

Quanteninformation

Harald Rieder, 2017

Inhalt

Mathe-Auffrischung	2
Vektoren und Matrizen	2
Addition	3
Multiplikation	3
Weitere Operationen / Besondere Matrizen	4
Transformationen	7
Analysis	9
Ableitungsregeln	9
Skalarprodukt	9
Delta-Distribution	9
Reihenentwicklungen	10
Partielle Ableitungen	11
Differentialgleichungen	12
Komplexe Zahlen	15
Real- und Imaginärteil	15
Addition	15
Multiplikation	15
Betrag	15
Polardarstellung	16
Komplexe Konjugation	16
Physikalische Bedeutung	16
Gruppen	17
Der unitäre Vektorraum	18
Basisvektoren	19
Diracsche Vektoren	20
Zusammenfassende Schreibweise	20
Skalarprodukt in Komponentenform	21
Unitäre Basistransformationen	21
Lineare Operatoren	22

Tensorprodukt als linearer Operator	23
Matrizelemente eines Operators	24
Spezielle Operatoren	25
Eigenwerte und Eigenvektoren	27
L-Darstellung des unitären Vektorraums	28
Produktraum	29
Philosophischer Ausflug	29
Shannonsche Informationstheorie	29
Quantentheorie	30
Interpretationen der Quantentheorie	31
Quanteninformation	31
No Cloning Theorem	31

Mathe-Auffrischung

Vektoren und Matrizen

Spalten- und Zeilenvektoren mit Indexschreibweise

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = (4 \quad 6 \quad 3 \quad 7) \quad a_i \quad b_j \quad (1)$$

Matrizen mit Indexschreibweise

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{ij} \quad (2)$$

- Spalten- und Zeilenvektoren sind auch nur Matrizen! Ein Spaltenvektor ist eine einspaltige Matrix und ein Zeilenvektor eine einzeilige Matrix.
- Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe. Skalare sind Tensoren nullter Stufe, Vektoren Tensoren erster Stufe, Matrizen Tensoren zweiter Stufe, ...
- Quadratische Matrizen: Zeilenzahl = Spaltenzahl
- Physik: nur quadratische Matrizen (und kubische Tensoren 3. Stufe, ...) spielen eine Rolle.

Determinanten von Matrizen

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (4)$$

usw.

Addition

Matrizen müssen gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, damit sie addiert werden können.

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad M_{ij} + N_{ij} \quad (5)$$

- assoziativ: $(M + N) + O = M + (N + O) = M + N + O$
- kommutativ: $M + N = N + M$
- neutrales Element ist die Null-Matrix

Multiplikation

Produkt aus Skalar und Matrix

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix} \quad aM_{ij} \quad (6)$$

Skalarprodukt von Vektoren

Diesmal wird nicht mit einem Skalar multipliziert, sondern das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar.

Rechts die Schreibweise mit Einsteinscher Summenkonvention: über Indizes, die doppelt vorkommen, wird automatisch summiert.

$$c = \sum_{i=1}^m a_i \cdot b_i \quad c = a_i b_i \quad (7)$$

WAS IST DAS PRODUKT VON:

$$(1 \quad -3 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (8)$$

zur verschiedenen Schreibweise der beiden Vektoren siehe unten

- Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ergibt, heißen orthogonal.
- Ein Satz von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

Betrag

Durch die Multiplikation kann man den Betrag eines Vektors definieren:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (9)$$

Matrizenmultiplikation

Alle Zeilenvektoren der 1. Matrix werden mit allen Spaltenvektoren der 2. Matrix skalarmultipliziert, siehe (7).

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad C_{ij} = \sum_{s=1}^m A_{is} \cdot B_{sj} \quad C_{ij} = A_{is} \cdot B_{sj} \quad (10)$$

Ist A einzeilig und B einspaltig, dann haben sie beide nur den Index s, und (10) wird zu (7).

- assoziativ: $(M N) O = M (N O) = M N O$
- **nicht-kommutativ**: $M N$ und $N M$ sind im Allgemeinen verschieden! Matrizen können dadurch Vorgänge modellieren, die bei der Vertauschung einzelner Schritte nicht zum gleichen Ergebnis führen.
- neutrales Element ist die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \delta_{ij} \quad (11)$$

Tensorprodukt

Beim Tensorprodukt ergeben 2 Vektoren eine Matrix. Dieser Mechanismus ist bereits in (10) enthalten!

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 7 & -21 & 14 \end{pmatrix} \quad (12)$$

- Nicht alle Matrizen können aus Vektoren auf diese Art produziert werden.
- Alle Matrizen lassen sich als Summe von Tensorprodukten darstellen. Nicht eindeutig!
- Enorm wichtig für die Quantentheorie! Produktraum, Dichtematrix, Zusammenhang mit Verschränkung...

A) IST DIESE MATRIX¹ EIN TENSORPRODUKT AUS VEKTOREN?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

B) IST DIE EINHEITSMATRIX EIN TENSORPRODUKT?

Vektorprodukt

Aus 2 Vektoren entsteht wieder ein Vektor. In der Physik: Drehimpuls, anderes Transformationsverhalten („axialer Vektor“) wie die beiden ursprünglichen Vektoren. Historisch aus der Vorstellung eines dreidimensionalen Raums heraus entstanden.

Kann auch mit dem Levi-Civita-Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ausgedrückt werden:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \quad c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \quad (14)$$

[Dadurch abweichendes Transformationsverhalten eher einsichtig. Richtigerweise sollte man zwischen ko- und kontrvarianten Indizes unterscheiden. Dazu weiter unten...]

Kann auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden und tritt in der Physik hin und wieder auf. Wir werden ihn in der Quanteninformation eher nicht brauchen.

Weitere Operationen / Besondere Matrizen

Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente (blau).

¹ Diese Matrix ist ein sogenannter Projektor.

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -6 & 4 \\ 7 & -21 & 14 \end{pmatrix} = 9 \quad \text{Tr}(M_{ij}) = M_{ii} \quad (15)$$

ZEIGE MIT DER INDEXSCHREIBWEISE, DASS GILT

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \quad (16)$$

Transposition / Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden getauscht. Indexschreibweise: Zeilen- und Spaltenindizes werden getauscht.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (M^T)_{ij} = M_{ji} \quad (17)$$

Es gilt:

$$(\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (18)$$

Symmetrische Matrizen / Symmetrierung

Eine symmetrische Matrix ist gleich ihrer Transponierten.

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad M_{ij}^T = M_{ji} = M_{ij} \quad \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad (19)$$

Erzeugung symmetrischer Matrizen aus beliebigen Matrizen:

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}^T \quad (20)$$

Eine antisymmetrische Matrix ist gleich dem Negativen ihrer Transponierten.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_{ij}^T = M_{ji} = -M_{ij} \quad \mathbf{M}^T = -\mathbf{M} \quad (21)$$

WIE KANN AUS EINER BELIEBIGEN MATRIX ANALOG ZUR SYMMETRIERUNG EINE ANTISYMMETRISCHE MATRIX ERZEUGT WERDEN?

(22)

Inverse Matrizen

Definition:

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{1} \quad (23)$$

ZEIGE, DASS BEIDE PRODUKTE DIE EINHEITSMATRIX ERGEBEN!

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

- Die Inverse der Inversen ist die ursprüngliche Matrix.
- Es gibt Matrizen, die ihre eigenen Inversen sind.

Es gilt:

$$(\mathbf{M}^{-1})^{-1} = \mathbf{M} \quad (c\mathbf{M})^{-1} = c^{-1}\mathbf{M}^{-1} \quad \det(\mathbf{M}^{-1}) = \det(\mathbf{M})^{-1} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \quad (25)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

x ist ein Spaltenvektor. Dann ist

$$\mathbf{A} \cdot x = \lambda x \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \cdot x = 0 \quad (26)$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem, lösbar wenn

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (27)$$

Charakteristisches Polynom: seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Ist A eine $n \times n$ Matrix, dann gibt es höchstens n Eigenwerte.

Sind Eigenwerte gleich, dann heißen sie (Physik, historisch): entartet. Zu einem k -fachen Eigenwert gehören k Eigenvektoren, die einen k -dimensionalen Unterraum aufspannen ($k \leq n$).

Die Eigenwerte von Matrizen werden uns in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen. Die Eigenwerte einer Q-Bit-Messung bezeichnet man immer als 0 und 1, egal welche physikalischen Messwerte ihnen entsprechen.

Orthogonale (Quadratische) Matrizen

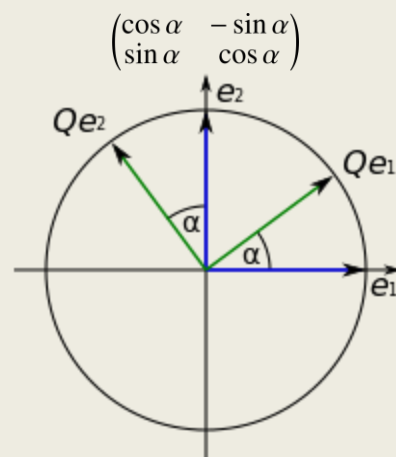
Definition

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad (28)$$

D.h. automatisch

- Mit Q ist auch ihre Transponierte orthogonal.
- Die Zeilenvektoren sind orthogonal.
- Die Spaltenvektoren sind orthogonal.
- Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind auf 1 normiert.

ZEIGE, DASS DIE 2-DIMENSIONALE DREHMATRIX ALL DAS ERFÜLLT!



(29)

Weiteres:

- $\det Q = 1$
- Skalarprodukt der transformierten Vektoren = Skalarprodukt der untransformierten Vektoren.
- Eigenwerte sind +1 und/oder -1.
- Spiegelungen sind auch orthogonale Matrizen. Physik: Paritätsoperation spiegelt die Ortskoordinaten.
- Orthogonale Gruppe $O(n)$, ohne Spiegelungen: $SO(n)$. Kommt noch...

Transformationen

Die Objekte der Physik sollen Modelle der Wirklichkeit sein. Soll die Wirklichkeit objektiv sein, so erwarten wir, dass sie nicht davon abhängt, welches Koordinatensystem wir wählen: Meter oder Zoll, Sekunden oder Minuten als Zeiteinheit, usw.

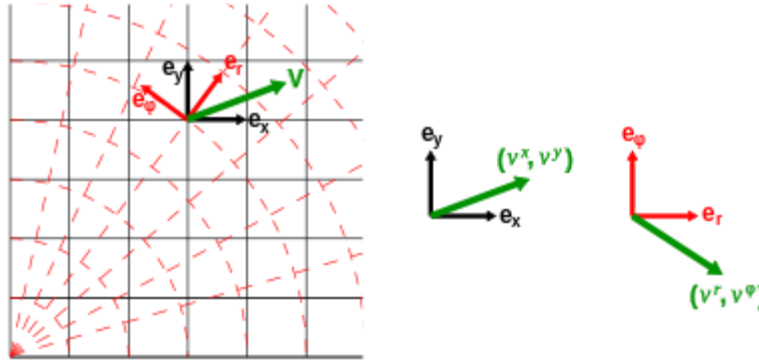
In der klassischen Mechanik glaubt man daran, dass die Gesetze unter diesen Transformationen (10-parametrische Galilei-Gruppe + Spiegelungen + Zeitumkehr) invariant sein müssen²:

- Drehungen, s.o.
- Spiegelungen $x' = -x$ (Quantentheorie \rightarrow Parität)
- Zeitumkehr $t' = -t$
- Translationen $x' = x + b$ (\rightarrow Ableitungen und Entfernungen, keine absoluten Orte)
- Translationen $t' = t + a$ (\rightarrow Ableitungen nach der Zeit, keine absolute Zeit)
- Gleichförmige Bewegungen (Relativitätsprinzip) $x' = x + v t$

Für skalare Größen gilt: sie ändern sich dann nicht. Die Temperatur (statistische Physik: mittlere kinetische Energie, also klassische Mechanik) an einem Punkt (Objekt der Wirklichkeit) soll den gleichen Wert haben, egal ob wir direkt darauf schauen oder uns drehen und dann (wieder stillstehend) das Thermometer aus dem Augenwinkel heraus betrachten. Sie ändert sich auch nicht, wenn wir am Thermometer mit konstanter Geschwindigkeit vorbeifahren. Bei beschleunigten Bewegungen können sich die Gesetze jedoch ändern und tun dies auch fast immer, z.B. Corioliskraft, Zentrifugalkraft.

Für vektorielle Größen wie zum Beispiel das elektrische Feld gilt: sie ändern ihren Betrag nicht, der ja eine skalare Größe ist, aber ihre Richtung in Bezug auf das neue Koordinatensystem. Vektoren in der Physik sind nicht irgendwelche Zahlen in Spalten oder Zeilen, sondern Größen, die sich bei Transformationen wie ein Vektor transformieren, d.h. entweder kovariant (gleich) oder kontravariant (gegenläufig) zum **Transformationsverhalten der Vektoren, die das Koordinatensystem aufspannen**: Jeder Basisvektor des neuen Koordinatensystems lässt sich als Linearkombination aus den Basisvektoren des alten Koordinatensystems ausdrücken (danach „entwickeln“). Dieser lineare Zusammenhang zwischen neuen und alten Basisvektoren lässt sich in Matrixform schreiben und definiert die **Transformationsmatrix**.

² Dieser Glaube betrifft die fundamentalen Grundgesetze. Es gibt viele Gleichungen der klassischen Physik, die nicht alle dieser Symmetrien erfüllen. Wenn erste Ableitungen der Zeit auftreten, dann verschwindet die Zeitumkehrinvarianz wie z.B. in der Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung kann nicht zu einer fundamentalen Beschreibung der Natur gehören. Sie muss mit Hilfe komplizierter mikroskopischer Modelle aus invarianten Gleichungen abgeleitet werden.



Es muss zwischen den Objekten, den Tensoren n-ter Stufe, und ihren Zahlenwerten unterschieden werden. Wenn wir etwas rechnen wollen, brauchen wir immer Zahlen, dazu müssen wir eine Basis von Koordinatenvektoren festsetzen. Ein Zahlentupel eines Vektors sind seine Komponenten bezüglich dieser Basis. Sie sind nicht mit dem Vektor selbst zu verwechseln! Der Vektor entsteht erst durch das Produkt aus Komponenten und Basisvektoren:

$$\mathbf{v} = (v_x \ v_y) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = (v_r \ v_\varphi) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v'^j \mathbf{e}'_j \quad (30)$$

Hat man die Komponenten eines Vektors, so kann eine Drehung oder Spiegelung durch eine Matrix ausgedrückt werden.

Drehmatrix $Q(\alpha)$, im Beispiel sogar an jedem Punkt anders ($Q^{-1}Q = \mathbf{1}$):

$$(v_x \ v_y) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = (v_r \ v_\varphi) Q^{-1} Q \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} \quad (31)$$

Die Basisvektoren transformieren sich kovariant, die Komponenten kontravariant. Wenn wir die krummlinigen Koordinaten als neue, gestrichene Koordinaten auffassen, und die kartesischen als alte, ungestrichene, dann gilt $\mathbf{v}' = Q \mathbf{v}$.³

In modernen Formulierungen wird mit n-Formen gearbeitet. Ein Skalar entsteht durch die Anwendung einer 1-Form (auch: „lineares Funktional“) auf einen Vektor. Werden die Vektoren nach einer Basis entwickelt, dann gibt es dazu eine analoge Entwicklung der 1-Formen nach ihrer Basis. Die 1-Formen leben im sogenannten Dualraum. Transformieren sich die Komponenten der Vektoren kontravariant, dann transformieren sich die Komponenten der 1-Formen im dualen Raum kovariant. Die Unterscheidung in der Indexschreibweise wird durch Hoch- (kontra) und Tiefstellen (ko) erreicht.

Beispiel: Drehimpuls mit kovarianten Komponenten

$$L_k = \varepsilon_{ijk} x^i p^j \quad (32)$$

Ein Tensor 2. Stufe ordnet jedem Vektor \mathbf{v} einen Vektor \mathbf{u} zu. In einem Koordinatensystem soll seine Wirkung so ausgedrückt sein, d.h. T ist eine Matrix, die Komponenten des Tensors bezüglich einer Basis, u und v die Komponenten der Vektoren bezüglich derselben Basis: $\mathbf{u} = T \mathbf{v}$

³ Üblicher scheint diese Wahl von Normaler und Inverser (bzw. Transponierter) doch eigentlich ist es egal, wie herum man es macht. Man muss nur wissen, was gemeint ist. Siehe z.B.

http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/~pkel015/SolidMechanicsBooks/Part_III/Chapter_1_Vectors_Tensors/Vectors_Tensors_13_Coordinate_Transformation_Tensors.pdf

Wie sieht die Sache in einem anderen Koordinatensystem aus? $\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \mathbf{u}$ $\mathbf{v}' = \mathbf{Q} \mathbf{v}$

$$\mathbf{u}' = \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}' \quad (33)$$

also

$$\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} \quad (34)$$

Analysis

Funktionen sind auch nur unendlich dichte Zahlentupel. Wir werden Funktionen einer reellen Veränderlichen in der Quantentheorie mit Vektorkomponenten über einen Kamm scheren; Funktionen mit 2 reellen Veränderlichen mit Matrizen, d.h. Komponenten von Tensoren 2. Stufe, usw.

Ableitungsregeln

http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html

Skalarprodukt

Auch aus 2 Funktionen lässt sich ein Skalar gewinnen, d.h. es lässt sich ein Skalarprodukt definieren, z.B.:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (35)$$

Wie das Skalarprodukt der Vektoren ist es in f und g linear:

$$\langle f, a \cdot g + b \cdot h \rangle = a \langle f, g \rangle + b \langle f, h \rangle \quad (36)$$

Delta-Distribution

Distributionen können als eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs angesehen werden. Die Delta-Distribution hat an der Stelle 0 den „Wert“ unendlich und sonst überall den Wert 0. Die Delta-Distribution hat speziell die Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) f(y) = f(x) \quad (37)$$

Man kann die Sache so betrachten: Dieser Ausdruck

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) \dots \quad (38)$$

ordnet jeder Funktion ein Skalar zu. So ein mathematisches Objekt heißt „Funktional“. Das Funktional mit der Delta-Distribution ordnet jeder Funktion f(y) ihren Funktionswert an der Stelle x zu, also f(x). Es ist also die Einheitsoperation und $\delta(x-y)$ entspricht damit der Einheitsmatrix δ_{xy} .

WAS ERGIBT?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \delta(x-y) \quad (39)$$

Fourier-Integral der Delta-Distribution (Vorgriff auf später, schlampig, weil der Grenzübergang fehlt):

$$\delta(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)} \quad (40)$$

n. Ableitungen der Deltadistribution ziehen sich vor das Integral gemäß:

$$\langle \delta^{(n)}, f \rangle = (-1)^n f^{(n)}(0) \quad (41)$$

Reihenentwicklungen

Taylor-Reihe

„Gutmütige“ Funktionen lassen sich in eine Taylor-Reihe entwickeln. Beispiele:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (42)$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots \quad (43)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots \quad (44)$$

Dies lässt sich so betrachten: die Funktionen x^n sind Basisvektoren und spannen den Raum der „gutmütigen“ Funktionen (= Vektoren) auf.

Über die Reihenentwicklungen lassen sich Funktionen von Matrizen definieren, z.B.:

$$e^{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{X}^k}{k!} \quad (45)$$

BERECHNE!

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \quad (46)$$

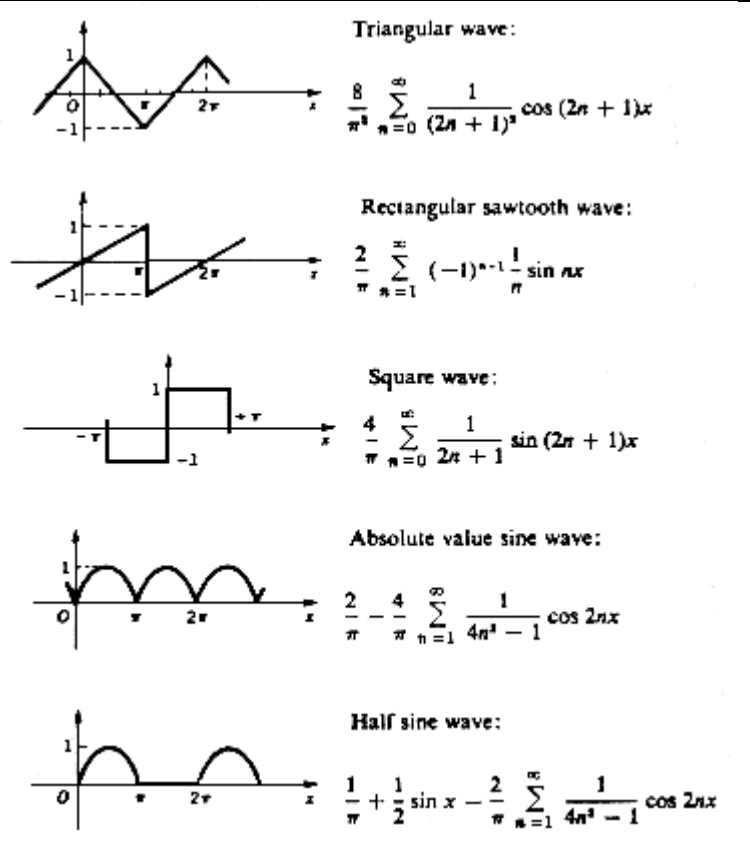
Analog verhält es sich mit anderen Funktionen einer Diagonalmatrix.

Physik: in der Quanteninformationstheorie wird die von Neumannsche Entropie eine Rolle spielen. Sie wird berechnet als $-\text{Spur}(\mathbf{X} \ln \mathbf{X})$, also als Spur einer Matrix, die selbst als Funktion einer Matrix entsteht.

Fourier-Transformation

„Gutmütige“ periodische Funktionen lassen sich als Summe von cos- und sin-Funktionen darstellen.

In der Verallgemeinerung lassen sich beliebige „gutmütige“ Funktionen als unendlich dichte Summe, also ...



... als Integral darstellen:

$$f(t) = \int_0^{\infty} dv \left(\hat{f}^c(v) \cos(2\pi vt) + \hat{f}^s(v) \sin(2\pi vt) \right) \quad (47)$$

Im Körper der komplexen Zahlen (Vorgriff) lässt sich die Fouriertransformation besonders kompakt schreiben:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-iy \cdot x} dx \quad (48)$$

Die Normierung ist im unteren Fall so gewählt, dass die Fouriertransformation als unitäre Abbildung aufgefasst werden kann.

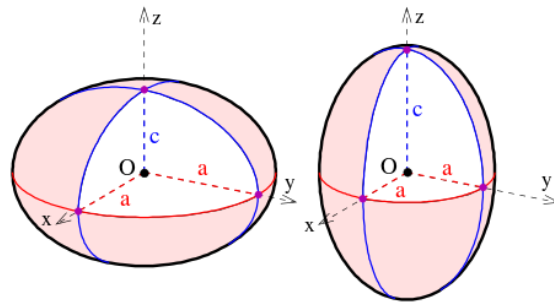
Eine Funktion $f(x)$ kann also in eine Taylorreihe oder ein Fourierintegral transformiert werden. Wir können dies auch so auffassen, dass Taylorreihe und Fourierintegral die Koeffizienten der Funktion bezüglich verschiedener Basen sind: einmal werden Potenzen von x verwendet, das andere Mal periodische Funktionen von x .

Partielle Ableitungen

Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach *einem* dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden festgehalten.

Beispiel Volumen Rotationsellipsoid

$$\begin{aligned}
 V(a, c) &= \frac{4\pi}{3} a^2 c \\
 \frac{\partial V(a, c)}{\partial a} &= \frac{8\pi}{3} ac & \frac{\partial^2 V(a, c)}{\partial a^2} &= \frac{8\pi}{3} c \\
 \frac{\partial V(a, c)}{\partial c} &= \frac{4\pi}{3} a^2 & \frac{\partial^2 V(a, c)}{\partial c^2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{49}$$



Die linken Formeln liefern Änderung von V in Abhängigkeit einer Änderung von a bzw. c.

BERECHNE DIE PARTIELLEN ABLEITUNGEN DER FUNKTION F NACH X UND Y!

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(xy)} \tag{50}$$

VERIFIZIERE MIT DER FUNKTION AUS (50) DEN SATZ VON SCHWARZ:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{51}$$

Man kann einen Operator definieren, der einer Funktion eine andere Funktion – nämlich ihre Ableitung – zuordnet. Diesen nennt man **Differentialoperator**. So wie man Funktionen von Matrizen über die Taylorreihen der Funktionen definieren kann, so kann man auch Funktionen von Differentialoperatoren definieren.

$$e^{\frac{\partial}{\partial x}} = 1 + \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots \tag{52}$$

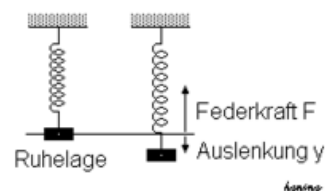
Differentialgleichungen

<http://www.mathepedia.de/Differentialgleichungen.aspx>

Beispiel Federpendel: die rücktreibende Kraft F ist proportional zur Auslenkung y. Mit Newtons $F = m a(t) = m \frac{d^2 y}{dt^2}$ kommen wir auf die Differentialgleichung

$$m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = -Dy(t) \tag{53}$$

D heißt „Federkonstante“.



ZEIGE, DASS DIESE FUNKTION DIE SCHWINGUNGSGLEICHUNG LÖST!

$$y(t) = a \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}(t - t_0)\right) \tag{54}$$

WAS IST VON DEN 2 KONSTANTEN A UND t_0 ZU HALTEN?

Bei der Schwingungsgleichung handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. Diese haben die Eigenschaft, dass jede Linearkombination von Lösungen auch wieder eine Lösung ist.

Beispiel:

$$y_1(t) = 25 \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) \quad y_2(t) = 7 \cos\left(\sqrt{\frac{D}{m}}t\right) \quad (55)$$

Dann ist auch $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ eine Lösung der linearen DGL.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher erhält man in der Verallgemeinerung partielle Differentialgleichungen. Beispiel Maxwell-Gleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (56)$$

E , B , j und ρ sind Felder, die von 3 Ortskoordinaten x, y, z und der Zeit t abhängen, also Funktionen von 4 Veränderlichen. E , B und j sind Vektoren, ρ ist eine skalare Funktion. In den Gleichungen finden wir die Komponenten der „physikalischen Objekte“ bez. einer bestimmten Basis.

Partielle lineare Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe von Differentialoperatoren in Matrixform bringen. In unserem Beispiel können wir definieren:⁴

$$\hat{O} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (57)$$

$$\psi := \begin{pmatrix} 0 \\ E_x(x, y, z, t) \\ E_y(x, y, z, t) \\ E_z(x, y, z, t) \\ 0 \\ B_x(x, y, z, t) \\ B_y(x, y, z, t) \\ B_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad j := \begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_x(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_y(x, y, z, t) \\ \mu_0 j_z(x, y, z, t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{O}\psi = j$$

**WIE SIEHT DER DIFFERENTIALOPERATOR DER SCHWINGUNGSGLEICHUNG AUS?
SCHREIBE SIE AUCH IN DER FORM $\hat{O}\psi = j$! WIE GROß IST j ?**

(58)

Zwischen unserer einfachen Schwingungsgleichungen und den Maxwellgleichungen wie oben angegeben besteht ein wesentlicher Unterschied: j

⁴ In der Relativitätstheorie wird die Galilei-Invarianz abgelöst durch die Poincaré-Invarianz. Es zeigt sich, dass sich das elektromagnetische Feld wie ein Tensor 2. Stufe transformiert. Unsere naiv gewählten Definitionen werden dort also durch andere abgelöst, mit denen sich die Maxwell-Gleichungen aber wieder auf die Form mit einem linearen Differentialoperator bringen lassen, nur dass jetzt der Operator ein Vektor ist und die Felder ein Tensor sind:

$$\hat{O} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad \psi := \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix}$$

F und F^* findet man in der Literatur als [zueinander duale] „antisymmetrische Feldstärketensoren“.

Dadurch werden die Maxwellgleichungen **inhomogen** und die Möglichkeit der freien Linearkombination von Lösungen geht verloren. Dennoch kann man zu 2 Lösungen sofort wieder weitere Lösungen angeben:

$$\hat{\mathbf{O}}\psi_1 = j \quad \hat{\mathbf{O}}\psi_2 = j \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{O}}\psi_3 := \hat{\mathbf{O}}(c\psi_1 + (1-c)\psi_2) = j \quad \text{mit} \quad 0 \leq c \leq 1 \quad (59)$$

Diese Linearitätseigenschaften sind übrigens ein Modell dafür, dass wir getrennte Dinge sehen können. Die 4 „Materiefelder“ j werden von den Dingen vorgegeben am Rand eines Gebiets, in dem sich elektromagnetische Wellen (Licht) ausbreiten, ohne dass diese Wellen sich bei der gegenseitigen Durchdringung verändern: sie überlagern sich und bewahren ihre einzelne Form und Stärke.

Schließlich erzeugen sie ein Bild in einer Digitalkamera oder auf unserer Netzhaut. Dieses Bild lässt sich zerlegen in Teilbilder, als wäre jedes Teilbild erzeugt von einem einzelnen Ding unabhängig von den Bildern anderer Dinge.

Eigenfunktionen und Eigenwerte

Analog zu (26) lassen sich für homogene lineare DGL-Systeme Eigenfunktionen (entsprechend Eigenvektoren) und Eigenwerte einführen:

$$\hat{\mathbf{O}} \cdot \psi = \lambda \psi \quad (\hat{\mathbf{O}} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \psi = 0 \quad (60)$$

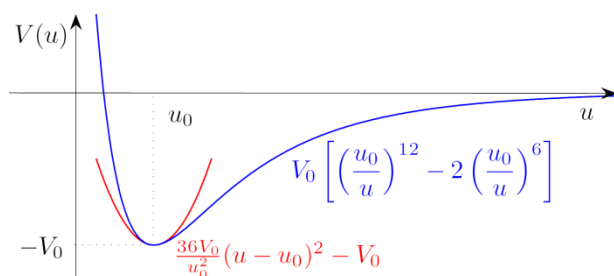
$\mathbf{1}$ ist der Einheitsoperator. Auch diesen Eigenwerten werden wir in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen. Ist z.B. $\hat{\mathbf{O}} = d/dx$, dann ist die Funktion $f(x) = 27e^{4x}$ eine Eigenfunktion und der zugehörige Eigenwert ist 4. Die Funktion $g(x) = -2e^{4x}$ ist eine Eigenfunktion mit demselben Eigenwert 4. Der Eigenwert 4 ist unendlich-fach entartet.

Nichtlineare Differentialgleichungen

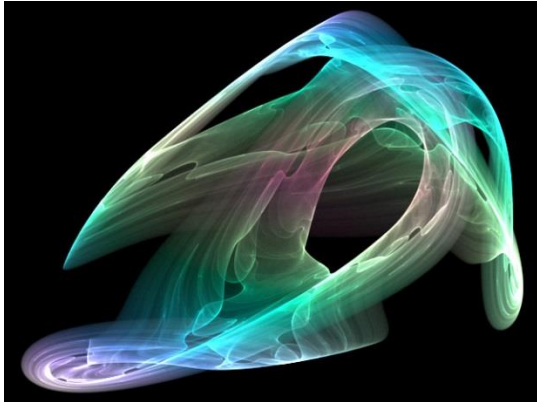
Die Lösungen nichtlinearer DGL haben im Allgemeinen qualitativ vollkommen andere Eigenschaften als die linearer DGL. Sie lassen sich nicht mehr unabhängig überlagern (linear kombinieren); das Ganze kann qualitativ etwas vollkommen anderes sein als die Teile.

Bereits die Lösungen von Gleichungen mit wenigen Variablen können komplizierteste Lösungsfunktionen hervorbringen. Dagegen erscheinen die Lösungen linearer DGL langweilig und tot.

Auf makroskopischer Ebene sind bei genauerer Betrachtung alle Kraftgesetze nichtlinear. Traditionell rechnen Physiker in linearen Näherungen, um überhaupt etwas rechnen zu können.



Ein lineares Weg-Kraftgesetz ist die Ableitung eines quadratischen Energiepotentials (potentielle Energie, die quadratisch von der Auslenkung abhängt). Systeme im energetischen Minimum befinden sich in einer „glatten Potentialmulde“, die durch eine (ggf. mehrdimensionale) Parabel angenähert werden kann. Dadurch kann das blaue Potential durch das rote angenähert werden, welches uns auf die Schwingungsgleichung führt. Bei starken Auslenkungen versagt die Näherung.



Nichtlineare DGL eignen sich als Modell für Effekte wie den Schmetterlingseffekt oder Tsunamis. Eine interessante Galerie von chaotischen Attraktoren:

<http://www.chaoscope.org>

In der unteren Schicht der **Quantentheorie** (der „Rechenschicht“) werden uns dagegen **immer lineare DGL** begeben!

Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. D.h. Wurzel aus -1 ist +i oder -i.

Reelle Zahl: a

Imaginäre Zahl: b·i (b ist reell)

Komplexe Zahl z ist 2-teilig: $z := a + b \cdot i$

oder in der Darstellung als 2-Tupel (a b)

Real- und Imaginärteil

Beide Funktionen liefern reelle Zahlen:

$$\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(a + b \cdot i) = a$$

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(a + b \cdot i) = b$$

Addition

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) \cdot i$$

- assoziativ: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$
- kommutativ: $y + z = z + y$
- neutrales Element ist $0 + 0 \cdot i$ oder anders geschrieben (0 0) oder ganz kurz 0

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + a_2 b_1 \cdot i + b_1 b_2 \cdot i^2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i$$

- assoziativ: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$
- kommutativ: $y \cdot z = z \cdot y$
- neutrales Element ist $1 + 0 \cdot i$ oder anders geschrieben (1 0) oder ganz kurz 1

Für die Division folgt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + b i)(c - d i)}{(c + d i)(c - d i)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Betrag

Der Betrag wird definiert wie die Länge eines Vektors (a b):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

BERECHNE!

$$a) (3 + 5i) + (1 - 2i) \quad b) (3 + 5i) \cdot (1 - 2i) \quad c) \operatorname{Re}\left(\frac{1}{3i}\right) \quad d) |1 - 2i| \quad (61)$$

Polardarstellung

Über die Taylorentwicklungen der trigonometrischen Funktionen sin und cos

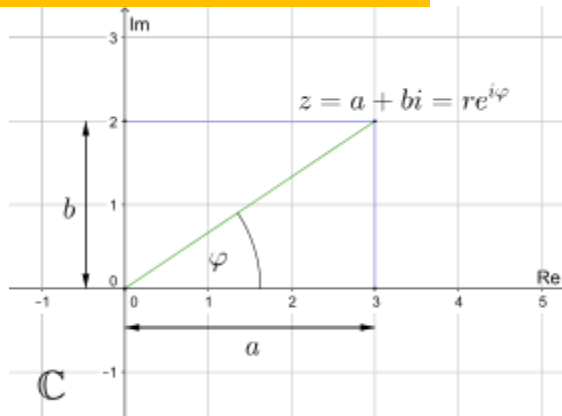
$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

sowie die der e-Funktion (42) lässt sich zeigen, dass für komplexe Zahlen gilt:

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad (62)$$

Dadurch wird eine geometrische Darstellung in der Ebene („komplexe Zahlenebene“) möglich.

$re^{i\varphi}$ ist die reelle Zahl r gedreht um den Winkel φ .



Anders herum lassen sich sin und cos über e-Funktionen ausdrücken:

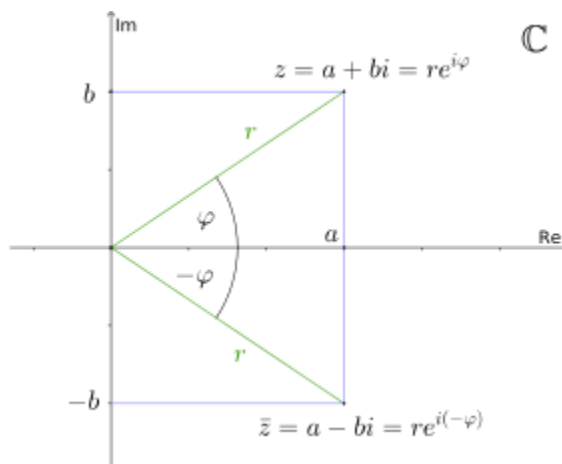
$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}) \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}) \quad (63)$$

Komplexe Konjugation

Diese Operation wird in der Quantentheorie ständig verwendet. Geometrisch entspricht sie einer Spiegelung an der reellen Achse. Statt dem Strich verwenden die Physiker allerdings den Stern:

$$z = a + b \cdot i$$

$$z^* = (a + b \cdot i)^* = a - b \cdot i$$



Mit der komplexen Konjugation lässt sich der Betrag einer komplexen Zahl auch so darstellen:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot z^*}. \quad (64)$$

Physikalische Bedeutung

Wir sehen in den Erscheinungen vor dem Bewusstsein nichts, was sich in komplexen Zahlenebenen abspielt (vielleicht im LSD-Rausch?). Die Skalen irgendwelcher Messinstrumente liefern bestenfalls

reelle Zahlen, ein Digitalmultimeter vom Elektronikhändler sogar nur rationale Zahlen in Dezimaldarstellung.

In der Elektrotechnik können sich durch Rechnen mit komplexen Zahlen einfachere mathematische Ausdrücke ergeben (https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Wechselstromrechnung). Am Ende muss dort ein Schritt stehen, der wieder reelle Zahlen liefert. Das geschieht durch $\text{Re}(z)$, manchmal $\text{Im}(z)$. Grob gesagt wird am Ende der Rechnung die Hälfte weggeworfen, da sie nicht reell ist, sondern nur das Ergebnis eines Rechentricks.

Ähnlich ist es in der Quantentheorie: durch die komplexen Zahlen lassen sich die Formeln wesentlich kompakter formulieren. Irgendwo gibt es wieder einen Schritt, der reelle Zahlen liefert, bevor es weiter Richtung bewusst wahrnehmbarer Erscheinungen geht. Dieser Schritt wirft wieder Information aus der Rechenschicht weg. Tatsächlich ließe sich die gesamte Quantentheorie ohne komplexe Zahlen formulieren, aber dafür müssten äquivalente mathematische Objekte an ihre Stelle treten. https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl -> Matrizen zeigt, wie es geht:

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = a \cdot E + b \cdot I$$

Wir sehen hier ein Prinzip, dass öfter auftaucht: verschiedene mathematische Modelle sind gleichwertig, darin gibt es aber einen gemeinsamen Kern, den man scheinbar nicht loswerden kann. Dieser Kern ist hier die Algebra, wie sie einerseits durch komplexe Zahlen dargestellt werden kann, andererseits durch 2x2 Matrizen. Andere solche Kerne sind Symmetriegruppen, die in jeder Formulierung zu finden sein sollen. Genauer gesagt sind die Kerne keine konkreten Gruppen (wie z.B. Gruppe der Drehungen in 3 Dimensionen $SO(3)$), sondern wieder nur die algebraische Strukturen, die von diesen Gruppen dargestellt werden. Diese Erfahrung hat den Glauben an die Realität solcher algebraischer Strukturen in der Natur gefestigt, z.B.: <http://www.lyre.de/Lyre-SSR-2012.pdf>

Die komplexen Zahlen fallen unter das Thema der Clifford-Algebren, zu denen die Quaternionen genauso gehören wie die Dirac-Matrizen. Dirac-Matrizen kommen zur Anwendung in Gleichungen, die zur Beschreibung von Fermionen (Elektronen, Myonen, Neutrinos, ...) dienen. Auch hier dürfte sich die Darstellung relativ leicht wechseln lassen, wobei die Algebra dieselbe bleiben wird.

Gruppen

Mathematische Gruppen sind in der Physik von überragender Bedeutung. Oben haben wir die Galilei-Gruppe kennengelernt. Im Standardmodell der „Materie“ genügen die Gleichungen bestimmten Symmetrien, die man mit $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ und Poincaré-Gruppe bezeichnet.⁵ D.h. dass die mathematischen Objekte in den Gleichungen durch andere Objekte ersetzt werden können, wobei die Gestalt der Gleichung erhalten bleibt. Die Ersetzungsoperationen zusammen genommen bilden mathematische Gruppen.



⁵ Auffallend ist die starke Repräsentanz von Drehgruppen: $U(1)$, $SU(2)$, $SU(3)$ und $SO(3)$ in der Poincaré-Gruppe sind Drehgruppen.

Die wichtigsten Gruppen des Standardmodells sind hier beschrieben: http://www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/symmetrien/sym_jurke.pdf Es ist aber noch lange nicht ausgemacht, dass diese fundamentale Gruppen der Natur sind, es könnten genauso gut die Symmetrien eines zusammengesetzten Zustands sein, wobei noch fundamentalere Naturgesetze ganz andere Symmetrien haben könnten. Im Festkörper, so gesehen ein zusammengesetzter Zustand aus elementaren Zuständen des Standardmodells, können sich ganz andere Symmetrien herausbilden: http://www.thp.uni-koeln.de/Documents/muellerhartmann_gruppentheorie.pdf

Operationen (Gruppenmitglieder), die mit dem Generator der Zeittranslation kommutieren, führen zu Größen, die **sind**. Der Generator der Zeitverschiebung heißt **Energie**.⁶ Auf diese Art bedeutet die T-Symmetrie Energieerhaltung, die Translationssymmetrie Impulserhaltung, die O(3) Symmetrie Drehimpulserhaltung, die U(1) Symmetrie (Drehung in der komplexen Ebene) die Erhaltung elektrischer Ladung, SU(2) Erhaltung der schwachen Ladung, usw.

Ungeachtet der Wichtigkeit für das Verständnis der Natur können wir bei der Quanteninformationsverarbeitung im Großen und Ganzen einen Bogen um die Symmetriegruppen machen.

Der unitäre Vektorraum⁷

In der Quantentheorie werden physikalische Größen in einem unitären Vektorraum modelliert, d.h. einem Vektorraum, in dem die Skalarprodukte der Vektoren **komplexe** Zahlen ergeben können. Die „abstrakten“ Vektoren, welche die wirklichen Größen darstellen sollen, werden so geschrieben („ket-Notation“):

$$|\varphi\rangle, |\chi\rangle, |\psi\rangle, \dots, |\Phi\rangle, \dots, |u\rangle, |v\rangle, \dots$$

Wie für unsere Zahlentupel-„Vektoren“ soll gelten:

- assoziative Addition:

$$|\varphi\rangle + |\chi + \psi\rangle = |\varphi + \chi\rangle + |\psi\rangle$$
- kommutative Addition:

$$|\varphi\rangle + |\chi\rangle = |\chi\rangle + |\varphi\rangle$$
- Multiplikation mit einem Skalar:

$$c |\varphi + \chi\rangle = c |\varphi\rangle + c |\chi\rangle$$
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine **komplexe** Zahl a („bra“-„ket“-Notation):

$$\langle\varphi | \chi\rangle = a$$

Es kommt jetzt aber auf die Reihenfolge an, denn es soll gelten:

$$\langle\chi | \varphi\rangle = \langle\varphi | \chi\rangle^*$$
- Distributivität:

$$\langle\varphi | \chi + \psi\rangle = \langle\varphi | \chi\rangle + \langle\varphi | \psi\rangle$$

⁶ In der speziellen Relativitätstheorie relativieren sich die Bedeutung von Raum- und Zeitkoordinaten. Dies drückt sich in den relativistischen Quantenfeldtheorien aus als Schwierigkeiten bei der Definition des Hamilton-Operators: <http://www.fuw.edu.pl/~derezins/nohamiltonian.pdf> Gewissermaßen relativiert sich dadurch das Sein.

⁷ Dieses Kapitel orientiert sich an Eugen Ficks Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie.

- Herausziehen einer komplexen Zahl:

$$\langle \varphi | c\chi \rangle = c \langle \varphi | \chi \rangle \quad \text{aber} \quad \langle c\varphi | \chi \rangle = c^* \langle \varphi | \chi \rangle$$

ZEIGE, DASS AUS DEN DEFINITIONEN OBEN FOLGT:

$$\text{Im} \langle \phi | \phi \rangle = 0$$

(65)

Darüber hinaus soll das Produkt eines Vektors mit sich selbst immer positiv sein:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle \geq 0$$

was es ermöglicht, die **Norm** („Länge“) eines Vektors als positive reelle Zahl zu definieren:

$$\|\varphi\| = \sqrt{\langle \varphi | \varphi \rangle} \quad (66)$$

Verschwimmt das Skalarprodukt, dann nennen wir die Vektoren wieder **orthogonal**:

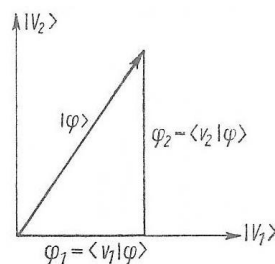
$$\langle \varphi | \chi \rangle = 0$$

Basisvektoren

Wie unsere Zahlentupel-Vektoren und Funktionen wollen wir die Hilbertraumvektoren nach Koordinatenvektoren (oder abstrakter „Basisvektoren“) entwickeln können, wenn wir uns für ein Koordinatensystem (eine „Basis“) entschieden haben.

Zerlegung nach einer Basis $|v_k\rangle$

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi_k$$



Die Dimension des unitären Raumes kann endlich oder unendlich sein. Die Komponenten φ_k bilden zusammen ein Tupel aus komplexen Zahlen, das nicht mit dem „echten“ Vektor $|\varphi\rangle$ verwechselt werden darf.

Wenn die Basisvektoren „aufeinander senkrecht stehen“ und die „Länge“ 1 haben, nennt man die Basis **Orthonormalbasis**:

$$\langle v_k | v_{k'} \rangle = \delta_{kk'} \quad (67)$$

Damit lässt sich die Zerlegung nach einer Basis sofort nach den **Vektorkomponenten in der Orthonormalbasis** auflösen (Multiplikation mit $\langle v_{k'} |$):

$$\varphi_k = \langle v_k | \varphi \rangle \quad (68)$$

(68) in die Zerlegung eines Vektors eingesetzt ergibt die Identität:

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \langle v_k | \varphi \rangle \quad (69)$$

$|v_k\rangle\langle v_k|$ ist ein Tensorprodukt aus 2 Basisvektoren. Wir haben so etwas Ähnliches schon in Aufgabe (13) in Form einer Matrix kennengelernt. Die Summe der Tensorprodukte aus den Basisvektoren ist also die Einheitsoperation (oder „Identität“).

Bei einem Q-Bit beschränkt man sich (per Abmachung oder durch die konkrete technische Realisierung des Quantenrechners) auf einen 2-dimensionalen unitären Raum. Man braucht also 2 Basisvektoren, um jeden Vektor linear kombinieren zu können, der einem Zustand des Q-Bits entspricht. Diese Basiszustände bezeichnet man dann als $|0\rangle$ und $|1\rangle$ in Analogie zu den 2 Zuständen eines klassischen Bits.⁸

Diracsche Vektoren

Unitäre Vektoren sollen sowohl von abzählbaren Indizes als auch von kontinuierlichen Indizes (also Funktionsvariablen) abhängen können. Man braucht in der Quantentheorie beides.⁹

Mathematisch lassen sich Diracsche Vektoren aus einem Grenzübergang heraus definieren, so wie sich das Integral einer Funktion $\int f(x)dx$ mit dem Grenzübergang $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ aus einer Summe $\sum_i f(x_i)\Delta x$ heraus definieren lässt. Wer sich für Einzelheiten interessiert: Fick 2.1§3

Die Entwicklung eines solchen Dirac-Vektors stellt sich so dar:

$$|\varphi\rangle = \int_k |v_k^D\rangle \langle v_k^D | \varphi\rangle dk = \int_k |v_k^D\rangle \varphi(k) dk \quad (70)$$

In der Orthonormierungsbedingung für eine Basis tritt nun die Delta-Distribution statt der Einheitsmatrix auf:

$$\langle v_k^D | v_{k'}^D \rangle = \delta(k - k')$$

Durch die Gewinnung der Dirac-Vektoren mittels Grenzübergang ist klar: k ist immer reell, auch wenn der Funktionswert im Allgemeinen komplex ist. Wir bekommen es nicht mit Funktionen über der komplexen Ebene zu tun.

Zusammenfassende Schreibweise

Zum Beispiel beim Wasserstoffproblem ergeben sich – wie wir noch sehen werden – sowohl kontinuierlich dichte Energieeigenwerte (oberhalb der Ionisierungsenergie) als auch diskrete, abzählbare Energieeigenwerte (unterhalb, „gebundene Zustände“). Sowohl die Eigenwerte wie deren (Energie-)Eigenvektoren müssen deswegen gemischt nummeriert werden. Man braucht also im Allgemeinen so etwas:

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi_k + \int_k |v_k^D\rangle \varphi(k) dk$$

Dafür soll die zusammenfassende Schreibweise eingeführt werden:

$$|\varphi\rangle = \int_k |v_k\rangle \varphi(k) dk$$

⁸ Vorsicht! Es ist auch hier kein Koordinatensystem („Basis“) vor dem anderen ausgezeichnet, und durch einen Wechsel der Basis bekommt das Q-Bit andere Komponenten. In welcher Basis man die Basisvektoren mit $|0\rangle$ und $|1\rangle$ bezeichnet ist eine willkürliche Festlegung.

⁹ Dabei ist das Ende vom Lied noch nicht ausgemacht. Wir werden noch sehen, dass Kontinuum und Information zwei gegensätzliche Konzepte sind. Was wir nicht sehen werden soll der Vollständigkeit halber erwähnt werden: das Kontinuum sorgt in den Quantenfeldtheorien für erhebliche Schwierigkeiten sowohl mathematischer Art als auch von der Interpretation her (überall unendlich viel Energie? → Renormierung, Infrarot- und Ultraviolett-Divergenzen, ...). Diese Schwierigkeiten bewogen Bjorken und Drell in ihrem Standard-Lehrbuch zum Hinweis, dass die Möglichkeit einer Körnung der Natur nicht aus den Augen verloren werden sollte.

$\delta(k, k')$ soll sowohl die Einheitsmatrix als auch die Delta-Distribution darstellen, je nach Kontext. Die Orthonormierung der Basisvektoren drückt sich dann so aus:

$$\langle v_k | v_{k'} \rangle = \delta(k, k')$$

Bei den Komponenten eines Vektors soll im Folgenden mit der Funktionsform beides gemeint sein:

$$\varphi(k) = \langle v_k | \varphi \rangle$$

Skalarprodukt in Komponentenform

2 Vektoren entwickelt nach dem gleichen Satz von Basisvektoren v_k :

$$|\varphi\rangle = \sum_k |v_k\rangle \varphi(k) \quad \text{und} \quad |\chi\rangle = \sum_{k'} |v_{k'}\rangle \chi(k')$$

Miteinander multipliziert ergeben sie:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_k \sum_{k'} \langle v_k | v_{k'} \rangle \varphi^*(k) \chi(k') \, dk \, dk'$$

Und die Orthonormierung der Basisvektoren haut uns ein Integral/eine Summe weg:

$$\langle \varphi | \chi \rangle = \sum_k \varphi^*(k) \chi(k) \, dk = \sum_k \langle \varphi | v_k \rangle \langle v_k | \chi \rangle \, dk$$

Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \sum_k |\varphi(k)|^2 \, dk$$

BERECHE DAS SKALARPRODUKT DIESER BEIDEN VEKTOREN. v_1 UND v_2 SOLLEN ORTHONORMIERT SEIN.

$$|\varphi\rangle = \frac{|v_1\rangle + i|v_2\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |\chi\rangle = \frac{|v_1\rangle - i|v_2\rangle}{\sqrt{2}}$$

(71)

Unitäre Basistransformationen

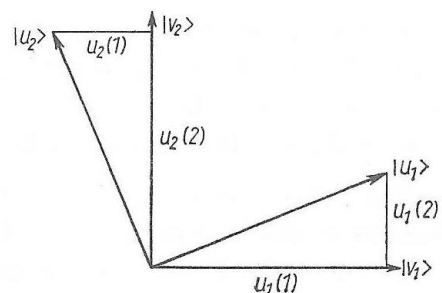
Die Transformation von Vektorkomponenten bei einem Wechsel des Koordinatensystems (der Basis) haben wir für Vektoren mit reellen Komponenten bereits kennengelernt. Ganz analog verhält es sich bei unitären Vektoren (mit komplexen Komponenten). Auch hier soll der „abstrakte“ Vektor $|\varphi\rangle$ wieder für das mathematische Analogon zur Wirklichkeit stehen, dessen Verhalten unabhängig vom willkürlich gewählten Koordinatensystem sein soll.

Der Wechsel von einer Basis v_k zur nächsten u_x geht wieder über eine Transformationsmatrix:

$$|u_x\rangle = \sum_k |v_k\rangle u_x(k) \, dk$$

$u_x(k) \equiv u(k, x)$ bezeichnet die Transformationsmatrix. Im Fall von kontinuierlichen Indizes ist sie eine komplexwertige Funktion der 2 reellen Veränderlichen k und x . Sonst eine quadratische Matrix mit komplexen Komponenten und den Zeilen- und Spaltenindizes k und x .

Wieder besteht die Transformationsmatrix aus den Komponenten der neuen Basisvektoren bezüglich der alten Basis. Diese Komponenten sind wieder das Skalarprodukt zwischen neuen und alten



Basisvektoren.

$$u_x(k) = u(k, x) = \langle v_k | u_x \rangle$$

Wenn die neuen Basisvektoren wieder orthonormiert sein sollen, bedeutet dies:

$$\langle u_{x'} | u_x \rangle = \int_k u^*(k, x') u(k, x) dk = \delta(x', x) \quad (72)$$

Auch wenn es auf den ersten Blick nicht so aussieht, so kennen wir diesen Ausdruck schon in ähnlicher Form. $u(k, x')$ entspricht in Indexform einer Matrix $u_{kx'}$. Deren Transponierte ist $u_{x'k}$. Die Einheitsmatrix in Indexschreibweise ist $\delta_{x'x}$. Der Ausdruck bedeutet also $u^{*T} u = I$.¹⁰ Bei Transformationsmatrizen mit reellen Komponenten hatten wir dagegen $Q^T Q = I$. Der Unterschied ist also, dass bei Matrizen mit komplexen Komponenten zusätzlich zur Transposition die Komponenten komplex konjugiert werden müssen.

Für die Matrix der Umkehrtransformation gilt entsprechend statt $Q^{-1} = Q^T$ jetzt $u^{-1} = u^{*T}$. Statt von orthogonalen Matrizen spricht man jetzt von **unitären** Matrizen bzw. Transformationen.

$$|v_k\rangle = \int_x |u_x\rangle v_k(x) dx \quad \text{mit} \quad v_k(x) \equiv v(x, k) = \langle u_x | v_k \rangle$$

Ausgedrückt mit dem Skalarprodukt der Basisvektoren:

$$v(x, k) := u^{-1}(x, k) = \langle u_x | v_k \rangle = \langle v_k | u_x \rangle^* = u(k, x)^* = u^{*T}(x, k)$$

Der „abstrakte“ Vektor $|\varphi\rangle$ kann also nach verschiedenen Basissystemen entwickelt werden. In der Quantentheorie wird er für den Zustand einer Welt¹¹ stehen. Seine Komponenten können endliche oder unendlich große Zahlentupel sein oder unendlich große unendlich dichte Zahlentupel, d.h. Funktionen. Eine Wellenfunktion $\varphi(x)$ muss also angesehen werden als die Entwicklung eines „abstrakten“ Vektors $|\varphi\rangle$ nach einer bestimmten Basis. Wenn x den Ort bedeuten soll, dann ist es die Ortsbasis. Über Koordinatentransformationen kommt man zu anderen Darstellungen von $|\varphi\rangle$, z.B. in der Impulsbasis $\varphi(p)$. Beim Wasserstoffproblem werden wir sehen, dass es selbst die Mischung aus Funktionen und Zahlentupeln geben kann, und dass bei der Transformation zwischen Orts- und Energiebasis sogar von kontinuierlichen Indizes zu diskreten Indizes gewechselt werden kann („Quantenzahlen“). Nun mag man sich die Frage stellen, warum überhaupt die eine Basis wichtiger als die anderen sein soll, wenn der Vektor $|\varphi\rangle$ als Vertreter des (Mikro-)Weltzustands ungerührt von unserer Sicht auf ihn sein Wesen weitertreibt. Die Auswahl erfolgt erst durch die Umgebung: die Wahl der bevorzugten Basis kann durch die sogenannte „Dekohärenztheorie“ erklärt werden.¹²

Lineare Operatoren

Die Eigenschaften von quadratischen Matrizen und linearen Differentialoperatoren werden in abstrakter Weise auf den unitären Raum übertragen und dadurch unter einem Dach zusammengefasst. In der abstrakten Sicht ist ein Operator L eine Maschine, die jedem unitären Vektor $|\varphi\rangle$ einen anderen Vektor $|\varphi'\rangle$ (welcher zufällig auch der gleiche sein kann) zuordnet.

¹⁰ Die Operationen Transponieren und Komplex-Konjugieren sind kommutativ, es gilt also auch $(u^T)^* u = I$.

¹¹ Wir werden noch sehen, dass eine Teilwelt im Allgemeinen nicht durch einen Zustandsvektor beschrieben werden kann, sondern nur durch einen sogenannten Dichteoperator.

¹² Das heißt aber auch: ohne Umgebung gibt es keine bevorzugte Basis. Erst durch eine Trennung in Teilwelten kann sich eine bevorzugte Basis herausbilden, abhängig davon, wie man den Schnitt zieht.

$$|\varphi\rangle \xrightarrow{\mathcal{L}} |\chi\rangle = \mathcal{L} |\varphi\rangle \quad (73)$$

Die Vektoren lassen sich stellvertretend durch ihre Komponenten bezüglich einer Basis $|v_k\rangle$ ausdrücken, für diese Komponenten muss der Operator \mathcal{L} eine entsprechende Wirkung haben:

$$\varphi(k) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi(k) = \mathcal{L} \varphi(k) \quad (74)$$

- Einheitsoperator **1**: ordnet jedem Vektor sich selbst zu
- Nulloperator **0**: ordnet jedem Vektor den Nullvektor zu, der in allen Basen nur aus 0-Komponenten besteht.

Die Operatoren der Quantentheorie sind linear:

$$\mathcal{L} |\varphi_1 + \varphi_2\rangle = \mathcal{L} |\varphi_1\rangle + \mathcal{L} |\varphi_2\rangle$$

$$\mathcal{L} |a\varphi\rangle = a \mathcal{L} |\varphi\rangle$$

Summe von Operatoren:

$$(\mathcal{L} + \mathcal{M}) |\varphi\rangle = \mathcal{L} |\varphi\rangle + \mathcal{M} |\varphi\rangle$$

Produkt von Operatoren (**nicht kommutativ**):

$$\mathcal{L} \mathcal{M} |\varphi\rangle = \mathcal{L} |\mathcal{M} \varphi\rangle = |\mathcal{L} \mathcal{M} \varphi\rangle$$

Als **Kommutator** definiert man:

$$\mathcal{M} \mathcal{L} - \mathcal{L} \mathcal{M} = [\mathcal{M}, \mathcal{L}] \text{ oder einfach } [\mathcal{M}, \mathcal{L}]$$

Wie bei den Matrizen und den Differentialoperatoren lassen sich über Taylorreihen wieder Funktionen von linearen Operatoren definieren, die wiederum lineare Operatoren sind.

$$e^{\mathcal{L}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathcal{L}^n$$

Durch die Definition der (partiellen) Ableitung einer Operatorfunktion $\mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots)$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{L}_1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{F}(\mathcal{L}_1 + \varepsilon \mathbf{1}, \mathcal{L}_2, \dots) - \mathcal{F}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots)}{\varepsilon}$$

lassen sich sogar Differentialgleichungen für Operatoren formulieren.

Tensorprodukt als linearer Operator

Analog zum Tensorprodukt, das wir schon kennen, lässt sich auch im unitären Raum aus 2 Vektoren $|u\rangle$ und $|v\rangle$ ein Tensorprodukt definieren, das als $|u\rangle\langle v|$ geschrieben wird. Dieses Konstrukt ist ein linearer Operator mit dieser Eigenschaft:

$$|\varphi\rangle \xrightarrow{|u\rangle\langle v|} |\chi\rangle = |u\rangle \langle v|\varphi\rangle$$

Wie bei den Matrizen ist nicht jeder lineare Operator ein Tensorprodukt, doch jeder lineare Operator kann als Summe/Integral über Tensorprodukte dargestellt werden. Die Zerlegung ist wieder nicht eindeutig.

Den Einheitsoperator kann man ablesen aus der Entwicklung eines Vektors nach irgendeiner Basis ((69) bzw. (70)):

$$I = \sum_k |v_k\rangle \langle v_k| dk \quad (75)$$

Die $|v_k\rangle \langle v_k|$ sind Projektionsoperatoren auf die Basisvektoren. Diese Zerlegung des Einheitsoperators in Projektionsoperatoren gilt für jede Orthonormalbasis: $|v_k\rangle$, $|u_x\rangle$, ...

Matrizelemente eines Operators

Ein abstrakter Vektor erhält durch die Wahl einer Basis konkrete Komponenten: ein Zahlentupel oder eine Funktion einer Veränderlichen. Genauso bekommt ein linearer Operator durch die Wahl dieser Basis entsprechende Komponenten: eine Matrix oder¹³ eine Funktion zweier Veränderlicher.

Über die Definition des Einheitsoperators lässt sich die Wirkung eines Operators auf die Komponenten eines Vektors (74) so ausdrücken:

$$\mathcal{L}|\phi(k')\rangle = \mathcal{L} \langle v'_k | \phi \rangle \equiv \langle v'_k | \mathcal{L} \phi \rangle = \sum_k \langle v'_k | \mathcal{L} v_k \rangle \langle v_k | \phi \rangle \equiv \sum_k L(k', k) \phi(k) \quad (76)$$

Die Matrizelemente eines Operators sind also:

$$L(k', k) \equiv \langle v'_k | \mathcal{L} v_k \rangle \quad (77)$$

Transformation der Matrizelemente

Analog zu (34) transformieren sich die Matrizelemente eines linearen Operators beim Wechsel zu einer anderen Basis (ein Basiswechsel ist eine lineare Transformation):

$$L(x', x) = \sum_{k'} \sum_k v(x', k') L(k', k) v^*(x, k) dk' dk \quad (78)$$

Ein Vergleich mit $\mathbf{T}' = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$ für Transformationen von Matrizen \mathbf{T} durch orthogonale Matrizen \mathbf{Q} liefert uns die Entsprechungen:

- $L(x', x)$ entspricht \mathbf{T}' , der transformierten Matrix
- $L(k', k)$ entspricht \mathbf{T} , der ursprünglichen Matrix
- $v(x', k')$ entspricht der Transformationsmatrix \mathbf{Q}
- $v^*(x, k)$ entspricht der inversen Transformationsmatrix \mathbf{Q}^{-1} (es kommt lediglich die komplexe Konjugation hinzu)

DIE SPUR EINES OPERATORS – EINE KOMPLEXE ZAHL - IST ALS SUMME ÜBER SEINE DIAGONALELEMENTE DEFINIERT. ZEIGE, DASS DIE SPUR UNABHÄNGIG VON DER WAHL DER BASIS IST (BILDE DIE SPUR VON (78) UND BEACHT DIE ORTHONORMIERUNG DER BASISVEKTOREN)!

(79)

$$\text{Sp } \mathcal{L} = \sum_k L(k, k) dk$$

Die Basisunabhängigkeit der Spur macht es möglich, sie als Modell für wirkliche Größen zu verwenden. Die Spur kommt zur Anwendung in der von-Neumann-Entropie. Sie wird zur konkreten Berechnung in einer bestimmten Basis gebildet, ihr Wert ist trotzdem darstellungsunabhängig.

¹³ Kein entweder-oder: es kann auch Mischungen geben.

Spezielle Operatoren

Inverser Operator

Falls er existiert:

$$\mathcal{L} \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{L}^{-1} \mathcal{L} = I$$

Vergleiche (25). Analog gilt im unitären Raum:

$$(\mathcal{L}^{-1})^{-1} = \mathcal{L}, \quad (a \mathcal{L})^{-1} = \frac{1}{a} \mathcal{L}^{-1}$$

$$(\mathcal{L} \mathcal{M})^{-1} = \mathcal{M}^{-1} \mathcal{L}^{-1}$$

Ist der Operator F eine Funktion f von anderen Operatoren F_1, F_2, \dots , dann ist seine Transformierte F'

$$\mathcal{A} F \mathcal{A}^{-1} = f(\mathcal{A} F_1 \mathcal{A}^{-1}, \mathcal{A} F_2 \mathcal{A}^{-1}, \dots)$$

Man kann also einfach seine Argumente durch die transformierten Operatoren austauschen.¹⁴

Adjungierter Operator

Bildet man mit zwei beliebigen Vektoren $|\varphi\rangle$ und $|\chi\rangle$ das Skalarprodukt $\langle \varphi | L \chi \rangle$, so kann man nach dem Operator L^\dagger fragen, für den gilt:

$$\langle \chi | \mathcal{L} \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}^\dagger \chi | \varphi \rangle \quad (80)$$

Den hierdurch definierten Operator L^\dagger nennt man den **adjungierten** Operator.

ZEIGE: AUS (80) FOLGT

$$\langle \mathcal{L} \chi | \varphi \rangle = \langle \chi | \mathcal{L}^\dagger \varphi \rangle \quad (81)$$

Der adjungierte Operator hat die Matrixelemente

$$L^\dagger(k', k) = L(k, k')^* \quad (82)$$

D.h. man gewinnt sie aus den Matrixelementen des Operators L durch Transponieren und Komplexkonjugieren. Vgl. $\mathbf{a}^\top (\mathbf{M} \mathbf{b}) = (\mathbf{a}^\top \mathbf{M}) \mathbf{b} = (\mathbf{a}^\top \mathbf{M})^\top \mathbf{b} = (\mathbf{M}^\top \mathbf{a})^\top \mathbf{b}$ bei Matrizen, wenn \mathbf{a}^\top ein Zeilenvektor ist und \mathbf{b} ein Spaltenvektor. \mathbf{M}^\top entspricht dem adjungierten Operator, hinzugekommen ist nur die komplexe Konjugation.

Regeln für adjungierte Operatoren (entsprechen denen für transponierte Matrizen):

$$\mathcal{L}^{\dagger\dagger} = \mathcal{L}, \quad (\mathcal{L}^{-1})^\dagger = (\mathcal{L}^\dagger)^{-1}, \quad (a \mathcal{L})^\dagger = a^* \mathcal{L}^\dagger$$

$$(\mathcal{L} + \mathcal{M})^\dagger = \mathcal{L}^\dagger + \mathcal{M}^\dagger, \quad (\mathcal{L} \mathcal{M})^\dagger = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{L}^\dagger$$

Hermiteische Operatoren

Ist ein Operator mit seinem adjungierten identisch, so heißt er selbstadjungiert oder **hermitesch**.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^\dagger \quad (83)$$

Die Entsprechung bei Matrizen wäre also eine symmetrische Matrix. Hinzugekommen ist die komplexe Konjugation.

ZEIGE MIT HILFE VON (82), DASS FÜR DIE MATRIXELEMENTE EINES HERMITESCHEN OPERATORS GILT:

$$H(k', k) = H(k, k')^* \quad (84)$$

¹⁴ Das gilt für Linearkombinationen und Potenzen, damit auch für Funktionen, die sich in Taylorreihen entwickeln lassen.

Die Elemente, die symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen, sind zueinander konjugiert komplex. Die Diagonalelemente sind reell. Für einen Hermiteschen Operator ist das **Skalarprodukt** $\langle \varphi | H \varphi \rangle$ **reell**. Es wird in der Quantentheorie verwendet als mathematisches Modell für mögliche „Messwerte“¹⁵.

Regeln für hermitesche Operatoren:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} + \mathcal{K} &= \text{HERMITESCH} \\
 a \mathcal{H} &= \text{HERMITESCH, falls } a \text{ reell} \\
 \mathcal{H}^n &= \text{HERMITESCH (} n \text{ positiv oder negativ ganz)} \\
 \mathcal{F}(\mathcal{H}) = \sum_n a_n \mathcal{H}^n &= \text{HERMITESCH, falls } a_n \text{ reell} \\
 \mathcal{H} \mathcal{K} + \mathcal{K} \mathcal{H} &= [\mathcal{H}, \mathcal{K}] = \text{HERMITESCH} \\
 \mathcal{H} \mathcal{K} &= \text{HERMITESCH, falls } \mathcal{H} \mathcal{K} = \mathcal{K} \mathcal{H} \\
 i(\mathcal{H} \mathcal{K} - \mathcal{K} \mathcal{H}) = i[\mathcal{H}, \mathcal{K}] &= \text{HERMITESCH} \\
 \mathcal{A} \mathcal{H} \mathcal{A}^{-1} &= \text{HERMITESCH für einen beliebigen Operator } \mathcal{A} \\
 \frac{d\mathcal{H}(t)}{dt} &= \text{HERMITESCH.}
 \end{aligned}$$

Unitäre Operatoren

Ein Operator heißt **unitär**, wenn sein adjungierter Operator gleich seinem inversen Operator ist:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}^{-1} &= \mathcal{U}^\dagger \\
 \mathcal{U} \mathcal{U}^\dagger &= \mathcal{U}^\dagger \mathcal{U} = 1
 \end{aligned}$$

Damit sind unitäre Operatoren das Pendant zu den orthogonalen Matrizen.

ZEIGE, DASS UNITÄRE OPERATOREN DAS SKALARPRODUKT INVARIANT LASSEN!

$$\langle \mathcal{U} \varphi | \mathcal{U} \chi \rangle = \langle \varphi | \chi \rangle \quad (85)$$

Insbesondere bleiben orthogonale Vektoren bei einer Transformation mit einem unitären Operator orthogonal.

Regeln für unitäre Operatoren:

$$\begin{aligned}
 a \mathcal{U} &= \text{unitär, falls } a a^* = 1 \\
 \mathcal{U}^n &= \text{unitär (} n \text{ positiv oder negativ ganz)} \\
 \mathcal{U} \mathcal{V} &= \text{unitär} \\
 i \frac{\mathcal{U} - 1}{\mathcal{U} + 1} &= \text{HERMITESCH,}
 \end{aligned}$$

und falls \mathcal{H} HERMITESCH ist,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U} \mathcal{H} \mathcal{U}^{-1} &= \text{HERMITESCH} \\
 e^{i\mathcal{H}} &= \text{unitär} \\
 \frac{1 - i\mathcal{H}}{1 + i\mathcal{H}} &= \text{unitär.}
 \end{aligned}$$

WIE VIELE UNABHÄNGIGE REELLE PARAMETER BESITZT DIE MATRIX EINES BELIEBIGEN HERMITESCHEN BZW. UNITÄREN OPERATORS IN EINEM N-DIMENSIONALEN UNITÄREN RAUM?

(86)

¹⁵ Auf das schwierige Problem mit den „Messungen“ werden wir noch kommen.

ZEIGE, DASS DIESE MATRIX UNITÄR IST!

$$\frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

(87)

Projektionsoperatoren

Die mit Einheitsvektoren gebildeten Tensorprodukte $|u\rangle\langle u|$ nennt man Projektionsoperatoren.

$$\mathcal{P}_{|u\rangle} = |u\rangle\langle u|$$

Wir kennen bereits entsprechende Matrizen, die aus einer einzigen 1 in der Hauptdiagonale bestehen.

Projektionsoperatoren¹⁶ sind linear, hermitesch und haben die Eigenschaft:

$$\mathcal{P}_{|u_i\rangle} \mathcal{P}_{|u_k\rangle} = \delta(i, k) \mathcal{P}_{|u_i\rangle}$$

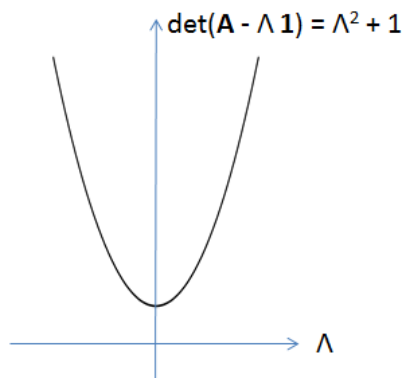
Eigenwerte und Eigenvektoren

Wie bei Matrizen und Differentialoperatoren lassen sich auch bei linearen Operatoren auf dem unitären Raum Eigenvektoren und Eigenwerte einführen:

$$|\mathcal{L} u_A\rangle = \Lambda |u_A\rangle \quad (88)$$

Nun aber ist der Eigenwert Λ eine komplexe Zahl. Die Gesamtheit aller Eigenwerte eines Operators nennt man **Spektrum**. Es kann diskret oder kontinuierlich sein oder aus diskreten und kontinuierlichen Abschnitten zusammengesetzt sein. Mit (75) ergibt sich für die Matrixelemente

$$\sum_{k'} L(k, k') u_A(k') = \Lambda u_A(k) \quad (89)$$



Ist der zugrunde liegende Raum n-dimensional, dann bekommen wir nach (27) jetzt n Lösungen, denn anders als im Reellen sind auch die komplexen Wurzeln als Lösungen zugelassen.

Zum Beispiel hat das charakteristische Polynom $\Lambda^2 + 1 = 0$ (einer 2x2 Matrix) die beiden Nullstellen $+i$ und $-i$, während es im Reellen keine Lösung hat (links).

Eigenwerte spezieller Operatoren

Für die Eigenwerte von Operatoren gilt $\langle u_\Lambda | L u_\Lambda \rangle = \Lambda \langle u_\Lambda | u_\Lambda \rangle$,

für hermitesche darüber hinaus $\langle u_\Lambda | L u_\Lambda \rangle = \langle L^\dagger u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \langle L u_\Lambda | u_\Lambda \rangle = \Lambda^* \langle u_\Lambda | u_\Lambda \rangle$.

Wenn $|u_\Lambda\rangle$ nicht der Nullvektor ist, folgt $\Lambda = \Lambda^*$.

Die Eigenwerte hermitescher Operatoren sind reell.

¹⁶ kurz: „Projektor“

Sie eignen sich als Modelle reeller physikalischer Größen: Ort, Impuls, Energie, ...

Allgemeiner bekommen wir die Gleichung

$$\begin{aligned}\langle u_{A'} | \mathcal{L} u_A \rangle &= \Lambda \langle u_{A'} | u_A \rangle \\ &= \langle \mathcal{L} u_{A'} | u_A \rangle = \Lambda'^* \langle u_{A'} | u_A \rangle \\ (\Lambda - \Lambda'^*) \langle u_{A'} | u_A \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Wenn die Eigenwerte Λ und Λ' verschieden sind, dann müssen die Eigenvektoren orthogonal sein.

Die Eigenvektoren eines hermiteschen Operators sind zueinander orthogonal.

ZEIGE, DASS DIE OPERATOREN L^{-1} UND L^\dagger DIESELBEN EIGENVEKTOREN HABEN WIE L UND DASS IHRE EIGENWERTE Λ^{-1} BZW. Λ^* SIND.

(90)

Die Eigenwerte eines unitären Operators sind komplexe Zahlen vom Betrag 1.

Gemeinsame Eigenvektoren vertauschbarer Operatoren

Wendet man auf die Eigenwertgleichung (88) einen Operator M an, der mit L vertauschbar ist¹⁷, dann ergibt sich:

$$M \mathcal{L} |u_A\rangle = \mathcal{L} M |u_A\rangle = \Lambda M |u_A\rangle$$

Das rechte Gleichheitszeichen bedeutet, dass auch $M|u_A\rangle$ ein Eigenvektor von L zum Eigenvektor Λ ist.

Invarianz des Eigenwertspektrums bei unitären Transformationen

Ein Eigenvektor $|u_A\rangle$ von L soll mit der Transformation A transformiert werden $\rightarrow A|u_A\rangle$. Welches Eigenwertspektrum besitzt der transformierte Operator $L' = A L A^{-1}$? Es ergibt sich:

$$\mathcal{L}' |A u_A\rangle = A \mathcal{L} |u_A\rangle = \Lambda |A u_A\rangle$$

Er besitzt also dasselbe Eigenwertspektrum. Die Invarianz gegenüber Basiswechseln macht es zum Kandidaten zur Modellierung der Wirklichkeit.

Wenn A insbesondere unitär ist, dann bleiben die Skalarprodukte bei der Transformation erhalten. Hatte L ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren (siehe nächster Abschnitt), dann hat dies auch L' .

L-Darstellung des unitären Vektorraums

Wenn ein hermitescher Operator einen vollständigen Satz von Eigenvektoren hat, so dass jeder Vektor des unitären Raumes als Linearkombination dieser Eigenvektoren geschrieben werden kann, dann bilden seine Eigenvektoren ein *vollständiges Orthonormalsystem*.¹⁸

Orthonormierung und Vollständigkeit:

$$\langle u_A | u_{A'} \rangle = \delta(A, A') \quad \text{und} \quad \sum_A |u_A\rangle \langle u_A| dA = I$$

¹⁷ Die Multiplikation von unitären Operatoren ist i.a. nicht kommutativ, d.h. analog zur Multiplikation von Matrizen und Differentialoperatoren. Es gibt jedoch vertauschbare Operatoren. Bei den Matrizen vertauschen zum Beispiel M und ihre Inverse M^{-1} .

¹⁸ Abgekürzt VONS, manchmal auch VNOS.

Die Entwicklung irgendeines Vektors:

$$|\varphi\rangle = \int_A |u_A\rangle \varphi(A) dA, \quad \varphi(A) = \langle u_A | \varphi \rangle$$

Die Eigenvektoren von L bilden damit eine Basis des unitären Raumes. Man spricht von der **L-Darstellung**, wenn die Komponenten und Matrixelemente von Vektoren und Operatoren auf diese Basis bezogen gemeint sind. Die Eigenwerte Λ nummerieren dann die Komponenten/Matrixelemente. Sie können wieder diskret, kontinuierlich oder gemischt sein.

In der Quantentheorie werden physikalische Größen wie Ort, Impuls, Energie, ... durch Operatoren dargestellt. Man bekommt dadurch Orts-, Impuls-, Energie-, ... Darstellungen der mathematischen Objekte des unitären Raumes.

Der Operator L lässt sich in seiner eigenen Basis sehr einfach ausdrücken. Jeder Operator lässt sich in jeder Basis als Summe von Tensorprodukten ausdrücken¹⁹:

$$\mathcal{L} = \sum_k |\mathcal{L} v_k\rangle \langle v_k| dk$$

In der Eigenbasis u_Λ also:

$$\mathcal{L} = \sum_A \Lambda |u_A\rangle \langle u_A| dA = \sum_A \Lambda \mathcal{P}_{|u_A\rangle} dA$$

Diese Darstellung heißt **Spektraldarstellung** von L. Sie entspricht einer Diagonalmatrix.

In der Spektroskopie von Atomen und Molekülen beobachtet man Energiedifferenzen in Form der Frequenz (oder Wellenlänge) des abgestrahlten oder absorbierten Lichts: das Atom oder Molekül wechselt seinen Energieinhalt, die Differenz wird zu elektromagnetischer Strahlung oder bzw. dieser entnommen. Diese Energiedifferenzen sind in der Quantentheorie Differenzen von Eigenwerten eines hermiteschen Operators (des Hamiltonoperators).

In vollkommener Analogie zu (46), wo wir gesehen haben, dass die Funktion F einer Diagonalmatrix M eine Diagonalmatrix mit den Komponenten $F(M_{ii})$ ist, überträgt sich in der L-Darstellung die Wirkung einer Operatorfunktion $F(L)$ auf die Eigenwerte:

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}) = \sum_A F(\Lambda) \mathcal{P}_{|u_A\rangle} dA$$

Produktraum

Philosophischer Ausflug

Shannonsche Informationstheorie

Der komplizierte Aufbau eines klassischen physikalischen Bits.

SCHAU DIR BEI YOUTUBE DIESE VIDEOS AN!

DOPPELPALT KLASSISCH https://youtu.be/eyBI_L9IgLI

DOPPELPALT QUANTENMECHANISCH <https://youtu.be/3ohjOltaO6Y>

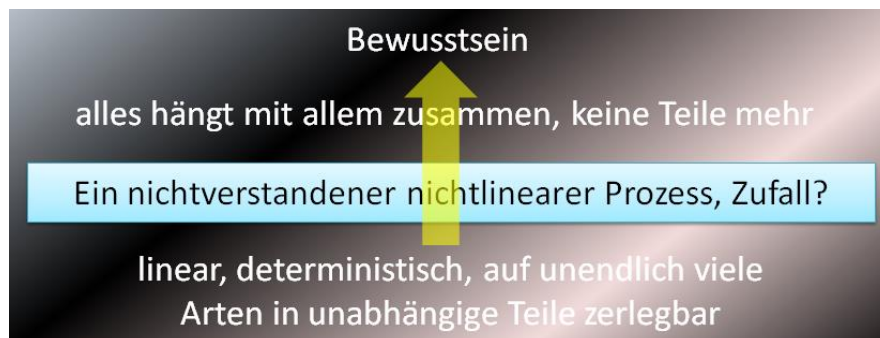
(91)

¹⁹ Für eine vollständige Basis gilt ja immer $\sum_k |v_k\rangle \langle v_k| = \mathbf{1}$

Zeilinger

<https://youtu.be/L-zC2k13nMM>

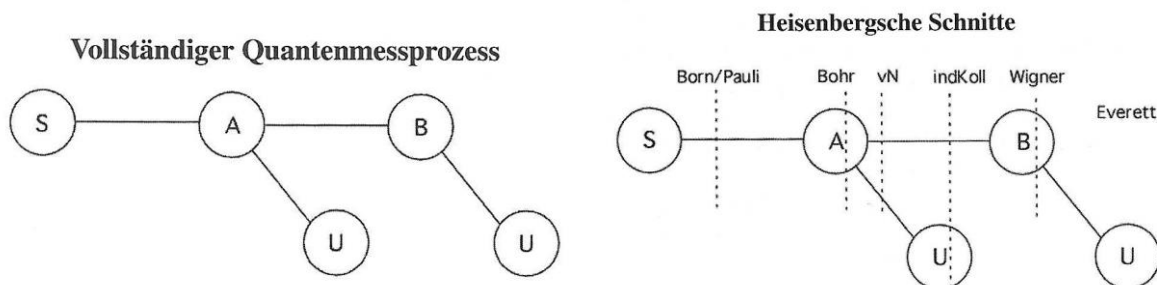
Quantentheorie



- alles über 1 Kamm scheren: Hilbertraum und lineare Operatoren als abstraktes Modell für Funktionen/n-Tupel und lineare Differential- und Matrixoperatoren
- Die aufgrund der Linearität beliebige Zerlegbarkeit (freie Wahl der Basis), z.B. Fouriertransformation
- Eigenwerte linearer Operatoren
- Das Skalarprodukt. Die Zweischichtigkeit: linear und nichtlinear
- Produkträume, offene Quantensysteme, Dichteoperatoren, Verschränkung und Ganzheit
- halbklassisch, Korrespondenzprinzip
- es gibt eine absolute Zeit (passend zu unserer Alltagsvorstellung, erst mal ausreichend für Quantenrechner)
- Schrödingergleichung, Pauligleichung
- Beispiele (Wasserstoffproblem, harmonischer Oszillator)
- Die unitäre Zeitentwicklung: „es geschieht nichts“ (Heisenberg). Integration der Schrödingergleichung.

Interpretationen der Quantentheorie

- Das Messproblem: seine Dreifaltigkeit und 2/3 Lösung durch Dekohärenztheorie
- Das verbleibende schlimme 1/3: die totlebende Schrödingerkatze.
- Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation (z.B. Stern-Gerlach-Experimente) mit Kollaps der Wellenfunktion
- Wigners Freund, Heisenbergsche Schnitte
- Die Viele-Welten-Interpretation („many minds“)
- [Die „shut up and calculate“ Interpretation]
- Es gibt keine Teilchen, es gibt keine Materiefelder, es gibt Symmetrien, mathematikartige Gesetze, Bewusstsein.



Quanteninformation

- [Das Problem des Kontinuums mit der Information, die Willkür der Einteilung, absolute Information durch schwarze Löcher?]
- Q-Bit als kleinste sinnvolle Einheit, die Beziehung zwischen Q-Bit und klassischem Bit
- Q-Bit Beispiele (es gibt auch Q-Trits, ...)
- Produkträume von Q-Bits und unitäre Zeitentwicklung = Quantenrechner
- In etwa bis zur Hälfte von <https://quantiki.org/wiki/basic-concepts-quantum-computation> oder Matthias Homeister

No Cloning Theorem

Wie wir vorstehend gesehen haben, ist die westliche Logik im wesentlichen auf das Gesetz der Identität begründet. Auf ihr beruhen Einteilung, Definition, Syllogismus (Vernunftschluss) und sogar Umkehrung und Widerspruch. Alle diese Begriffe stehen miteinander in Beziehung und bilden ein System.

*Die grundlegende Struktur des Chinesischen unterscheidet sich von diesem System. Das chinesische System der Logik, wenn wir es überhaupt ein System nennen wollen, beruht **nicht** auf dem Gesetz der Identität.*

[Chang Tun-Sun]

Die physikalische Realisierung eines klassischen Bits kann auch nicht kopiert werden.

Literaturverweise und Aufgaben in den einzelnen Kapiteln