Ein Kanal heißt *verrauscht*, wenn die Bits während des Transports Störungen ausgesetzt sind. Ein verrauschter Quantenkanal liefert ein Quantenbit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ in der Form $\alpha'|0\rangle + \beta'|1\rangle$ beim Adressaten ab, wobei zu hoffen ist, dass α' und β' von α und β nicht zu sehr abweichen.

5.1 Quantenteleportation

Alice ist im Besitz eines Quantenbits und möchte dieses Bob mitteilen. Leider gibt es zu diesem Zeitpunkt keinen Quantenkanal zwischen den beiden. Alice und Bob können lediglich telefonieren. Damit sind sie über einen klassischen Kanal verbunden; der Versuch, das Quantenbit damit zu übertragen muss allerdings scheitern. Um etwas über das Quantenbit herauszubekommen, muss Alice es messen. Dabei wird der Zustand des Quantenbits eventuell zerstört. In Abschnitt 2.8 haben wir gesehen, dass es prinzipiell unmöglich ist, den genauen Zustand eines Qubits zu ermitteln.

Besitzen Alice und Bob jedoch jeweils ein Bit eines *verschränkten* Paares von Quantenbits – die Hälfte eines EPR-Paares – so ist folgendes möglich: Alice verschränkt das zu übermittelnde Quantenbit mit ihrer Hälfte des EPR-Paares. Sie misst ihre Bits, und ohne zeitlichen Abstand ändert sich das Quantenbit in Bobs Besitz. Dieses Verhalten haben wir bereits in Abschnitt 2.11 über Verschränkung studiert. Um die Teleportation zu vollenden, muss Alice ihr Messergebnis an Bob schicken; dazu genügt jedoch ein klassisches Kommunikationsmedium, zum Beispiel ein Telefon.

Der Algorithmus zur Quantenteleportation

Aufgabenstellung: Alice besitzt ein Quantenbit $|x\rangle$ im Zustand $|\psi\rangle$. Dieses Qubit soll Bob übermittelt werden.

Voraussetzung: Alice besitzt ein Quantenbit $|a\rangle$ und Bob ein Quantenbit $|b\rangle$, die sich in dem verschränkten Zustand $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ befinden. Alice kann Bob zwei klassische Bits senden.

Ergebnis: Nach Ausführung der folgenden Schritte befindet sich Bobs Bit im Zustand $|\psi\rangle$.

X ist die Vertauschung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und Z die Transformation

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

siehe Abschnitt 3.3.

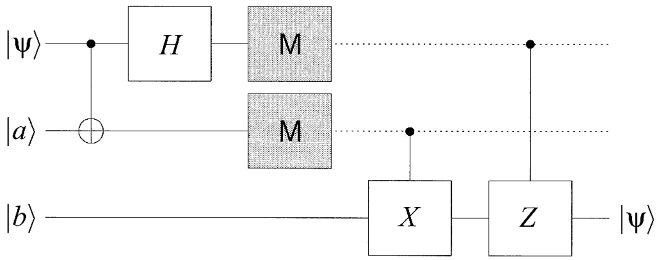

Abbildung 5.2: Schaltkreis zur Teleportation. Die gebrochene Linie stellt einen klassischen Kanal dar

1. Alice wendet ein CNOT-Gatter an:
   $|x\rangle|a\rangle \leftarrow |x\rangle|a \oplus x\rangle$
2. Alice wendet auf das zu übermittelnde Bit die Hadamard-Transformation an:
   $|x\rangle \leftarrow H|x\rangle$
3. Alice misst ihre Bits und übermittelt die Ergebnisse x und a über einen klassischen Kanal an Bob.
4. Ist $a = 1$, wendet Bob die Transformation X auf sein Bit an:
   $|b\rangle \leftarrow X|b\rangle$
5. Ist $x = 1$, wendet Bob die Transformation Z auf sein Bit an:
   $|b\rangle \leftarrow Z|b\rangle$

Dem Algorithmus entspricht der Schaltkreis aus Abbildung 5.2. Die linke Hälfte ist der Anteil von Alice, die rechte ist Bobs Berechnung. Die gebrochene Linie entspricht der klassischen Übermittlung der Messergebnisse an Bob. An dem Schaltkreis wird außerdem deutlich, dass das Bit $|b\rangle$ zu Bob gelangen muss. Dazu bedarf es im Prinzip eines Quantenkanals; allerdings kann dieses Bit schon lange Zeit vor der Teleportation transportiert worden sein. Wir stellen uns vor, Bob hat es beim Abschied von Alice mitgenommen.

Es ist auch möglich, dass Alice und Bob nie über einen Quantenkanal verbunden waren, wenn eine dritte Person namens Charlotte Quantenbits an Alice und Bob schicken kann. Charlotte hat irgendwann ein EPR-Paar erzeugt und die Hälften Alice und Bob übermittelt.

Eine weitere interessante Möglichkeit diskutieren wir am Ende des Abschnitts: Wenn zwischen Alice und Bob ein verrauschter Quantenkanal und ein klassischer Kanal existieren, kann mit Hilfe der Teleportation ein Quantenkanal ohne Rauschen erzeugt werden.

Analyse

Bei verschränkten Quantenbits spielt die räumliche Distanz keine Rolle. Wir betrachten bei der Analyse stets den Zustand des „Registers“ $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$. Es gelte $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Dann befindet sich das Register $|x\rangle|a\rangle|b\rangle$ anfangs im Zustand

$$\begin{aligned} |\phi_0\rangle &= (\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle+|11\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|011\rangle)+\frac{\beta}{\sqrt{2}}(|100\rangle+|111\rangle). \end{aligned}$$

Im ersten Schritt wendet Alice CNOT mit dem Folgezustand

Alice' Schritte

$$|\phi_1\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(|000\rangle+|011\rangle)+\frac{\beta}{\sqrt{2}}(|110\rangle+|101\rangle)$$

an. Die Hadamard-Transformation überführt $|\phi_1\rangle$ in

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle+|1\rangle)\right)(|00\rangle+|11\rangle) \\ &\quad +\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle-|1\rangle)\right)(|10\rangle+|01\rangle) \\ &= \frac{\alpha}{2}(|000\rangle+|011\rangle+|100\rangle+|111\rangle) \\ &\quad +\frac{\beta}{2}(|010\rangle+|001\rangle-|110\rangle-|101\rangle). \end{aligned}$$

Wir stellen den Term so um, dass wir das Ergebnis der Messung der ersten beiden Bits erkennen:

$$\begin{aligned} |\phi_2\rangle &= \frac{1}{2}\Big(|00\rangle(\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle)+|01\rangle(\beta|0\rangle+\alpha|1\rangle) \\ &\quad +|10\rangle(\alpha|0\rangle-\beta|1\rangle)-|11\rangle(\beta|0\rangle-\alpha|1\rangle)\Big). \end{aligned}$$

Alice' Messung im dritten Schritt ergibt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/4$ eines der Ergebnisse $|00\rangle, |10\rangle, |01\rangle$ oder $|11\rangle$. Gleichzeitig geht das dritte Bit – im Besitz von Bob – in einen an Alice' Ergebnis gekoppelten Zustand über.

Alice' Ergebnis	Zustand von Bobs Bit
$\|00\rangle$	$\alpha\|0\rangle+\beta\|1\rangle$
$\|01\rangle$	$\alpha\|1\rangle+\beta\|0\rangle$
$\|10\rangle$	$\alpha\|0\rangle-\beta\|1\rangle$
$\|11\rangle$	$\alpha\|1\rangle-\beta\|0\rangle$

Bobs Schritte

Erhält Alice das Ergebnis $|00\rangle$, ist Bobs Bit durch die Messung in den Zustand $|\psi\rangle$ übergegangen, und die Teleportation ist vollzogen. In den anderen Fällen kann Bob den Zustand $|\psi\rangle$ leicht herstellen, vorausgesetzt er kennt das Ergebnis der Messung. Das trifft zu: es wurde ihm über einen klassischen Kanal mitgeteilt. Ist Alice' Ergebnis $|01\rangle$, muss er die Amplituden von $|0\rangle$ und $|1\rangle$ tauschen. Das gelingt ihm mit der Transformation X. Im Fall $|10\rangle$, negiert er mit Z das Vorzeichen der Amplitude von $|1\rangle$, und im Fall $|11\rangle$ führt er X und Z aus. ◇

Alice muss Bob für den Vollzug der Teleportation etwas mitteilen. Das hat etwas Beruhigendes. Denn nach Einsteins Relativitätstheorie kann sich nichts schneller bewegen als das Licht. Ein Transport von Information ohne Zeitverzug würde diesem Grundprinzip widersprechen: *information is physical*, siehe Abschnitt 3.5. Bei unserem Verfahren kann Bob auf die unmittelbar übermittelten Informationen erst zugreifen, wenn er das langsamer als das Licht übermittelte Messergebnis kennt.

Alice kann nach ihrer Messung den Zustand $|\psi\rangle$ nicht mehr rekonstruieren. Ein anderes Ergebnis stünde auch im Widerspruch zu dem Ergebnis des Kapitels 3.4: Quantenbits lassen sich nicht kopieren.

Realisierung

Das Verfahren zur Quantenteleportation stammt von der international zusammengesetzten Forschergruppe Bennett, Brassard, Crépeau, Jozsa, Peres und Wooters und ist aus dem Jahr 1993. Die erste praktische Umsetzung gelang 1997 in Innsbruck. Bouwmeester, Pan, Mattle, Eibl, Weinfurter und Zeilinger teleportierten ein Quantenbit etwa einen Meter weit. Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ wurden als Polarisationen eines Photons verwirklicht, siehe Abschnitt 9.3. Eine der großen Herausforderungen war dabei die gemeinsame Messung zweier Bits in der Bell-Basis.

Heutzutage wird Quantenteleportation als Standardverfahren angesehen, dessen einzige Grenze durch die Distanz der verschränkten Bits gegeben ist. Bei Teleportationen über größere Entfernungen und außerhalb des Labors wird die Verschränkung der Bits $|a\rangle$ und $|b\rangle$ zum Problem. Theoretisch ist das Verhalten verschränkter Quantenbits von ihrer Entfernung völlig unabhängig. In der Praxis entstehen Probleme beim Transport und durch Wechselwirkung mit der Umgebung: reale Quantenkanäle sind immer verrauscht.

Verschränkungsreinigung

Abhilfe schafft ein Verfahren namens *entanglement purification* oder *Verschränkungsreinigung*. Wir nehmen an, Alice stellt ein verschränktes Paar von Quantenbits her und schickt eines davon an Bob. Ihr steht ein *verrauschter Kanal* zur Verfügung: das Quantenbit ist Störungen ausgesetzt und kommt verändert bei Bob an. Dadurch sind die beiden Bits eventuell nicht mehr maximal verschränkt. Zur Verschränkungsreinigung wiederholt Alice dieses Verfahren. Aus zwei nicht maximal verschränkten Paaren stellt sie eines her, dessen Grad an Verschränkung deutlich höher ist.

Theoretisch lässt sich so aus einem verrauschten Quantenkanal und einem klassischen Kanal ein Quantenkanal ohne Rauschen konstruieren. Dazu werden über den verrauschten Kanal so viele Hälften von EPR-Paaren geschickt, dass sich daraus mit Hilfe der Quantenreinigung ein sehr stark verschränktes Paar von Quantenbits erzeugen lässt. Die beiden Hälften dieses Paares befinden sich an den beiden Enden des verrauschten Kanals. Das eben beschriebene Verfahren zur Quantenteleportation ist anwendbar: wir können ein Quantenbit fehlerfrei übertragen, und ein Kanal ohne Rauschen ist entstanden.

Im Mai 2012 gelang einem chinesischen Team eine Teleportation über die Strecke von 97 Kilometern, siehe [57]. Es spricht nichts dagegen, dass mit der verwendeten Technik demnächst noch größere Distanzen überbrückt werden können, etwa zwischen der Erdoberfläche und einem Satelliten.

5.2 Dichte Kodierung

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren hat mit der Teleportation große Ähnlichkeit. Die Aufgabe ist allerdings eine andere.

- Eine Teleportation überträgt ein Quantenbit und nutzt dazu einen klassischen Kanal (Voraussetzung ist, dass die Kommunikationspartner ein verschränktes Bitpaar teilen).
- *Dichte Kodierung* macht es möglich, mit Hilfe eines Quantenkanals und eines Quantenbits *zwei klassische Bits* zu übertragen.

Bei dieser Art von Kodierung geht es um „Komprimierung“: von zwei klassischen Bits auf ein Quantenbit. Uns interessieren weniger mögliche Anwendungen, sondern die Erkenntnis: mit einem Quantenbit lässt sich unter bestimmten Umständen die doppelte Informationsmenge übermitteln, wie mit einem klassischen Bit.

Der Algorithmus zur dichten Kodierung

Alice möchte eine der vier Botschaften $00, 01, 10$ und 11 an Bob übermitteln. Alice besitzt ein Quantenbit $|a\rangle$ und Bob ein Quantenbit $|b\rangle$, die sich in dem verschränkten Zustand $|ab\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ befinden.

Die Transformation iY entspricht der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$