Come tutti sapete, $\nabla \cdot B = 0$ implica che non esistono nell'universo cariche magnetiche isolate. Questo è confermato sperimentalmente: non sono mai tutt'ora stati osservati monopoli magnetici. Ma.
Facciamo finta per il prossimo quarto d'ora che ciò non sia vero.

Supponiamo l'esistenza di una carica magnetica g isolata, posta nell'origine del nostro sistema di riferimento, e consideriamo il campo magnetico che produce. Data la perfetta simmetria con l'elettrostatica, il campo sarà di tipo coulombiano (indicare slide). Vogliamo ora quindi modificare le equazioni di maxwell cambiando $\nabla \cdot B = 0$ con $\nabla \cdot B = 4\pi\rho_g$(spiegarla con il flusso), in analogia con la legge di gauss per il campo elettrico. Arriviamo subito però a una contraddizione.
Se volessimo definire un potenziale vettore per la nostra teoria, si ha incompatibilità tra queste due (indicare slide). Vediamo come mai.

Il potenziale vettore così definito (di immediata verifica che genera il campo magnetico di monopolo) è singolare lungo l'asse z negativo. Si può tentare di regolarizzarlo e definire un campo regolarizzato ritagliando un cilindro di raggio ε attorno all'asse e valutando il limite per $\varepsilon \to 0$. Si ottiene questa regolarizzazione per il campo, che se integrata da un flusso totale nullo perchè i due contributi si cancellano esattamente. Il ruolo della stringa è quello di generare un campo costante lungo l'asse delle singolarità che annulli il flusso totale.
Abbiamo, in maniera molto sporca, aggirato la contradizione. Osserviamo che il campo così ottenuto è analogo al campo prodotto da un solenoide infinito e infinitamente sottile, in prossimità di una delle estremità. Poniamoci a distanza infinitesima dalla stringa, tale che ci sia solo la sua linea di campo. Si ha una regione in cui c'è campo magnetico e una in cui no, ma il potenziale è non nullo. La configurazione richiama il tipico esperimento alla Aharonov-Bohm. (spiegare brevemente). Si ha quindi che un elettrone lungo cammini diversi acquisisce fasi differenti.
La stringa però non è una cosa fisica, quindi occorre che il suo effetto non debba essere misurabile. Questo vuol dire che per un percorso chiuso attorno all'asse z la fase della funzione d'onda dell'elettrone non deve cambiare.
Questo porta alla condizione di quantizzazione di dirac.
Abbiamo allora che l'esistenza di una singola carica magnetica spiegherebbe perchè la carica elettrica è quantizzata. Siccome questo è precisamente ciò che si osserva, capiamo quale sia il tipo di interesse nella ricerca dei monopoli.

Un modello teorico più completo va inserito nel contesto delle teorie di gauge. Poichè una teoria di gauge è una teoria che pone l'accento sul comportamento locale dei campi, rinunciamo ad una definizione globale del potenziale vettore in favore di più descrizioni in carte locali. Queste devono chiaramente concordare nelle regioni di intersezione con una trasformazione di gauge.

L'elettrodinamica classica è una teoria di gauge del gruppo U(1). Si può costruire una teoria abeliana del monopolo magnetico, ma presenta vari problemi. Consideriamo allora una teoria che ha come gruppo di gauge un generico G, che contiene $U(1)$. Teorie di questo tipo vengono dette teorie di Yang-Mills. L'esempio più semplice è quello di $G = SU(2)$. Si ricorda, Innanzitutto, che l'algebra di Lie associata SU(2) ha dimensione 3, quindi il gruppo ha 3 generatori. Ad ogni generatore è associato un potenziale di gauge. Definiamo allora il potenziale generalizzato A_μ, che generalizza il potenziale di monopolo trovato all'inizio.

Vogliamo scrivere una teoria che descriva l'accoppiamento di A_μ con 3 campi scalari ϕ^a. La Lagrangiana del modello, descritto da G.G., è questa (slide, commentare?) Dove le quantità sono così definite... Il tensore elettromagnetico però ha la componente di commutatore dei potenziali, perchè siamo in una teoria non abeliana. Il tensore elettromagnetico non abeliano generalizza correttamente il campo di monopolo magnetico. con l'andamento corretto all'infinito e in una zona vicino al monopolo è a determinare risolvendo numericamente le equazioni di moto dei campi (campo a riccio, non banale). esempio 't Hooft-Polyakov.

Prendiamo il duale di questo tensore per una soluzione non banale di campo a riccio. si ha che la sua derivata è non nulla, ma uguale a un quadrivettore, che a sua volta ha derivata nulla. Esiste allora una quantità conservata, che definiamo essere la carica magnetica. Dopo conti si ottiene che ha questa espressione (slide). Dove n questa volta ha un significato topologico molto più profondo. È il numero di avvolgimento della soluzione di campo, all'infinito (spiegare numero di avvolgimento) Le varie soluzioni di campo a diverso n sono fisicamente separate da barriere infinite di energia, mentre topologicamente appartengono a classi di omotopia diverse.
La condizione è l'analogo della condizione di dirac.

Si vede allora come la carica magnetica assume un significato più profondo nel contesto di una teoria non abeliana: è legata alla topologia dell'universo. Topologia banale ha n = 0 e quindi no carica magnetica. Topologia non banale ha n ¿= 1 ed esistono i Monopoli.

In conclusione, è adesso più chiaro perchè nonostante i fallimenti sperimentali sia vivo l'interesse per la ricerca dei monopoli magnetici. Molti altri sono gli ambiti in cui il monopolo magnetico risolverebbe i problemi, tipo... Ma più di tutti, ripristinerebbe la simmetria rotta tra campo elettrico e campo magnetico, scrivendo le equazioni

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho \quad \nabla \cdot B = 4\pi\rho_g$$

e a noi fisici piace la simmetria, anche più della figa.

Grazie del vostro tempo, e arrivederci. Ora vado a brindare con l'idromele.