Aspetti classici e quantistici dei monopoli magnetici in teorie di gauge

Candidato: Bondì Danilo
Relatore: Prof. Alberto Zaffaroni

24 settembre 2018

Monopolo di Dirac

Campo alla Coulomb, con carica magnetica g:

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = \frac{g}{r^3}\mathbf{r} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g$$

Devono valere contemporaneamente

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g \\ \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \int \nabla \cdot \mathbf{B} \, \mathrm{d}^3x = 4\pi g \\ \int \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) \, \mathrm{d}^3x = 0 \end{cases}$$

Contraddizione.

Potenziale di Dirac

Potenziale Vettore è **singolare** sull'asse z negativo.

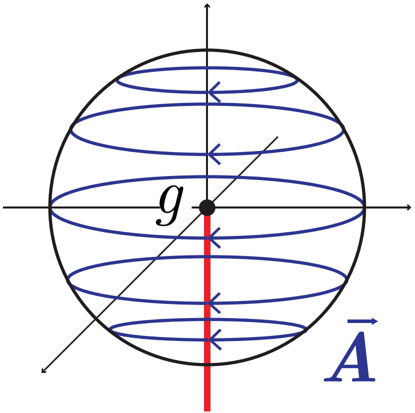
$$\mathbf{A} = -\frac{g}{r}\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\mathbf{u}}_\varphi$$

Regolarizzazione: ... si ottiene

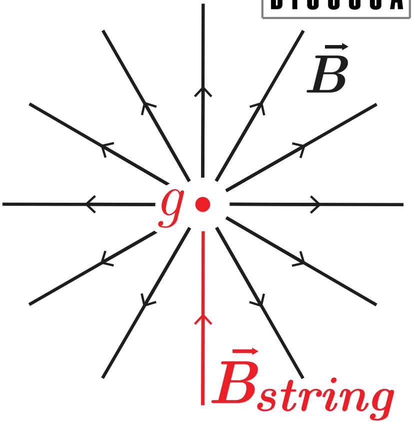
$$\mathbf{B}_{reg} = \mathbf{B} + \mathbf{B}_{string} = \frac{g}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - 4\pi g\delta(x)\delta(y)\Theta(z)\hat{\mathbf{u}}_z$$

$$\Rightarrow \int \nabla \cdot \mathbf{B}_{reg}\, \mathrm{d}^3x = 4\pi g - 4\pi g = 0$$

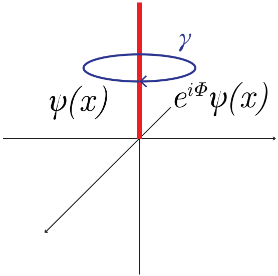
Oss: Solenoide infinitamente lungo e infinitamente sottile.



Potenziale vettore di Dirac



Campo di monopolo regolarizzato



Quantizzazione carica

Studio moto di elettrone e con funzione d'onda ψ, in campo di monopolo g approssimato a solenoide

- Effetto Aharonov-Bohm (segue).

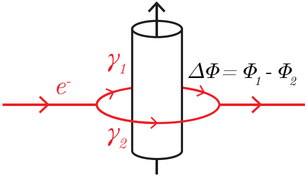
ψ prende una fase attorno a cammino γ intorno alla stringa:

$$\psi \mapsto \exp\left(-ie\oint_\gamma \mathbf{A}\cdot\, \mathrm{d}\mathbf{r}\right)\psi = \exp(\,ieg4\pi\,)\psi$$

Stringa **non fisica** $\Rightarrow$ fase **non osservabile** (banale), ossia:

$$\boxed{eg = \frac{n}{2} \quad , n \in \mathbb{Z}}$$

Condizione di quantizzazione carica



Effetto Aharonov-Bohm

Elettrone libero ψ_0, Hamiltoniana $H_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$.

In una regione con $\mathbf{A} \neq 0$ e $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ (es: fuori solenoide) la Hamiltoniana diventa $H = (\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}})^2$. I nuovi autostati ψ differiscono solo per un fattore di fase

$$\psi = e^{i\Phi}\psi_0$$

dove $\Phi = q\int_\gamma \mathbf{A} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{r}$ lungo un arbitrario cammino γ.

Ad esempio solenoide. Cammini diversi hanno differenze di fase diverse. Si riescono a fare esperimenti di interferenza che lo dimostrano

Monopoli in teorie di gauge

- Monopolo di Wu-Yang

Abbandono del potenziale definito **globalmente**.
Si definiscono due potenziali regolari su due carte **locali**:

$$\mathbf{A}^{\pm} = \frac{g}{r}\frac{(-1 \pm \cos\theta)}{\sin\theta}\hat{\mathbf{u}}_{\varphi}$$

Trasformazione di gauge nell'intersezione dei domini. ($U \in G$, gruppo di gauge)

$$\mathbf{A}^{+} = U\mathbf{A}^{-}U^{-1} + \frac{i}{e}U^{-1}\,\mathrm{d}U$$

Il campo $\mathbf{B}$ generato è lo stesso.

Monopolo abeliano

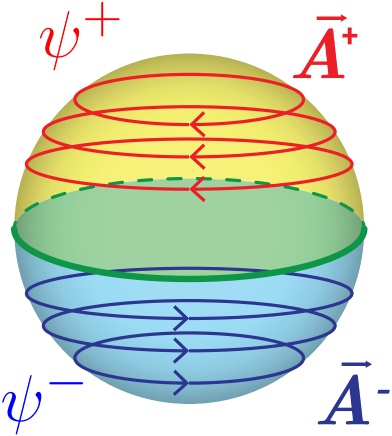
$G = U(1) \Rightarrow U = e^{2ieg\varphi}.$

La funzione d'onda nella regione di intersezione trasforma:

$$\psi^+ = e^{2ige\varphi}\psi^-$$

deve essere single-valued, allora

$$\boxed{ge = \frac{n}{2}}$$



Teorie di Yang-Mills

Elettrodinamica è teoria di gauge di gruppo $U(1)$.

$$U(1) \hookrightarrow G \quad \textbf{teorie di Yang} - \textbf{Mills}$$

Prendiamo il caso più semplice $G = SU(2)$.

Modello di Georgi-Glashow

Accoppiamento del campo di gauge A_μ con 3 campi scalari ϕ^a, $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \mathrm{Tr}D^\mu\phi D_\mu\phi - \frac{\lambda}{4}(|\phi|^2 - v^2)^2$$

Soluzioni ϕ numeriche equazione del moto: 't Hooft-Polyakov

Notazione

- *Recall*: $SU(2) \to \mathfrak{su}(2)$ ha dimensione 3.

$\Rightarrow$ 3 generatori $\Rightarrow$ 3 potenziali di gauge A_μ^a $(a = 1, 2, 3)$

$$A_\mu := (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3)$$

dove

$$A_\mu^1 = 0, \quad A_\mu^2 = 0, \quad A_\mu^3 = -g(1 + \cos\theta)\partial_\mu\varphi$$

- Derivata covariante: $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$
- Tensore elettromagnetico:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu} + ie[A_\mu, A_\nu]$$

$\rightarrow$ **non abeliano**

Carica Magnetica

Recall: $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\partial^\nu \mathcal{F}^{\alpha\beta}$

$$\partial^\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = \cdots = K_\mu \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu(\partial^\nu \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}) = \partial^\mu K_\mu = 0$$

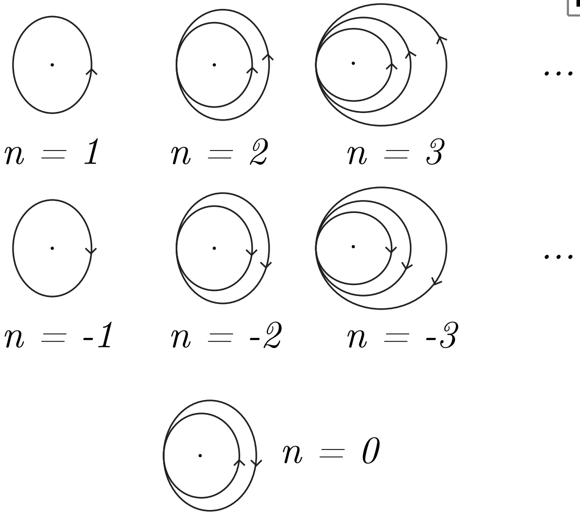
Esiste allora una quantità conservata.

$$\boxed{g := \int \mathrm{d}^3 x K_0 = \cdots = \frac{4\pi}{e} n}$$

Definiamo la **carica magnetica**.

n = **numero di avvolgimento** dei campi soluzione ϕ all'infinito spaziale.

Winding number



Conclusioni

Monopolo magnetico spiega:

- Quantizzazione della carica dell'elettrone (osservata sperimentalmente)
- Simmetria rotta tra campi **B** ed **E** ristabilita

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_g$$

- e molto altro...

Se non esistono, perchè?