

# Aspetti classici e quantistici dei monopoli magnetici in teorie di gauge

In natura non sono mai stati osservati i monopoli magnetici. La ragione non è però spiegata dall'elettrodinamica classica, in quanto le equazioni di Maxwell si limitano a constatarne la non-esistenza. Le leggi dell'elettrodinamica sono basate su osservazioni sperimentali, non teoremi derivati da assiomi primi. Non si esclude quindi a priori l'esistenza dei monopoli magnetici, ma non se ne è trovata, ad oggi, conferma sperimentale.

Nonostante lo scarso successo dell'ipotesi del monopolio magnetico a livello sperimentale, nel corso del secolo scorso non è cessato l'interesse nel formularne una teoria completa e consistente. Una delle ragioni principali per cui tale ricerca viene portata avanti, oltre alle numerose implicazioni a livello teorico e sperimentale, è la mancata comprensione della motivazione per cui non siano mai stati osservati monopoli magnetici in natura.

Un primo approccio per introdurre una teoria del monopolio magnetico, volto solamente a evidenziarne le problematiche, è la costruzione di un elementare modello classico: assumendo l'esistenza di una carica magnetica  $g$ , si scrivono le equazioni del moto di un elettrone immerso in un campo magnetico di monopolio, analogo al campo elettrico coulombiano prodotto da una carica elettrica isolata (monopolio elettrico). Occorre quindi modificare le equazioni di Maxwell, eguagliando la divergenza del campo magnetico  $\mathbf{B}$  alla densità di carica magnetica locale  $\rho_g$ . Emerge però subito una contraddizione: se si vuole definire un potenziale elettromagnetico  $\mathbf{A}$ , il cui rotore è il campo magnetico  $\mathbf{B}$ , si ha incompatibilità tra le due condizioni  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g$  e  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Il motivo è l'impossibilità di definire ovunque un potenziale vettore regolare: esiste sempre un semiasse in cui il potenziale è singolare.

Per costruire una teoria non contraddittoria bisogna rinunciare alla definizione di un potenziale globale, in favore di una descrizione con più potenziali definiti localmente e che si raccordino in maniera "corretta" nelle regioni in cui si intersecano.

Il formalismo più adatto a questa descrizione è quello delle teorie di gauge, in cui l'accento è posto sul comportamento locale dei campi.

Ricordando che l'elettrodinamica classica è una teoria di gauge con simmetria di gruppo  $U(1)$ , si inizia tentando di definire, su due aperti, due potenziali gauge legati nella regione di intersezione da una trasformazione di gauge di tipo  $U(1)$ . Si arriva dunque a costruire il campo di monopolio con l'andamento corretto (già definito nell'esempio "alla Coulomb"), risolvendo la contraddizione evidenziata in precedenza. e a dare un significato topologico alla carica magnetica che viene associata alle classi di Chern della varietà in esame. Osservazioni sulla non-polidromia della trasformazione dei campi permettono di ottenere una relazione tra le cariche elettrica e magnetica - relazione che costituisce uno dei principali interessi nel costruire una teoria del monopolio magnetico.

Nell'estendere il modello a una teoria di campo quantistica, il modello abeliano presenta tuttavia alcuni punti critici.

Si vuole allora generalizzare la teoria a un gruppo di gauge non abeliano di cui  $U(1)$  è sottogruppo, la quale venga ridotta alla precedente teoria abeliana in condizioni "normali", ad esempio a basse energie. Questo processo di rottura spontanea della simmetria comprende tutte le previsioni del modello abeliano ed ha il vantaggio di risolverne le criticità. Teorie di campo che generalizzano l'elettrodinamica in questo modo prendono il nome di teorie di *Yang-Mills*.

Il caso più semplice è quello in cui viene preso come gruppo di gauge il gruppo  $SU(2)$ , che ha appunto  $U(1)$  come sottogruppo. Vengono presi in esame due modelli di monopolio magnetico. Il primo, pro-

posto da Wu e Yang nel 1969, risolve i problemi del modello abeliano, ma deficiata nella definizione delle energie di configurazione dei campi, che risulta divergente. Il secondo modello in esame è un caso particolare del modello proposto da Georgi e Glashow nel 1974, in cui si accoppia il potenziale di gauge a un campo, il campo di Higgs. Si manifesta immediatamente il processo di rottura di simmetria da  $SU(2)$  a  $U(1)$  e viene risolto il problema delle configurazioni a energia divergente. Si arriva inoltre a dare un'ulteriore definizione della carica magnetica, associandola alla conservazione del tensore elettromagnetico, discendente quindi dalle equazioni di Maxwell stesse.

Le difficoltà di un modello non abeliano sono certamente anche di natura computazionale. Si danno allora alcuni cenni, in conclusione, al modello di soluzione proposto da 't Hooft e Polyakov, che è un punto di partenza per le soluzioni numeriche del modello di Georgi-Glashow.