Quanteninformation

Harald Rieder, 2017

Inhalt

[Mathe-Auffrischung 2](#_Toc475383953)

[Vektoren und Matrizen 2](#_Toc475383954)

[Addition 2](#_Toc475383955)

[Multiplikation 3](#_Toc475383956)

[Weitere Operationen / Besondere Matrizen 4](#_Toc475383957)

[Transformationen 7](#_Toc475383958)

[Analysis 8](#_Toc475383959)

[Ableitungsregeln 8](#_Toc475383960)

[Skalarprodukt 8](#_Toc475383961)

[Delta-Distribution 9](#_Toc475383962)

[Reihenentwicklungen 9](#_Toc475383963)

[Partielle Ableitungen 11](#_Toc475383964)

[Differentialgleichungen 11](#_Toc475383965)

[Komplexe Zahlen 14](#_Toc475383966)

[Real- und Imaginärteil 14](#_Toc475383967)

[Addition 14](#_Toc475383968)

[Multiplikation 14](#_Toc475383969)

[Betrag 14](#_Toc475383970)

[Polardarstellung 15](#_Toc475383971)

[Komplexe Konjugation 15](#_Toc475383972)

[Physikalische Bedeutung 15](#_Toc475383973)

[Gruppen 16](#_Toc475383974)

[Der unitäre Vektorraum 17](#_Toc475383975)

[Basisvektoren 18](#_Toc475383976)

[Diracsche Vektoren 19](#_Toc475383977)

[Zusammenfassende Schreibweise 19](#_Toc475383978)

[Shannonsche Informationstheorie 19](#_Toc475383979)

[Philosophischer Ausflug 19](#_Toc475383980)

[Quantentheorie 20](#_Toc475383981)

[Interpretationen der Quantentheorie 20](#_Toc475383982)

[Quanteninformation 21](#_Toc475383983)

[No Cloning Theorem 21](#_Toc475383984)

# Mathe-Auffrischung

## Vektoren und Matrizen

Spalten- und Zeilenvektoren mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {a}}={\begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}}  \quad\quad {\mathbf  {b}}={\begin{pmatrix}4&6&3&7\end{pmatrix}} \quad\quad a_i \quad b_j \] \end{document} | Vektoren | (1) |

Matrizen mit Indexschreibweise

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {M}}={\begin{pmatrix}8&2&9\\4&8&2\\8&3&7\\5&9&1\end{pmatrix}} \quad\quad M_{ij} \] \end{document} | Matrix | (2) |

* Spalten- und Zeilenvektoren sind auch nur Matrizen! Ein Spaltenvektor ist eine einspaltige Matrix und ein Zeilenvektor eine einzeilige Matrix.
* Verallgemeinerung: Tensor n-ter Stufe.  Skalare sind Tensoren nullter Stufe, Vektoren Tensoren erster Stufe, Matrizen Tensoren zweiter Stufe, …
* Quadratische Matrizen: Zeilenzahl = Spaltenzahl
* Physik: nur quadratische Matrizen (und kubische Tensoren 3. Stufe, ...) spielen eine Rolle.

Determinanten von Matrizen

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \det {\mathbf A} =\det {\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \] \end{document} | Determinanten | (3) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \footnotesize {\det { \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}} =a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}} \] \end{document} | DerminantenEntwicklung | (4) |

usw.

### Addition

Matrizen müssen gleiche Anzahl von Spalten und Zeilen haben, damit sie addiert werden können.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 & 2 & 7   \end{pmatrix}   +   \begin{pmatrix}     0 & 3 & 5 \\     2 & 1 & -1   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     1 & 0 & 7 \\     3 & 3 & 6   \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij} + N_{ij} \] \end{document} | Matrizenaddition | (5) |

* assoziativ: (M + N) + O = M + (N + O) = M + N + O
* kommutativ: M + N = N + M
* neutrales Element ist die Null-Matrix

### Multiplikation

#### Produkt aus Skalar und Matrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ 5 \cdot   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     1 &  2 & 7   \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     5 & -15 & 10 \\     5 & 10  & 35   \end{pmatrix} \quad\quad a M_{ij}  \] \end{document} | Skalarmultiplikation | (6) |

#### Skalarprodukt von Vektoren

Diesmal wird nicht mit einem Skalar multipliziert, sondern das Ergebnis der Multiplikation ist ein Skalar.

Rechts die Schreibweise mit Einsteinscher Summenkonvention: über Indizes, die doppelt vorkommen, wird automatisch summiert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ c =\sum_{i=1}^m a_i\cdot b_i \quad\quad c = a_i b_i \] \end{document} | Skalarprodukt | (7) |
| Was ist das Produkt von:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeSkalarprodukt | (8) |
| zur verschiedenen Schreibweise der beiden Vektoren siehe unten |  |  |

* Vektoren, deren Skalarprodukt 0 ergibt, heißen orthogonal.
* Ein Satz von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn sich keiner von ihnen als Linearkombination aus den anderen darstellen lässt. Orthogonale Vektoren sind linear unabhängig.

#### Betrag

Durch die Multiplikation kann man den Betrag eines Vektors definieren:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\displaystyle |{\mathbf a}|={\sqrt {{\mathbf  a}\cdot {\mathbf a}}}} \] \end{document} | BetragVektor | (9) |

#### Matrizenmultiplikation

Alle Zeilenvektoren der 1. Matrix werden mit allen Spaltenvektoren der 2. Matrix skalarmultipliziert, siehe (7).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 & -3 \\     1 & 2    \end{pmatrix}   \cdot   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}   =   \begin{pmatrix}     -6 & 0 \\     4 & 5    \end{pmatrix} \quad\quad C_{ij}=\sum_{s=1}^m A_{is}\cdot B_{sj} \quad\quad C_{ij}=A_{is}\cdot B_{sj} \] \end{document} | Matrizenmultiplikation | (10) |

Ist A einzeilig und B einspaltig, dann haben sie beide nur den Index s, und (10) wird zu (7).

* assoziativ: (M N) O = M (N O) = M N O
* **nicht-kommutativ**: M N und N M sind im Allgemeinen verschieden! Matrizen können dadurch Vorgänge modellieren, die bei der Vertauschung einzelner Schritte nicht zum gleichen Ergebnis führen.
* neutrales Element ist die Einheitsmatrix

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf 1} = \begin{pmatrix} 1   &   0 & ... & 0 \\ 0   &   1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0   &   0 & ... & 1 \\ \end{pmatrix} \quad\quad \delta_{ij} \] \end{document} | Einheitsmatrix | (11) |

#### Tensorprodukt

Beim Tensorprodukt ergeben 2 Vektoren eine Matrix. Dieser Mechanismus ist bereits in (10) enthalten!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     1 \\ 2 \\ 7   \end{pmatrix} \cdot    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2    \end{pmatrix}  =    \begin{pmatrix}     1 & -3 & 2 \\     2 & -6 & 4 \\     7 & -21 & 14    \end{pmatrix} \] \end{document} | Tensorprodukt | (12) |

* Nicht alle Matrizen können aus Vektoren auf diese Art produziert werden.
* Alle Matrizen lassen sich als Summe von Tensorprodukten darstellen. Nicht eindeutig!
* Enorm wichtig für die Quantentheorie! Produktraum, Dichtematrix, Zusammenhang mit Verschränkung…

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Ist diese Matrix ein Tensorprodukt aus Vektoren?   %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix} \] \end{document} | AufgabeTensorprodukt | (13) |
| 1. Ist die Einheitsmatrix ein Tensorprodukt? |  |  |

#### Vektorprodukt

Aus 2 Vektoren entsteht wieder ein Vektor. In der Physik: Drehimpuls, anderes Transformationsverhalten („axialer Vektor“) wie die beiden ursprünglichen Vektoren. Historisch aus der Vorstellung eines dreidimensionalen Raums heraus entstanden.

Kann auch mit dem Levi-Civita-Tensor (total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe) ausgedrückt werden:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[    \vec{a}\times\vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec e_k \quad\quad    c_k = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \] \end{document} | Vektorprodukt | (14) |

[Dadurch abweichendes Transformationsverhalten eher einsichtig. Richtigerweise sollte man zwischen ko- und kontrvarianten Indizes unterscheiden. Dazu weiter unten...]

Kann auf mehr Dimensionen verallgemeinert werden und tritt in der Physik hin und wieder auf. Wir werden ihn in der Quanteninformation eher nicht brauchen.

### Weitere Operationen / Besondere Matrizen

#### Spur

Die Spur einer quadratischen Matrix ist die Summe ihrer Hauptdiagonalelemente (blau).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \usepackage{color} \begin{document} \[ \mathrm{Tr}     \begin{pmatrix}     {\color{blue}1} & -3 & 2 \\     2 & {\color{blue}-6} & 4 \\     7 & -21 & {\color{blue}14}    \end{pmatrix} = {\color{blue}9} \quad\quad \mathrm{Tr}(M_{ij}) = M_{ii} \] \end{document} | SpurMatrix | (15) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige mit der Indexschreibweise, dass Gilt  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \mathrm{Tr}({\mathbf A} \cdot {\mathbf B}) = \mathrm{Tr}({\mathbf B} \cdot {\mathbf A})  \] \end{document} | AufgabeSpur | (16) |

#### Transposition / Transponierte Matrix

Zeilen und Spalten werden getauscht. Indexschreibweise: Zeilen- und Spaltenindizes werden getauscht.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     2 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & 2 \\     3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad (M^T)_{ij} = M_{ji} \] \end{document} | Transposition | (17) |

Es gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ ({\mathbf M}^T)^T = {\mathbf M} \quad\quad ({\mathbf A} \cdot {\mathbf B})^T = {\mathbf B}^T \cdot {\mathbf A}^T \] \end{document} | TransponiertesProdukt | (18) |

#### Symmetrische Matrizen / Symmetrierung

Eine symmetrische Matrix ist gleich ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix}^T =   \begin{pmatrix}     0 & -3 \\     -3 & 1    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = M_{ij} \quad\quad {\mathbf M}^T = {\mathbf M} \] \end{document} | SymmetrischeMatrizen | (19) |

Erzeugung symmetrischer Matrizen aus beliebigen Matrizen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf M} + {\mathbf M}^T \] \end{document} | Symmetrierung | (20) |

Eine antisymmetrische Matrix ist gleich dem Negativen ihrer Transponierten.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[   \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix}^T =   - \begin{pmatrix}     0 & 3 \\     -3 & 0    \end{pmatrix} \quad\quad M_{ij}^T = M_{ji} = - M_{ij} \quad\quad {\mathbf M}^T = -{\mathbf M} \] \end{document} | AntisymmetrischeMatrizen | (21) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Wie kann aus einer beliebigen Matrix analog zur Symmetrierung eine antisymmetrische Matrix erzeugt werden? | AufgabeMatrixAntisymmetrierung | (22) |

#### Inverse Matrizen

Definition:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf M} \cdot {\mathbf M}^{-1} = {\mathbf M}^{-1} \cdot {\mathbf M} = {\mathbf 1} \] \end{document} | InverseMatrix | (23) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass beide Produkte die Einheitsmatrix ergeben!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}\cdot {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}} \quad\quad {\begin{pmatrix}3&-5\\-1&2\end{pmatrix}}\cdot  {\begin{pmatrix}2&5\\1&3\end{pmatrix}}  \] \end{document} | AufgabeInverseMatrix | (24) |

* Die Inverse der Inversen ist die ursprüngliche Matrix.
* Es gibt Matrizen, die ihre eigenen Inversen sind.

Es gilt:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ ({\mathbf M}^{-1})^{-1} = {\mathbf M} \quad\quad (c {\mathbf M})^{-1} = c^{-1} {\mathbf M}^{-1} \quad\quad \operatorname{det}({\mathbf M}^{-1}) =  \operatorname{det}({\mathbf M})^{-1} \quad\quad ({\mathbf A} \cdot {\mathbf B})^{-1} = {\mathbf B}^{-1} \cdot {\mathbf A}^{-1} \] \end{document} | InverseMatrixRegeln | (25) |

#### Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen

x ist ein Spaltenvektor. Dann ist

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf A}\cdot x=\lambda \,x \quad\quad ({\mathbf A} - \lambda\, {\mathbf I}) \cdot x = 0 \] \end{document} | EigenwerteMatrizen | (26) |

ein homogenes lineares Gleichungssystem, lösbar wenn

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\det \left({\mathbf A}-\lambda\, {\mathbf I}\right)=0} \] \end{document} | DeterminanteEigenwert | (27) |

Charakteristisches Polynom: seine Nullstellen sind die Eigenwerte. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Ist A eine n x n Matrix, dann gibt es höchstens n Eigenwerte.

Sind Eigenwerte gleich, dann heißen sie (Physik, historisch): entartet. Zu einem k-fachen Eigenwert gehören k Eigenvektoren, die einen k-dimensionalen Unterraum aufspannen (k <= n).

Die Eigenwerte von Matrizen werden uns in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen. Die Eigenwerte einer Q-Bit-Messung bezeichnet man immer als 0 und 1, egal welche physikalischen Messwerte ihnen entsprechen.

#### Orthogonale (Quadratische) Matrizen

Definition

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf Q}^T \cdot {\mathbf Q} = {\mathbf I} \] \end{document} | OrthogonaleMatrix | (28) |

D.h. automatisch

* Mit Q ist auch ihre Transponierte orthogonal.
* Die Zeilenvektoren sind orthogonal.
* Die Spaltenvektoren sind orthogonal.
* Die Zeilen- und Spaltenvektoren sind auf 1 normiert.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass die 2-dimensonale Drehmatrix all das erfüllt!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \] \end{document}  Orthogonal transformation qtl1.svg | AufgabeOrthogonaleMatrix | (29) |

Weiteres:

* det Q = 1
* Skalarprodukt der transformierten Vektoren = Skalarprodukt der untransformierten Vektoren.
* Eigenwerte sind +1 und/oder -1.
* Spiegelungen sind auch orthogonale Matrizen. Physik: Paritätsoperation spiegelt die Ortskoordinaten.
* Orthogonale Gruppe O(n), ohne Spiegelungen: SO(n). Kommt noch...

### Transformationen

Die Objekte der Physik sollen Modelle der Wirklichkeit sein. Soll die Wirklichkeit objektiv sein, so erwarten wir, dass sie nicht davon abhängt, welches Koordinatensystem wir wählen: Meter oder Zoll, Sekunden oder Minuten als Zeiteinheit, usw.

In der klassischen Mechanik glaubt man daran, dass die Gesetze unter diesen Transformationen (10-parametrige Galilei-Gruppe + Spiegelungen + Zeitumkehr) invariant sein müssen[[1]](#footnote-1):

* Drehungen, s.o.
* Spiegelungen x‘ = -x (Quantentheorie → Parität)
* Zeitumkehr t‘ = -t
* Translationen x‘ = x + b (→ Ableitungen und Entfernungen, keine absoluten Orte)
* Translationen t‘ = t + a (→ Ableitungen nach der Zeit, keine absolute Zeit)
* Gleichförmige Bewegungen (Relativitätsprinzip) x‘ = x + v t

Für skalare Größen gilt: sie ändern sich dann nicht. Die Temperatur (statistische Physik: mittlere kinetische Energie, also klassische Mechanik) an einem Punkt (Objekt der Wirklichkeit) soll den gleichen Wert haben, egal ob wir direkt darauf schauen oder uns drehen und dann (wieder stillstehend) das Thermometer aus dem Augenwinkel heraus betrachten. Sie ändert sich auch nicht, wenn wir am Thermometer mit konstanter Geschwindigkeit vorbeifahren. Bei beschleunigten Bewegungen können sich die Gesetze jedoch ändern und tun dies auch fast immer, z.B. Corioliskraft, Zentrifugalkraft.

Für vektorielle Größen gilt: sie ändern ihren Betrag nicht, der ja eine skalare Größe ist, aber ihre Richtung in Bezug auf das neue Koordinatensystem. Vektoren in der Physik sind nicht irgendwelche Zahlen in Spalten oder Zeilen, sondern n Größen, die sich bei Transformationen wie ein Vektor transformieren, d.h. entweder kovariant oder kontravariant zum Transformationsverhalten der Vektoren, die das Koordinatensystem aufspannen.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf  {v}}= \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\mathbf e_x} \\ {\mathbf e_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r & v_{\varphi} \end{pmatrix}  \begin{pmatrix} {\mathbf e_r} \\ {\mathbf e_{\varphi}} \end{pmatrix} \quad\quad\quad {\mathbf  {v}}=v^{i}{{\mathbf  e}}_{i}={v'\,}^{j}{\mathbf  {e}}'_{j} \] \end{document} | TransformationVektor | (30) |

Es muss zwischen den Objekten, den Tensoren n-ter Stufe, und ihren Zahlenwerten unterschieden werden. Wenn wir etwas rechnen wollen, brauchen wir immer Zahlen, dazu müssen wir eine Basis von Koordinatenvektoren festsetzen. Ein Zahlentupel eines Vektors sind seine Komponenten bezüglich dieser Basis. Sie sind nicht mit dem Vektor selbst zu verwechseln!

Hat man die Komponenten eines Vektors, so kann eine Drehung oder Spiegelung durch eine Matrix ausgedrückt werden.

Drehmatrix Q(α), im Beispiel sogar an jedem Punkt anders:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \begin{pmatrix} v_x & v_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {\mathbf e_x} \\ {\mathbf e_y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r & v_{\varphi} \end{pmatrix}  {\mathbf Q}^{-1}{\mathbf Q} \begin{pmatrix} {\mathbf e_r} \\ {\mathbf e_{\varphi}} \end{pmatrix} \] \end{document} | TransformationDrehmatrix | (31) |

Die Basisvektoren transformieren sich kovariant, die Komponenten kontravariant.

In modernen Formulierungen wird mit n-Formen gearbeitet. Ein Skalar entsteht durch die Anwendung einer 1-Form (auch: „lineares Funktional“) auf einen Vektor. Werden die Vektoren nach einer Basis entwickelt, dann gibt es dazu eine analoge Entwicklung der 1-Formen nach ihrer Basis. Die 1-Formen leben im sogenannten Dualraum. Transformieren sich die Komponenten der Vektoren kontravariant, dann transformieren sich die Komponenten der 1-Formen im dualen Raum kovariant. Die Unterscheidung in der Indexschreibweise wird durch Hoch- (kontra) und Tiefstellen (ko) erreicht.

Beispiel: Drehimpuls mit kovarianten Komponenten

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ L_k = \varepsilon_{ijk} x^i p^j \] \end{document} | KoKontravarianteIndizes | (32) |

Ein Tensor 2. Stufe ordnet jedem Vektor v einen Vektor u zu: u = T v

Wie sieht die Sache in einem anderen Koordinatensystem aus? u‘ = Q u v‘ = Q v

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf u}' =  {\mathbf Q}\,{\mathbf u} =  {\mathbf Q} {\mathbf T}\,{\mathbf v} = {\mathbf Q} {\mathbf T} {\mathbf Q}^{-1}\,{\mathbf Q} {\mathbf v} =  {\mathbf Q} {\mathbf T} {\mathbf Q}^{-1}\,{\mathbf v}'  \] \end{document} | TransformationTensor2 | (33) |

also

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\mathbf T}' =  {\mathbf Q}\,{\mathbf T}\,{\mathbf Q}^{-1} \] \end{document} | TransformationTensor | (34) |

## Analysis

Funktionen sind auch nur unendlich dichte Zahlentupel. Wir werden Funktionen einer reellen Veränderlichen in der Quantentheorie mit Vektorkomponenten über einen Kamm scheren; Funktionen mit 2 reellen Veränderlichen mit Matrizen, d.h. Komponenten von Tensoren 2. Stufe, usw.

### Ableitungsregeln

<http://www.mathe-online.at/mathint/diff1/i_ableitungen.html>

### Skalarprodukt

Auch aus 2 Funktionen lässt sich ein Skalar gewinnen, d.h. es lässt sich ein Skalarprodukt definieren, z.B.:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm dx \] \end{document} | SkalarproduktFunktionen | (35) |

Wie das Skalarprodukt der Vektoren ist es in f und g linear:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle f,\, a \cdot g + b \cdot h \rangle =  a \langle f, g \rangle + b \langle f, h \rangle  \] \end{document} | SkalarproduktFunktionenLinear | (36) |

### Delta-Distribution

Distributionen können als eine Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs angesehen werden. Die Delta-Distribution hat an der Stelle 0 den „Wert“ unendlich und sonst überall den Wert 0. Die Delta-Distribution hat speziell die Eigenschaft:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y\, \delta (x-y)\,f(y)=f(x) \] \end{document} | DeltaDistribution | (37) |

Man kann die Sache so betrachten: Dieser Ausdruck

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y \,\delta (x-y)\,... \] \end{document} | FunktionalDeltaDistribution | (38) |

ordnet jeder Funktion ein Skalar zu. So ein mathematisches Objekt heißt „Funktional“. Das Funktional mit der Delta-Distribution ordnet jeder Funktion f(y) ihren Funktionswert an der Stelle x zu, also f(x). Es ist also die Einheitsoperation und δ(x-y) entspricht damit der Einheitsmatrix δxy.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Was ergibt?  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}y \,\delta (x-y) \] \end{document} | NormierungDeltaDistribution | (39) |

Fourier-Integral der Delta-Distribution (Vorgriff auf später, schlampig, weil der Grenzübergang fehlt):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \delta (x-y) = \frac{1}{2\pi} \int_{- \infty}^\infty \mathrm{d}k \, e^{ik(x-y)} \] \end{document} | FourierDeltaDistribution | (40) |

n. Ableitungen der Deltadistribution ziehen sich vor das Integral gemäß:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \langle\delta^{(n)},f\rangle=(-1)^{n}f^{(n)}(0) \] \end{document} | AbleitungenDeltaDistribution | (41) |

### Reihenentwicklungen

#### Taylor-Reihe

„Gutmütige“ Funktionen lassen sich in eine Taylor-Reihe entwickeln. Beispiele:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^x = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots  \] \end{document} | TaylorreiheEFunktion | (42) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \sin(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\\ \] \end{document} | TaylorreiheSinus | (43) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \cos(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cdots\\ \] \end{document} | TaylorreiheKosinus | (44) |

Dies lässt sich so betrachten: die Funktionen xn sind Basisvektoren und spannen den Raum der „gutmütigen“ Funktionen (= Vektoren) auf.

Über die Reihenentwicklungen lassen sich Funktionen von Matrizen definieren, z.B.:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^{\mathbf X}=\sum _{{k=0}}^{\infty }{\frac  {{\mathbf X}^{k}}{k!}} \] \end{document} | MatrixExponential | (45) |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Berechne!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {e^{\tiny   \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} }} \] \end{document} | AufgabeMatrixExponential | (46) |

Analog verhält es sich mit anderen Funktionen einer Diagonalmatrix.

Physik: in der Quanteninformationstheorie wird die von Neumannsche Entropie eine Rolle spielen. Sie wird berechnet als -Spur(X ln X), also als Spur einer Matrix, die selbst als Funktion einer Matrix entsteht.

#### Fourier-Transformation

|  |  |
| --- | --- |
| „Gutmütige“ periodische Funktionen lassen sich als Summe von cos- und sin-Funktionen darstellen.  In der Verallgemeinerung lassen sich beliebige „gutmütige“ Funktionen als unendlich dichte Summe, also ... | https://www.sfu.ca/sonic-studio/handbook/Graphics/Fourier_Series.gif |

... als Integral darstellen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[  f(t) = \int _0^\infty \mathrm{d}\nu \left( {\hat f}^c(\nu) \cos (2\pi \nu t) + {\hat f}^s(\nu) \sin (2\pi \nu t) \right) \] \end{document} | SinusKosinusTransformation | (47) |

Im Körper der komplexen Zahlen (Vorgriff) lässt sich die Fouriertransformation besonders kompakt schreiben:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ f(y)={\frac {1}{\left(2\pi \right)^{n/2}}}\int _{\mathbb {R} ^{n}}f(x)\,e^{-\mathrm {i} y\cdot x}\,\mathrm {d} x \] \end{document} | FourierTransformation | (48) |

Die Normierung ist im unteren Fall so gewählt, dass die Fouriertransformation als unitäre Abbildung aufgefasst werden kann.

Eine Funktion f(x) kann also in eine Taylorreihe oder ein Fourierintegral transformiert werden. Wir können dies auch so auffassen, dass Taylorreihe und Fourierintegral die Koeffizienten der Funktion bezüglich verschiedener Basen sind: einmal werden Potenzen von x verwendet, das andere Mal periodische Funktionen von x.

### Partielle Ableitungen

Ableitung einer Funktion mit mehreren Argumenten nach *einem* dieser Argumente. Die Werte der übrigen Argumente werden festgehalten.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Beispiel Volumen Rotationsellipsoid   |  |  |  | | --- | --- | --- | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ V(a,c) = \frac{4\pi}{3} a^2 c \] \end{document} | VolumenEllipsoid | (49) | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial V(a,c)}{\partial a} = \frac{8\pi}{3} a c \quad\quad \frac{\partial^2 V(a,c)}{\partial a^2} = \frac{8\pi}{3} c \] \end{document}  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial V(a,c)}{\partial c} = \frac{4\pi}{3} a^2 \quad\quad \frac{\partial^2 V(a,c)}{\partial c^2} = 0 \] \end{document} |  |  | |  |  |  |   Die linken Formeln liefern Änderung von V in Abhängigkeit einer Änderung von a bzw. c. | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/5/53/Ellipsoid-rot-ax.svg/459px-Ellipsoid-rot-ax.svg.png | | |
| Berechne die partiellen Ableitungen der Funktion f nach x und y!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ f(x,y) = \frac{\sqrt{x}}{\sin(xy)} \] \end{document} | | AufgabePartielleAbleitung | (50) | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Verifiziere mit der Funktion aus (50) den Satz von Schwarz:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial xy} =\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\, \] \end{document} | AufgabeSatzVonSchwarz | (51) |

Man kann einen Operator definieren, der einer Funktion eine andere Funktion – nämlich ihre Ableitung – zuordnet. Diesen nennt man **Differentialoperator**. So wie man Funktionen von Matrizen über die Taylorreihen der Funktionen definieren kann, so kann man auch Funktionen von Differentialoperatoren definieren.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ e^{\frac{\partial}{\partial x}} = 1 + {\frac{\partial}{\partial x}} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \cdots  \] \end{document} | TaylorreiheDifferentialoperator | (52) |

### Differentialgleichungen

<http://www.mathepedia.de/Differentialgleichungen.aspx>

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Beispiel Federpendel: die rücktreibende Kraft F ist proportional zur Auslenkung y. Mit Newtons  F = m a(t) = m d2y/dt2 kommen wir auf die Differentialgleichung   |  |  |  | | --- | --- | --- | | %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ m \frac{\partial^2 y(t)}{\partial t^2} = -D y(t) \] \end{document} | Federpendel | (53) | | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/26/Federpendel.PNG/220px-Federpendel.PNG |

D heißt „Federkonstante“.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass diese Funktion die Schwingungsgleichung löst!  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ y(t) = a sin(\sqrt{\frac{D}{m}} (t-t_0)) \] \end{document} | AufgabeFederpendel | (54) |
| Was ist von den 2 Konstanten a und t0 zu halten? |  |  |

Bei der Schwingungsgleichung handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. Diese haben die Eigenschaft, dass jede Linearkombination von Lösungen auch wieder eine Lösung ist.

Beispiel:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ y_1(t) = 25 sin(\sqrt{\frac{D}{m}} t) \quad\quad y_2(t) = 7 cos(\sqrt{\frac{D}{m}} t) \] \end{document} | LineareDGLLinearkombination | (55) |

Dann ist auch c1y1(t) + c2y2(t) eine Lösung der linearen DGL.

Für Funktionen mehrerer Veränderlicher erhält man in der Verallgemeinerung partielle Differentialgleichungen. Beispiel Maxwell-Gleichungen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \vec \nabla \cdot \vec {E}=\frac {\rho }{\varepsilon _0} \quad\quad \vec \nabla \cdot \vec B=0 \quad\quad \vec \nabla \times \vec {E}=-\frac {\partial \vec {B}}{\partial t} \quad\quad \vec {\nabla }\times \vec {B}=\mu _0 \vec {j}+\mu _0\varepsilon _0 \frac {\partial \vec {E}}{\partial t}\] \end{document} | Maxwell | (56) |

E, B, j und ρ sind Felder, die von 3 Ortskoordinaten x,y,z und der Zeit t abhängen, also Funktionen von 4 Veränderlichen. E, B und j sind Vektoren, ρ ist eine skalare Funktion. In den Gleichungen finden wir die Komponenten der „physikalischen Objekte“ bez. einer bestimmten Basis.

Partielle lineare Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe von Differentialoperatoren in Matrixform bringen. In unserem Beispiel können wir definieren:[[2]](#footnote-2)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \hat{\mathbf O} := \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\  0 & -\mu _0\varepsilon _0\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\  0 & 0 & -\mu _0\varepsilon _0\frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} \\  0 & 0 & 0 & -\mu _0\varepsilon _0\frac{\partial}{\partial t} & 0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\  0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\  0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 & 0 \\  0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t} & 0 \\  0 & -\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial t}  \end{pmatrix} \] \end{document} | MaxwellMitDifferentialoperator | (57) |
|  |  |  |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \psi := \begin{pmatrix} 0 \\ E_x(x,y,z,t) \\ E_y(x,y,z,t) \\ E_z(x,y,z,t)  \\ 0 \\ B_x(x,y,z,t) \\ B_y(x,y,z,t) \\ B_z(x,y,z,t)  \end{pmatrix} \quad\quad j := \begin{pmatrix} \frac {1}{\varepsilon _0}\rho(x,y,z,t) \\ \mu _0 j_x(x,y,z,t) \\ \mu _0 j_y(x,y,z,t) \\ \mu _0 j_z(x,y,z,t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\quad \Rightarrow \quad\quad \hat{\mathbf O}\psi = j \] \end{document} |  |  |

Wie sieht der Differentialoperator der Schwingungsgleichung aus?  
Schreibe sie auch in der Form Ôψ = j! Wie groß ist j?

Zwischen unserer einfachen Schwingungsgleichungen und den Maxwellgleichungen wie oben angegeben besteht ein wesentlicher Unterschied: j

Dadurch werden die Maxwellgleichungen **inhomogen** und die Möglichkeit der freien Linearkombination von Lösungen geht verloren. Dennoch kann man zu 2 Lösungen sofort wieder weitere Lösungen angeben:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \hat{\mathbf O}\psi_1  = j \quad \hat{\mathbf O}\psi_2  = j \quad\Rightarrow\quad \hat{\mathbf O}\psi_3  :=  \hat{\mathbf O}(c\psi_1 + (1-c)\psi_2)  = j \quad mit \quad 0 \leq c \leq 1 \] \end{document} | DGLInhomogenLinearkombination | (58) |

Diese Linearitätseigenschaften sind übrigens ein Modell dafür, dass wir getrennte Dinge sehen können. Die 4 „Materiefelder“ j werden von den Dingen vorgegeben am Rand eines Gebiets, in dem sich elektromagnetische Wellen (Licht) ausbreiten, ohne dass diese Wellen sich bei der gegenseitigen Durchdringung verändern: sie überlagern sich und bewahren ihre einzelne Form und Stärke.

Schließlich erzeugen sie ein Bild in einer Digitalkamera oder auf unserer Netzhaut. Dieses Bild lässt sich zerlegen in Teilbilder, als wäre jedes Teilbild erzeugt von einem einzelnen Ding unabhängig von den Bildern anderer Dinge.

#### Eigenfunktionen und Eigenwerte

Analog zu (26) lassen sich für homogene lineare DGL-Systeme Eigenfunktionen (entsprechend Eigenvektoren) und Eigenwerte einführen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \hat{\mathbf O}\cdot \psi=\lambda \,\psi \quad\quad (\hat{\mathbf O}\ - \lambda\, {\mathbf 1}) \cdot \psi = 0 \] \end{document} | EigenwerteDGL | (59) |

1 ist der Einheitsoperator. Auch diesen Eigenwerten werden wir in der Quantentheorie als mögliche Messwerte wiederbegegnen.

#### Nichtlineare Differentialgleichungen

Die Lösungen nichtlinearer DGL haben im Allgemeinen qualitativ vollkommen andere Eigenschaften als die linearer DGL. Sie lassen sich nicht mehr unabhängig überlagern (linear kombinieren); das Ganze kann qualitativ etwas vollkommen anderes sein als die Teile.

Bereits die Lösungen von Gleichungen mit wenigen Variablen können komplizierteste Lösungsfunktionen hervorbringen. Dagegen erscheinen die Lösungen linearer DGL langweilig und tot.

Auf makroskopischer Ebene sind bei genauerer Betrachtung alle Kraftgesetze nichtlinear. Traditionell rechnen Physiker in linearen Näherungen, um überhaupt etwas rechnen zu können.

|  |  |
| --- | --- |
| http://physikalismus.de/sites/default/files/pictures/Harmonische_Naeherung.png | Ein lineares Weg-Kraftgesetz ist die Ableitung eines quadratischen Energiepotentials (potentielle Energie, die quadratisch von der Auslenkung abhängt). Systeme im energetischen Minimum befinden sich in einer „glatten Potentialmulde“, die durch eine (ggf. mehrdimensionale) Parabel angenähert werden kann. Dadurch kann das blaue Potential durch das rote angenähert werden, welches uns auf die Schwingungsgleichung führt. Bei starken Auslenkungen versagt die Näherung. |
| Nichtlineare DGL eignen sich als Modell für Effekte wie den Schmetterlingseffekt oder Tsunamis. Eine interessante Galerie von chaotischen Attraktoren: <http://www.chaoscope.org>  In der unteren Schicht der **Quantentheorie** (der „Rechenschicht“) werden uns dagegen **immer lineare DGL** begenen! | http://www.chaoscope.org/images/gallery/poisson_saturne.jpg |

## Komplexe Zahlen

Imaginäre Einheit mit der Eigenschaft i2 = -1. D.h. Wurzel aus -1 ist +i oder –i.

Reelle Zahl: a  
Imaginäre Zahl: bˑi (b ist reell)   
Komplexe Zahl z ist 2-teilig: z := a + bˑi  
 oder in der Darstellung als 2-Tupel (a b)

### Real- und Imaginärteil

Beide Funktionen liefern reelle Zahlen:

Re(z) = Re(a + bˑi) = a  
Im(z) = Im(a + bˑi) = b

### Addition

z1 + z2 = (a1 + b1ˑi) + (a2 + b2ˑi) = (a1 + a2) + (b1 + b2)ˑi

* assoziativ: (x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z
* kommutativ: y + z = z + y
* neutrales Element ist 0 + 0ˑi oder anders geschrieben (0 0) oder ganz kurz 0

### Multiplikation

z1 ˑ z2 = (a1 + b1ˑi) ˑ (a2 + b2ˑi) = a1a2 + a1b2ˑi + a2b1ˑi + b1b2ˑi2 = (a1a2 - b1b2) + (a1b2 + a2b1)ˑi

* assoziativ: (x ˑ y) ˑ z = x ˑ (y ˑ z) = x ˑ y ˑ z
* kommutativ: y ˑ z = z ˑ y
* neutrales Element ist 1 + 0ˑi oder anders geschrieben (1 0) oder ganz kurz 1

Für die Division folgt:

%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
{\displaystyle {\frac {z_{1}}{z_{2}}}={\frac {(a+b\,\mathrm {i} )(c-d\,\mathrm {i} )}{(c+d\,\mathrm {i} )(c-d\,\mathrm {i} )}}={\frac {ac+bd}{c^{2}+d^{2}}}+{\frac {bc-ad}{c^{2}+d^{2}}}\mathrm {i} }
\]
\end{document}

### Betrag

Der Betrag wird definiert wie die Länge eines Vektors (a b):

%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
|z| = \sqrt{a^2 + b^2}
\]
\end{document}

### Polardarstellung

Über die Taylorentwicklungen der trigonometrischen Funktionen sin und cos

%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\sin (x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\mp\dotsb
\]
\end{document} %FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
\cos (x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!}-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\mp\dotsb
\]
\end{document}

sowie die der e-Funktion (42) lässt sich zeigen, dass für komplexe Zahlen gilt:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + \mathrm{i} \cdot \sin \varphi) \] \end{document} | | PolardarstellungKomplexeZahl | (60) | |
| Dadurch wird eine geometrische Darstellung in der Ebene („komplexe Zahlenebene“) möglich.  reiϕ ist die reelle Zahl r gedreht um den Winkel ϕ. | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c6/Komplexe_zahlenebene.svg/280px-Komplexe_zahlenebene.svg.png | | |

Anders herum lassen sich sin und cos über e-Funktionen ausdrücken:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ {\displaystyle \sin x={\frac {1}{2\mathrm {i} }}\left(\mathrm {e} ^{\mathrm {i} x}-\mathrm {e} ^{-\mathrm {i} x}\right)} \quad\quad {\displaystyle \cos x={\frac {1}{2}}\left(\mathrm {e} ^{\mathrm {i} x}+\mathrm {e} ^{-\mathrm {i} x}\right)} \] \end{document} | SinusCosinusKomplex | (61) |

### Komplexe Konjugation

|  |  |
| --- | --- |
| Diese Operation wird in der Quantentheorie ständig verwendet. Geometrisch entspricht sie einer Spiegelung an der reellen Achse.  Statt dem Strich verwenden die Physiker allerdings den Stern:  z = a + bˑi z\* = (a + bˑi)\* = a - bˑi | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f3/Komplexe_konjugation.svg/280px-Komplexe_konjugation.svg.png |

Mit der komplexen Konjugation lässt sich der Betrag einer komplexen Zahl auch so darstellen:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}=\sqrt{z \cdot z^*}. \] \end{document} | BetragKomplexeZahlMitKonjugation | (62) |

### Physikalische Bedeutung

Wir sehen in den Erscheinungen vor dem Bewusstsein nichts, was sich in komplexen Zahlenebenen abspielt (vielleicht im LSD-Rausch?). Die Skalen irgendwelcher Messinstrumente liefern bestenfalls reelle Zahlen, ein Digitalmultimeter vom Elektronikhändler sogar nur rationale Zahlen in Dezimaldarstellung.

In der Elektrotechnik können sich durch Rechnen mit komplexen Zahlen einfachere mathematische Ausdrücke ergeben (<https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Wechselstromrechnung>). Am Ende muss dort ein Schritt stehen, der wieder reelle Zahlen liefert. Das geschieht durch Re(z), manchmal Im(z). Grob gesagt wird am Ende der Rechnung die Hälfte weggeworfen, da sie nicht reell ist, sondern nur das Ergebnis eines Rechentricks.

Ähnlich ist es in der Quantentheorie: durch die komplexen Zahlen lassen sich die Formeln wesentlich kompakter formulieren. Irgendwo gibt es wieder einen Schritt, der reelle Zahlen liefert, bevor es weiter Richtung bewusst wahrnehmbarer Erscheinungen geht. Dieser Schritt wirft wieder Information aus der Rechenschicht weg. Tatsächlich ließe sich die gesamte Quantentheorie ohne komplexe Zahlen formulieren, aber dafür müssten äquivalente mathematische Objekte an ihre Stelle treten. <https://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl> -> Matrizen zeigt, wie es geht:

%FontSize=11
%TeXFontSize=11
\documentclass{article}
\pagestyle{empty}
\begin{document}
\[
Z = \begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix} = a \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} = a \cdot E + b \cdot I
\]
\end{document}

Wir sehen hier ein Prinzip, dass öfter auftaucht: verschiedene mathematische Modelle sind gleichwertig, darin gibt es aber einen gemeinsamen Kern, den man scheinbar nicht loswerden kann. Dieser Kern ist hier die Algebra, wie sie einerseits durch komplexe Zahlen dargestellt werden kann, andererseits durch 2x2 Matrizen. Andere solche Kerne sind Symmetriegruppen, die in jeder Formulierung zu finden sein sollen. Genauer gesagt sind die Kerne keine konkreten Gruppen (wie z.B. Gruppe der Drehungen in 3 Dimensionen SO(3)), sondern wieder nur die algebraische Strukturen, die von diesen Gruppen dargestellt werden. Diese Erfahrung hat den Glauben an die Realität solcher algebraischer Strukturen in der Natur gefestigt, z.B.: <http://www.lyre.de/Lyre-SSR-2012.pdf>

Die komplexen Zahlen fallen unter das Thema der Clifford-Algebren, zu denen die Quaternionen genauso gehören wie die Dirac-Matrizen. Dirac-Matrizen kommen zur Anwendung in Gleichungen, die zur Beschreibung von Fermionen (Elektronen, Myonen, Neutrinos, …) dienen. Auch hier dürfte sich die Darstellung relativ leicht wechseln lassen, wobei die Algebra dieselbe bleiben wird.

# Gruppen

|  |  |
| --- | --- |
| Mathematische Gruppen sind in der Physik von überragender Bedeutung. Oben haben wir die Galilei-Gruppe kennengelernt. Im Standardmodell der „Materie“ genügen die Gleichungen bestimmten Symmetrien, die man mit U(1), SU(2), SU(3) und Poincaré-Gruppe bezeichnet.[[3]](#footnote-3) D.h. dass die mathematischen Objekte in den Gleichungen durch andere Objekte ersetzt werden können, wobei die Gestalt der Gleichung erhalten bleibt. Die Ersetzungsoperationen zusammen genommen bilden mathematische Gruppen. | https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3f/Snowflake8.png/220px-Snowflake8.png |

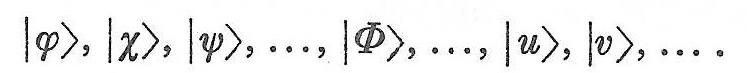
Die wichtigsten Gruppen des Standardmodells sind hier beschrieben: <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~laine/symmetrien/sym_jurke.pdf> Es ist aber noch lange nicht ausgemacht, dass diese fundamentale Gruppen der Natur sind, es könnten genauso gut die Symmetrien eines zusammengesetzten Zustands sein, wobei noch fundamentalere Naturgesetze ganz andere Symmetrien haben könnten. Im Festkörper, so gesehen ein zusammengesetzter Zustand aus elementaren Zuständen des Standardmodells, können sich ganz andere Symmetrien herausbilden: <http://www.thp.uni-koeln.de/Documents/muellerhartmann_gruppentheorie.pdf>

Operationen (Gruppenmitglieder), die mit dem Generator der Zeittranslation kommutieren, führen zu Größen, die ***sind***. Der Generator der Zeitverschiebung heißt ***Energie***, in der Quantenmechanik ***Hamiltonoperator***.[[4]](#footnote-4) Auf diese Art bedeutet die T-Symmetrie Energieerhaltung, die Translationssymmetrie Impulserhaltung, die O(3) Symmetrie Drehimpulserhaltung, die U(1) Symmetrie (Drehung in der komplexen Ebene) die Erhaltung elektrischer Ladung, SU(2) Erhaltung der schwachen Ladung, usw.

Ungeachtet der Wichtigkeit für das Verständnis der Natur können wir bei der Quanteninformationsverarbeitung im Großen und Ganzen einen Bogen um die Symmetriegruppen machen.

# Der unitäre Vektorraum[[5]](#footnote-5)

In der Quantentheorie werden physikalische Größen in einem unitären Vektorraum modelliert, d.h. einem Vektorraum, in dem die Skalarprodukte der Vektoren **komplexe** Zahlen ergeben können. Die „abstrakten“ Vektoren, welche die wirklichen Größen darstellen sollen, werden so geschrieben („ket-Notation“):



Wie für unsere Zahlentupel-„Vektoren“ soll gelten:

* assoziative Addition:   
   
* kommutative Addition:  
   
* Multiplikation mit einem Skalar:  
  
* Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine **komplexe** Zahl a („bra“-„ket“-Notation):  
    
  Es kommt jetzt aber auf die Reihenfolge an, denn es soll gelten:   
  
* Distributivität:  
  
* Herausziehen einer komplexen Zahl:  
   **aber** 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Zeige, dass aus den Definitionen oben folgt:  %FontSize=11 %TeXFontSize=11 \documentclass{article} \pagestyle{empty} \begin{document} \[ \operatorname {Im} \left< \phi | \phi \right>  = 0 \] \end{document} | AufgabeReelleNorm | (63) |

Darüber hinaus soll das Produkt eines Vektors mit sich selbst immer positiv sein:



was es ermöglicht, die **Norm** („Länge“) eines Vektors als positive reelle Zahl zu definieren:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | NormUnitaererVektor | (64) |

Verschwindet das Skalarprodukt, dann nennen wir die Vektoren wieder **orthogonal**:



## Basisvektoren

Wie unsere Zahlentupel-Vektoren und Funktionen wollen wir die Hilbertraumvektoren nach Koordinatenvektoren (oder abstrakter „Basisvektoren“) entwickeln können, wenn wir uns für ein Koordinatensystem (eine „Basis“) entschieden haben.

|  |  |
| --- | --- |
| Zerlegung nach einer Basis |vk> |  |

Die Dimension des unitären Raumes kann endlich oder unendlich sein. Die Komponenten ϕk bilden zusammen ein Tupel aus komplexen Zahlen, das nicht mit dem „echten“ Vektor |ϕ> verwechselt werden darf.

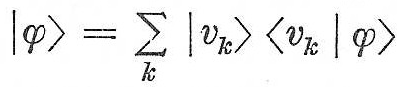
Wenn die Basisvektoren „aufeinander senkrecht stehen“ und die „Länge“ 1 haben, nennt man die Basis **Orthonormalbasis**:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Orthonormalbasis | (65) |

Damit lässt sich die Zerlegung nach einer Basis sofort nach den **Vektorkomponenten in der Orthnormalbasis** auflösen (Multiplikation mit <vk‘|):

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | VektorkomponentenOrthonormalbasis | (66) |

(66) in die Zerlegung eines Vektors eingesetzt ergibt die Identität:



|vk><vk| ist ein Tensorprodukt aus 2 Basisvektoren. Wir haben so etwas Ähnliches schon in Aufgabe (13) in Form einer Matrix kennengelernt. Die Summe der Tensorprodukte aus den Basisvektoren ist also die Einheitsoperation (oder „Identität“).

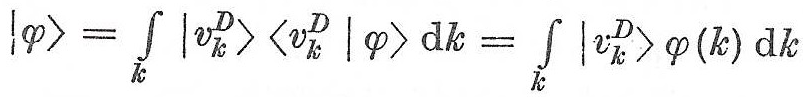
Bei einem Q-Bit beschränkt man sich (per Abmachung oder durch die konkrete technische Realisierung des Quantenrechners) auf einen 2-dimensionalen unitären Raum. Man braucht also 2 Basisvektoren, um jeden Vektor linear kombinieren zu können, der einem Zustand des Q-Bits entspricht. Diese Basiszustände bezeichnet man dann als |0> und |1> in Analogie zu den 2 Zuständen eines klassischen Bits.[[6]](#footnote-6)

## Diracsche Vektoren

Unitäre Vektoren sollen sowohl von abzählbaren Indizes als auch von kontinuierlichen Indizes (also Funktionsvariablen) abhängen können. Man braucht in der Quantentheorie beides.[[7]](#footnote-7)

Mathematisch lassen sich Diracsche Vektoren aus einem Grenzübergang heraus definieren, so wie sich das Integral einer Funktion ʃ f(x)dx mit dem Grenzübergang limΔx→0 aus einer Summe ∑i f(xi)Δx heraus definieren lässt. Wer sich für Einzelheiten interessiert: Fick 2.1§3

Die Entwicklung eines solchen Dirac-Vektors stellt sich so dar:



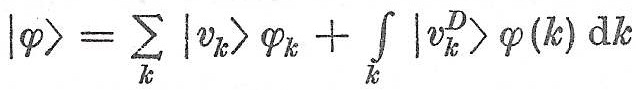
In der Orthonormierungsbedingung für eine Basis tritt nun die Delta-Distribution statt der Einheitsmatrix auf:

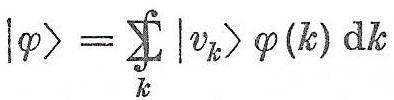


Durch die Gewinnung der Dirac-Vektoren mittels Grenzübergang ist klar: k ist immer reell, auch wenn der Funktionswert im Allgemeinen komplex ist. Wir bekommen es nicht mir Funktionen über der komplexen Ebene zu tun.

## Zusammenfassende Schreibweise

Zum Beispiel beim Wasserstoffproblem ergeben sich – wie wir noch sehen werden - sowohl kontinuierlich dichte Energieeigenwerte (oberhalb der Ionisierungsenergie) als auch diskrete, abzählbare Energieeigenwerte (unterhalb, „gebundene Zustände“). Sowohl die Eigenwerte wie deren (Energie-)Eigenvektoren müssen deswegen gemischt nummeriert werden. Man braucht also im Allgemeinen so etwas:



Dafür soll die zusammenfassende Schreibweise eingeführt werden:   


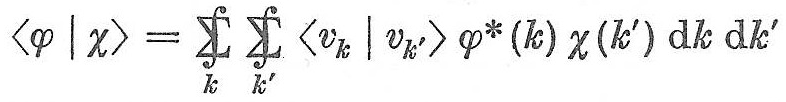
δ(k,k‘) soll sowohl die Einheitsmatrix als auch die Delta-Distribution darstellen, je nach Kontext. Die Orthonormierung der Basisvektoren drückt sich dann so aus:  

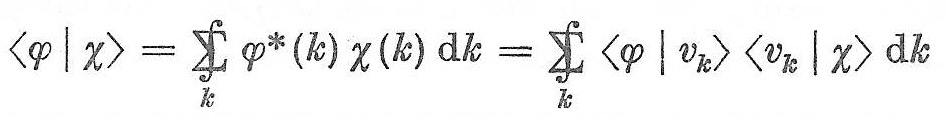
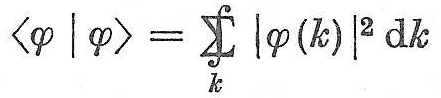

Bei den Komponenten eines Vektors soll im Folgenden mit der Funktionsform beides gemeint sein:  


## Skalarprodukt in Komponentenform

2 Vektoren entwickelt nach dem gleichen Satz von Basisvektoren vk:



Miteinander multipliziert ergeben sie:  


Und die Orthonormierung der Basisvektoren haut uns ein Integral/eine Summe weg:  
  
Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst:  


|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Berechne das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren. v1 und v2 sollen orthonormiert sein. | AufgabeSkalarproduktUnitaer | (67) |

## Unitäre Basistransformationen

Die Transformation von Vektorkomponenten bei einem Wechsel des Koordinatensystems (der Basis) haben wir für Vektoren mit reellen Komponenten bereits kennengelernt. Ganz analog verhält es sich bei unitären Vektoren (mit komplexen Komponenten). Auch hier soll der „abstrakte“ Vektor |ϕ> wieder für das mathematische Analogon zur Wirklichkeit stehen, dessen Verhalten unabhängig vom willkürlich gewählten Koordinatensystem sein soll.

|  |  |
| --- | --- |
| Der Wechsel von einer Basis zur nächsten geht wieder über eine Transformationsmatrix:   bezeichnet die Transformationsmatrix. Im Fall von kontinuierlichen Indizes ist sie eine komplexwertige Funktion der 2 reellen Veränderlichen k und x. Sonst eine quadratische Matrix mit komplexen Komponenten. |  |

.... weiter hier

## Lineare Operatoren

Die Eigenschaften von quadratischen Matrizen und linearen Differentialoperatoren werden in abstrakter Weise auf den unitären Raum übertragen und dadurch unter einem Dach zusammengefasst.

# Shannonsche Informationstheorie

# Philosophischer Ausflug

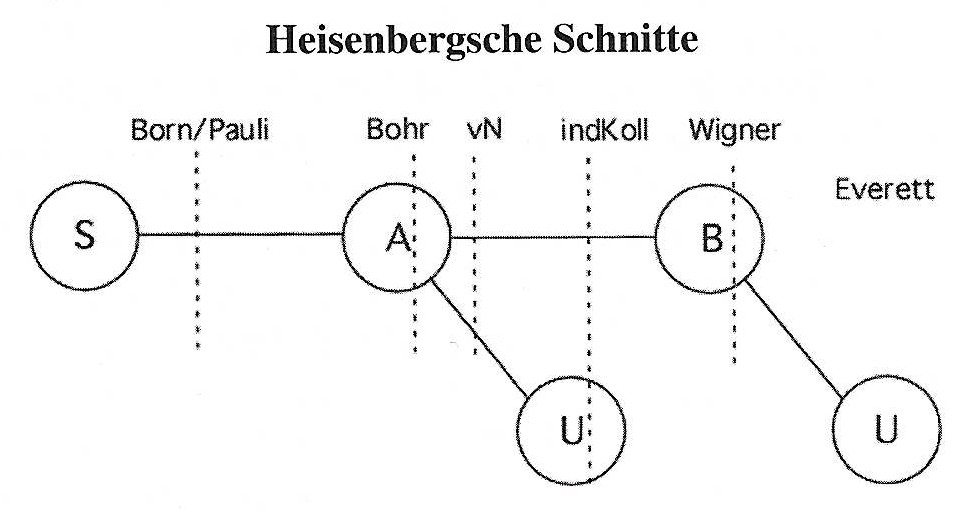
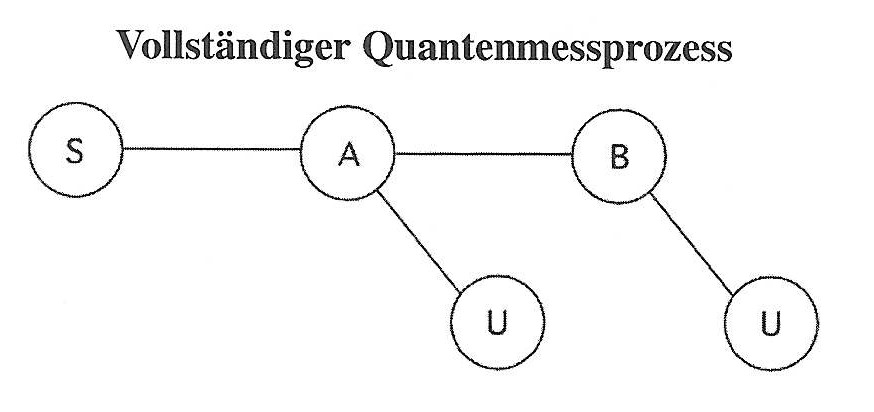
# Quantentheorie



* alles über 1 Kamm scheren: Hilbertraum und lineare Operatoren als abstraktes Modell für Funktionen/n-Tupel und lineare Differential- und Matrixoperatoren
* Die aufgrund der Linearität beliebige Zerlegbarkeit (freie Wahl der Basis), z.B. Fouriertransformation
* Eigenwerte linearer Operatoren
* Das Skalarprodukt. Die Zweischichtigkeit: linear und nichtlinear
* Produkträume, offene Quantensysteme, Dichteoperatoren, Verschränkung und Ganzheit
* halbklassisch, Korrespondenzprinzip
* es gibt eine absolute Zeit (passend zu unserer Alltagsvorstellung, erst mal ausreichend für Quantenrechner)
* Schrödingergleichung, Pauligleichung
* Beispiele (Wasserstoffproblem, harmonischer Oszillator)
* Die unitäre Zeitentwicklung: „es geschieht nichts“ (Heisenberg). Integration der Schrödingergleichung.

# Interpretationen der Quantentheorie

* Das Messproblem: seine Dreifaltigkeit und 2/3 Lösung durch Dekohärenztheorie
* Das verbleibende schlimme 1/3: die totlebendige Schrödingerkatze.
* Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation (z.B. Stern-Gerlach-Experimente) mit Kollaps der Wellenfunktion
* Wigners Freund, Heisenbergsche Schnitte
* Die Viele-Welten-Interpretation („many minds“)
* [Die „shut up and calculate“ Interpretation]
* Es gibt keine Teilchen, es gibt keine Materiefelder, es gibt Symmetrien, mathematikartige Gesetze, Bewusstsein.



# Quanteninformation

* [Das Problem des Kontinuums mit der Information, die Willkür der Einteilung, absolute Information durch schwarze Löcher?]
* Q-Bit als kleinste sinnvolle Einheit, die Beziehung zwischen Q-Bit und klassischem Bit
* Q-Bit Beispiele (es gibt auch Q-Trits, …)
* Produkträume von Q-Bits und unitäre Zeitentwicklung = Quantenrechner
* In etwa bis zur Hälfte von <https://quantiki.org/wiki/basic-concepts-quantum-computation> oder Matthias Homeister

## No Cloning Theorem

*Wie wir vorstehend gesehen haben, ist die westliche Logik im wesentlichen auf das Gesetz der Identität begründet. Auf ihr beruhen Einteilung, Definition, Syllogismus (Vernunftschluss) und sogar Umkehrung und Widerspruch. Alle diese Begriffe stehen miteinander in Beziehung und bilden ein System.  
Die grundlegende Struktur des Chinesischen unterscheidet sich von diesem System. Das chinesische System der Logik, wenn wir es überhaupt ein System nennen wollen, beruht****nicht****auf dem Gesetz der Identität.*[Chang Tun-Sun]

Literaturverweise und Aufgaben in den einzelnen Kapiteln

1. Dieser Glaube betrifft die fundamentalen Grundgesetze. Es gibt viele Gleichungen der klassischen Physik, die nicht alle dieser Symmetrien erfüllen. Wenn erste Ableitungen der Zeit auftreten, dann verschwindet die Zeitumkehrinvarianz wie z.B. in der Wärmeleitungsgleichung. Die Wärmeleitungsgleichung kann nicht zu einer fundamentalen Beschreibung der Natur gehören. Sie muss mit Hilfe komplizierter mikroskopischer Modelle aus invarianten Gleichungen abgeleitet werden. [↑](#footnote-ref-1)
2. In der Relativitätstheorie wird die Galilei-Invarianz abgelöst durch die Poincaré-Invarianz. Es zeigt sich, dass sich das elektromagnetische Feld wie ein Tensor 2. Stufe transformiert. Unsere naiv gewählten Definitionen werden dort also durch andere abgelöst, mit denen sich die Maxwell-Gleichungen aber wieder auf die Form mit einem linearen Differentialoperator bringen lassen, nur dass jetzt der Operator ein Vektor ist und die Felder ein Tensor sind:

   %FontSize=10
   %TeXFontSize=10
   \documentclass{article}
   \pagestyle{empty}
   \begin{document}
   \[
   \hat{\mathbf O} := \begin{pmatrix} 
   \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} & 
   \frac{\partial}{\partial t} & -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} 
   \end{pmatrix} \quad\quad 
   \psi := \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & F^* \end{pmatrix}
   \]
   \end{document}

   F und F\* findet man in der Literatur als [zueinander duale] „antisymmetrische Feldstärketensoren“. [↑](#footnote-ref-2)
3. Auffallend ist die starke Repräsentanz von Drehgruppen: U(1), SU(2), SU(3) und SO(3) in der Poincaré-Gruppe sind Drehgruppen. [↑](#footnote-ref-3)
4. In der speziellen Relativitätstheorie relativieren sich die Bedeutung von Raum- und Zeitkoordinaten. Dies drückt sich in den relativistischen Quantenfeldtheorien aus als Schwierigkeiten bei der Definition des Hamilton-Operators: <http://www.fuw.edu.pl/~derezins/nohamiltonian.pdf> Gewissermaßen relativiert sich dadurch das Sein. [↑](#footnote-ref-4)
5. Dieses Kapitel orientiert sich an Eugen Ficks Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie. [↑](#footnote-ref-5)
6. Vorsicht! Es ist auch hier kein Koordinatensystem („Basis“) vor dem anderen ausgezeichnet, und durch einen Wechsel der Basis bekommt das Q-Bit andere Komponenten. In welcher Basis man die Basisvektoren mit |0> und |1> bezeichnet ist eine willkürliche Festlegung. [↑](#footnote-ref-6)
7. Dabei ist das Ende vom Lied noch nicht ausgemacht. Wir werden noch sehen, dass Kontinuum und Information zwei gegensätzliche Konzepte sind. Was wir nicht sehen werden soll der Vollständigkeit halber erwähnt werden: das Kontinuum sorgt in den Quantenfeldtheorien für erhebliche Schwierigkeiten sowohl mathematischer Art als auch von der Interpretation her (überall unendlich viel Energie? → Renormierung, Infrarot- und Ultraviolett-Divergenzen, …). Diese Schwierigkeiten bewogen Bjorken und Drell in ihrem Standard-Lehrbuch zum Hinweis, dass die Möglichkeit einer Körnung der Natur nicht aus den Augen verloren werden sollte. [↑](#footnote-ref-7)