mathcal{M} lo spazio dei campi ϕ , denominato spazio di *isospin*. Si consideri la seguente densità lagrangiana per ϕ (λ e v sono due parametri).

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + V(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a + \frac{\lambda}{4}(\phi^a \phi^a - v^2)^2$$

Si osserva che è invariante per rotazione del vettore ϕ nello spazio \mathcal{M} , quindi ha una simmetria di tipo $SO(3)^5$ in \mathcal{M} . In questo caso è più conveniente scegliere una rappresentazione aggiunta di $SU(2)$, data dalle matrici T^a che rispettano le regole di commutazione $[T^a, T^b] = i\varepsilon_{abc}T^c$ e tali che $\text{Tr}(T^a T^b) = 1/2\delta_{ab}$.

$$iT_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad iT_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

La simmetria di tipo $SU(2)$ è allora data dalla trasformazione $\phi \rightarrow \phi' = e^{iT^a \theta^a}$, per arbitrari $\theta^a \in \mathbb{R}^3$.

Si osserva immediatamente che il potenziale $V(\phi)$ ha un minimo quando il valore di aspettazione del campo ϕ è pari a v^2 . Un esempio di configurazione dei campi che verifica tale condizione è:

$$\langle \phi \rangle = (0, 0, v)$$

⁴ Per non confondere la notazione, si indica con a, b, c l'indice identificativo dei campi ϕ con μ, ν, ρ l'indice spaziotemporale e con i, j, k l'indice solamente spaziale.

⁵ lo spazio $SO(3)$ è localmente isomorfo a $SU(2)$

Si vede immediatamente che

$$T_1\langle\phi\rangle \neq 0, \quad T_2\langle\phi\rangle \neq 0, \quad T_3\langle\phi\rangle = 0 \quad (4.9)$$

Si ha così una *rottura spontanea della simmetria* $SU(2)$ del modello, di cui l'unica simmetria che si conserva è la simmetria di tipo $U(1)$ associata al generatore T_3 .

Descrizione del modello

Il modello di Georgi-Glashow descrive l'accoppiamento dei 3 campi scalari $\{\phi^a\}$ con il campo di gauge A_μ . La densità lagrangiana del modello è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - V(\phi) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \quad (4.10)$$

Dove la derivata covariante è data da $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Si richiama che $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$, con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - e\varepsilon_{abc}A_\mu^b A_\nu^c \Rightarrow F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] = \frac{1}{ie}[D_\mu, D_\nu] \quad (4.11)$$

Le equazioni del moto per i campi sono allora

$$D_\nu F^{a\mu\nu} = -e\varepsilon_{abc}\phi^b D^\mu\phi^c, \quad D_\mu D^\mu\phi^a = -\lambda\phi^a(\phi^2 - v^2) \quad (4.12)$$

dove $\phi^2 = \phi^a\phi^a$. Il tensore energia-impulso simmetrizzato è

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}^a F_\nu^{a\rho} - g_{\mu\nu} \quad (4.13)$$

E l'energia è data da

$$E = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x T_{00} = \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \left[\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\phi^a)(D^\mu\phi^a) + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2 \right] \quad (4.14)$$

Analogamente all'esempio precedente, si vede immediatamente che l'energia è minima se

$$\phi^2 = v^2, \quad F_{ij}^a = 0, \quad D_i\phi^a = 0 \quad (4.15)$$

Una configurazione di campi ϕ^a ad energia *minima* è chiamata *stato di vuoto del sistema*. La costante v rappresenta il valore di aspettazione del campo sullo stato di vuoto. E quantifica la rottura spontanea della simmetria $SU(2) \rightarrow U(1)$ del modello (se $v = 0$ la simmetria è mantenuta).

Si evidenzia che il gruppo di simmetria $U(1)$ che si conserva corrisponde a una rotazione nello spazio degli isospin attorno all'isovettore corrispondente allo stato di vuoto ϕ .

L'insieme delle configurazioni di campi che costituiscono minimi locali del funzionale di energia è detto *varietà di vuoto* $\mathcal{W} \subset \mathcal{M}$. Per questo sistema la varietà di vuoto è una sfera S^2 nello spazio degli isospin (definita da $\phi^2 = \text{cost}$).

Classificazione delle soluzioni

Lo spettro energetico perturbativo può essere calcolato dando una piccola fluttuazione allo stato di vuoto $\phi = (0, 0, v) \mapsto \phi' = (0, 0, v + \varepsilon)$ e applicando i soliti metodi di teoria delle perturbazioni.

La condizione $\phi^2 = v^2$ presenta una degenerazione molto ampia, quindi lo spettro delle soluzioni di vuoto del modello di Georgi-Glashow è non banale. Una classificazione delle soluzioni può essere data con considerazioni topologiche. In particolare, se due soluzioni non possono essere deformate omotopicamente una nell'altra appartengono a classi distinte. Ciò che caratterizzerà le soluzioni sarà il comportamento asintotico (per $r \rightarrow \infty$) dei campi $\phi(\mathbf{r})$.

Si definisce allora la *sfera all'infinito* spaziale S_∞^2 come il bordo di \mathbb{R}^3 e si vuole caratterizzare il comportamento dei campi ϕ ristretti a S_∞^2 . Le restrizioni ϕ^* dei campi sono funzioni continue da S_∞^2 a \mathcal{W} . Topologicamente sono funzioni $\phi: S^2 \rightarrow S^2$ e allora possono essere classificate in base ai gruppi

di omotopia, in particolare $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Le soluzioni del modello di Georgi-Glashow sono allora classificate topologicamente in base al rappresentante della classe di $\pi_2(S^2)$ a cui appartengono. Tale rappresentante è detto **numero di avvolgimento** $n \in \mathbb{Z}$.

Se si tenta di deformare una soluzione in un'altra con diverso numero di avvolgimento il funzionale di energia diverge. Le soluzioni sono pertanto separate da barriere infinite di energia e sono quindi stabili.

La soluzione banale è il caso $n = 0$ e corrisponde a un campo che asintoticamente non dipende dalle componenti spaziali, della forma

$$\phi \rightarrow \phi^a = (0, 0, v).$$

Le soluzioni non banali sono anch'esse tali che all'infinito $|\phi| = v$, ma hanno dipendenza esplicita dalle coordinate spaziali anche all'infinito

$$\phi^a(r) \rightarrow \frac{vx^a}{r} \quad (4.16)$$

Queste soluzioni sono caratterizzate da un numero di avvolgimento $n = 1$ e vengono dette **campo a riccio**.

Carica magnetica

Si consideri la configurazione non banale di campo a riccio. Si vuole porre la condizione di annullamento della derivata covariante D_μ all'infinito, che produce la condizione sull'andamento asintotico del campo di gauge

$$A_k^a(r) \rightarrow \frac{1}{e} \varepsilon_{abk} \frac{x^b}{r^2} \quad (4.17)$$

Si definisce quindi il tensore elettromagnetico gauge invariante

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} := \hat{\phi}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{e} \varepsilon_{abc} \hat{\phi}^a D_\mu \hat{\phi}^b D_\nu \hat{\phi}^c \quad (4.18)$$

dove $\hat{\phi}^a = \phi^a / |\phi^a|$ è un campo normalizzato.

Per le configurazioni non banali, con andamento 4.16 del campo e 4.17 del potenziale, le equazioni di Maxwell diventano⁶

$$\partial^\nu \tilde{F}_{\nu\mu} := \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = \frac{1}{2v^3 e} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{abc} \partial^\nu \phi^a \partial^\rho \phi^b \partial^\sigma \phi^c =: k_\mu$$

Si osserva che il vettore k_μ si conserva ($\partial^\mu k_\mu = 0$). Si può allora definire la carica magnetica come

$$g = \int d^3x k_0 = \int_{S_\infty^2} d^2s k_0$$

Svolgendo i conti, si ottiene

$$g = \frac{4\pi n}{e} \quad (4.19)$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ è il numero di avvolgimento del campo a riccio. Questa condizione è l'analogo della condizione di quantizzazione della carica alla Dirac 1.8.

4.2.2 Ansatz di 't Hooft–Polyakov

Come soluzione del modello di Georgi-Glashow, 't Hooft e Polyakov proposero questo Ansatz:

$$\phi^a = \frac{x^a}{er^2} H(r), \quad A_0^a = 0, \quad A_k^a = \varepsilon_{abk} \frac{x^b}{er^2} (1 - K(r)) \quad (4.20)$$

con H e K funzioni da determinarsi inserendo queste espressioni nelle equazioni del moto 4.12 con condizioni al contorno

$$\begin{aligned} K(r) &\rightarrow 1, & H(r) &\rightarrow 0 & \text{per } r &\rightarrow 0 \\ K(r) &\rightarrow 0, & H(r) &\rightarrow r & \text{per } r &\rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.21)$$

⁶ Si veda [4] per la trattazione completa.

e risolvendo numericamente le equazioni differenziali che ne derivano.

Sostituendo l'Ansatz nell'espressione della carica magnetica definita in precedenza si ottiene

$$g = \frac{4\pi}{e} \tag{4.22}$$

che corrisponde a un monopolo di carica magnetica unitaria, ossia a un numero di avvolgimento $n = 1$.

Appendice A

Cenni preliminari di matematica

A.1 Varietà differenziali

Per una trattazione completa degli argomenti qua accennati si vedano le referenze.

A.1.1 Definizioni

Se una funzione f continua/ C^k -differenziabile è invertibile e la sua inversa f^{-1} è anch'essa continua/ C^k -differenziabile allora f è detta un **omeomorfismo/diffeomorfismo**.

Se tra due spazi topologici esiste un omeomorfismo/diffeomorfismo, i due si dicono omeomorfi/diffeomorfi. Nel seguito viene usato "differenziabile" come sinonimo di " C^∞ ", senza perdita di generalità della trattazione.

Definizione A.0.1. (Varietà differenziale) Sia (M, T) uno spazio topologico. M è detto una **varietà differenziale** si rispetta le seguenti proprietà:

- (Proprietà di Hausdorff) Punti distinti di M hanno interni disgiunti

$$\forall x_\alpha, x_\beta \in M, x_\alpha \neq x_\beta, \exists A_\alpha, A_\beta \in T (x_\alpha \in A_\alpha, x_\beta \in A_\beta), \text{ t.c. } A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$$

- (Localmente n-Euclideo) Ciascun punto di M ha un intorno che è diffeomorfo a un aperto di \mathbb{R}^n .

$$\forall x \in M \exists U \in T, \exists \phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \phi \text{ diffeomorfismo}$$

La coppia (U, ϕ) è detta *intorno coordinato* o *carta*. Le carte devono essere a due a due *compatibili* (si veda sotto).

Il numero n è detto la *dimensione* della varietà. Si può dimostrare che è unico.

- (Secondo assioma di Numerabilità) Lo spazio M ha una base della topologia con cardinalità numerabile.

Una famiglia di carte $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ è detta *atlante* se rispetta le seguenti proprietà:

- L'insieme degli interni $\{U_\alpha\}$ ricopre X : $X \subset \bigcup_\alpha U_\alpha$
- Gli interni coordinati sono a due a due *compatibili*: per ogni coppia di interni coordinati $(U_\alpha, \phi_\alpha), (U_\beta, \phi_\beta)$ t.c. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ le funzioni di transizione (cambio di coordinate) ψ sono diffeomorfismi.

$$\begin{aligned}\psi &= \phi_\beta \circ \phi_\alpha : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \\ \psi^{-1} &= \phi_\alpha \circ \phi_\beta : \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\end{aligned}$$

Si veda [5] per esempi di varietà differenziali.

La compatibilità tra due carte è una relazione di equivalenza. L'insieme delle classi di equivalenza di compatibilità è detto *struttura differenziale*.

Di norma non vi è un unico atlante che appartiene a una struttura differenziale, ma si dimostra che dato un'atlante è unica la struttura differenziale a cui appartiene.

Si sottolinea che una varietà differenziale è uno spazio che può essere descritto localmente con un sistema di coordinate euclidee. Studiando un problema su una varietà differenziale, è quindi sufficiente applicare le mappe ϕ e riportare il problema in uno spazio euclideo, potendo applicare quindi tutti i metodi noti di Analisi. Nel seguito l'espressione "in coordinate locali" significherà esattamente questo: Data la varietà M , scelta una carta (U, ϕ) , si studia il problema su $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Siano $R^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x_n > 0\}$ (che è omeomorfo a \mathbb{R}^n) e $R^0 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } x_n = 0\}$

Definizione A.0.2. (Varietà con bordo): Una varietà M si dice varietà con bordo se le funzioni coordinate sono definite a valori non in \mathbb{R}^n , ma in $R^+ \cup R^0$. La controimmagine di R^0 secondo tutte le funzioni coordinate di un atlante è detta *bordo della varietà* e si indica con ∂M . Il bordo è una sottovarietà di dimensione $n - 1$.

A.1.2 Spazio tangente e cotangente

Si vuole generalizzare la nozione di vettore tangente ad uno spazio $M \subset \mathbb{R}^n$ (si pensi pure a una superficie in \mathbb{R}^3 o una curva in \mathbb{R}^2). Un vettore identifica univocamente una direzione in \mathbb{R}^n . Si vuole associare ad ogni vettore l'operazione derivata direzionale lungo la direzione individuata dal vettore, valutata nel punto $p \in \mathbb{R}^n$.

Scelta una base $\{e_i\}$ di \mathbb{R}^n , ogni vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si può esprimere in maniera unica come combinazione lineare degli elementi della base

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + \dots + v_n \mathbf{e}_n$$

Sia f una funzione differenziabile definita in un opportuno intorno U del punto p (per semplicità nel seguito si indica con $C^\infty(p)$ l'insieme delle funzioni lisce definite su opportuni intorno del punto $p \in \mathbb{R}^n$).

La derivata direzionale di f lungo \mathbf{v} è quindi data da

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p = v_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_p + \dots + v_n \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_p$$

Inoltre, per le proprietà delle derivate $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\forall f, g \in C^\infty(p)$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\alpha f + \beta g) \right|_p = \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p + \beta \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \right|_p \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (fg) \right|_p = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right|_p g(p) + f(p) \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{v}} \right|_p$$

Il vettore \mathbf{v} è allora individuato in maniera univoca dal modo in cui agisce la derivata direzionale su tutte le funzioni differenziabili in un intorno di p . Si definisce allora il *vettore tangente* alla varietà M nel punto p :

Definizione A.0.3. (Vettore tangente) Sia M una varietà differenziale e $p \in M$. Si dice *vettore tangente* a X nel punto p un'applicazione $\mathbf{V}_p : C^\infty(p) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che:

- $\mathbf{V}_p[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathbf{V}_p[f] + \beta \mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p) \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
- $\mathbf{V}_p[fg] = \mathbf{V}_p[f]g(p) + f(p)\mathbf{V}_p[g] \quad \forall f, g \in C^\infty(p)$

L'insieme dei vettori tangenti a una varietà M nel punto p è detto **spazio tangente** alla varietà nel punto p e si indica con $T_p(M)$. Si può mostrare facilmente che $T_p(M)$ è uno spazio vettoriale.

Si definisce **spazio cotangente** $T_p^*(M)$ a una varietà M nel punto $p \in M$ il duale¹ dello spazio tangente $T_p(M)$.

Data una base di \mathbb{R}^n si definiscono:

¹ Si ricorda che il duale V^* di uno spazio vettoriale V è l'insieme delle applicazioni lineari $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$. Data una base $\{e_i\}$ di V , la base canonica per V^* è definita dalle proiezioni nella i -esima coordinata dx^i , quindi $dx^i(e_j) = \delta_j^i$. Data una qualsiasi $\phi \in V^*$ applicazione lineare su V , si ha $\phi = \sum_i a_i dx^i$ per $\{a_i\} \in \mathbb{R}$.

- $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ le derivate parziali lungo la coordinata i -esima sono base di $T_p(M)$.
- $e^i = dx^i$ gli elementi di linea differenziali lungo la coordinata i -esima sono base di $T_p^*(M)$.

Si definisce **campo vettoriale** un'applicazione che a un punto p della varietà M associa un vettore tangente al punto. Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia dal punto base p^2 . Lo spazio dei campi vettoriali sulla varietà M si indica con $\mathcal{X}(M)$

$$\mathbf{V} : M \rightarrow T_p(M), p \mapsto \mathbf{V}_p$$

A.1.3 Mappe tra varietà

Sia $F : M \rightarrow N$ una mappa tra le due varietà differenziali M e N . Sia (U, ϕ) una carta per M e (V, ψ) una carta per N . Sia $p \in U$ e $q = F(p) \in V$.

Definizione A.0.4. La mappa F è detta differenziabile in p se è differenziabile in senso tradizionale la mappa tra gli aperti di \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n

$$f : \phi(U) \rightarrow \psi(V) \quad , \quad f = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$$

Definizione A.0.5. Una mappa $F : M \rightarrow N$ tra due varietà induce una mappa $F_* : T_p M \rightarrow T_q N$ tra gli spazi tangenti denominata **mappa differenziale** e una mappa $F^* : T_q^* N \rightarrow T_p^* M$ tra gli spazi cotangenti denominata **pullback**, definite da:

$$\begin{aligned} (F_* X)_q[g] &:= X_p[g \circ F] \\ F_* \omega(X_p) &:= \omega(F_* X_p) \end{aligned} \tag{A.1}$$

per ogni vettore $X_p \in T_p M$, ogni forma $\omega \in T_q^* N$, ogni funzione $g \in C^\infty(N)$ e ogni $p \in M$ e $q = F(p) \in N$.

Siano $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow O$ e $G \circ F : M \rightarrow O$, vale che

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* \quad \text{e} \quad (G \circ F)^* = F^* \circ G^*$$

Si noti che la mappa differenziale agisce nella stessa direzione di F (covariante), mentre il pullback agisce in direzione opposta (controvariante).

A.2 Omotopia e Classi di omotopia

Nel seguito, se non diversamente specificato siano X, Y spazi topologici con topologia assegnata T_X, T_Y rispettivamente. Le dimostrazioni dei teoremi vengono omesse per brevità di trattazione. Si veda [5], [3], [4].

Definizione A.1.1. (*Omotopia tra funzioni continue*): Siano $f, g : X \rightarrow Y$ funzioni continue. Si definisce **omotopia** tra f e g un'applicazione continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tale che

$$H(x, 0) = f(x) \quad \text{e} \quad H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

Se esiste un'omotopia tra le funzioni f e g , si dicono *omotope* $f \sim g$.

Intuitivamente, due funzioni sono omotope se le loro immagini $f(X), g(X)$ possono essere deformate con continuità (senza "strappare" l'insieme) una nell'altra.

Definizione A.1.2. (*Equivalenza omotopica*): Due spazi topologici X, Y si dicono *omotopicamente equivalenti* o che hanno *lo stesso tipo di omotopia* se esistono due applicazioni $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tali che le composizioni $f \circ g : Y \rightarrow Y$ e $g \circ f : X \rightarrow X$:

$$f \circ g \sim \text{id}_Y \quad , \quad g \circ f \sim \text{id}_X$$

Le due applicazioni così definite si dicono *equivalenze omotopiche*.

Lemma A.1.1. *La relazione di omotopia è una relazione di equivalenza tra funzioni. L'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza tra spazi topologici.*

²Si veda A.5.1 per chiarificare questa affermazione.

Esempio:

Esempio A.1.1. Siano $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e $Y = S^{n-1}$. I due spazi sono omotopicamente equivalenti. Le funzioni di equivalenza omotopica sono $f : x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \frac{x}{|x|}$ e $g : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ l'inclusione $y \in S^{n-1} \mapsto y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Un'omotopia è ad esempio $H(x, t) = xe^{(t-1)\log|x|}$. È di immediata verifica che si tratta dell'omotopia cercata.

Primo gruppo di omotopia

Definizione A.1.3. Si definisce **cammino** o *arco* in X una funzione continua $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$. Un cammino si dice **laccio** o *circuito* se è chiuso, ossia $\sigma(0) = \sigma(1)$.

Alternativamente, un **laccio** è una funzione continua del cerchio in X $\sigma : S^1 \rightarrow X$.

L'idea è quella di avvolgere, deformandolo, il cerchio attorno allo spazio X , senza però strapparli (continuità della funzione). Sia $x_0 \in X$. Un laccio σ tale che $\sigma(0) = x_0$ si dice *laccio di base* x_0 .

Nel definire l'omotopia tra due cammini, si vuole anche richiedere che il punto base venga lasciato inalterato dalla funzione dell'omotopia.

Definizione A.1.4. (*Omotopia tra cammini*): Siano $\sigma, \tau : [0, 1] \rightarrow X$ cammini con lo stesso punto iniziale $\sigma(0) = \tau(0)$ e punto finale $\sigma(1) = \tau(1)$. Si definisce **omotopia** tra σ e τ un'applicazione continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tale che

$$H(t, 0) = \sigma(t) \quad \text{e} \quad H(t, 1) = \tau(t) \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$H(0, s) = \sigma(0) = \tau(0) \quad \text{e} \quad H(1, s) = \sigma(1) = \tau(1) \quad \forall s \in [0, 1]$$

Definizione A.1.5. (*Gruppo fondamentale*): Si definisce il **gruppo fondamentale** o *primo gruppo di omotopia* dello spazio X , denotato con $\pi_1(X, x_0)$, l'insieme delle classi di equivalenza dei lacci di base x_0 , rispetto alla relazione di omotopia.

Lacci che possono essere deformati con continuità l'uno nell'altro appartengono alla stessa classe. Questa proprietà dipende strettamente dalla geometria dello spazio (ad esempio numero di buchi) e il gruppo fondamentale è un modo di classificare queste proprietà topologiche.

Un gruppo fondamentale composto da una sola classe di equivalenza è detto *banale*, in quanto ogni laccio è deformabile in qualsiasi altro e in particolare al laccio costante nel punto base.

Uno spazio con gruppo fondamentale *isomorfo* al gruppo banale si dice **contraibile**.

Teorema A.1.1. Siano X, Y spazi topologici con lo stesso tipo di omotopia, con equivalenza omotopica data da $\phi : X \rightarrow Y$, essa induce un isomorfismo tra i gruppi fondamentali.

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, \phi(x_0)) \quad \forall x_0 \in X$$

Con isomorfismo dato da $\phi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \phi(x_0))$

$$\phi_*([\sigma]) = [\phi \circ \sigma]$$

Dal teorema appena enunciato è chiara l'importanza di classificare gli spazi in base al gruppo fondamentale. Esso infatti è un **invariante topologico**, ossia spazi che sono omeomorfi hanno lo stesso gruppo fondamentale (isomorfi).

Dato un punto nel piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'angolo θ che individua il punto in coordinate polari è dato da $\theta = \arctan(y/x)$, per $x \neq 0$. Si consideri un cammino σ nel piano, che sia differenziabile a tratti, si definisce la funzione angolo $\theta(t) = \arctan(y(t)/x(t))$. Differenziando ambo i lati si definisce la forma differenziale:

$$d\theta = \frac{1}{x^2 + y^2}(x dy - y dx)$$

Definizione A.1.6. (*Numero di avvolgimento*): Sia σ un laccio in \mathbb{R}^2 . Si definisce **numero di avvolgimento** (W) del laccio il rapporto tra la variazione totale di angolo lungo σ e l'angolo totale 2π :

$$W := \int_{\sigma} \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

Si può estendere la definizione per una generica varietà differenziale, si veda [3].

Esempi di gruppo fondamentale

Esempio A.1.2. (Gruppo fondamentale di S^1): Cammini con numero di avvolgimento differente non sono omotopi (si pensi di avvolgere un elastico attorno al dito una, due, tre volte e provare a passare da una configurazione all'altra senza sfilare l'elastico dal dito), quindi si può stabilire un isomorfismo tra il gruppo fondamentale del cerchio e il gruppo degli interi \mathbb{Z} associando a ogni cammino il suo numero di avvolgimento. Quindi

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Esempio A.1.3. (Gruppo fondamentale di S^2): Il gruppo fondamentale della sfera è banale. Intuitivamente si pensi di avvolgere un elastico intorno a una palla, inchiodando un punto: si può sempre sciogliere l'elastico.

$$\pi_1(S^2) \cong \{0\}$$

Gruppi di omotopia superiori

Si può pensare a un laccio in X come una mappa tra S^1 e X ³. Quindi la relazione di omotopia tra cammini può essere vista come una relazione di equivalenza tra le funzioni continue $\sigma : S^1 \rightarrow X$, secondo la definizione di omotopia tra funzioni continue A.1.1 e ridefinire il gruppo fondamentale come l'insieme di queste classi di omotopia

Si può allora generalizzare il procedimento alle mappe continue da $S^n \rightarrow X$ e definire i gruppi superiori di omotopia.

Definizione A.1.7. (*n-esimo gruppo di omotopia*): Sia $x_0 \in X$. Si definisce l'**n-esimo gruppo di omotopia** dello spazio X l'insieme delle classi di equivalenza delle funzioni continue $\sigma : S^n \rightarrow X$.

Gruppi di omotopia delle sfere

$$\begin{aligned} \pi_1(S^1) &\cong \mathbb{Z} & \pi_2(S^1) &\cong \{0\} & \pi_3(S^1) &\cong \{0\} \\ \pi_1(S^2) &\cong \{0\} & \pi_2(S^2) &\cong \mathbb{Z} & \pi_3(S^2) &\cong \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.3 Tensori e Forme differenziali

Sia V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Si definisce **tensore** misto con r indici covarianti e s indici controvarianti un'applicazione multilineare $F : V^r \times V^{*s} \rightarrow \mathbb{R}$, dove $V^r = V \times \dots \times V$ e $V^{*s} = V^* \times \dots \times V^*$. Si indica con $\mathcal{T}^{(r,s)}(V)$ lo spazio dei (r,s) -tensori su V

Si definisce il **prodotto tensoriale** (indicato col simbolo \otimes) tra $F \in \mathcal{T}^r(V)$ e $G \in \mathcal{T}^s(V)$ il $r+s$ tensore definito da:

$$F \otimes G(v_1, \dots, v_{r+s}) = F(v_1, \dots, v_r)G(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$$

dove a destra dell'uguale si ha il prodotto tra i due numeri reali $F(v_1, \dots, v_r)$ e $G(v_{r+1}, \dots, v_{r+s})$. Analogamente, si definisce il prodotto tensoriale tra due tensori controvarianti.

Si definisce **campo tensoriale** sulla varietà M con r indici covarianti e s indici controvarianti un'applicazione $M \rightarrow \mathcal{T}^{(r,s)}(T_p^*(M))$ che a ogni p associa un tensore con punto base p . Si vuole richiedere anche una dipendenza continua o liscia da p .

Si definisce **r-forma** un r -tensore covariante *totalmente antisimmetrico*.

Lo spazio delle r -forme sulla varietà M nel punto p si indica con $\Lambda^r(p)$. La dimensione di $\Lambda^r(p)$ è $\binom{n}{r}$ se n è la dimensione di M ⁴.

³ Siccome l'intervallo $[0, 1]$ con gli estremi identificati (dal fatto che un laccio è un cammino chiuso) è identificato con il cerchio

⁴ Si veda [5],[1],[4]

A.3.1 Forme differenziali

Definizione A.2.1. (Forma differenziale) Si definisce *r-forma differenziale* un campo tensoriale covariante totalmente antisimmetrico, ossia un'applicazione multilineare $\omega : M \rightarrow \Lambda^r(p)$ che a $p \in M$ associa la *r-forma* ω_p . Lo spazio delle *r-forme differenziali* su M si indica con $\Omega^r(M)$.

Si osservi che per la proprietà di antisimmetria se $u = v$ si ha

$$\omega(v, \dots, u, \dots) = -\omega(u, \dots, v, \dots) = -\omega(v, \dots, u, \dots) = 0$$

Per una varietà di dimensione n si ha al massimo n vettori linearmente indipendenti. Se si prende in considerazione un vettore aggiuntivo, esso è combinazione lineare dei precedenti.

Di conseguenza **tutte le ($r > n$)-forme** su una varietà di dimensione n sono **nulle**.

Se $u = a_1 v^1 + \dots + a_n v^n$

$$\omega(v^1, \dots, v^n, u) = \dots = a_1 \omega(v^1, \dots, v^n, v^1) + \dots + a_n \omega(v^1, \dots, v^n, v^n) = 0$$

Analogamente a quanto fatto per il prodotto tensoriale, si vuole definire un prodotto tra r e s forme differenziali che dia una $r + s$ forma differenziale (cioè un prodotto tensoriale che mantenga l'antisimmetria del tensore).

Si definisce **prodotto esterno** o **prodotto wedge** tra due forme differenziali $\alpha \in \Omega^r(M)$ e $\omega \in \Omega^s(M)$ la $r + s$ forma differenziale definita da:

$$\alpha \wedge \omega(V_1, \dots, V_{r+s})(p) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S^{r+s}} (-1)^\sigma \alpha_p \otimes \omega_p(V_{\sigma(1)}, \dots, V_{\sigma(r)}, V_{\sigma(r+1)}, \dots, V_{\sigma(r+s)})$$

Dove S^{r+s} è il gruppo delle permutazioni di $r + s$ elementi e $(-1)^\sigma$ è il segno della permutazione σ .

Il prodotto wedge gode delle seguenti proprietà, di immediata dimostrazione:

1. $(\alpha + \beta) \wedge \omega = \alpha \wedge \omega + \beta \wedge \omega$ e $\omega \wedge (\alpha + \beta) = \omega \wedge \alpha + \omega \wedge \beta$
2. $(c\alpha) \wedge \omega = c(\alpha \wedge \omega) = \alpha \wedge (c\omega)$
3. $\omega \wedge \alpha = (-1)^{r+s} \alpha \wedge \omega$
4. $(\alpha \wedge \omega) \wedge \tau = \alpha \wedge (\omega \wedge \tau)$ (valida grazie alla normalizzazione scelta nella definizione di \wedge)

$$\forall c \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \Omega^r(M), \forall \omega \in \Omega^s(M), \forall \tau \in \Omega^k(M)$$

Vale la seguente proposizione.

Proposizione A.2.1. Sia M varietà differenziale e $p \in M$. Sia $\{x^i\}$ una base di coordinate locali per $T_p M$ e $\{dx^i\}$ la base duale in coordinate locali per $T_p^* M$. Queste due basi inducono una base locale per le forme differenziali.

Ossia, sia $\omega \in \Omega^r(T_p M)$, (U, ϕ) una carta locale, allora esistono le funzioni continue a_{i_1, \dots, i_r} tali che in coordinate locali:

$$\phi^{-1*} \omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

La forma differenziale $\phi^{-1*} \omega$ su $\phi(U)$ è esprimibile come combinazione lineare dei dx^i , che costituiscono una base per $\Omega(\phi(U))$.

A.3.2 Differenziale esterno

Si definisce l'operatore che a una *r-forma* $\omega \in \Lambda^r(p)$ associa la $(r+1)$ -forma $d\omega \in \Lambda^{r+1}(p)$, definita in coordinate locali da

$$\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} a_{i_1, \dots, i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \rightarrow d\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r)} da_{i_1, \dots, i_r} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

ossia

$$d : \Lambda^r(p) \rightarrow \Lambda^{r+1}(p) \quad \omega \mapsto d\omega = \sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

Dall'antisimmetria del prodotto wedge discende immediatamente che $d^2\omega = d(d\omega) = 0$

$$\begin{aligned} d^2\omega &= d \left(\sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \right) = \sum_{(i_1, \dots, i_r, k)} d \left(\frac{\partial a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k} \right) \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_r, k, j)} \frac{\partial^2 a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k \partial x^j} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = 0 \end{aligned}$$

in quanto contrazione del termine simmetrico $\frac{\partial^2 a_{i_1, \dots, i_r}}{\partial x^k \partial x^j}$ e del termine antisimmetrico $dx^j \wedge dx^k$

Si definisce forma **esatta** una r -forma ω se esiste una $(r-1)$ -forma α che verifica $\omega = d\alpha$

Si definisce forma **chiusa** una r -forma ω tale che $d\omega = 0$.

Segue immediatamente che ogni forma esatta è chiusa. L'inverso è vero solo localmente.

Lemma A.2.1. (di Poincarè) *Sia $M \subset \mathbb{R}^n$ una palla aperta. Una r -forma ω chiusa definita su M è esatta.*

A.3.3 Coomologia di de Rham

Poichè ogni forma esatta è anche chiusa, ma non vale il viceversa, si vuole dare una classificazione delle forme chiuse.

Siano $W^k(M)$ lo spazio delle k -forme esatte su M e $Z^k(M)$ lo spazio delle forme chiuse, $Z^k(M) \subset W^k(M)$. Si definisce il k -esimo gruppo di coomologia di De Rham lo spazio quoziente

$$H^k(M) = W^k(M) / Z^k(M)$$

Gli elementi di $H^k(M)$ sono quindi forme che differiscono per una forma esatta

$$[\omega] = \{\alpha \in W^k(M) \text{ t.c. } \omega - \alpha = d\theta\}$$

I gruppi di coomologia di De Rham sono strettamente legati alla topologia della varietà. Si veda il teorema di De Rham.

A.3.4 Integrazione

L'integrazione di una forma su una varietà può essere definita tramite coordinate locali e ricondotta a integrazione su aperti di \mathbb{R}^n . Una trattazione rigorosa richiederebbe l'introduzione del concetto di *partizione dell'unità*, che esula dallo scopo di questo elaborato. Si vedano [1],[4] per una trattazione rigorosa.

In maniera intuitiva, sia (U, ϕ) una carta della varietà M , dove U intorno del punto $p \in M$, e $R = \phi(U)$ e $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ una n -forma. Sia $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integranda. Si definisce automaticamente la misura di integrazione $d\mu = dx^1 \dots dx^n$. e si può dare senso all'espressione in coordinate locali:

$$\int_U f\omega = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx^1 \dots dx^n$$

Si vuole poi ripetere questa operazione per tutte le carte di un atlante dato e "incollare" assieme i risultati in maniera che l'integrale sulla varietà sia uguale alla somma degli integrali sulle singole carte.

Si osserva che è possibile integrare solamente n -forme su varietà di dimensione n perchè le forme con $r > n$ sono tutte nulle, e gli spazi di dimensione $r < n$ hanno misura nulla in \mathbb{R}^n .

Teorema di Stokes

Teorema A.2.1. (di Stokes): *Sia M una n -varietà differenziale con bordo ∂M e si supponga assegnata un'orientazione. Sia ω una $(n-1)$ -forma su M . Allora*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{A.3}$$

Questo teorema porta come corollari e casi particolari i vari teoremi del rotore, divergenza, etc.

A.3.5 Derivata covariante

Si vuole estendere il concetto di derivata direzionale ai campi vettoriali definiti su una varietà differenziale M . Lo stesso processo può essere usato per definire la derivata di tensori e forme differenziali.

Sia X un campo vettoriale sulla varietà M (supponendo $M = \mathbb{R}^n$, per semplicità), $p \in M$ e $h \in M$ pensato come piccolo spostamento da p , in M . Volendo definire la derivata direzionale di un campo vettoriale nel modo usuale

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{X_{p+h} - X_p}{|h|}(f)$$

si riscontra subito un problema. I due vettori $X_{p+h} \in T_{p+h}(M)$ e $X_p \in T_p(M)$ appartengono a due spazi differenti e non possono essere confrontati.

Occorre un modo di trasportare il vettore X_{p+h} da $T_{p+h}(M)$ a $T_p(M)$ lasciandolo inalterato. Questo processo è chiamato **trasporto parallelo**. Purtroppo non esiste una maniera univoca per trasportare un vettore tangente in una varietà, quindi è necessario specificare come viene effettuato il trasporto parallelo. Di seguito alcuni esempi.

Spazio euclideo

Sia X un campo vettoriale su $M = \mathbb{R}^n$ e X_p il vettore tangente al punto $p \in \mathbb{R}^n$. Nel caso di uno spazio euclideo di solito si confrontano i vettori X_{p+h} e X_p semplicemente traslando (τ) il vettore X_{p+h} fino al punto p , mantenendolo parallelo, e valutando la differenza tra i due vettori ora tangenti a p , definendo il vettore spostamento $\Delta X = \tau \cdot X_{p+h} - X_p$. La derivata covariante allora è semplicemente la derivata direzionale in direzione di ΔX .

Curva nel piano

Sia ora la varietà differenziale M una curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si scelga una parametrizzazione della curva in coordinate polari $\sigma(t) = (r(t), \theta(t))$ e siano \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ i versori delle coordinate polari tangenti alla curva. In generale, a istanti t successivi, i vettori $(\mathbf{u}_r(t + \Delta t), \mathbf{u}_\theta(t + \Delta t))$ risulteranno ruotati rispetto a $(\mathbf{u}_r(t), \mathbf{u}_\theta(t))$, quindi la semplice traslazione parallela di un vettore $X_{\sigma(t+\Delta t)}$ tangente al punto $\sigma(t + \Delta t)$ non è adeguata. Occorre tener conto anche della rotazione dei versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , che è una proprietà intrinseca della curva legata alla sua curvatura.

Sfera

Sia $M = S^2$ la sfera bidimensionale. Una sfera è uno spazio non curvo. Il tipico esempio per spiegare la curvatura della sfera, legato anche al trasporto parallelo, è il seguente. Sia p un punto dell'equatore e X un vettore tangente a p . Si supponga di trasportare parallelamente X lungo l'equatore fino a un altro punto q dell'equatore, dopodiché lo si trasporti da q al polo nord lungo un meridiano e di nuovo dal polo nord a p lungo un altro meridiano. Si osserva che il vettore X' così trasportato non ritorna in se stesso, ma ha un'altra orientazione. Un risultato diverso si otterrebbe se fosse scelto un altro cammino sulla sfera. Questa è una proprietà intrinseca dovuta alla curvatura della sfera e di ciò bisogna tener conto nel definire la derivata covariante.

La derivata covariante dipende dalla geometria intrinseca della varietà su cui si vuole applicare l'operazione, e può essere usata (in senso opposto al ragionamento appena fatto) per definire curvatura e torsione di una varietà.

Si vedano le referenze [1],[4] per una definizione formale.

A.4 Gruppo e azione di gruppo

Definizione A.3.1. (Gruppo): Sia G un insieme e $*$ un'operazione binaria su G . G si definisce *gruppo* con l'operazione $*$ se valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall f, g, h \in G \rightarrow f * (g * h) = (f * g) * h$ associativa
2. $\exists e \in G$ t.c. $e * g = g * e = g$, $\forall g \in G$ esistenza elemento neutro
3. $\forall a \in G \exists a^{-1} \in G$ t.c. $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ esistenza dell'inverso

Se vale anche la proprietà commutativa, il gruppo è detto *abeliano*

4. $\forall g, h \in G \rightarrow g * h = h * g$ commutativa

Sovente si usa omettere il simbolo dell'operazione: $g * h = gh$

Definizione A.3.2. (Azione di gruppo): Sia G un gruppo e X un insieme non vuoto.

Si definisce l'azione destra di G su X una funzione $\phi : X \times G \rightarrow X$ che $(x, g) \mapsto \phi(x, g) = x \cdot g$ con le seguenti proprietà:

1. $x \cdot e = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X \rightarrow x \cdot (gh) = (x \cdot g) \cdot h$ compatibilità

Si definisce l'azione sinistra di G su X una funzione $\phi : G \times X \rightarrow X$ che $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = g \cdot x$ con le seguenti proprietà:

1. $e \cdot x = x$ identità (e denota l'elemento neutro di G)
2. $\forall g, h \in G, \forall x \in X \rightarrow (gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ compatibilità

La differenza tra azione destra e azione sinistra sta nell'ordine in cui gh agisce sull'insieme, evidente per gruppi non abeliani.

L'azione di G su X si dice:

- *transitiva*: $\forall x, y \in X \exists g \in G$ t.c. $g \cdot x = y$
- *libera*: Sia $g \in G$. Se $\exists x \in X$ t.c. $g \cdot x = x \Rightarrow g$ è l'identità

A.4.1 Gruppi e Algebre di Lie

Definizione A.3.3. (Gruppo di Lie): Un gruppo di Lie G è una varietà differenziale, dotata di di una struttura di gruppo in cui la moltiplicazione e l'inverso sono funzioni lisce. In altre parole, è liscia la mappa

$$(x, y) \mapsto x^{-1}y \quad \forall x, y \in G$$

La dimensione del gruppo equivale alla dimensione della varietà. Esempi di gruppi di Lie sono $GL(n, \mathbb{R})$ e $GL(n, \mathbb{C})$ i gruppi delle matrici quadrate $n \times n$ non singolari a coefficienti reali/compleksi.

Vale il seguente Teorema che non verrà qui dimostrato.

Teorema A.3.1. Ogni sottogruppo chiuso H di un gruppo di Lie G è un sottogruppo di Lie

Che garantisce che $O(n), SO(n), SL(n, \mathbb{R})$ sono sottogruppi di Lie di $GL(n, \mathbb{R})$.

Essendo un gruppo di Lie G contemporaneamente gruppo e varietà differenziale, si può definire l'azione di G (come gruppo) su se stesso (come varietà differenziale).

Definizione A.3.4. (Algebra di Lie): Un'algebra di Lie \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale (su un opportuno campo) dotato di un'operazione binaria $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ che rispetta le seguenti proprietà:

1. *Bilinearità* $[ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ e $[x, ay + bz] = a[x, y] + b[x, z]$
per tutti gli scalari a, b e $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$
2. *Identità di Jacobi* $\forall x, y, z \in \mathfrak{g} \quad [x, [y, z]] + [z, [x, y]] + [y, [z, x]] = 0$
3. *Anticommutatività* $[x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$
4. *Alternanza* $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g}$ (discende dalla precedente)

Ad ogni gruppo di Lie si può associare un'algebra di Lie.

Siano $a, g \in G$. Si definiscono la **traslazione destra** $R_a : G \rightarrow G$ e la **traslazione sinistra** $L_a : G \rightarrow G$

$$R_a(g) = ga \quad , \quad L_a(g) = ag$$

R_a e L_a sono diffeomorfismi di G in se stesso per costruzione e inducono quindi le mappe sugli spazi tangenti $L_{a*} : T_g(G) \rightarrow T_{ag}(G)$ e $R_{a*} : T_g(G) \rightarrow T_{ga}(G)$ (si veda A.3.7).

Dato un gruppo di Lie G esiste una speciale classe di campi vettoriali (si veda A.3.7) che sono invarianti sotto l'azione di gruppo⁵.

Sia X un campo vettoriale sul gruppo di Lie G . X si dice campo vettoriale **invariante a sinistra** se vale $L_{a*}X|_g = X|_{ag}$ (analogamente, invariante a destra).

Un vettore tangente all'identità e del gruppo di Lie $V \in T_e(G)$ definisce un unico campo vettoriale X_V su G invariante a sinistra tramite l'azione sinistra (analogamente a destra)

$$X_V|_g := L_{g*}V \quad , \quad g \in G$$

Poichè

$$X_V|_{ag} = (L_{ag})_*V = (L_a L_g)_*V = (L_a)_*(L_g)_*V = (L_a)_*X_V|_g$$

Viceversa, un campo vettoriale X_V invariante a sinistra (analogamente a destra) definisce un unico vettore V tangente all'identità in G

$$V := X_V|_e \in T_e(G)$$

Definizione A.3.5. Si indica con \mathfrak{g} l'insieme dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra (denotando con $\mathcal{X}(G)$ l'insieme dei campi vettoriali su G)

$$\mathfrak{g} := \{X_V \in \mathcal{X}(G) \text{ t.c. } L_{a*}X_V|_g = X_V|_{ag} \forall a \in G\}$$

La mappa che a un vettore tangente all'identità in G associa un campo vettoriale invariante a sinistra è un isomorfismo.

$$T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g}, \quad V \mapsto X_V$$

Si dimostra che \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale con l'operazione di traslazione a sinistra (?), e quindi $\mathfrak{g} \cong T_e(G)$. In particolare $\dim \mathfrak{g} = \dim G$.

Resta da definire un'operazione di parentesi di Lie affinché lo spazio dei campi invarianti a sinistra sia un'algebra di Lie.

Definizione A.3.6. Si definisce parentesi di Lie tra due campi $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ l'operazione $[,] : \mathcal{X}(G) \times \mathcal{X}(G) \rightarrow \mathcal{X}(G)$ definita da

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \quad \forall f \in C^\infty(G)$$

Si sottolinea che Xf così scritto è una funzione liscia definita su G da $Xf : G \rightarrow \mathbb{R}$ che agisce $p \mapsto X_p[f] \in \mathbb{R}$

Si verifica immediatamente che l'operazione così definita rispetta le proprietà definite in A.3.4⁶

Siano $X, Y \in \mathcal{X}(G)$ e si fissino due punti $g, ag \in G$ dove $ag = L_a g$. Applicando L_{a*} a $[X, Y]$ si ha

$$L_{a*}[X, Y]|_g = [L_{a*}X|_g, L_{a*}Y|_g] = [X, Y]|_{ag} \in \mathfrak{g}$$

quindi \mathfrak{g} è chiuso rispetto all'operazione $[,]$ così definita.

Definizione A.3.7. L'insieme \mathfrak{g} dei campi vettoriali su G invarianti a sinistra ($\mathcal{X}(G)$) dotato delle parentesi di lie A.3.6 si definisce **Algebra di Lie** associata al gruppo di Lie G .

⁵ Ciò non accade, ad esempio, con le varietà differenziali usuali, in cui non vi è modo di evidenziare una classe privilegiata di campi vettoriali

⁶ Intuitivamente, $[X, Y]$ è il commutatore dei campi X e Y , ed è noto che un commutatore rispetti suddette proprietà.

L'algebra di Lie associata a un gruppo viene indicata con lo stesso nome del gruppo, in carattere gotico minuscolo, ad esempio $SO(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$.

Scelta una base $\{T^a\}$ per l'algebra di Lie \mathfrak{g} (che è uno spazio vettoriale), $[T^a, T^b]$ è ancora un elemento dell'algebra di Lie, quindi scomponibile sulla base scelta. Si ha allora

$$[T^a, T^b] = c^{ab}_c T^c.$$

I coefficienti c^{ab}_c si dicono **costanti di struttura** e determinano completamente la struttura del gruppo di Lie G in quanto non dipendono dalla scelta della base (Teorema di Lie).

Gli elementi della base di \mathfrak{g} , $\{T^a\}$, vengono detti *generatori* del gruppo di Lie G .

Nel caso di un gruppo di Lie G di matrici reali, l'algebra di Lie può essere formulata in termini della funzione esponenziali di matrici, ovvero

$$\mathfrak{g} = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid \forall t \in \mathbb{R} \rightarrow \exp(tA) \in G\},$$

la parentesi di Lie è il commutatore di matrici e quindi le costanti di struttura sono determinate dalle regole di commutazione dei generatori $\{T^a\}$.

Definizione A.3.8. Sia G un gruppo di Lie e V uno spazio vettoriale su \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una **rappresentazione** del gruppo G è un omomorfismo tra gruppi

$$\rho : G \rightarrow GL$$

ossia una applicazione che a un gruppo associa un operatore lineare, che conservi l'operazione di gruppo.

$$\rho(g \cdot h) = \rho(g) \cdot \rho(h)$$

Analogamente si definisce la rappresentazione di un'algebra di Lie \mathfrak{g} .

Se la rappresentazione è anche iniettiva, si chiama *fedele*. Una rappresentazione **fondamentale** è la più piccola rappresentazione fedele del gruppo.

Definizione A.3.9. Sia $h \in G$ si definisce la *rappresentazione aggiunta* di G come l'omomorfismo $\text{ad}_h : G \rightarrow G$

$$\text{ad}_h : g \mapsto hgh^{-1}$$

E induce la mappa tra gli spazi tangenti $(\text{ad}_h)_* : T_g(G) \rightarrow T_{h^{-1}gh}(G)$. Poichè $\text{ad}_h e = e$ si può valutare la restrizione di $(\text{ad}_h)_*$ al solo $g = e$, ottenendo una mappa di $T_e(G)$ in se stesso

$$\text{Ad}_h : T_e(G) \rightarrow T_e(G) \quad \text{Ad}_h := (\text{ad}_h)_*|_{T_e(G)}$$

Definizione A.3.10. Identificando \mathfrak{g} con $T_e(G)$ tramite l'isomorfismo dell'azione sinistra (indicato qua con $\lambda : T_e(G) \rightarrow \mathfrak{g}$) e richiamando la definizione A.3.9, si definisce la **mappa aggiunta** del gruppo di Lie G .

$$\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad , \quad (h, X) \mapsto \lambda \circ \text{Ad}_h \circ \lambda^{-1}(X)$$

dove $h \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Applicando la definizione si trova che $\text{Ad}_a \text{Ad}_b = \text{Ad}_{ab}$ e $\text{Ad}_{a^{-1}} = \text{Ad}_a^{-1}$.

Esempio A.3.1. Rappresentazione fondamentale e aggiunta di $\mathfrak{su}(2)$

Un sottogruppo di Cartan di un gruppo di Lie è un sottogruppo abeliano massimale.

A.5 Fibrati

Si vuole iniziare con un esempio per rendere più chiaro l'argomento.

A.5.1 Fibrato Tangente

Sia M una varietà differenziale di dimensione n . Si definisce il *fibrato tangente* su M (detta *spazio base*) l'unione di tutti gli spazi tangenti alla varietà, indicato con TM .

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

Si consideri una carta (U, ϕ) , U intorno di $p \in M$ e $x^i = \phi^i(p)$ coordinate. Gli elementi dello spazio $TU = \bigcup_{p \in U} T_p(M)$ sono individuati da un punto $p \in U$ e un vettore tangente $V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \in T_p(M)$. Per costruzione U è omeomorfo all'aperto $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ e $T_p(M)$ è omeomorfo a \mathbb{R}^n stesso tramite l'identificazione tra derivata direzionale e vettore (si veda la sezione A.1).

Allora ogni punto $P \in TU$ può essere identificato con il punto $(x^1, \dots, x^n, V^1, \dots, V^n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ in maniera univoca. TU è quindi una varietà differenziale di dimensione $2n$.

Inoltre TU è identificato con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ed è esattamente decomposto nel prodotto diretto $U \times \mathbb{R}^n$, cioè ogni $P \in TU$ può essere scritto come (p, V) , $p \in U, V \in T_p(M)$.

Si può quindi definire la *proiezione* $\pi : TU \rightarrow U$, $P = (p, V) \mapsto p$. Lo spazio $T_p(M) = \pi^{-1}(p)$ viene detto *fibra* in p .

Se $M = \mathbb{R}^n$ si ha che $TM = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e si dice che il fibrato ha struttura *banale*. In generale però si ha una struttura non banale ed occorre tener conto di tutte le carte possibili.

Siano (U, ϕ) e (V, ψ) due carte tali che $U \cap V \neq \emptyset$, $p \in U \cap V$. Siano $x^i = \phi^i(p)$ e $y^j = \psi^j(p)$, e sia $V \in T_p(M)$. V in coordinate è espresso come

$$V = \sum_i V^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j V'^j \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p = \sum_{j,k} V^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

dove $V'^j = \sum_k \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \Big|_p V^k$. L'applicazione $\psi \circ \phi$ deve essere invertibile, quindi la matrice Jacobiana

deve essere non singolare, cioè $J_i^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \in GL(n, \mathbb{R})$. Il gruppo $GL(n, \mathbb{R})$ viene chiamato *gruppo di struttura* di TM . Le coordinate delle fibre, in seguito a un cambio di coordinate, risultano ruotate per un elemento del gruppo di struttura.

Infine si definisce *sezione* di TM una mappa liscia $s : M \rightarrow TM$ tale che $\pi \circ s = id_M$, ossia che a $p \in M$ associa un elemento di TM (p, V) , $V \in T_p(M)$. Se s è definita solo in un intorno U viene detta *sezione locale*.

Avendo definito una struttura differenziale su TM , un campo vettoriale su M può essere visto come una mappa liscia $M \rightarrow TM$ che a $p \in M$ associa $V_p \in T_p(M)$

A.5.2 Fibrato

Siano M (detta *spazio base*) e F (detta *fibra*) varietà differenziali (si pensi all'analogia con il fibrato tangente in cui $F = T_p(M)$) e sia $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M .

Intuitivamente, un *fibrato* E su M con fibra F è una varietà differenziale (detta anche *spazio totale*) che è localmente un prodotto diretto di M e F , ossia il fibrato E è descritto topologicamente in ogni intorno U_i dalla varietà prodotto $U_i \times F$.

Si definisce una funzione $\pi : E \rightarrow M$ continua e suriettiva (la *proiezione di fibra*) che mappa ogni fibra $F_p = \{(p, f) | f \in F\} \subset E$ nel punto $p \in M$, e che rispetti la condizione A.5.1.

Si definisce un'operazione duale alla proiezione, la *sezione* del fibrato come una mappa tra lo spazio base M ed il fibrato E

$$s : M \rightarrow E \quad \text{t.c.} \quad \pi \circ s(p) = p \quad \forall p \in M \quad (\text{A.4})$$

Se la sezione è definita solo in un intorno U di un punto p è detta *sezione locale*.

A.5.1. Condizione di non trivialità: Per ogni punto $p \in M$ esiste un intorno $U_i \in \mathcal{U}$ di p e un isomorfismo $\phi_i : U_i \times F \rightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset E$ tale che per ogni $(p, f) \in U_i \times F$ si ha $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$

Occorre specificare inoltre un insieme di *funzioni di transizione* $\{\Phi_{ij}\}$ che descrivono come si trasformano le coordinate delle fibre nella regione di sovrapposizione tra due intorni $U_i \cap U_j$. Per ogni $x \in U_i \cap U_j$ fissato si considera $\phi_{i,x}$ come una mappa di F in F_x . Allora si definiscono le mappe

$$\Phi_{ij} : F \rightarrow F \quad , \quad \Phi_{ij} = \phi_i^{-1} \circ \phi_j \quad (\text{A.5})$$

che rispettano le condizioni:

$$\Phi_{ii} = \text{id} \quad , \quad \Phi_{ij} \circ \Phi_{jk} = \Phi_{ik} \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k \quad (\text{A.6})$$

Grazie a queste proprietà, le funzioni di transizione formano un gruppo G detto *gruppo di struttura* del fibrato, che agisce su F a sinistra.

Sebbene la topologia locale del fibrato sia banale, le funzioni di transizione possono essere fortemente influenzate dalla topologia globale a causa di torsioni relative tra fibre adiacenti (si veda l'esempio del nastro di Möbius). Un fibrato è completamente determinato dalle sue funzioni di transizione.

Definizione A.6.1. Un fibrato E con fibra F sullo spazio base M è uno spazio topologico E dotato di una proiezione $\pi : E \rightarrow M$ che soddisfa la condizione di non trivialità A.5.1.

Esempio A.6.1. (Cilindro): Il cilindro è il primo esempio di fibrato banale, ossia la cui topologia globale è quella prodotto diretto $E = M \times F$. Sia lo spazio base $M = S^1$ il cerchio unitario, parametrizzato dall'angolo $\theta \in [0, 2\pi]$ e sia F il segmento parametrizzato da $t \in [-1, 1]$. Sia $\mathcal{U} = U_+ \cup U_-$ un ricoprimento formato dai due intorni semicirculari:

$$U_+ = \{\theta : \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} \quad , \quad U_- = \{\theta : \pi - \epsilon < \theta < 2\pi + \epsilon = \epsilon\}$$

Il fibrato consiste in

$$U_+ \times F, (\theta_+, t_+) \quad \text{e} \quad U_- \times F, (\theta_-, t_-)$$

e le funzioni di transizione che legano t_+ e t_- sono definite in $U_+ \cap U_- = A \cup B$

$$A = \{-\epsilon < \theta < \epsilon\} \quad , \quad B = \{\pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}$$

Le funzione di transizione sono:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = t_- \text{ in } B \end{cases}$$

Si ha quindi un fibrato banale uguale al cilindro $E = S^1 \times [-1, 1]$.

Esempio A.6.2. (Nastro di Möbius): Con la stessa notazione dell'esempio precedente, si scelgano le funzioni di transizione:

$$\begin{cases} t_+ = t_- \text{ in } A \\ t_+ = -t_- \text{ in } B \end{cases}$$

L'identificazione di t con $-t$ nella regione B torce il fibrato e gli dà la topologia non banale del Nastro di Möbius.

Un **fibrato vettore** è un fibrato la cui fibra è uno spazio vettoriale.

Il **fibrato cotangente** è definito analogamente al fibrato tangente. $TM^* := \bigcup_{p \in M} T_p^*(M)$

Siano E, E' fibrati con spazio base M, M' e fibra F, F' rispettivamente

Un **fibrato prodotto** $E \times E'$ è un fibrato con spazio base $M \times M'$ e fibra $F \oplus F'$. Gli elementi della fibra $F \oplus F'$ sono vettori del tipo $\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}$, dove $f \in F$ e $f' \in F'$.

Il **fibrato prodotto tensore** $E \otimes E'$ è un fibrato vettore in cui a ogni punto $p \in M$ è assegnato il prodotto di fibre $F_p \otimes F'_p$. Date due basi $\{e_\alpha\}$ ed $\{f_\beta\}$ di F e F' , la fibra prodotto è lo spazio generato da $\{e_\alpha \otimes f_\beta\}$.

Definizione A.6.2. (Forma a valori in un'algebra di Lie): Una k -forma differenziale su una varietà M a valori in un'algebra di Lie è una *sezione* del fibrato $(\mathfrak{g} \times M) \otimes \Lambda^k(T^*M)$

A.5.3 Fibrato Principale e Connessione

Definizione A.6.3. (Fibrato principale): Un *fibrato principale* è un fibrato P sullo spazio base M la cui fibra F è un gruppo di Lie e coincide con il gruppo di struttura G^7 .

Si vuole ora generalizzare il concetto di derivata covariante (e di trasporto parallelo) estendendolo alla struttura del fibrato principale.

L'idea alla base dell'approccio è la seguente. Per valutare la derivata direzionale di un campo su una varietà M si vuole confrontare i valori del campo in due punti p e p' di M , connessi da un cammino. Si vuole "sollevare" i punti dallo spazio base M in due punti u e u' nel fibrato P e confrontare i due spazi tangenti $T_u(P)$ e $T_{u'}(P)$.

Il fibrato è definito localmente come prodotto $U \times G$ (dove U è un intorno di p in M), quindi un vettore tangente $X_u \in T_u$ può essere scomposto in due componenti: una lungo la base (componente orizzontale) e una lungo la fibra (componente verticale).

Il trasporto verticale è univocamente determinato dall'azione del gruppo G , mentre il trasporto orizzontale non è unico (come non è unico il cammino che unisce i due punti p e p' nello spazio base).

È solamente quest'ultimo, però, di interesse in quanto mappa un cammino tra i due punti u e u' in un cammino attraverso le fibre. Il concetto alla base è quindi quello di scaricare il problema sul trasporto orizzontale attraverso le fibre del campo vettoriale di cui si vuole calcolare la derivata.

Sia M lo spazio base di dimensione n , G il gruppo di struttura e fibra e P il fibrato principale. Sia (U, ϕ) una carta con coordinate $x_\mu = \phi_\mu(p)$, $p \in M$.

Sia u un punto del fibrato principale $P(M, G)$, sia $p = \pi(u) \in M$ e G_p la fibra in p

Si definisce **sottospazio verticale** $V_u(P)$ un sottospazio di $T_u(P)$ tangente alla fibra G_p nel punto u . Si definisce **sottospazio orizzontale** $H_u(P)$ il complemento di $V_u(P)$ in $T_u(P)$ ed è univocamente determinato.

Si vuole costruire un isomorfismo tra l'algebra di Lie \mathfrak{g} e il sottospazio verticale $V_u P$.

Sia $A \in \mathfrak{g}$. Si definisce il vettore $A_u^\# \in T_u(P)$ tramite la sua azione su una generica funzione $f \in C^\infty(P)$

$$(A^\#)_u[f] := \left. \frac{d}{dt} f(u \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Analogamente a quanto visto per i gruppi di matrici, se A è nell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \exp(t_0 A)$, per t_0 fissato, è un elemento del gruppo di Lie G . Al variare di t , $g_t = \exp(tA)$ è una curva in G , quindi $u = \exp(tA) = u_{g_t}$ è una curva lungo la fibra in $p = \pi(u)$ in quanto trasla u per azione destra di G . La funzione f è quindi ristretta alla curva u_{g_t} .

Allora l'espressione a destra indica il vettore (d/dt) tangente alla curva (si pensi al vettore velocità istantanea) u_{g_t} all'istante $t = 0$, cioè nel punto $u \exp(0A) = u e = u$.

Il significato dell'espressione a destra è esattamente definire un vettore tangente alla fibra passante in u , nel punto u , a partire da un elemento dell'algebra A , appunto $A_u^\# \in V_u(P)$.

Definendo il vettore $A_u^\#$ per ogni punto $u \in P$ si costruisce il campo vettoriale $A^\#$, detto il *campo vettoriale fondamentale* generato dall'algebra Lie.

È immediatamente definito l'isomorfismo $\# : \mathfrak{g} \rightarrow VP$ da $A \mapsto A^\#$.

Si definisce ora una 1-forma sul fibrato, che prende il ruolo del trasporto orizzontale.

Definizione A.6.4. Una **1-forma di connessione** $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P^8$ è una proiezione dello spazio $T_u(P)$ su $V_u(P)$, che è isomorfo all'algebra di Lie \mathfrak{g} , tale che

$$1. \omega(A^\#) = A \quad A^\# \in T_u(P), A \in \mathfrak{g}$$

⁷Si veda [4], [6], [2] per una definizione più completa

⁸ Cfr. definizione A.6.2

$$2. R_g^* \omega = g^{-1} \omega_u(X) g$$

La 1-forma di connessione ω così definita prende il nome di *connessione di Ehresmann*.

La prima proprietà garantisce che ogni vettore verticale venga mandato nell'opportuno elemento dell'algebra, mentre la seconda garantisce il corretto trasporto dello spazio orizzontale lungo una fibra. Lo spazio orizzontale è definito come il kernel di ω .

$$H_u(P) := \{X \in T_u(P) \mid \omega(X) = 0\}$$

Si osserva che la 1-forma di connessione è definita *globalmente* su P , quindi assegnare una forma di connessione fornisce un metodo per il trasporto parallelo, unico per tutto il fibrato P .

Si vuole ora trasportare la forma di connessione ω , globale, dagli spazi tangenti a P agli spazi tangenti alla varietà M .

Sia $\{U_i\}$ un ricoprimento aperto di M e siano s_i sezioni locali definite su ciascun U_i . Si può allora trasportare ω definendo su U_i la forma

$$A_i := s_i^* \omega \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i)$$

Viceversa, sia A_i una 1-forma a valori in una algebra di Lie assegnata su U_i . Si può sempre costruire una 1-forma di connessione ω che trasportata tramite s_i^* sia esattamente A_i .

Teorema A.6.1. *Data una 1-forma A_i a valori in \mathfrak{g} su U_i e una sezione locale $s_i : U_i \rightarrow \pi^{-1}(U_i)$, esiste una 1-forma di connessione ω tale che $A_i = s_i^* \omega$, che ristretta a $\pi^{-1}(U_i)$ assume la forma*

$$\omega|_{\pi^{-1}(U_i)} = \omega_i := g_i^{-1} \pi^* A_i g_i + g_i^{-1} d_P g_i$$

dove d_P è la derivata esterna su P e g_i data da $\phi_i^{-1}(u) = (p, g_i)$ per $u = s_i(p)g_i$.

Si veda [4] per la dimostrazione.

Si sottolinea l'importanza di quest'ultimo teorema in quanto la conoscenza di un'unica forma A_i su un aperto U_i di M , unitamente alla condizione di unicità della 1-forma di connessione ω , vincola tutte le altre forme definite sugli aperti $U_{j \neq i}$ del ricoprimento. La condizione da rispettare è la seguente⁹.

Siano U_i e U_j due aperti del ricoprimento aperto di M a intersezione non vuota. Affinchè la forma di connessione ω sia definita **univocamente** su tutto P , si deve avere sull'intersezione $U_i \cap U_j$ che $\omega_i = \omega_j$.

Affinchè ciò sia verificato, le forme locali ω_i, ω_j devono verificare la seguente condizione di compatibilità. Siano Φ_{ij} le funzioni di transizione definite in A.5

$$s_j^* \omega(X) = \Phi_{ij}^{-1} \omega(s_{i*} X) \Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{-1} d\Phi_{ij}(X)$$

Che deve essere valida per ogni campo $X \in T_p(M)$. Quindi si traduce nella condizione per le forme A_i :

$$A_j = \Phi_{ij}^{-1} A_i \Phi_{ij} + \Phi_{ij}^{-1} d\Phi_{ij} \quad (\text{A.7})$$

Se, al contrario, sono dati $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di M , $\{s_i\}$ sezioni, e $\{A_i\}$ forme che rispettano A.7, si può ricostruire la forma di connessione ω .

Si sottolinea che se il fibrato P non è banale, non è possibile definire in maniera univoca una sezione globale, quindi la forma A_i esiste solo localmente. La forza di questa costruzione è che invece la forma di connessione ω è definita globalmente su P .

Si vuole ora definire la derivata covariante di una 1-forma di connessione ω . In maniera intuitiva, la si vuole definire tale che si trasformi allo stesso modo di ω sotto l'azione del gruppo G .

Se la 1-forma ω trasforma come un vettore $\omega \mapsto g\omega$ per $g \in G$, allora anche la derivata covariante trasforma $D\omega \mapsto gD\omega$. Si definisce allora:

$$D\omega := d\omega + A \wedge \omega$$

⁹ Si veda [4] per la derivazione completa.

dove A è la 1-forma definita in precedenza, che ripetta la legge di trasformazione A.7. In maniera analoga si può definire la derivata covariante di 1-forme di connessione che trasformano come tensori o sono invarianti.

Definizione A.7.1. Sia ω la 1-forma di connessione di un fibrato principale P . Si definisce la 2-forma di **curvatura** Ω come la derivata covariante di ω

$$\Omega := D\omega$$

Poichè A_i è il pullback di ω su un aperto di $U_i \subset M$ tramite una sezione s_i , si definisce una 2-forma su U_i tramite

$$F_i := s_i^* \Omega \quad (\text{A.8})$$

che rispetta la condizione di compatibilità sull'intersezione di due aperti $U_i \cap U_j$

$$F_j = \Phi_{ij}^{-1} F_i \Phi_{ij} \quad (\text{A.9})$$

La 2-forma di curvatura fornisce un metodo di classificazione topologica dei fibrati.

A.5.4 Classi caratteristiche

Riprendere la notazione della sezione precedente

Si è visto (esempi A.6.1 e A.6.2) che a uno stesso spazio base e a una stessa fibra possono corrispondere diversi fibrati. Si vuole trovare un modo per classificare le diverse tipologie di fibrati principali possibili dato uno spazio base M e un gruppo di struttura G .

Si consideri il seguente esempio. Sia $H^r(M)$ il r-gruppo di Coomologia di de Rham di una varietà M , compatta e senza bordo $\partial M = 0$. Sia $[\omega] \in H^r(M)$.

Un modo per classificare le classi di equivalenza si ottiene integrando una forma nella stessa classe $[\omega]$. Si ricorda che esiste quindi una forma α tale che $\omega' = \omega + d\alpha$. Per il teorema di Stokes:

$$\int_M \omega' = \int_M (\omega + d\alpha) = \int_M \omega + \int_{\partial M} \alpha = \int_M \omega$$

I due integrali si equivalgono perchè la varietà è senza bordo. Allora questo integrale può essere usato come caratteristica, per classificare le classi di equivalenza.

In analogia con l'esempio appena citato, si vuole definire una caratteristica analoga per la forma di curvatura Ω . Una classe di equivalenza è formata da tutte le 1-forme di connessione a cui corrisponde la stessa 2-forma di curvatura.

Si introduce ora il *polinomio caratteristico* della forma Ω una quantità invariante della algebra di Lie \mathfrak{g} nella fibra

$$\det(1 + \Omega) = 1 + \text{tr}\Omega + \frac{1}{2}[(\text{tr}\Omega)^2 - \text{tr}(\Omega^2)] + \dots$$

che permette di definire una forma sullo spazio base M , detta *forma di Chern*

$$\det \left(1 + \frac{\lambda}{2\pi} F \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k c_k$$

dove $1/2\pi$ è solo un fattore di normalizzazione. Si ricorda che F è il pullback di Ω . I coefficienti di espansione c_k sono forme chiuse invarianti su M , la cui espressione esplicita per $k = 1, 2$ è:

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \text{tr} F, \quad c_2 = \frac{1}{8\pi^2} [\text{tr} F \wedge \text{tr} F - \text{tr}(F \wedge F)] \quad (\text{A.10})$$

I fattori del tipo $1/2\pi$ fanno sì che sia normalizzato l'integrale sulla varietà compatta senza bordo M

$$\int_M c_k = n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{A.11})$$

Questi integrali sono detti *classi caratteristiche di Chern*.

Esempio A.11.1. Si consideri un fibrato principale con $M = S^2$ e $G = U(1)$. Si hanno i due coefficienti $c_0 = 1$ (fibrato banale) e $c_1 = F/2\pi$. Di quest'ultimo si terrà conto in [A.3.7](#).

Esempio A.11.2. Si consideri un fibrato principale su $M = S^4$ con gruppo di struttura $G = SU(2)$ la forma di curvatura è a valori in $\mathfrak{su}(2)$ e può essere scritta localmente come $F = 1/2\sigma_a F^a$ dove σ_a sono le matrici di Pauli [B.3](#) con $a = 1, 2, 3$.

Si ha quindi $\text{tr}F = 0$ e i coefficienti $k = 0, 1, 2$ sono

$$c_0 = 1, \quad c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{32\pi^2}[F^a \wedge F^a] \quad (\text{A.12})$$

Il fibrato caratterizzato dalla seconda classe di Chern è noto come *fibrato di istantone*.

Appendice B

Notazione

Coordinate polari:

$\theta \in [0, \pi]$ Angolo polare
 $\varphi \in [0, 2\pi]$ Angolo azimutale
 $r \in (0, \infty)$ Raggio

Versori:

$\mathbf{u}_x = (1, 0, 0)$ Versore asse x	$\mathbf{u}_\theta = \frac{1}{r\sqrt{r^2 - z^2}}(xz, yz, -z^2 - r^2)$	Versore angolo polare
$\mathbf{u}_y = (0, 1, 0)$ Versore asse y	$\mathbf{u}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{r^2 - z^2}}(-x, y, 0)$	Versore angolo azimutale
$\mathbf{u}_z = (0, 0, 1)$ Versore asse z	$\mathbf{u}_r = \frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{\mathbf{r}}{r}$	Versore radiale

$$\begin{cases} \mathbf{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y + \cos \theta \mathbf{u}_z \\ \mathbf{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{u}_y - \sin \theta \mathbf{u}_z \\ \mathbf{u}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{u}_x + \cos \varphi \mathbf{u}_y \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Gruppi di matrici

- $GL(n, \mathbb{F}) = \{M \in Mat(n, \mathbb{F}) \text{ t.c. } \det M \neq 0\}$
Gruppo Lineare Generale: Matrici $n \times n$ sul campo \mathbb{F} , invertibili.
- $SL(n, \mathbb{F}) = \{M \in GL(n, \mathbb{F}) \text{ t.c. } \det M = 1\}$
Gruppo Lineare Speciale: Matrici a determinante 1.
- $O(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \text{ t.c. } M^T M = M M^T = 1\}$
Gruppo Ortogonale: Matrici ortogonali.
- $SO(n) = \{M \in O(n) \text{ t.c. } \det M = 1\}$
Gruppo Ortogonale Speciale: Matrici ortogonali a determinante 1.
- $U(n) = \{M \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ t.c. } M^\dagger M = M M^\dagger = 1\}$
Gruppo Unitario: Matrici unitarie.
- $SU(n) = \{M \in U(n) \text{ t.c. } \det M = 1\}$
Gruppo Unitario Speciale: Matrici unitarie a determinante 1.

Le matrici di $SU(2)$ hanno la forma

$$U = \begin{pmatrix} z^* & w^* \\ -w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\alpha} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi+\alpha)} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi+\alpha)} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Dove $z, w \in \mathbb{C}$ tali che $zz^* + ww^* = 1$ (affinchè $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$), θ, φ sono gli angoli delle coordinate polari e α è il parametro ciclico del gruppo $U(1)$, cioè $g \in U(1) \rightarrow g = e^{i\alpha}$

Matrici di Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

(pseudo)Tensore di Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1 & \text{se } i, j, k \text{ permutazione pari di } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{se } i, j, k \text{ permutazione dispari di } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Equazioni di Maxwell nel vuoto

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\nu \tilde{F}^{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.4})$$

Bibliografia

- [1] William M. Boothby. *An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, 1975.
- [2] T. Eguchi, P.B Gilkey, A.J. Hanson. *Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry*. North Holland Publishing Company, 1980.
- [3] William Fulton. *Algebraic Topology, a first course*. Springer, 1995.
- [4] Mikio Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics publishing, 2003.
- [5] Edoardo Sernesi. *Geometria 2*. Bollati Boringhieri, 1994.
- [6] Yakov M. Shnir. *Magnetic Monopoles*. Springer, 2005.
- [7] T.T. Wu, C.N. Yang. *Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields*. Phys. Rev. D 12, 3845, (1975).