Quanteninformation

Harald Rieder, 2017

Inhalt

[Mathe-Auffrischung 1](#_Toc473921517)

[Vektoren und Matrizen 1](#_Toc473921518)

[Addition 2](#_Toc473921519)

[Multiplikation 2](#_Toc473921520)

[Weitere Operationen / Besondere Matrizen 3](#_Toc473921521)

[Analysis 5](#_Toc473921522)

[Komplexe Zahlen 5](#_Toc473921523)

[Gruppen 5](#_Toc473921524)

[Vektorräume 5](#_Toc473921525)

[Hilberträume 5](#_Toc473921526)

[Shannonsche Informationstheorie 5](#_Toc473921527)

[Philosophischer Ausflug 6](#_Toc473921528)

[Quantentheorie 6](#_Toc473921529)

[Interpretationen der Quantentheorie 6](#_Toc473921530)

[Quanteninformation 7](#_Toc473921531)

# Mathe-Auffrischung

## Vektoren und Matrizen

Spalten- und Zeilenvektoren mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {a}}={\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}}  \quad\quad {\mathbf  {b}}={\begin{pmatrix}4&6&3&7\end{pmatrix}} \quad\quad a_i \quad b_j \] \end{document} | Vektoren | (1) |

Matrizen mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {M}}={\begin{pmatrix}8&2&9\\4&8&2\\8&3&7\\5&9&1\end{pmatrix}} \quad\quad M_{ij} \] \end{document} | Matrix | (2) |

* Spalten- und Zeilenvektoren sind auch nur Matrizen! Ein Spaltenvektor ist eine einspaltige Matrix und ein Zeilenvektor eine einzeilige Matrix.
* Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe.  Skalare sind Tensoren nullter Stufe, Vektoren Tensoren erster Stufe, Matrizen Tensoren zweiter Stufe, …
* Quadratische Matrizen: Zeilenzahl = Spaltenzahl
* Physik: nur quadratische Matrizen (und kubische Tensoren 3. Stufe, ...) spielen eine Rolle.

### Addition

Matrizen müssen gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, damit sie addiert werden können.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 & 2 & 7   \end{pmatrix}   +   \begin{pmatrix}     0 & 3 & 5 \\     2 & 1 & -1   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     1 & 0 & 7 \\     3 & 3 & 6   \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij} + N_{ij} \] \end{document} | Matrizenaddition | (3) |

* assoziativ: (M + N) + O = M + (N + O) = M + N + O
* kommutativ: M + N = N + M
* neutrales Element ist die Null-Matrix

### Multiplikation

#### Produkt aus Skalar und Matrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ 5 \cdot   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 &  2 & 7   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     5 & -15 & 10 \\     5 & 10  & 35   \end{pmatrix} \quad\quad a M_{ij}  \] \end{document} | Skalarmultiplikation | (4) |

#### Skalarprodukt von Vektoren

Diesmal wird nicht mit einem Skalar multipliziert, sondern das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar.

Rechts die Schreibweise mit Einsteinscher Summenkonvention: über Indizes, die doppelt vorkommen, wird automatisch summiert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ c =\sum_{i=1}^m a_i\cdot b_i \quad\quad c = a_i b_i \] \end{document} | Skalarprodukt | (5) |
| Was ist das Produkt von:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeSkalarprodukt | (6) |
| zur verschiedenen Schreibweise der beiden Vektoren siehe unten |  |  |

* Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ergibt, heißen orthogonal.
* Ein Satz von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

#### Matrizenmultiplikation

Alle Zeilenvektoren der 1. Matrix werden mit allen Spaltenvektoren der 2. Matrix skalarmultipliziert, siehe (5).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 \\     1 & 2    \end{pmatrix}   \cdot   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     -8 & 0 \\     4 & 5    \end{pmatrix} \quad\quad C_{ij}=\sum_{s=1}^m A_{is}\cdot B_{sj} \] \end{document} | Matrizenmultiplikation | (7) |

Ist A einzeilig und B einspaltig, dann haben sie beide nur den Index s, und (7) wird zu (5).

* assoziativ: (M N) O = M (N O) = M N O
* **nicht-kommutativ**: M N und N M sind im Allgemeinen verschieden! Matrizen können dadurch Vorgänge modellieren, die bei der Vertauschung einzelner Schritte nicht zum gleichen Ergebnis führen.
* neutrales Element ist die Einheitsmatrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} 1   &   0 & ... & 0 \\ 0   &   1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0   &   0 & ... & 1 \\ \end{pmatrix} \] \end{document} | Einheitsmatrix | (8) |

#### Tensorprodukt

Beim Tensorprodukt ergeben 2 Vektoren eine Matrix. Dieser Mechanismus ist bereits in (7) enthalten!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix}  =    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     2 & -6 & 4 \\     7 & -21 & 14    \end{pmatrix} \] \end{document} | Tensorprodukt | (9) |

* Nicht alle Matrizen können aus Vektoren auf diese Art produziert werden.
* Alle Matrizen lassen sich als Summe von Tensorprodukten darstellen. Nicht eindeutig!
* Enorm wichtig für die Quantentheorie! Produktraum, Dichtematrix, Zusammenhang mit Verschränkung…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ist diese Matrix ein Tensorprodukt aus Vektoren?  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeTensorprodukt | (10) |

Ist Die Einheitsmatrix ein Tensorprodukt?

#### Vektorprodukt

Aus 2 Vektoren entsteht wieder ein Vektor. In der Physik: Drehimpuls, anderes Transformationsverhalten („axialer Vektor“) wie die beiden ursprünglichen Vektoren. Historisch aus der Vorstellung eines dreidimensionalen Raums heraus entstanden.

Kann auch mit dem Levi-Civita-Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ausgedrückt werden:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[    \vec{a}\times\vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec e_k \quad\quad    c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \] \end{document} | Vektorprodukt | (11) |

[Dadurch abweichendes Transformationsverhalten eher einsichtig.]

Kann auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden und tritt in der Physik hin und wieder auf. Wir werden ihn in der Quanteninformation eher nicht brauchen.

### Weitere Operationen / Besondere Matrizen

#### Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mathrm{Tr}     \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     2 & -6 & 4 \\     7 & -21 & 14    \end{pmatrix} = 9 \quad\quad \mathrm{Tr}(M_{ij}) = M_{ii} \] \end{document} | SpurMatrix | (12) |

#### Transposition / Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden getauscht. Indexschreibweise: Zeilen- und Spaltenindizes werden getauscht.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & 2 \\     3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} \quad\quad (M^T)^T = M \] \end{document} | Transposition | (12) |

#### Symmetrische Matrizen / Symmetrierung

Eine symmetrische Matrix ist gleich ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = M_{ij} \quad\quad M^T = M \] \end{document} | SymmetrischeMatrizen | (13) |

Erzeugung symmetrischer Matrizen aus beliebigen Matrizen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ M + M^T \] \end{document} | Symmetrierung | (14) |

Eine antisymmetrische Matrix ist gleich dem Negativen ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix}^T =   - \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = - M_{ij} \quad\quad M^T = -M \] \end{document} | AntisymmetrischeMatrizen | (15) |

Wie kann aus einer beliebigen Matrix analog zur Symmetrierung eine antisymmetrische Matrix erzeugt werden?

#### Inverse Matrizen

Definition:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \] \end{document} | InverseMatrix | (17) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass beide Produkte die Einheitsmatrix ergeben!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}\cdot {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}} \quad\quad {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}}\cdot  {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}  \] \end{document} | AufgabeInverseMatrix | (18) |

* Die Inverse der Inversen ist die ursprüngliche Matrix.
* Es gibt Matrizen, die ihre eigenen Inversen sind.

Mehr Interessantes siehe Wikipedia.

#### Orthogonale Matrizen

Erhaltung Skalarprodukt Zshg. mit Determinante

Transformation von Matrizen aus Transformation von Vektoren

#### Funktionen von Matrizen

über Potenzreihe, e hoch Matrix, ln Matrix

#### Eigenwerte und Eigenvektoren

Physik: Unterscheidung zwischen Vektoren und ihren Darstellungen, Beispiel Drehungen und Transl.

## Analysis

Funktionen sind auch nur unendlich dichte Zahlentupel

Distributionen: Delta-Distribution

Funktionen als Vektoren, Beispieldef. Skalarprodukt

Nicht jede F. mehrerer Veränderlicher ein Produkt aber entwickelbar. => Verschränkung

Partielle Ableitungen, e hoch Differentialoperator

Integrale mit Delta-Distribution

Lineare Differentialgleichungen mit Eigenwerten

Nichtlineare versus lineare DGL

## Komplexe Zahlen

Definition, Rechenregeln

Andere Darstellung der Algebra durch Matrizen, Beispiel Wikipedia

* Es geht um die Algebra.

Physik: wir müssen die Imaginärteile immer irgendwie loswerden: Beispiel E-Technik, Skalarprodukt QT

Polardarstellung, Drehung in der komplexen Ebene

Trigonometrische Funktionen und e-Funktion

[Quaternionen und Dirac-Matrizen, Clifford-Algebren]

## Gruppen

Definition

## Vektorräume

# Hilberträume

# Shannonsche Informationstheorie

# Philosophischer Ausflug

# Quantentheorie



* alles über 1 Kamm scheren: Hilbertraum und lineare Operatoren als abstraktes Modell für Funktionen/n-Tupel und lineare Differential- und Matrixoperatoren
* Die aufgrund der Linearität beliebige Zerlegbarkeit (freie Wahl der Basis), z.B. Fouriertransformation
* Eigenwerte linearer Operatoren
* Das Skalarprodukt. Die Zweischichtigkeit: linear und nichtlinear
* Produkträume, offene Quantensysteme, Dichteoperatoren, Verschränkung und Ganzheit
* halbklassisch, Korrespondenzprinzip
* es gibt eine absolute Zeit (passend zu unserer Alltagsvorstellung, erst mal ausreichend für Quantenrechner)
* Schrödingergleichung, Pauligleichung
* Beispiele (Wasserstoffproblem, harmonischer Oszillator)
* Die unitäre Zeitentwicklung: „es geschieht nichts“ (Heisenberg). Integration der Schrödingergleichung.

# Interpretationen der Quantentheorie

* Das Messproblem: seine Dreifaltigkeit und 2/3 Lösung durch Dekohärenztheorie
* Das verbleibende schlimme 1/3: die totlebendige Schrödingerkatze.
* Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation (z.B. Stern-Gerlach-Experimente) mit Kollaps der Wellenfunktion
* Wigners Freund, Heisenbergsche Schnitte
* Die Viele-Welten-Interpretation („many minds“)
* [Die „shut up and calculate“ Interpretation]
* Es gibt keine Teilchen, es gibt keine Materiefelder, es gibt Symmetrien, mathematikartige Gesetze, Bewusstsein.

# Quanteninformation

* [Das Problem des Kontinuums mit der Information, die Willkür der Einteilung, absolute Information durch schwarze Löcher?]
* Q-Bit als kleinste sinnvolle Einheit, die Beziehung zwischen Q-Bit und klassischem Bit
* Q-Bit Beispiele (es gibt auch Q-Trits, …)
* Produkträume von Q-Bits und unitäre Zeitentwicklung = Quantenrechner
* In etwa bis zur Hälfte von <https://quantiki.org/wiki/basic-concepts-quantum-computation> oder Matthias Homeister

Literaturverweise und Aufgaben in den einzelnen Kapiteln