Capitolo 2

Teorie di gauge

Una teoria di gauge è una teoria di campo la cui lagrangiana è invariante sotto l'azione di un gruppo di Lie[1] G, denominato *gruppo di gauge*. Se il gruppo di gauge è un gruppo (non) abeliano la teoria di gauge viene detta (non) abeliana.

Una simmetria della lagrangiana (ossia l'azione di un gruppo di gauge) è detta *simmetria globale* se non dipende dal punto dello spazio-tempo in cui è applicata.

Si vuole costruire degli invarianti di gauge, da utilzzare nella lagrangiana, per una teoria che descrive l'accoppiamento di un campo scalare ϕ con un campo di gauge A_μ.
Sia $g \in G$ e $\rho(g)$ una sua rappresentazione, che si suppone unitaria senza perdita di generalità. In seguito alla trasformazione $\phi \mapsto \phi' = \rho(g) \cdot \phi$, si vuole valutare come trasformano le derivate del campo $\partial_\mu \phi$. Se g è una simmetria globale[2] (indipendente dallo spaziotempo), si ha

$$\partial_\mu[\rho(g)\phi] = \partial_\mu[\rho(g)]\phi + \rho(g)\partial_\mu[\phi] = \rho(g)\partial_\mu[\phi]$$

Allora è di immediata verifica che, grazie alla unitarietà di ρ, le seguenti quantità[3] sono gauge-invarianti:

$$\phi \cdot \phi\,, \qquad \partial_\mu \phi \cdot \partial^\mu \phi\,, \qquad \phi \cdot \partial_\mu \phi$$

Si consideri, ad esempio, la seguente lagrangiana per un campo scalare complesso $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ (dove V è un generico funzionale, il potenziale).

$$\mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + V[\phi^* \phi]$$

È invariante per una trasformazione di fase globale del campo, ossia in seguito alla trasformazione $\phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha}\phi$ (dove $\alpha \in \mathbb{R}$) la lagrangiana non cambia.

$$\mathcal{L}[\phi'] = (\partial_\mu \phi')^* \partial^\mu \phi' + V[(\phi')^* \phi'] = \partial_\mu e^{-i\alpha} \phi^* \partial^\mu e^{i\alpha} \phi + V[e^{-i\alpha} \phi^* e^{i\alpha} \phi] = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi + V[\phi^* \phi] = \mathcal{L}[\phi]$$

Un altro esempio di simmetria globale è, nella meccanica Newtoniana, una trasformazione di Galileo tra due sistemi inerziali (es: una rotazione degli assi): in seguito a tale trasformazione non cambia la descrizione fisica del fenomeno, ma solamente i "numeri" che ogni osservatore usa come coordinate. È quindi importante evidenziare quali siano le trasformazioni tra un sistema di coordinate e l'altro.

In relazione alla lagrangiana scritta in precedenza, si può considerare una trasformazione di fase in cui $\alpha = \alpha(x,t)$ è una generica funzione delle coordinate $\phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha(x,t)}\phi$. Se la lagrangiana è invariante per trasformazione di questo tipo, tale trasformazione è detta *simmetria locale* o simmetria di gauge.

[1] Oltre che Lorentz-invariante. Si vedano le definizioni A.3.2 e A.3.3 (azione di gruppo e gruppo di Lie, rispettivamente).
[2] Abuso di notazione. Si sta identificando un singolo elemento del gruppo, con l'azione di gruppo valutata in quell'elemento.
[3] Prodotti interni.

Il principio cardine delle teorie di gauge è allora promuovere le simmetrie globali di una lagrangiana a simmetrie locali (simmetrie che possano essere applicate solamente nell'intorno di un punto, senza affligere il resto dello spazio), e studiare i casi in cui queste si conservano come simmetrie della teoria.

Per simmetrie locali (dove $g = g(x)$), la derivata ∂_μ non trasforma più in maniera omogenea[4], ossia per $\phi \mapsto \phi'(x) = \rho(g(x))\phi(x)$:

$$\partial_\mu[\,\rho(\,g(x)\,)\,\phi(x)\,] \neq \rho(\,g(x)\,)\partial_\mu[\,\phi(x)\,]$$

Si sostituisce allora alla derivata tradizionale la derivata covariante D_μ, definita in maniera tale che

$$D_\mu[\,\rho(\,g(x)\,)\phi(x)\,] = \rho(\,g(x)\,)D_\mu[\,\phi(x)\,] \tag{2.1}$$

Una derivata covariante così definita si costruisce nel modo seguente.

Si consideri l'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ associata al gruppo di gauge e sia $\{t^a\}$ una base ($a = 1, \dots, \dim\mathfrak{g}$). Ad ogni generatore t^a è associato un campo di gauge A^a_μ. Si costruisce allora D_μ tramite combinaizione lineare dei campi di gauge, dove q è la costante di accoppiamento della teoria.

$$D_\mu := \partial_\mu + q\,A^a_\mu t^a \tag{2.2}$$

Si può definire il campo matriciale $A_\mu = (A^a_\mu t^a)$. Dalla condizione 2.1 si ottiene allora una condizione per la trasformazione $A_\mu \mapsto A'_\mu$, che risulta essere[5]

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + \frac{1}{q} g\partial_\mu g^{-1} \tag{2.3}$$

2.1 Caso abeliano: Elettrodinamica classica

Si vuole descrivere ora l'accoppiamento di un campo complesso ϕ con il campo elettromagnetico (si pensi ad esempio alla funzione d'onda di una particella carica).
Si consideri la lagrangiana $\mathcal{L}$ definita in precedenza, che si è già visto essere invariante per trasformazioni *globali* di fase $\phi \mapsto e^{iq\alpha}\phi = g\phi$, dove il parametro $q \in \mathbb{R}$ è la costante di accoppiamento della teoria (in questo caso la carica elettrica). Trasfornazioni di questo tipo appartengono al gruppo di Lie $U(1)$.

$$\mathcal{L}[\phi] = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + V[\phi^*\phi] \quad \Rightarrow \mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[\phi'] \quad , \quad \phi \mapsto \phi' = e^{i\alpha}\phi$$

Si vuole ora promuovere la simmetria globale appena definita a simmetria locale $\alpha \mapsto \alpha(x,t)$ e richiedere che la lagrangiana rimanga invariata per trasformazione di fase locale. Si sostituisce la derivata tradizionale ∂_μ con la derivata covariante definita da

$$D_\mu := \partial_\mu - iqA_\mu$$

dove il campo $A_\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ è il potenziale di gauge (in questo caso, il potenziale elettromagnetico). La lagrangiana gauge-invariante diventa:

$$\mathcal{L}' = D_\mu\phi^* D^\mu\phi + V[\phi^*\phi].$$

La richiesta di invarianza della lagrangiana per trasformazione di fase locale si traduce nella richiesta che la derivata covariante D_μ sia invariante. $D_\mu \mapsto D'_\mu = g^{-1}D_\mu g = D_\mu$.

$$\begin{aligned} iq\,\partial_\mu\alpha(x,t) + (\partial_\mu - iqA_\mu) = (\partial_\mu - iqA'_\mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x,t) = g^{-1}A_\mu\,g + \frac{i}{q}\,g\,\partial_\mu g \end{aligned} \tag{2.4}$$

che si traduce nella condizione che il potenziale A_μ trasformi secondo la trasformazione di gauge sopra scritta. Si sottolinea che nell'ultimo passaggio si è potuto seplificare g e g^{-1} perchè il gruppo di gauge è abeliano ed è stato possibile commutare A_μ con g. Ciò non può accadere se il gruppo di gauge non è abeliano.

[4] Si veda Derivata covariante e trasporto parallelo, sezione A.3.5.
[5] Il calcolo per ricavare la condizione è immediato.

Se si calcola il tensore energia impulso della lagrangiana così scritta (si indica $\phi|^\mu = \partial\phi/\partial x_\mu$ e $\phi|_\mu = \partial\phi/\partial x^\mu$), si vede immediatamente che non si conserva[6].

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}'}{\partial\phi|^\mu}\phi|_\nu - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}' \quad \Rightarrow \partial^\mu T'_{\mu\nu} \neq 0 \tag{2.5}$$

Occorre allora tenere conto anche della dinamica del campo elettromagnetico, costruendo la lagrangiana per l'accoppiamento del campo ϕ con il campo elettromagnetico che è Lorentz-invariante, con simmetria di gauge $U(1)$ e che conserva energia e quantità di moto[7].

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D^\mu\phi)^* D_\mu\phi - V[\phi^*\phi] \tag{2.6}$$

Dove $F_{\mu\nu}$ è il **tensore elettromagnetico** definito da

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

2.2 Caso non abeliano

Se il gruppo di gauge non è abeliano i generatori t^a non commutano: $[t^a, t^b] \neq 0$. Inoltre, $[t^a, t^b]$ è ancora un elemento dell'algebra $\mathfrak{g}$, quindi può a sua volta essere espresso rispetto alla base dei generatori, tramite i coefficienti ${C^{ab}}_c$ detti costanti di struttura

$$[t^a, t^b] = {C^{ab}}_c\, t^c$$

La struttura del gruppo di gauge è quindi determinata dalle regole di commutazione dei generatori, che vengono solitamente scelti tali da rispetare la condizione di normalizzazione $\mathrm{Tr}(t^a t^b) = 1/2\delta_{ab}$.

Poichè il gruppo di gauge è non commutativo, nella trasformazione di gauge 2.3, non è possibile semplificare g e g^{-1}

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + \frac{1}{q}g\partial_\mu g^{-1}.$$

Di conseguenza il tensore elettromagnetico, se definito come nel caso abeliano, non può rispettare la corretta regola di trasformazione $F_{\mu\nu} \mapsto F'_{\mu\nu} = gF_{\mu\nu}g^{-1}$ (di immediata verifica). Occorre quindi correggerlo per un termine che tiene conto della commutazione dei generatori. Si definisce allora il **tensore elettromagnetico non abeliano**:

$$F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g\,[A_\mu, A_\nu] \tag{2.7}$$

Ricordando che $A_\mu = A^a_\mu t^a$, le tre componenti del tensore matrciale sopracitato sono

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\,{C^a}_{bc}A^b_\mu A^c_\nu \tag{2.8}$$

Il termine corretto da inserire nella lagrangiana per ottenere l'invarianza di gauge è, analogamente al precedente caso abeliano:

$$\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

Seguendo la costruzione delineata ad inizio capitolo, si può allora costruire un esempio di lagrangiana per una teoria di gauge non abeliana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}\,D^\mu\phi^a D_\mu\phi^a - V[\,\phi^a\phi^a\,] \tag{2.9}$$

[6] $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ è il tensore metricoMinkowskiano

[7] Si osserva che definendo la lagrangiana del campo elettromagnetico libero $\mathcal{L}_{em} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ si ottengono come equazioni del moto esattamente le equazioni di Maxwell nel vuoto.

2.3 Formalismo dei fibrati

Matematicamente, una teoria di gauge è descritta da un fibrato principale[8], in cui la varietà di base M è (ad esempio) lo spaziotempo $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ con metrica Minkowskiana ($\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$) e la fibra G è il gruppo di gauge.
Data una simmetria globale appartenente al gruppo di gauge, come la simmetria di fase globale $e^{i\alpha}$ nel caso abeliano, l'assegnazione di una simmetria locale (ossia la scelta della particolare funzione $\alpha(x, t)$, nell' esempio abeliano) corrisponde alla scelta di un ricoprimento $\{U_i\}$ della varietà e di sezioni locali s_i sul fibrato[9], che nelle regioni di intersezione dei rispettivi domini ($U_i \cap U_j$) sono legate dalle fuzioni di transizione A.5. Le funzioni di transizione sono dette *trasformazioni di gauge*.

Assegnata una 1-forma di connessione ω sul fibrato e delle sezioni locali s_i, i pullback di ω tramite le sezioni sono 1-forme sullo spaziotempo $A_i = s_i^* \omega$ e sono detti *potenziali di gauge*.
Si sottolinea l'importanza del teorema A.6.1 che dati i potenziali di gauge definiti sugli intorni locali U_i esiste sempre la 1-forma di connessione ω sul fibrato.

Il pullback della curvatura Ω, definita come differenziale esterno della 1-forma di connessione ω, è detto *tensore forza di campo* $F = \mathrm{d}A$.

Se il fibrato è banale, ossia può essere ricoperto da una sola carta ed ha la struttura globale di prodotto diretto $M \times G$, allora esiste una simmetria globale per il sistema. Se invece il fibrato è non banale, ossia non è descritto tramite un'unica carta, non può essere definita una simmetria globale e il potenziale di gauge può essere descritto solo tramite diverse carte locali, concordanti sulle regioni di intersezione tramite una trasformazione di gauge[10].

[8] Cfr. defnzione A.6.3.
[9] Cfr. definizione **??**.
[10] Si veda il monopolo di Wu-Yang nella sezione successiva 3.1.