Quanteninformation

Harald Rieder, 2017

Inhalt

[Mathe-Auffrischung 1](#_Toc474427013)

[Vektoren und Matrizen 1](#_Toc474427014)

[Addition 2](#_Toc474427015)

[Multiplikation 2](#_Toc474427016)

[Weitere Operationen / Besondere Matrizen 4](#_Toc474427017)

[Transformationen 6](#_Toc474427018)

[Analysis 8](#_Toc474427019)

[Skalarprodukt 8](#_Toc474427020)

[Delta-Distribution 8](#_Toc474427021)

[Reihenentwicklungen 9](#_Toc474427022)

[Partielle Ableitungen 10](#_Toc474427023)

[Differentialgleichungen 11](#_Toc474427024)

[Komplexe Zahlen 11](#_Toc474427025)

[Gruppen 11](#_Toc474427026)

[Vektorräume 11](#_Toc474427027)

[Hilberträume 11](#_Toc474427028)

[Shannonsche Informationstheorie 11](#_Toc474427029)

[Philosophischer Ausflug 12](#_Toc474427030)

[Quantentheorie 12](#_Toc474427031)

[Interpretationen der Quantentheorie 12](#_Toc474427032)

[Quanteninformation 13](#_Toc474427033)

# Mathe-Auffrischung

## Vektoren und Matrizen

Spalten- und Zeilenvektoren mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {a}}={\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}}  \quad\quad {\mathbf  {b}}={\begin{pmatrix}4&6&3&7\end{pmatrix}} \quad\quad a_i \quad b_j \] \end{document} | Vektoren | (1) |

Matrizen mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {M}}={\begin{pmatrix}8&2&9\\4&8&2\\8&3&7\\5&9&1\end{pmatrix}} \quad\quad M_{ij} \] \end{document} | Matrix | (2) |

* Spalten- und Zeilenvektoren sind auch nur Matrizen! Ein Spaltenvektor ist eine einspaltige Matrix und ein Zeilenvektor eine einzeilige Matrix.
* Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe.  Skalare sind Tensoren nullter Stufe, Vektoren Tensoren erster Stufe, Matrizen Tensoren zweiter Stufe, …
* Quadratische Matrizen: Zeilenzahl = Spaltenzahl
* Physik: nur quadratische Matrizen (und kubische Tensoren 3. Stufe, ...) spielen eine Rolle.

Determinanten von Matrizen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \det {\mathbf A} =\det {\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \] \end{document} | Determinanten | (3) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \footnotesize {\det { \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \] \end{document} | DerminantenEntwicklung | (4) |

usw.

### Addition

Matrizen müssen gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, damit sie addiert werden können.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 & 2 & 7   \end{pmatrix}   +   \begin{pmatrix}     0 & 3 & 5 \\     2 & 1 & -1   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     1 & 0 & 7 \\     3 & 3 & 6   \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij} + N_{ij} \] \end{document} | Matrizenaddition | (5) |

* assoziativ: (M + N) + O = M + (N + O) = M + N + O
* kommutativ: M + N = N + M
* neutrales Element ist die Null-Matrix

### Multiplikation

#### Produkt aus Skalar und Matrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ 5 \cdot   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 &  2 & 7   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     5 & -15 & 10 \\     5 & 10  & 35   \end{pmatrix} \quad\quad a M_{ij}  \] \end{document} | Skalarmultiplikation | (6) |

#### Skalarprodukt von Vektoren

Diesmal wird nicht mit einem Skalar multipliziert, sondern das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar.

Rechts die Schreibweise mit Einsteinscher Summenkonvention: über Indizes, die doppelt vorkommen, wird automatisch summiert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ c =\sum_{i=1}^m a_i\cdot b_i \quad\quad c = a_i b_i \] \end{document} | Skalarprodukt | (7) |
| Was ist das Produkt von:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeSkalarprodukt | (8) |
| zur verschiedenen Schreibweise der beiden Vektoren siehe unten |  |  |

* Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ergibt, heißen orthogonal.
* Ein Satz von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

#### Matrizenmultiplikation

Alle Zeilenvektoren der 1. Matrix werden mit allen Spaltenvektoren der 2. Matrix skalarmultipliziert, siehe (7).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 \\     1 & 2    \end{pmatrix}   \cdot   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     -8 & 0 \\     4 & 5    \end{pmatrix} \quad\quad C_{ij}=\sum_{s=1}^m A_{is}\cdot B_{sj} \] \end{document} | Matrizenmultiplikation | (9) |

Ist A einzeilig und B einspaltig, dann haben sie beide nur den Index s, und (9) wird zu (7).

* assoziativ: (M N) O = M (N O) = M N O
* **nicht-kommutativ**: M N und N M sind im Allgemeinen verschieden! Matrizen können dadurch Vorgänge modellieren, die bei der Vertauschung einzelner Schritte nicht zum gleichen Ergebnis führen.
* neutrales Element ist die Einheitsmatrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf 1} = \begin{pmatrix} 1   &   0 & ... & 0 \\ 0   &   1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0   &   0 & ... & 1 \\ \end{pmatrix} \quad\quad \delta_{ij} \] \end{document} | Einheitsmatrix | (10) |

#### Tensorprodukt

Beim Tensorprodukt ergeben 2 Vektoren eine Matrix. Dieser Mechanismus ist bereits in (9) enthalten!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix}  =    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     2 & -6 & 4 \\     7 & -21 & 14    \end{pmatrix} \] \end{document} | Tensorprodukt | (11) |

* Nicht alle Matrizen können aus Vektoren auf diese Art produziert werden.
* Alle Matrizen lassen sich als Summe von Tensorprodukten darstellen. Nicht eindeutig!
* Enorm wichtig für die Quantentheorie! Produktraum, Dichtematrix, Zusammenhang mit Verschränkung…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ist diese Matrix ein Tensorprodukt aus Vektoren?  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeTensorprodukt | (12) |

Ist Die Einheitsmatrix ein Tensorprodukt?

#### Vektorprodukt

Aus 2 Vektoren entsteht wieder ein Vektor. In der Physik: Drehimpuls, anderes Transformationsverhalten („axialer Vektor“) wie die beiden ursprünglichen Vektoren. Historisch aus der Vorstellung eines dreidimensionalen Raums heraus entstanden.

Kann auch mit dem Levi-Civita-Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ausgedrückt werden:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[    \vec{a}\times\vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec e_k \quad\quad    c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \] \end{document} | Vektorprodukt | (13) |

[Dadurch abweichendes Transformationsverhalten eher einsichtig. Richtigerweise sollte man zwischen ko- und kontrvarianten Indizes unterscheiden. Dazu weiter unten...]

Kann auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden und tritt in der Physik hin und wieder auf. Wir werden ihn in der Quanteninformation eher nicht brauchen.

### Weitere Operationen / Besondere Matrizen

#### Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mathrm{Tr}     \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     2 & -6 & 4 \\     7 & -21 & 14    \end{pmatrix} = 9 \quad\quad \mathrm{Tr}(M_{ij}) = M_{ii} \] \end{document} | SpurMatrix | (14) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige mit der Indexschreibweise, dass Gilt  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mathrm{Tr}({\mathbf A} \cdot {\mathbf B}) = \mathrm{Tr}({\mathbf B} \cdot {\mathbf A})  \] \end{document} | AufgabeSpur | (15) |

#### Transposition / Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden getauscht. Indexschreibweise: Zeilen- und Spaltenindizes werden getauscht.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & 2 \\     3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad (M^T)_{ij} = M_{ji} \] \end{document} | Transposition | (16) |

Es gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ ({\mathbf M}^T)^T = {\mathbf M} \quad\quad ({\mathbf A} \cdot {\mathbf B})^T = {\mathbf B}^T \cdot {\mathbf A}^T \] \end{document} | TransponiertesProdukt | (17) |

#### Symmetrische Matrizen / Symmetrierung

Eine symmetrische Matrix ist gleich ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = M_{ij} \quad\quad {\mathbf M}^T = {\mathbf M} \] \end{document} | SymmetrischeMatrizen | (18) |

Erzeugung symmetrischer Matrizen aus beliebigen Matrizen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf M} + {\mathbf M}^T \] \end{document} | Symmetrierung | (19) |

Eine antisymmetrische Matrix ist gleich dem Negativen ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix}^T =   - \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = - M_{ij} \quad\quad {\mathbf M}^T = -{\mathbf M} \] \end{document} | AntisymmetrischeMatrizen | (20) |

Wie kann aus einer beliebigen Matrix analog zur Symmetrierung eine antisymmetrische Matrix erzeugt werden?

#### Inverse Matrizen

Definition:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf M} \cdot {\mathbf M}^{-1} = {\mathbf M}^{-1} \cdot {\mathbf M} = {\mathbf 1} \] \end{document} | InverseMatrix | (21) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass beide Produkte die Einheitsmatrix ergeben!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}\cdot {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}} \quad\quad {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}}\cdot  {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}  \] \end{document} | AufgabeInverseMatrix | (22) |

* Die Inverse der Inversen ist die ursprüngliche Matrix.
* Es gibt Matrizen, die ihre eigenen Inversen sind.

Es gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ ({\mathbf M}^{-1})^{-1} = {\mathbf M} \quad\quad (c {\mathbf M})^{-1} = c^{-1} {\mathbf M}^{-1} \quad\quad \operatorname{det}({\mathbf M}^{-1}) =  \operatorname{det}({\mathbf M})^{-1} \quad\quad ({\mathbf A} \cdot {\mathbf B})^{-1} = {\mathbf B}^{-1} \cdot {\mathbf A}^{-1} \] \end{document} | InverseMatrixRegeln | (23) |

#### Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

x ist ein Spaltenvektor:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf A}\cdot x=\lambda \,x \quad\quad ({\mathbf A} - \lambda\, {\mathbf I}) \cdot x = 0 \] \end{document} | EigenwerteMatrizen | (24) |

Ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, lösbar wenn

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\det \left({\mathbf A}-\lambda\, {\mathbf I}\right)=0} \] \end{document} | DeterminanteEigenwert | (25) |

Charakteristisches Polynom: seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Ist A eine n x n Matrix, dann gibt es höchstens n Eigenwerte.

Sind Eigenwerte gleich, dann heißen sie (Physik, historisch): entartet. Zu einem k-fachen Eigenwert gehören k Eigenvektoren, die einen k-dimensionalen Unterraum aufspannen (k <= n).

#### Orthogonale (Quadratische) Matrizen

Definition

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf Q}^T \cdot {\mathbf Q} = {\mathbf I} \] \end{document} | OrthogonaleMatrix | (26) |

D.h. automatisch

* Mit Q ist auch ihre Transponierte orthogonal.
* Die Zeilenvektoren sind orthogonal.
* Die Spaltenvektoren sind orthogonal.
* Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind auf 1 normiert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass die 2-dimensonale Drehmatrix all das erfüllt!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \] \end{document}  Orthogonal transformation qtl1.svg | AufgabeOrthogonaleMatrix | (27) |

Weiteres:

* det Q = 1
* Skalarprodukt der transformierten Vektoren = Skalarprodukt der untransformierten Vektoren.
* Eigenwerte sind +1 und/oder -1.
* Spiegelungen sind auch orthogonale Matrizen. Physik: Paritätsoperation spiegelt die Ortskoordinaten.
* Orthogonale Gruppe O(n), ohne Spiegelungen: SO(n). Kommt noch...

### Transformationen

Die Objekte der Physik sollen Modelle der Wirklichkeit sein. Soll die Wirklichkeit objektiv sein, so erwarten wir, dass sie nicht davon abhängt, welches Koordinatensystem wir wählen: Meter oder Zoll, Sekunden oder Minuten als Zeiteinheit, usw.

In der klassischen Mechanik glaubt man daran, dass die Gesetze unter diesen Transformationen (10-parametrige Galilei-Gruppe + Spiegelungen + Zeitumkehr) invariant sein müssen:

* Drehungen, s.o.
* Spiegelungen x‘ = -x (Quantentheorie → Parität)
* Zeitumkehr t‘ = -t
* Translationen x‘ = x + b (→ Ableitungen und Entfernungen, keine absoluten Orte)
* Translationen t‘ = t + a (→ Ableitungen nach der Zeit, keine absolute Zeit)
* Gleichförmige Bewegungen (Relativitätsprinzip) x‘ = x + v t

Für skalare Größen gilt: sie ändern sich dann nicht. Die Temperatur (statistische Physik: mittlere kinetische Energie, also klassische Mechanik) an einem Punkt (Objekt der Wirklichkeit) soll den gleichen Wert haben, egal ob wir direkt darauf schauen oder uns drehen und dann (wieder stillstehend) das Thermometer aus dem Augenwinkel heraus betrachten. Sie ändert sich auch nicht, wenn wir am Thermometer mit konstanter Geschwindigkeit vorbeifahren. Bei beschleunigten Bewegungen können sich die Gesetze jedoch ändern und tun dies auch fast immer, z.B. Corioliskraft, Zentrifugalkraft.

Für vektorielle Größen gilt: sie ändern ihren Betrag nicht, der ja eine skalare Größe ist, aber ihre Richtung in Bezug auf das neue Koordinatensystem. Vektoren in der Physik sind nicht irgendwelche Zahlen in Spalten oder Zeilen, sondern n Größen, die sich bei Transformationen wie ein Vektor transformieren, d.h. entweder kovariant oder kontravariant zum Transformationsverhalten der Vektoren, die das Koordinatensystem aufspannen.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {v}}= \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\mathbf e_x} \\ {\mathbf e_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r & v_{\varphi} \end{pmatrix}  \begin{pmatrix} {\mathbf e_r} \\ {\mathbf e_{\varphi}} \end{pmatrix} \quad\quad\quad {\mathbf  {v}}=v^{i}{{\mathbf  e}}_{i}={v'\,}^{j}{\mathbf  {e}}'_{j} \] \end{document} | TransformationVektor | (28) |

Es muss zwischen den Objekten, den Tensoren n-ter Stufe, und ihren Zahlenwerten unterschieden werden. Wenn wir etwas rechnen wollen, brauchen wir immer Zahlen, dazu müssen wir eine Basis von Koordinatenvektoren festsetzen. Ein Zahlentupel eines Vektors sind seine Komponenten bezüglich dieser Basis. Sie sind nicht mit dem Vektor selbst zu verwechseln!

Hat man die Komponenten eines Vektors, so kann eine Drehung oder Spiegelung durch eine Matrix ausgedrückt werden.

Drehmatrix Q(α), im Beispiel sogar an jedem Punkt anders:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\mathbf e_x} \\ {\mathbf e_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r & v_{\varphi} \end{pmatrix}  {\mathbf Q}^{-1}{\mathbf Q} \begin{pmatrix} {\mathbf e_r} \\ {\mathbf e_{\varphi}} \end{pmatrix} \] \end{document} | TransformationDrehmatrix | (29) |

Die Basisvektoren transformieren sich kovariant, die Komponenten kontravariant.

In modernen Formulierungen wird mit n-Formen gearbeitet. Ein Skalar entsteht durch die Anwendung einer 1-Form (auch: „lineares Funktional“) auf einen Vektor. Werden die Vektoren nach einer Basis entwickelt, dann gibt es dazu eine analoge Entwicklung der 1-Formen nach ihrer Basis. Die 1-Formen leben im sogenannten Dualraum. Transformieren sich die Komponenten der Vektoren kontravariant, dann transformieren sich die Komponenten der 1-Formen im dualen Raum kovariant. Die Unterscheidung in der Indexschreibweise wird durch Hoch- (kontra) und Tiefstellen (ko) erreicht.

Beispiel: Drehimpuls mit kovarianten Komponenten

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ L_k = \varepsilon_{ijk} x^i p^j \] \end{document} | KoKontravarianteIndizes | (30) |

Ein Tensor 2. Stufe ordnet jedem Vektor v einen Vektor u zu: u = T v

Wie sieht die Sache in einem anderen Koordinatensystem aus? u‘ = Q u v‘ = Q v

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf u}' =  {\mathbf Q}\,{\mathbf u} =  {\mathbf Q} {\mathbf T}\,{\mathbf v} = {\mathbf Q} {\mathbf T} {\mathbf Q}^{-1}\,{\mathbf Q} {\mathbf v} =  {\mathbf Q} {\mathbf T} {\mathbf Q}^{-1}\,{\mathbf v}'  \] \end{document} | TransformationTensor2 | (31) |

also

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf T}' =  {\mathbf Q}\,{\mathbf T}\,{\mathbf Q}^{-1} \] \end{document} | TransformationTensor | (32) |

## Analysis

Funktionen sind auch nur unendlich dichte Zahlentupel. Wir werden Funktionen einer reellen Veränderlichen in der Quantentheorie mit Vektorkomponenten über einen Kamm scheren; Funktionen mit 2 reellen Veränderlichen mit Matrizen, d.h. Komponenten von Tensoren 2. Stufe, usw.

### Ableitungsregeln

<http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html>

### Skalarprodukt

Auch aus 2 Funktionen lässt sich ein Skalar gewinnen, d.h. es lässt sich ein Skalarprodukt definieren, z.B.:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm dx \] \end{document} | SkalarproduktFunktionen | (33) |

Wie das Skalarprodukt der Vektoren ist es in f und g linear:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle f,\, a \cdot g + b \cdot h \rangle =  a \langle f, g \rangle + b \langle f, h \rangle  \] \end{document} | SkalarproduktFunktionenLinear | (34) |

### Delta-Distribution

Distributionen können als eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs angesehen werden. Die Delta-Distribution hat an der Stelle 0 den „Wert“ unendlich und sonst überall den Wert 0. Die Delta-Distribution hat speziell die Eigenschaft:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y\, \delta (x-y)\,f(y)=f(x) \] \end{document} | DeltaDistribution | (35) |

Man kann die Sache so betrachten: Dieser Ausdruck

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y \,\delta (x-y)\,... \] \end{document} | FunktionalDeltaDistribution | (36) |

ordnet jeder Funktion ein Skalar zu. So ein mathematisches Objekt heißt „Funktional“. Das Funktional mit der Delta-Distribution ordnet jeder Funktion f(y) ihren Funktionswert an der Stelle x zu, also f(x). Es ist also die Einheitsoperation und δ(x-y) entspricht damit der Einheitsmatrix δxy.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Was ergibt?  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y \,\delta (x-y) \] \end{document} | NormierungDeltaDistribution | (37) |

Fourier-Integral der Delta-Distribution (Vorgriff auf später, schlampig, weil der Grenzübergang fehlt):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \delta (x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}k \, e^{ik(x-y)} \] \end{document} | FourierDeltaDistribution | (38) |

n. Ableitungen der Deltadistribution ziehen sich vor das Integral gemäß:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle\delta^{(n)},f\rangle=(-1)^{n}f^{(n)}(0) \] \end{document} | AbleitungenDeltaDistribution | (39) |

### Reihenentwicklungen

#### Taylor-Reihe

„Gutmütige“ Funktionen lassen sich in eine Taylor-Reihe entwickeln. Beispiele:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots  \] \end{document} | TaylorreiheEFunktion | (40) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\\ \] \end{document} | TaylorreiheSinus | (41) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\\ \] \end{document} | TaylorreiheKosinus | (42) |

Dies lässt sich so betrachten: die Funktionen xn sind Basisvektoren und spannen den Raum der „gutmütigen“ Funktionen (= Vektoren) auf.

Über die Reihenentwicklungen lassen sich Funktionen von Matrizen definieren, z.B.:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^{\mathbf X}=\sum _{{k=0}}^{\infty }{\frac  {{\mathbf X}^{k}}{k!}} \] \end{document} | MatrixExponential | (43) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Berechne!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\Huge e^{\normalsize   \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} }} \] \end{document} | AufgabeMatrixExponential | (44) |

Analog verhält es sich mit anderen Funktionen einer Diagonalmatrix.

Physik: in der Quanteninformationstheorie wird die von Neumannsche Entropie eine Rolle spielen. Sie wird berechnet als -Spur(X ln X), also als Spur einer Matrix, die selbst als Funktion einer Matrix entsteht.

#### Fourier-Transformation

|  |  |
| --- | --- |
| „Gutmütige“ periodische Funktionen lassen sich als Summe von cos- und sin-Funktionen darstellen.  In der Verallgemeinerung lassen sich beliebige „gutmütige“ Funktionen als unendlich dichte Summe, also ... | https://www.sfu.ca/sonic-studio/handbook/Graphics/Fourier_Series.gif |

... als Integral darstellen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  f(t) = \int _0^\infty \mathrm{d}\nu \left( {\hat f}^c(\nu) \cos (2\pi \nu t) + {\hat f}^s(\nu) \sin (2\pi \nu t) \right) \] \end{document} | SinusKosinusTransformation | (45) |

Im Körper der komplexen Zahlen (Vorgriff) lässt sich die Fouriertransformation besonders kompakt schreiben:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ f(y)={\frac {1}{\left(2\pi \right)^{n/2}}}\int _{\mathbb {R} ^{n}}f(x)\,e^{-\mathrm {i} y\cdot x}\,\mathrm {d} x \] \end{document} | FourierTransformation | (46) |

Die Normierung ist im unteren Fall so gewählt, dass die Fouriertransformation als unitäre Abbildung aufgefasst werden kann.

Eine Funktion f(x) kann also in eine Taylorreihe oder ein Fourierintegral transformiert werden. Wir können dies auch so auffassen, dass Taylorreihe und Fourierintegral die Koeffizienten der Funktion bezüglich verschiedener Basen sind: einmal werden Potenzen von x verwendet, das andere Mal periodische Funktionen von x.

### Partielle Ableitungen

Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach *einem* dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden festgehalten.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Beispiel Volumen Rotationsellipsoid   |  |  |  | | --- | --- | --- | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ V(a,c) = \frac{4\pi}{3} a^2 c \] \end{document} | VolumenEllipsoid | (47) | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial V(a,c)}{\partial a} = \frac{8\pi}{3} a c \quad\quad \frac{\partial^2 V(a,c)}{\partial a^2} = \frac{8\pi}{3} c \] \end{document}  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial V(a,c)}{\partial c} = \frac{4\pi}{3} a^2 \quad\quad \frac{\partial^2 V(a,c)}{\partial c^2} = 0 \] \end{document} |  |  | |  |  |  |   Die linken Formeln liefern Änderung von V in Abhängigkeit einer Änderung von a bzw. c. | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/53/Ellipsoid-rot-ax.svg/459px-Ellipsoid-rot-ax.svg.png | | |
| Berechne die partiellen Ableitungen der Funktion f nach x und y!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(xy)} \] \end{document} | | AufgabePartielleAbleitung | (48) | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Verifiziere mit der Funktion aus (48) den Satz von Schwarz:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial xy} =\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, \] \end{document} | AufgabeSatzVonSchwarz | (49) |

Man kann einen Operator definieren, der einer Funktion eine andere Funktion – nämlich ihre Ableitung – zuordnet. Diesen nennt man **Differentialoperator**. So wie man Funktionen von Matrizen über die Taylorreihen der Funktionen definieren kann, so kann man auch Funktionen von Differentialoperatoren definieren.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^{\frac{\partial}{\partial x}} = 1 + {\frac{\partial}{\partial x}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \cdots  \] \end{document} | TaylorreiheDifferentialoperator | (50) |

### Differentialgleichungen

<http://www.mathepedia.de/Differentialgleichungen.aspx>

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Beispiel Federpendel: die rücktreibende Kraft F ist proportional zur Auslenkung y. Mit Newtons  F = m a(t) = m d2y/dt2 kommen wir auf die Differentialgleichung   |  |  |  | | --- | --- | --- | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = -D y(t) \] \end{document} | Federpendel | (51) | | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/26/Federpendel.PNG/220px-Federpendel.PNG |

D heißt „Federkonstante“.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass diese Funktion die Schwingungsgleichung löst und bestimme die 3 Konstanten!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ y(t) = a sin(\omega (t-t_0)) \] \end{document} | AufgabeFederpendel | (52) |

Lineare Differentialgleichungen mit Eigenwerten

Nichtlineare versus lineare DGL

## Komplexe Zahlen

Definition, Rechenregeln

Andere Darstellung der Algebra durch Matrizen, Beispiel Wikipedia

* Es geht um die Algebra.

Physik: wir müssen die Imaginärteile immer irgendwie loswerden: Beispiel E-Technik, Skalarprodukt QT

Polardarstellung, Drehung in der komplexen Ebene

Trigonometrische Funktionen und e-Funktion

[Quaternionen und Dirac-Matrizen, Clifford-Algebren]

## Gruppen

Definition

## Vektorräume

# Hilberträume

# Shannonsche Informationstheorie

# Philosophischer Ausflug

# Quantentheorie



* alles über 1 Kamm scheren: Hilbertraum und lineare Operatoren als abstraktes Modell für Funktionen/n-Tupel und lineare Differential- und Matrixoperatoren
* Die aufgrund der Linearität beliebige Zerlegbarkeit (freie Wahl der Basis), z.B. Fouriertransformation
* Eigenwerte linearer Operatoren
* Das Skalarprodukt. Die Zweischichtigkeit: linear und nichtlinear
* Produkträume, offene Quantensysteme, Dichteoperatoren, Verschränkung und Ganzheit
* halbklassisch, Korrespondenzprinzip
* es gibt eine absolute Zeit (passend zu unserer Alltagsvorstellung, erst mal ausreichend für Quantenrechner)
* Schrödingergleichung, Pauligleichung
* Beispiele (Wasserstoffproblem, harmonischer Oszillator)
* Die unitäre Zeitentwicklung: „es geschieht nichts“ (Heisenberg). Integration der Schrödingergleichung.

# Interpretationen der Quantentheorie

* Das Messproblem: seine Dreifaltigkeit und 2/3 Lösung durch Dekohärenztheorie
* Das verbleibende schlimme 1/3: die totlebendige Schrödingerkatze.
* Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation (z.B. Stern-Gerlach-Experimente) mit Kollaps der Wellenfunktion
* Wigners Freund, Heisenbergsche Schnitte
* Die Viele-Welten-Interpretation („many minds“)
* [Die „shut up and calculate“ Interpretation]
* Es gibt keine Teilchen, es gibt keine Materiefelder, es gibt Symmetrien, mathematikartige Gesetze, Bewusstsein.

# Quanteninformation

* [Das Problem des Kontinuums mit der Information, die Willkür der Einteilung, absolute Information durch schwarze Löcher?]
* Q-Bit als kleinste sinnvolle Einheit, die Beziehung zwischen Q-Bit und klassischem Bit
* Q-Bit Beispiele (es gibt auch Q-Trits, …)
* Produkträume von Q-Bits und unitäre Zeitentwicklung = Quantenrechner
* In etwa bis zur Hälfte von <https://quantiki.org/wiki/basic-concepts-quantum-computation> oder Matthias Homeister

Literaturverweise und Aufgaben in den einzelnen Kapiteln