



ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

PHYSIKALISCHES FORTGESCHRITTENEN-PRAKTIKUM I

Lange Halbwertszeiten

Studenten:

Daniel UHL

&

Jan Péter SZABADOS

Tutor:

Felix BÜHRER

28. Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

In diesem Versuch sollen die Halbwertszeiten von ^{147}Sm (Samarium-147) und ^{40}K (Kalium-40) bestimmt werden. Da deren Halbwertszeiten sehr hoch sind, kann die zeitabhängige Änderung der Impulsrate nicht beobachtet werden. Stattdessen muss die Aktivität A und die Zahl der radioaktiven Atome N , welche eine messbare Strahlung absondern, bestimmt werden und mithilfe dieser Größen durch $T_{1/2} = \ln(2) \frac{N}{A}$ die Halbwertszeit jeweils bestimmt werden.

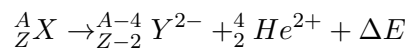
2 Theoretische Grundlagen

2.1 Zerfallsarten

Es wird grundsätzlich zwischen drei Arten von radioaktiver Strahlung unterschieden.

2.1.1 α -Strahlung

Bei dieser Strahlung zerfällt der Mutterkern $^A_Z X$ mit Massenzahl A (Anzahl an Protonen und Neutronen im Kern) und Kernladungszahl Z (Anzahl Protonen im Kern) unter Aussendung eines zweifach positiv geladenen Heliumkerns $^4_2\text{He}^{2+}$ zu dem zweifach negativ geladenen Tochterkern $^{A-4}_{Z-2} Y^{2-}$, wobei Energie frei wird, wie folgender Gleichung entnommen werden kann:

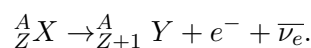


Die freiwerdende Energie hängt von den Reaktionskernen ab und ist diskret. Typischerweise hat die α -Strahlung eine Energie im Bereich einiger MeV (Quelle: [wis]). Da die ausgesandten $^4_2\text{He}^{2+}$ -Kerne elektrisch geladen und ziemlich schwer sind, ist die Reichweite dieser Strahlung sehr gering (in Luft wenige cm (Quelle: [wis])). Bereits ein Blatt Papier reicht aus, um α -Strahlung abschirmen zu können.

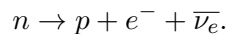
2.1.2 β -Strahlung

Bei der β -Strahlung bleibt die Massenzahl konstant und die Ladungszahl ändert sich um eine Einheit. Es gibt drei Arten von Zerfällen, welche zur β -Strahlung gezählt werden:

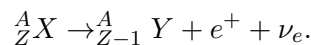
β^- -Zerfall



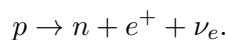
Ein Neutron wandelt sich also in ein Proton um (die Kernladungszahl Z wird um 1 erhöht) und emittiert dabei ein Elektron (e^-) und ein Anti-Neutrino ($\bar{\nu}_e$):



β^+ -Zerfall



Hierbei wandelt sich ein Proton unter Emission eines Positrons e^+ und eines Neutrinos ν_e in ein Neutron um:

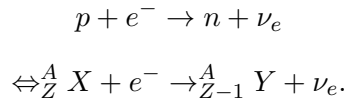


Die Kernladungszahl verringert sich dabei um eine Einheit.

Elektroneneinfang / Electron Capture

Bei dem Elektroneneinfang handelt es sich um einen Konkurrenzprozess zum β^+ -Zerfall, da der

jeweilige Mutterkern in denselben Tochterkern verwandelt wird wie bei diesem. Auch hier wird die Kernladungszahl also um eine Einheit verringert. Es wird ein Bahnelektron (meist aus der K-Schale, alternativ aus anderen kernnahen Schalen) unter Emission eines Neutrinos vom Kern eingefangen. Dabei kommt es zur Umwandlung eines Protons in ein Neutron.



Eigenschaften

β -Strahlung hat im Gegensatz zu α -Strahlung keine fest vorgegebene Energie, sondern ein kontinuierliches Spektrum an möglichen Energien, da die beim Zerfall frei werdende Energie auf den Atomkern, das Elektron/Positron und das Antineutrino/Neutrino verteilt wird. Dabei gibt es eine Maximalenergie, welche vom zerfallenden Kern abhängt. Typischerweise liegt diese in der Größenordnung von keV bis einigen MeV. Zur Abschirmung von β -Strahlung muss mindestens ein dünnes Blech verwendet werden. Die Reichweite von β -Strahlung in Luft beträgt einige Meter (Quelle: [bstr]).

2.1.3 γ -Strahlung

Diese Art der radioaktiven Strahlung ändert weder die Massen-, noch die Ladungszahl eines Kerns. Sie beschreibt das Aussenden von elektromagnetischer Strahlung, wenn ein angeregter Kern in sein energetisches Grundniveau zurückfällt. Bei Zerfallsprozessen tritt die γ -Strahlung als Begleiterscheinung nach einem α - bzw β -Zerfall auf. Da sie aus Photonen besteht, ist sie elektrisch neutral.

2.2 Wechselwirkung geladener Teilchen mit Materie

Der Nachweis geladener Teilchen wird durch elektromagnetische Wechselwirkungen ermöglicht. Die hauptsächlich dafür verantwortlichen Vorgänge sind Ionisation, Anregung und Bremsstrahlung.

2.2.1 Anregung und Ionisation

Beim Durchgang von geladenen Teilchen durch Materie kommt es zu Stößen mit Atomen und Molekülen. Dabei werden diese auf ein höheres Niveau angeregt oder ionisiert (es werden Elektronen aus dem Atom bzw. Molekül herausgeschlagen). Maximal kann bei einem Stoß die Energie $E_{max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2 = 2m_e v^2 \gamma^2$ (Quelle:[sta]) übertragen werden. Dabei ist m_e die Elektronenmasse, $\beta = \frac{v}{c}$ die Geschwindigkeit des Teilchens relativ zur Vakuumlichtgeschwindigkeit und $\gamma = \frac{E}{m_0 c^2}$ der sogenannte Lorentzfaktor.

Im Hinblick auf den resultierenden Energieverlust gibt es einen großen Unterschied zwischen α - und β -Strahlung: Erstere erzeugt pro cm Luft etwa 30000 Ionenpaare, während letztere etwa 50 bis 1000 erzeugt (Quelle: [sta]).

2.2.2 Bremsstrahlung

Im Coulombfeld der Kerne verlieren geladene Teilchen Energie. Dadurch werden sie abgebremst und strahlen einen Teil ihrer Energie als Photonen ab. Für hohe Energien gilt dabei:

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{E}{x_0}$$

Durch diese Gleichung wird die Energieänderung durch Bremsstrahlung nach der Schichtdicke x beschrieben. x_0 ist die Schichtdicke, nach der die Energie E auf den $1/e$ -ten Anteil der Anfangsenergie abgefallen ist.

2.3 Absorption und Reichweite radioaktiver Strahlung

Die Reichweite radioaktiver Strahlung ist die Strecke, nach der ein Teilchen seine Energie vollständig verloren hat:

$$R = \int_E^0 -\frac{dE}{dE/dx}$$

Wie bereits erwähnt, ist die Reichweite von α -Strahlung sehr gering und kann schon durch ein Blatt Papier oder wenige cm Luft abgeschirmt werden. Für die Abschirmung von β -Strahlung benötigt man dagegen eine dünne Bleischicht (ca. 1 mm). In Luft kommt diese Strahlung mehrere Meter weit.

2.3.1 Selbstabsorption

Wenn, wie in diesem Versuch, radioaktive Strahler untersucht werden sollen, muss beachtet werden, dass innerhalb der Probe emittierte Strahlung wieder von dieser absorbiert werden kann. Dieser Effekt ist besonders bei α -Strahlung von Bedeutung: Da diese nur eine sehr kurze Reichweite hat, wird nicht das komplette Volumen des Strahlers berücksichtigt, sondern nur die Oberfläche und die Reichweite, welche die maximale Schichtdicke beschreibt, da die von den darunter liegenden Schichten emittierte α -Strahlung von den anderen Atomschichten absorbiert wird. Bei β -Strahlung tritt dieser Effekt aufgrund der erheblich größeren Reichweite deutlich schwächer auf. Aus diesem Grund wird für den β -Strahler die Zählrate für unterschiedliche Massen der Probe bestimmt.

2.4 Gasionisationsdetektoren

Um α - bzw. β -Strahlung nachzuweisen, verwenden wir in diesem Versuch einen Gasionisationsdetektor. In diesem wird durch zwei Elektroden ein elektrisches Feld erzeugt. Einfallende Teilchen oder Strahlung ionisieren die Atome bzw. Moleküle des darin befindlichen Gases (in diesem Versuch Methan (CH_4)). Die negativ geladenen Elektronen driften zur Anode, die positiv geladenen Ionen zur Kathode. An den Kontakten wird dadurch eine Ladung induziert, welche über einen Wechselkopplungskondensator und einen Vorverstärker in einen Spannungsimpuls umgewandelt wird. Da die induzierte Ladung proportional zur Zahl der ankommenden Elektronen bzw. Ionen ist, ist eine Proportionalität zwischen dem elektrischen Ausgangssignal und dem Energieverlust der einfallenden Teilchen gegeben. Aus diesem Grund spricht man von einem 'Proportionalzählrohr'. Der in diesem Versuch verwendete Detektor hat die Form eines Hohlzylinders, da so aufgrund seiner $1/r$ -Abhängigkeit ein sehr starkes elektrisches Feld erzeugt werden kann, sodass das einfallende Teilchen möglichst seine gesamte Energie abgibt und diese dadurch genauer vermessen werden kann.

2.5 Verwendete Proben

2.5.1 Natururanpräparat ^{238}U

Dieses Präparat wird verwendet, um die Zählrohrcharakteristik aufzunehmen. Uran bietet sich dabei an, da es α - wie β -Strahlung emittiert und es zu sehr vielen Zerfällen kommt, weswegen nicht lange gemessen werden muss, um ein gutes Ergebnis zu erhalten. ^{238}U hat eine lange Zerfallsreihe, welche in ^{206}Pb (Blei) resultiert. Wie der Zerfallsreihe entnommen werden kann,

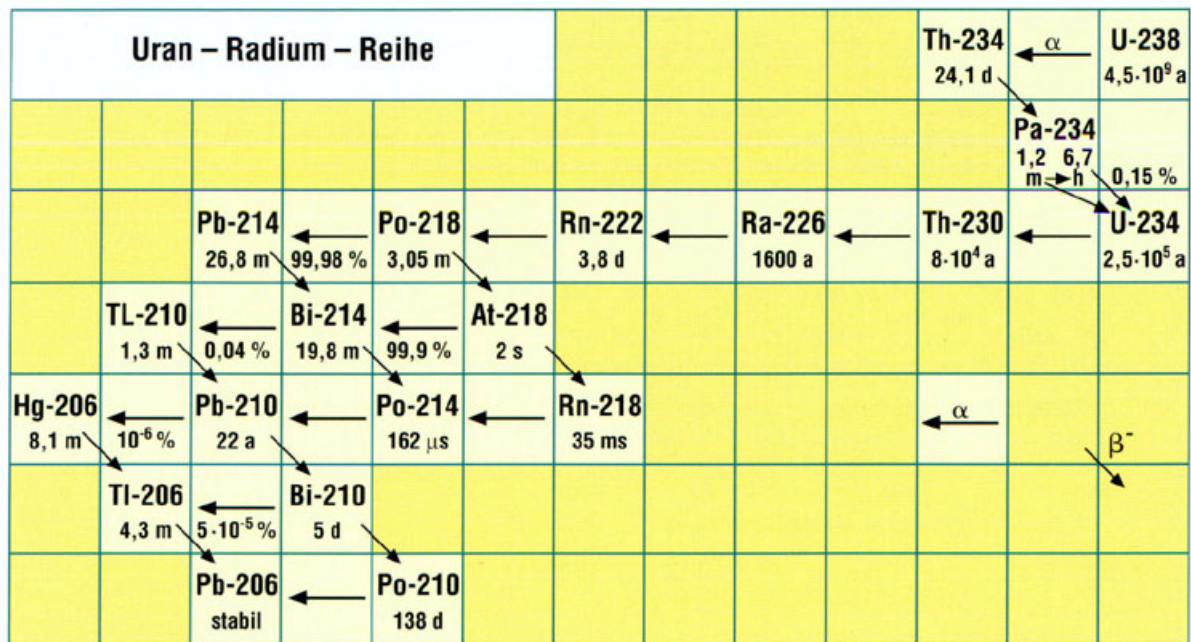


Abb. 2: Uran-Radium-Zerfallsreihe

Abbildung 1: Zerfallsreihe ^{238}U , Quelle: [uwa].

kommt es zu zahlreichen Zerfällen, bis ein stabiler Zustand erreicht wird, allerdings sind diese für den Versuch von keiner besonderen Bedeutung.

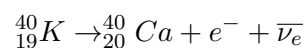
Die Halbwertszeit von ^{238}U beträgt $4,5 \cdot 10^9$ Jahre (s. Zerfallsreihe).

2.5.2 Samariumpräparat ^{147}Sm

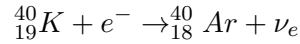
In dem Versuch verwenden wir Samariumdioxid Sm_2O_3 , welches als Pulver mit 99%-iger Reinheit vorliegt. ^{147}Sm ist ein α -Strahler: Es zerfällt mit einer Übergangswahrscheinlichkeit von 100% unter Emission von α -Strahlung zu ^{143}Nd , einem stabilen Isotop von Neodym. Das ausgestrahlte α -Teilchen hat eine Energie von $2,233\text{MeV}$ (Quelle: [sta]). Die Halbwertszeit von ^{147}Sm beträgt $1,06 \cdot 10^{11}$ Jahre (Quelle: [ver]).

2.5.3 Kaliumpräparat ^{40}K

In dem Versuch wird pulverförmiges Kaliumchlorid (KCl) verwendet. Es können zwei unterschiedliche Prozesse stattfinden: β^- -Zerfall bzw. Elektroneneinfang. Ersterer Prozess findet mit einer 89,28%-iger Wahrscheinlichkeit statt und erzeugt Elektronen mit einer maximalen Energie von 1312keV (Quelle: [sta]).



Die Wahrscheinlichkeit für den Elektroneneinfang ist demnach 10,72%. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10,67% entsteht dabei Argon-40 im angeregten Zustand, wodurch es bei der Abregung in den Grundzustand zur Emission von (nicht detektierbarer) γ -Strahlung kommt. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,05% entsteht direkt Argon-40 im Grundzustand (für die Wahrscheinlichkeiten siehe [sta]).



Es kommt also durch den Elektroneneinfang zu keiner nachweisbaren Strahlung. Dennoch muss diese bei der Bestimmung der Halbwertszeit von ${}^{40}\text{K}$ berücksichtigt werden (s. 'Mathematische Beschreibung'). Die Halbwertszeit von ${}^{40}\text{K}$ beträgt $1,28 \cdot 10^9$ Jahre (Quelle: [ver]).

2.6 Mathematische Beschreibung

2.6.1 Halbwertszeit

Die Halbwertszeit beschreibt die Zeit, nach welcher die Zahl der anfänglich vorhandenen Nukliden durch Zerfall auf die Hälfte gesunken ist. Die Zahl der Nuklide in Abhängigkeit von der Zeit lässt sich beschreiben durch

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

Dabei ist N_0 die Zahl der anfänglich vorhandenen Kerne, t die Zeit und λ die Zerfallskonstante, welche eine Wahrscheinlichkeit der Umwandlung pro Zeiteinheit angibt. Für die Halbwertszeit muss also gelten:

$$\begin{aligned} N(T_{1/2}) &= 0,5N_0 \\ \Leftrightarrow N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} &= 0,5N_0 \\ \Leftrightarrow -\lambda T_{1/2} &= \ln(0.5) = -\ln(2) \\ \Leftrightarrow T_{1/2} &= \frac{\ln(2)}{\lambda}. \end{aligned}$$

2.6.2 Aktivität

Die Aktivität beschreibt die Anzahl der Kernzerfälle pro Zeiteinheit. Für sie gilt:

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

Somit gilt:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \frac{\ln(2) \cdot N}{A}.$$

2.6.3 Anwendung auf ${}^{40}\text{K}$

${}^{40}\text{K}$ zerfällt unter Emission von β -Strahlung. Die Zählrate hat aufgrund der endlichen Reichweite der β -Strahlung eine Schranke und kann folgendermaßen modelliert werden:

$$n(m) = a(1 - e^{-bm}),$$

wobei bei Ausschreiben von a und b diese zu

$$n(m) = f_B \frac{\Omega}{4\pi} \frac{A}{m} \frac{F\rho}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu \cdot m}{F\rho}}\right).$$

Dabei gilt: μ ist der Abschwächungskoeffizient für β -Strahlung, $P = 2\pi$ ist der Raumwinkel, in welchem der Detektor funktioniert und $f_B = 1,29$ (Quelle: [ver]) ist der Rückstreufaktor, mit

der die Rückstreuung von Elektronen am Al-Schälchen berücksichtigt wird. Berücksichtigt man die Steigung der Tangente bei $m = 0\text{kg}$,

$$\frac{dn}{dm} = a \cdot b,$$

so erhält man mithilfe des Rückstrefaktors und dem Faktor 2, welcher dadurch zustandekommt, dass nur 2π von insgesamt 4π des Raumwinkels abgedeckt werden, für die spezifische Aktivität:

$$A_s = \frac{A}{m} = \frac{2ab}{f_B}.$$

Die Teilchenzahl der ^{40}K -Kerne wird berechnet durch

$$N = \frac{h_{rel} m \cdot N_A}{m_{rel_{KCl}}}.$$

Dabei ist $h_{rel} = 1,18 \cdot 10^{-4}$ (Quelle: [ver]) der relative Massenanteil von ^{40}K in natürlichem Kalium und $m_{rel_{KCl}} = 74,551 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$ (Quelle: [wal]) gilt. Für die Halbwertszeit gilt im Allgemeinen:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Nun muss hier, wie bereits erwähnt, berücksichtigt werden, dass es zum Elektroneneinfang kommen kann: Dieser Vorgang kann mit dem hier verwendeten Aufbau nicht detektiert werden. Aus diesem Grund gilt:

$$\lambda = \lambda_\beta + \lambda_{EC} = \lambda_{beta} + \frac{10,72\%}{89,28\%} \lambda_\beta = 1,12 \lambda_\beta.$$

Für die Halbwertszeit gilt dann:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{1,12} \frac{N}{A} = \frac{\ln(2)}{1,12} \cdot \frac{h_{rel} f_B \cdot N_A}{2ab \cdot m_{rel_{KCl}}} = \frac{\ln(2) \cdot h_{rel} N_A}{1,12 \cdot m_{rel_{KCl}} A_s}.$$

2.6.4 Anwendung auf ^{147}Sm

Wie bereits diskutiert, zerfällt ^{147}Sm unter Emission von α -Strahlung. Diese hat eine begrenzte Reichweite $R_{Sm_2O_3}$. Die Zerfallsrate $n = \frac{N}{t}$ ist somit gegeben durch

$$n = A_V \frac{F}{4} R_{Sm_2O_3},$$

wobei $A_V = \frac{A}{V}$ die Aktivität pro Volumen Probe ohne Selbstabsorption darstellt. F gibt die Größe der Oberfläche an.

Da $R_{Sm_2O_3}$ ebenso wie die Dichte des Stoffes ρ unbekannt ist, kann deren Produkt ersetzt werden mithilfe der Beziehung von Bragg und Kleeman:

$$R \cdot \rho = C \sqrt{m_A}.$$

C ist eine stoffunabhängige Proportionalitätskonstante, m_A das effektive Atomgewicht. Um die Konstante C eliminieren zu können, muss zunächst $\sqrt{m_A}$ für einen anderen Stoff als Sm_2O_3 berechnet werden. Wir verwenden hierbei Luft. Es gilt

$$\sqrt{m_A} = \sum_i p_i \sqrt{m_{A,i}},$$

wobei p_i die relativen Massenanteile der am Stoff beteiligten Elemente darstellen. Luft besteht vereinfacht gesehen aus Stickstoff (N), Sauerstoff (O) und Argon (Ar). Deren relative Massenanteile können [ver] entnommen werden. Es gilt somit

$$\sqrt{m_{A,Luft}} = 0,75518\sqrt{m_N} + 0,23135\sqrt{m_O} + 0,01288\sqrt{m_{Ar}} = 3,8286$$

und

$$\sqrt{m_{A,Sm_2O_3}} = 11,1249, \text{Quelle: [sta]}.$$

Dabei nahmen wir $m_N = 14,01u$, $m_O = 16,00u$ und $m_{Ar} = 39,95u$ (Quelle: [cem]) an. Somit ergibt sich

$$\frac{R_{Sm_2O_3} \cdot \rho_{Sm_2O_3}}{R_{Luft} \cdot \rho_{Luft}} = \frac{C\sqrt{m_{A,Sm_2O_3}}}{C\sqrt{m_{A,Luft}}}$$

$$\Leftrightarrow R_{Sm_2O_3} \cdot \rho_{Sm_2O_3} = R_{Luft} \cdot \rho_{Luft} \sqrt{\frac{m_{A,Sm_2O_3}}{m_{A,Luft}}} = 4,0255 \cdot 10^{-3} g/cm^2$$

mit $R_{Luft} = 1,13cm$ und $\rho_{Luft} = 0,001226g/cm^3$ (Quelle: [ver]).

Zur Berechnung der Halbwertszeit benötigt man nun noch die Zahl der ^{147}Sm -Kerne in der Probe. Dazu benötigt man zunächst $N_{Sm_2O_3} = \frac{m \cdot N_A}{m_{rel,Sm_2O_3}}$. $N_A = 6,02214179 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ (Quelle: [che]) ist die Avogadro-Konstante, welche die Teilchenzahl pro Stoffmenge angibt, m_{rel,Sm_2O_3} ist die relative molekulare Masse und m ist die Masse der Probe.

Benutzt man dann noch $N = 2N_{Sm_2O_3}h_{rel}$, wobei $h_{rel} = 0,1487$ (Quelle: [sta]) die relative Häufigkeit von ^{147}Sm in natürlichem Samarium angibt, so erhält man die Anzahl N der ^{147}Sm -Kerne.

Damit folgt schließlich für die Halbwertszeit:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2) \cdot N}{A} = \frac{\ln(2) \cdot N}{A_V \cdot F \cdot d} = \frac{\ln(2) \cdot N \cdot R_{Sm_2O_3}}{4nd} = \frac{\ln(2)R_{Sm_2O_3} \cdot 2m \cdot N_A \cdot h_{rel}}{4n \cdot d \cdot m_{relSm_2O_3}} =$$

$$\frac{\ln(2)R_{Sm_2O_3} \cdot \rho_{Sm_2O_3}V \cdot N_A \cdot h_{rel}}{2nd \cdot m_{relSm_2O_3}} = \frac{\ln(2)R_{Sm_2O_3} \cdot \rho_{Sm_2O_3} \cdot N_A h_{rel}}{2m_{relSm_2O_3}} \cdot \frac{F}{n}.$$

Dabei ist d die Dicke der Probe und $m_{relSm_2O_3} = 348,72 \frac{g}{mol}$ (Quelle: [wal]). Schlussendlich hängt die Halbwertszeit also nur von der Oberfläche F und der Zerfallsrate n ab.

2.6.5 Bestimmung der Messdauer

Der radioaktive Zerfall von Kernen mit langer Halbwertszeit folgt der Poissonverteilung (große Anzahl Kerne, kleine Einzelzerfallswahrscheinlichkeit). Der Fehler berechnet sich demnach zu

$$s_N = \sqrt{N}.$$

In [ver] wurde gefordert, dass der relative Fehler nicht größer als 2% sein soll.

$$\rightarrow \frac{s_N}{N} \leq 0,02$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{N} \geq 50$$

$$N \geq 2500.$$

Es müssen also mindestens 2500 Counts gemessen werden, um dieser Forderung zu entsprechen. Wegen $n = \frac{N}{t}$ gilt also:

$$t \geq \frac{2500}{n}.$$

Außerdem sollte der Fehler des Untergrunds vernachlässigbar sein. Der relative Fehler des Untergrunds sollte maximal die Hälfte des relativen Fehlers der Messung mit radioaktiver Probe betragen.

$$\frac{s_U}{U} \leq \frac{s_N}{N} = 0,01$$

$$\Leftrightarrow U \geq 10000$$

$$\rightarrow t \geq \frac{10000}{u}.$$

3 Aufbau

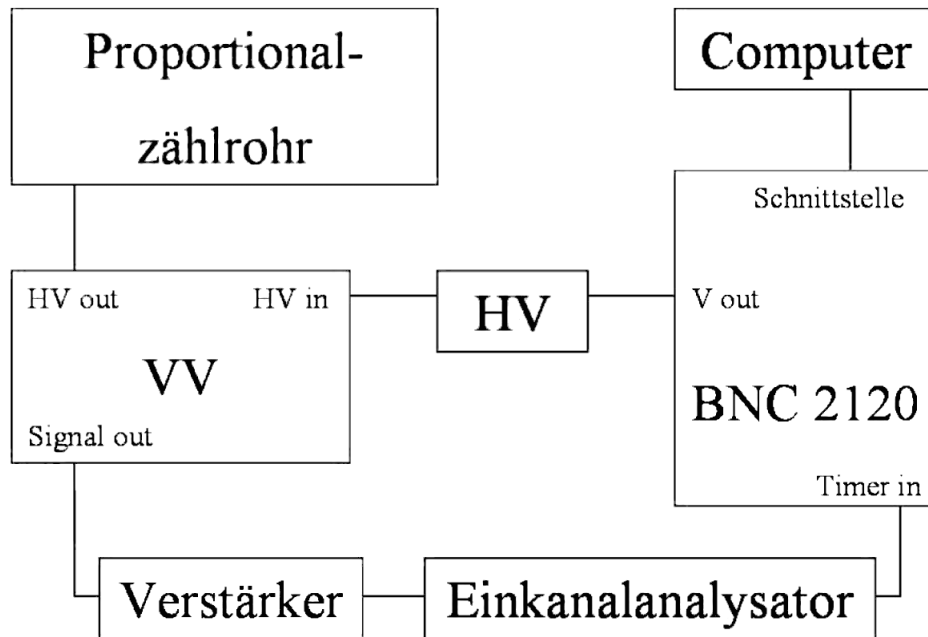


Abbildung 2: Versuchsaufbau, Quelle: [ver]

Die zu vermessenden Präparate werden mithilfe eines Drehtellers in das Methandurchflusszählrohr gebracht. Es kommt, wie bereits diskutiert, zur Wechselwirkung von Teilchen mit den Gasatomen, sodass Strompulse detektiert werden. Diese werden zum Vorverstärker ('VV') geleitet: Dieser wandelt die Strom- in Spannungspulse um und glättet sie. Die Hochspannung, welche am Zählrohr anliegt, wird vom Vorverstärker geliefert. Das Signal gelangt vom Vorverstärker zum Hauptverstärker ('HV'), wo es erneut zu einer Verstärkung kommt. Zudem kann hier die sogenannte 'Shaping Time' gewählt werden, welche die Zeitspanne angibt, über welche das Signal aufintegriert wird. An einem angeschlossenen Oszilloskop wird diese mitsamt des aufintegrierten, rechteckigen Signals angezeigt. Im darauffolgenden Einkanalanalysator wird eine untere Schranke ('lower level') eingestellt, welche die Mindestamplitude angibt, ab welcher ein Signal registriert wird. Mithilfe der 'Shaping Time' und der unteren Schranke können also statistische Schwankungen des Untergrunds herausgefiltert werden. Die registrierten Signale werden schließlich im Programm LabView am Computer durch die Messdauer geteilt: Auf diese Weise entsteht die Zählrate. Das Programm ermöglicht außerdem die Einstellung des zu vermessenden Spannungsintervalls, der Schrittweite, der Zeit, welche als Messdauer für jeden Spannungswert gewählt werden soll und der Zeit, welche dem Gerät gegeben werden soll, um sich auf eine Spannung einzupendeln.

4 Durchführung

Allgemein war zu beachten, dass bei Einführen der Probe in und Entfernen derselben aus dem Methandurchflusszählrohr das Gas ausgestellt ist. Bei den Messungen sollte das Gas aufgedreht sein, sodass man etwa 5 Bläschen/Sekunde am eingebauten Sichtfenster beobachten konnte.

Zunächst wurde die Zählrohrcharakteristik mithilfe einer Natururanprobe aufgenommen. Danach wurde ein Aluminiumschälchen mit KCl-Pulver unterschiedlicher Masse gefüllt und bei einer Arbeitsspannung, welche auf dem β -Plateau lag (s. 'Auswertung'), die Zählrate vermessen. Dies wurde für unterschiedliche Massen wiederholt. Schließlich wurde die Zählrate für das leere Aluminiumschälchen vermessen (Untergrund).

Dann sollte für die Samarium-Probe die Zählrate für unterschiedliche Oberflächen (hierfür lagen Aluminiumschälchen eingelassenen Oberflächen bereit) vermessen werden. Zunächst wurde das α -Plateau aufgenommen, um einen Arbeitspunkt zu bestimmen. Dann wurde die untere Grenze so eingestellt, dass der Untergrund im Bereich von $0,3 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$ lag. Schließlich wurde mithilfe eines Aluminiumschälchens und Sm_2O_3 -Pulvers die Zerfallsrate vermessen. Als diese Messung fertig war, wurde ein mit Pulver gefülltes Schälchen anderer Oberfläche eingeführt. Dabei wurde eine vielfach höhere Zählrate gemessen. Auch ohne Probe und bei abgedrehtem Gas blieb diese Zählrate erhalten, was darauf schließen lässt, dass die Messung - vermutlich, da das Gerät sehr lange angeschaltet war - kein sinnvolles Ergebnis lieferte. Auch konnten auf dem Bildschirm des angeschlossenen Oszilloskops keine Signale beobachtet werden: Dennoch kam es zu detektierten Counts.

5 Auswertung

5.1 Zählrohrcharakteristik mit Natururan

Um die Zählrohrcharakteristik mit Uran aufzunehmen, stellten wir einen Spannungsbereich von 1000 bis 4000 V ein. Die Schrittweite betrug 100 V. Als Messdauer stellten wir 50 s ein, als Einpendelzeit für die Spannung 15 s. Wir benutzten die gleichen Einstellungen, um den Untergrund zu vermessen. Mithilfe von LabView erhielten wir eine Zählrate n für jede Spannung. Deren Fehler s_n berechnet sich wie folgt:

$$n = \frac{N}{t},$$

wobei N für die Anzahl der Counts und t für die Messdauer steht.

$$\rightarrow s_n = \frac{\partial n}{\partial N} \cdot s_N = \frac{\sqrt{N}}{t} = \sqrt{\frac{n}{t}}.$$

Dabei wird der Fehler der Zeit als vernachlässigbar angenommen.

Die resultierende Zählrate nach Abzug des Untergrunds (mit Countzahl U und Zählrate u) berechnet sich als

$$n_{res} = \frac{N - U}{t} = \frac{N}{t} - \frac{U}{t} = n - u.$$

Da hier nicht davon ausgegangen werden kann, dass genug Counts gemessen wurden, um den Fehler des Untergrunds vernachlässigen zu können, gilt:

$$s_{n_{res}} = \sqrt{\left(\frac{\partial n_{res}}{\partial n}\right)^2 \cdot s_n^2 + \frac{\partial n_{res}}{\partial u} \cdot s_u^2} = \sqrt{\frac{n}{t} + \frac{u}{t}}.$$

Für die Fehlerberechnungen wurde jeweils die Gauss'sche Fehlerfortpflanzungsmethode verwendet. Für die Zählrohrcharakteristik erhielten wir somit:

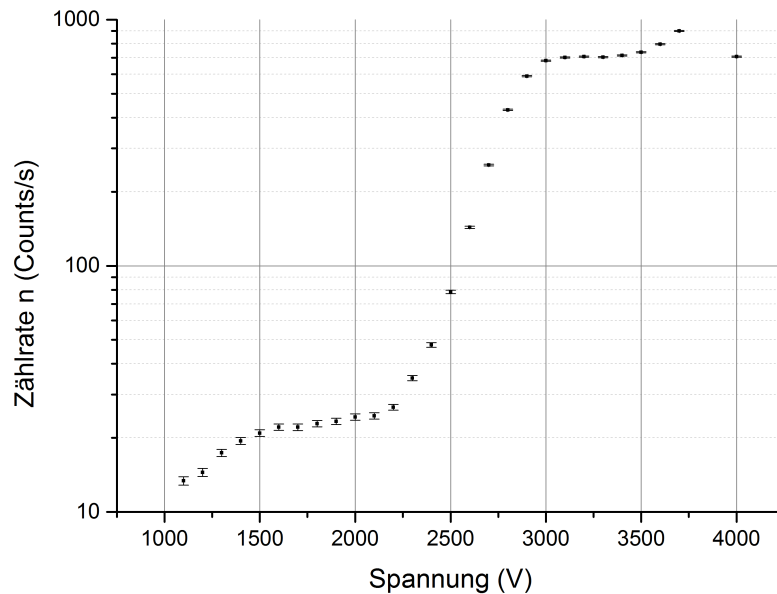


Abbildung 3: Zählrohrcharakteristik, aufgenommen mit ^{238}U , abzüglich des Untergrunds

Die Skalierung der y-Achse wählten wir logarithmisch, da sonst die Unterschiede bei den Zählraten bei niedrigen Spannungen nicht sichtbar wären. Der Fehler der Spannung wurde als vernachlässigbar angenommen.

Das α -Plateau zeigte sich in dem Bereich zwischen 1600 und 2100 V, das β -Plateau zwischen 3100 und 3400 V.

5.2 Bestimmung der Halbwertszeit von ^{40}K

Zunächst füllten wir ein Schälchen mit etwas KCl und vermaßen damit den Bereich zwischen 3000 und 4000 V, um die Arbeitsspannung zu bestimmen. Dabei wählten wir eine Messzeit von 100 s und eine Einpendelzeit von 20 s. Der Fehler auf die erhaltenen Zählraten berechnete sich zu $s_n = \sqrt{\frac{n}{t}}$, wie bereits im Unterkapitel für Natururan diskutiert. Wir erhielten folgenden Verlauf:

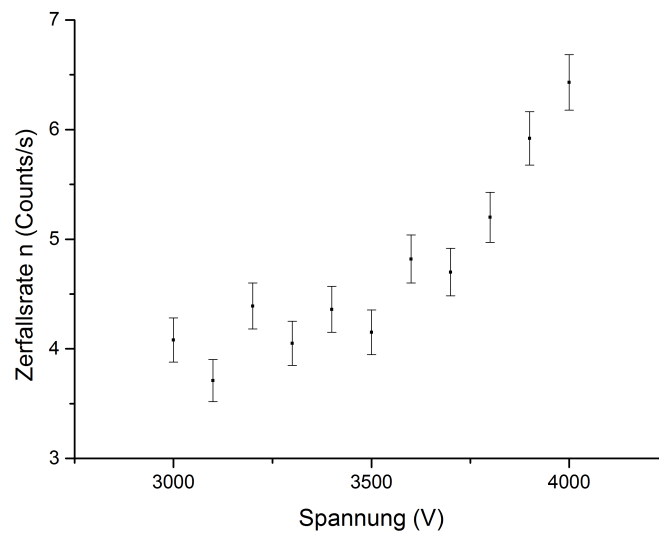


Abbildung 4: Vermessung des Plateaus von ^{40}K

Aufgrund des erhaltenen Verlaufs entschieden wir uns für eine Arbeitsspannung von $U_{AP} = 3200\text{V}$.

Um eine Messdauer zu bestimmen, für welche der relative Fehler der Zählrate bei 2% liegt, füllten wir sehr wenig KCl-Pulver ($m = (0,1614 \pm 0,0001)\text{g}$), wobei die Waage auf die Masse des Aluminiumschälchens geeicht wurde, sodass nur die Masse des Pulvers angezeigt wurde. Als Fehler wurde die letzte Stelle der Anzeige angenommen. Als Zählrate erhielten wir bei einer Messdauer von $t = 200\text{s}$ $n = (2,15 \pm 0,10) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$. Mithilfe dieses Ergebnisses wurde die Messdauer mithilfe der Formel $t = \frac{2500}{n}$ (s. 'Theoretische Grundlagen') bestimmt. Der Fehler berechnet sich mithilfe der Gauss'schen Fehlerfortpflanzung somit zu $s_t = \left| \frac{\partial t}{\partial n} \right| \cdot s_n = \frac{2500}{\sqrt{n^3 \cdot t}}$. Somit erhielten wir für die Messdauer $t = (1160 \pm 60)\text{s}$. Somit entschieden wir uns für eine Messdauer von $t = 1200\text{s}$. Da die Wahl mit einer sehr geringen Masse und damit einer geringen Zählrate stattfand, konnte gewährleistet werden, dass der relative Fehler die Vorgaben erfüllte.

Lediglich für die Masse von $m = (0,0988 \pm 0,0001)\text{g}$ wurde eine höhere Messdauer von $t = 1800\text{s}$ gewählt, da hier eine geringere Zählrate als für die Messung, mithilfe derer die Wahl fiel, zu erwarten war (aufgrund der geringeren Messung).

Vor dem Start der Messungen bestimmten wir die Zählrate auch für $m = (1,6625 \pm 0,0001)\text{g}$, also einem vollen Schälchen, und erhielten eine Zählrate von $n = (5,73 \pm 0,17) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$ und damit

analog zu der vorangegangenen Rechnungen eine Zeit von $t = (437 \pm 13)s$, weshalb wir für die letzten beiden Messungen mit Massen von $m = (1,6256 \pm 0,0001)g$ und $m = (1,6604 \pm 0,0001)g$ eine Messdauer von lediglich $t = 500s$ wählten.

Bei der Einstellung der Messdauer für die Untergrundmessung erhielten wir nach mehrfacher Messung eine Zählrate von $n \approx 0,5 \frac{\text{Counts}}{s}$. Somit bestimmten wir als Messdauer $t = 20000s$. Um sicher zu gehen, dass genug Counts gemessen werden und um das ganze Wochenende auszunutzen, vermaßen wir den Untergrund von 2900-3800 V in 100 V-Schritten, wobei wir eine Messdauer von $t = 6h = 21600s$ pro Schritt und eine Einpendelzeit von 5 Minuten wählten. Um überprüfen zu können, dass alles in Ordnung lief und es zu keinen extremen Ausreißern oder Verfälschungen des Ergebnisses durch beispielsweise einen nicht konstanten Gasdruck kam, ließen wir die Zählrate alle 10 Minuten anzeigen. An der Berechnung für den Fehler der Zählrate, $n = \sqrt{\frac{n}{t}}$, wobei $n = \frac{n_1 + \dots + n_m}{m}$ der Mittelwert der m angezeigten Zählraten und t die Messdauer für einen Schritt ist, ändert dies nichts, da gilt:

$$s_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial n_1}\right)^2 \cdot s_{n_1}^2 + \dots + \left(\frac{\partial n}{\partial n_m}\right)^2 \cdot s_{n_m}^2} = \sqrt{\frac{s_{n_1}^2}{m^2} + \dots + \frac{s_{n_m}^2}{m^2}} =$$

$$\frac{1}{m} \sqrt{\frac{n_1}{(t/m)} + \dots + \frac{n_m}{(t/m)}} = \sqrt{\frac{n_1 + \dots + n_m}{m}} \cdot \sqrt{\frac{1}{t}} = \sqrt{\frac{n}{t}}.$$

Für die resultierende Gesamtrate, also der gemessenen Rate n abzüglich der Untergrundrate u erhalten wir somit:

$$n_{res} = n - u$$

mit dem statistischen Fehler

$$s_{n_s} = \sqrt{s_n^2 + s_u^2} = \sqrt{\frac{n}{t_n} + \frac{u}{t_u}},$$

wobei t_n für die jeweilige Messdauer mit KCl-Pulver und t_u für die Messdauer für den Untergrund steht.

Um den Fehler besser abschätzen zu können, nahmen wir die Messung für $m = 1,5306g$ doppelt vor. Dabei erhielten wir $n_1 = (5,37 \pm 0,07) \frac{\text{Counts}}{s}$ bzw. $n_2 = (5,39 \pm 0,07) \frac{\text{Counts}}{s}$. Die Werte sind im Rahmen der Messungenauigkeit gleich. Dennoch entschlossen wir uns, die Hälfte der Differenz der gemessenen Raten als Fehler $s_{n_{diff}} = 0,01 \frac{\text{Counts}}{s}$ zu berücksichtigen, um ein möglichst genaues Ergebnis zu erhalten.

Der resultierende Fehler kann jetzt bestimmt werden zu

$$s_{n_{res}} = \sqrt{s_{n_{diff}}^2 + s_{n_s}^2}.$$

Für den Untergrund erhielten wir am Arbeitspunkt eine Rate von $u = (0,568 \pm 0,005) \frac{\text{Counts}}{s}$. Der relative Fehler beträgt 0,9%, was geringer als gefordert ist, da die Zeit höher als die berechneten 20000 s gewählt wurde und die Rate höher als die $0,5 \frac{\text{Counts}}{s}$ ist, mit denen wir rechneten. Der Fehler auf den Untergrund kann somit vernachlässigt werden.

Wir trugen die resultierende Zählrate über die benutzten Massen auf und fitteten die in den 'Theoretischen Grundlagen' diskutierte Funktion $n(m) = a(1 - e^{-bm})$ an den Verlauf:

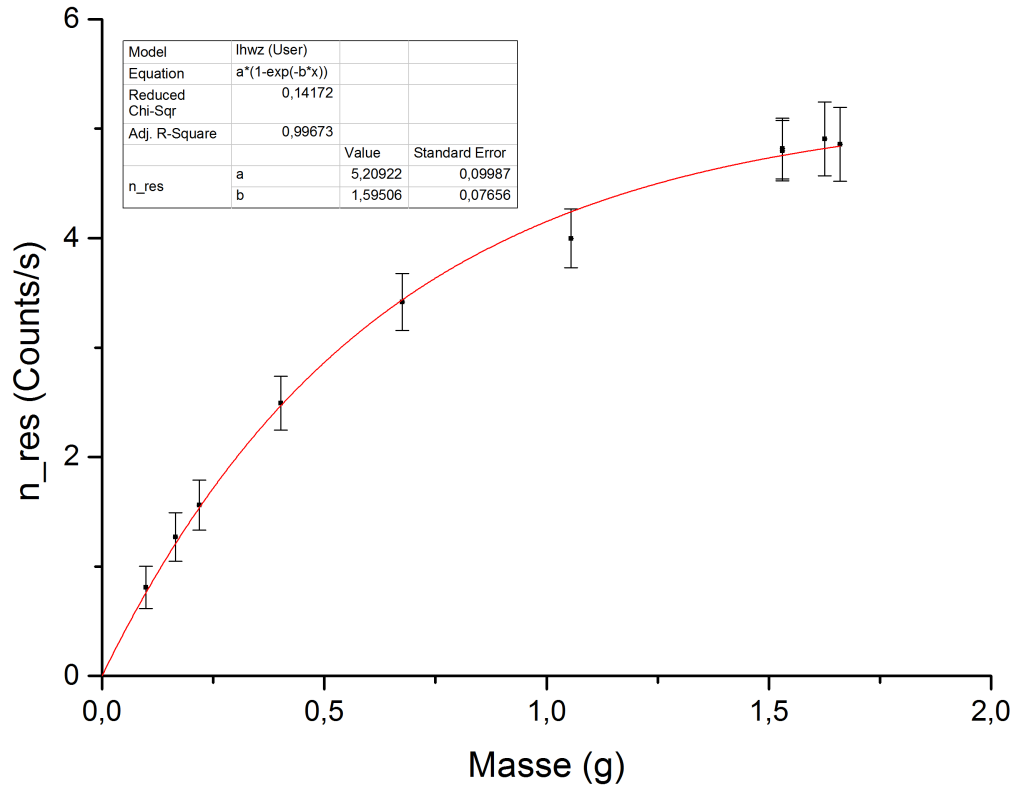


Abbildung 5: Massenabhängige Messung der Zerfallsraten für ^{40}K mit Fitfunktion

Die Fehlerbalken in x-Richtung sind nicht sichtbar, da die Messfehler auf m sehr klein sind.

Wie der Wert $\frac{\chi^2}{\text{Anzahl der Freiheitsgrade}} = 0,14172$, welcher sehr gering ist, zeigt, beschreibt der Fit den Verlauf sehr gut. Andersherum kann man sagen, dass unsere Messergebnisse den theoretischen Verlauf bestätigen. Auch das korrigierte Bestimmtheitsmaß ('Adjusted R-Square'), welches 0,99673 beträgt, zeugt von einer sehr guten Anpassung, da ein Wert von 1 eine perfekte Übereinstimmung von Fit und Werten anzeigt und die Differenz zwischen diesem und dem mithilfe unseres Fits bestimmten Wert sehr klein ist.

Für die Parameter a und b erhielten wir folgende Werte:

$$a = (5,21 \pm 0,10) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$$

$$b = (1,60 \pm 0,08) \text{g}^{-1}.$$

Für die Kovarianzmatrix C ergibt sich:

$$C = \begin{pmatrix} s_a^2 & \text{cov}(a, b) \\ \text{cov}(a, b) & s_b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00997 & -0,00667 \\ -0,00667 & 0,00586 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich für die spezifische Aktivität

$$A_s = \frac{2ab}{f_B} = 12,88 \frac{\text{Counts}}{\text{s} \cdot \text{g}}.$$

Der Fehler der spezifischen Aktivität, s_{A_s} , berechnet sich aufgrund der Kovarianz durch

$$s_{A_s} = \sqrt{\left(\frac{\partial A_s}{\partial a}\right)^2 s_a^2 + \left(\frac{\partial A_s}{\partial b}\right)^2 s_b^2 + 2 \left(\frac{\partial A_s}{\partial a}\right) \cdot \left(\frac{\partial A_s}{\partial b}\right) cov(a, b) =}$$

$$A_s \cdot \sqrt{\left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + \frac{2cov(a, b)}{ab}} = 0,42 \frac{Counts}{s \cdot g}.$$

Insgesamt erhält man für die spezifische Aktivität somit $A_s = (12,9 \pm 0,4) \frac{Counts}{s \cdot g}$.

Die Halbwertszeit berechnet sich dann durch die Formel (s. 'Theoretische Grundlagen')

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2) \cdot h_{rel} N_A}{1,12 \cdot m_{rel_{KCl}} A_s} = 4,58 \cdot 10^{16} s = 1,45 \cdot 10^9 a.$$

Dabei haben wir angenommen, dass ein Jahr im Mittel 365,25 Tage hat.

Da A_s die einzige als fehlerbehaftet angenommene Größe in der Formel für die Halbwertszeit ist, gilt für deren Fehler mithilfe Gauss'scher Fehlerfortpflanzung:

$$s_{T_{1/2}} = T_{1/2} \cdot \frac{s_{A_s}}{A_s} = 4,7 \cdot 10^7 a.$$

Insgesamt erhalten wir damit für die Halbwertszeit:

$$T_{1/2} = (1,45 \pm 0,05) \cdot 10^9 a.$$

Der Literaturwert beträgt $T_{1/2, lit} = 1,28 \cdot 10^9 a$. Der mithilfe unserer Messwerte ermittelte Wert liegt innerhalb von 4σ auf diesem. Es ist möglich, dass die untere Schwelle leicht zu hoch gewählt war, wodurch die Zählrate zu niedrig und die Halbwertszeit zu hoch bestimmt würde. Weiterhin ist zu beachten, dass das verwendete KCl-Pulver nicht absolut rein war, weshalb die tatsächliche Masse an KCl geringer sein sollte, wodurch die spezifische Aktivität höher und damit die Halbwertszeit kleiner als bestimmt ist. Außerdem wird der Rückstreu faktor am Aluminium-Schälchen als konstant angenommen, wobei die Dicke der Probe, also die Höhe, in der das Pulver aufgehäuft ist, keine Rolle spielt. Eigentlich spielt diese jedoch eine Rolle und sorgt bei ihrer Erhöhung für ein höheres Maß an Selbstabsorption, was zu einer zu niedrig bestimmten Schranke der Zählrate führt. Diese wiederum ist proportional zur spezifischen Aktivität, welche antiproportional zur Halbwertszeit ist. Alles in allem führt dies also zu einer zu einer zu hoch bestimmten Halbwertszeit, welche tatsächlich niedriger sein sollte.

5.3 Bestimmung der Halbwertszeit von ^{147}Sm

Zunächst bestimmten wir die Position des α -Plateaus, indem wir die Spannungen im Bereich von 1200 bis 2700 V in 100 V-Schritten durchfuhren. Die Messdauer betrug dabei $t = 200\text{s}$, die Einpendelzeit für die Spannungen 20 s. Der Fehler der Zählraten wurde, wie bereits diskutiert, durch $s_n = \sqrt{\frac{n}{t}}$ berechnet. Die Einengung der vermessenen Spannungen nahmen wir mithilfe der für Natururan aufgenommenen Zählrohrcharakteristik vor. Wir erhielten somit folgenden Verlauf:

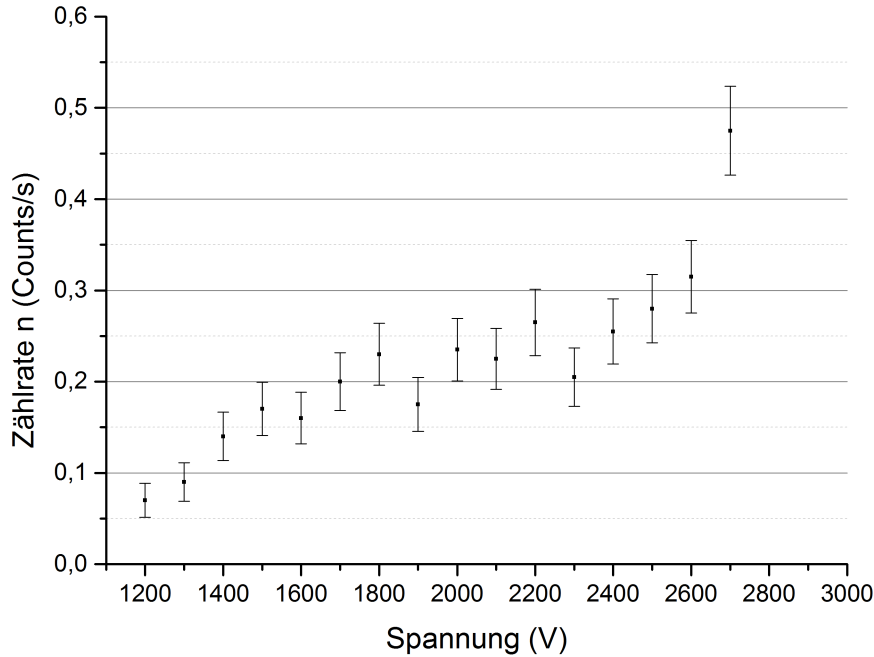


Abbildung 6: Aufnahme des α -Plateaus für ^{147}Sm

Das α -Plateau ist in dem Bereich zwischen 1700 und 2300 V. Als Arbeitspunkt wählten wir somit $U_{AP} = 2000\text{V}$.

Da die gemessenen Zählraten sehr niedrig waren, musste die untere Grenze verändert werden, ab welcher Counts detektiert werden. Wir veränderten diese so, dass der Untergrund eine Rate von $u = (0,27 \pm 0,04) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$ aufwies (am Arbeitspunkt, bestimmt mit einer Messdauer von $t = 200\text{s}$).

Danach füllten wir eine Aluminiumschale mit kleiner Oberfläche (Durchmesser $d = (1,695 \pm 0,005)\text{cm}$ - der Fehler ergab sich dadurch, dass es uns nicht möglich war, genauer als auf die halbe Distanz zwischen zwei Markierungen am Messschieber abzulesen) und vermaßen die Zerfallsrate mit derselben Messdauer wie den Untergrund. Als Ergebnis erhielten wir $n = (0,95 \pm 0,07) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$. Damit berechneten wir die Messdauer, um einen relativen Fehler von 2% zu erhalten, zu $t = \frac{2500}{n} = 2631,6\text{s}$. Der Fehler auf diese Größe berechnete sich mit Gauss'scher Fehlerfortpflanzung analog zum vorigen Kapitel zu $s_t = 190,9\text{s}$. Wir wählten die Messdauer schließlich als $t = 2700\text{s}$, um möglichst Zeit zu sparen.

Als Resultat dieser Messung erhielten wir eine Zerfallsrate von $n = 1,704 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$, mitsamt des Fehlers also $n = (1,70 \pm 0,03) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$. Da die mithilfe der kurzen Messzeit bestimmte Zählrate deutlich zu gering war, reichte also die Messdauer von $t = 2700\text{s}$ völlig aus. Der relative Fehler betrug somit nur 1,47%.

Sinnvolle Messungen mit anderen Oberflächen erwiesen sich als unmöglich, da plötzlich selbst ohne Gasdruck und Probe Zerfallsraten von $n = 70 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}$ und mehr gemessen wurden, was nur auf ein gravierendes Problem im Aufbau hinweisen kann. Vermutlich war die Elektronik aufgrund des tagelangen Dauereinsatzes nicht mehr einsatzfähig.

Aus diesem Grund kann die Auswertung nur mit dem einen ermittelten Wert und der Untergrundmessung, welche sehr kurz vorgenommen wurde, um die untere Grenze einzustellen, erfolgen. Wegen der kurzen Messdauer kann der Fehler auf die Rate des Untergrunds nicht vernachlässigt werden.

Die tatsächliche Zerfallsrate wurde analog zum vorherigen Kapitel berechnet durch

$$n_{res} = n - u = 1,434 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}.$$

Der Fehler ergab sich zu

$$s_{n_{res}} = \sqrt{s_n^2 + s_u^2} = 0,0445 \frac{\text{Counts}}{\text{s}}.$$

Insgesamt erhält man also

$$n_{res} = (1,43 \pm 0,04) \frac{\text{Counts}}{\text{s}}.$$

Wie bereits in dem Kapitel 'Theoretische Grundlagen' beschrieben, hängt die Halbwertszeit von der Fläche und der Zerfallsrate ab. Die Fläche berechnet sich, da die Oberfläche kreisförmig ist, als

$$F = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi.$$

Der Fehler berechnet sich als

$$s_F = \frac{\partial F}{\partial d} \cdot s_d = \frac{\pi}{2} \cdot ds_d.$$

Für die Fläche erhalten wir mit dem bereits erwähnten Durchmesser von $d = (1,695 \pm 0,005) \text{cm}$ somit

$$F = (2,256 \pm 0,013) \text{cm}^2.$$

Mithilfe dieser Werte kann die Halbwertszeit durch die in den 'Theoretischen Grundlagen' diskutierte Formel

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2) R_{Sm_2O_3} \cdot \rho_{Sm_2O_3} \cdot N_A h_{rel}}{2m_{relSm_2O_3}} \cdot \frac{F}{n_{res}}$$

berechnet werden. Der Fehler berechnet sich zu

$$s_{T_{1/2}} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_{1/2}}{\partial F}\right)^2 s_F^2 + \left(\frac{\partial T_{1/2}}{\partial n_{res}}\right)^2 s_{n_{res}}^2} =$$

$$T_{1/2} \sqrt{\left(\frac{s_F}{F}\right)^2 + \left(\frac{s_{n_{res}}}{n_{res}}\right)^2}.$$

Somit wurde die Halbwertszeit zu

$$T_{1/2} = (0,179 \pm 0,005) \cdot 10^{11} \text{a}$$

bestimmt. Dieser Wert liegt weit von dem in [ver] gegebenen Literaturwert $T_{1/2,lit} = 1,06 \cdot 10^{11} \text{a}$ entfernt.

Dies kann zahlreiche Ursachen haben: Die Oberfläche der Probe war nicht perfekt kreisförmig, sondern leicht uneben, wodurch die tatsächliche Oberfläche und damit die Halbwertszeit größer als gemessen war. Natürlich kann aber dies kein Grund für unsere Abweichung vom Literaturwert sein, da diese viel zu groß ist, um eine solch geringfügige Ursache zu haben.

Es ist möglich, dass die Diskriminatorschwelle zu niedrig gewählt wurde, weshalb eine höhere Zählrate gemessen wurde, was aufgrund der Antiproportionalität von Zählrate und Halbwertszeit zu einer Verkleinerung dieser führen kann. Wir gehen allerdings davon aus, dass die Einstellung in Ordnung war, da die erste Messung für den Untergrund ein sinnvolles Ergebnis ergab.

Am wahrscheinlichsten ist es daher, dass bereits bei den von uns zunächst als sinnvoll erachteten Messungen zu viele Counts registriert wurden, was die Zählrate erhöht und die Halbwertszeit verkleinert. Ein Indiz hierfür ist, dass die erste Messung mit der Probe, aufgrund welcher wir die Messdauer bestimmten, eine deutlich niedrigere Zählrate als die darauffolgende, lange Messung aufwies. Wahrscheinlich wurden daher schon in letzterer Messung zu viele Counts registriert.

6 Zusammenfassung

In dem Versuch 'Lange Halbwertszeiten' wurden die Halbwertszeiten von ^{147}Sm und ^{40}K bestimmt.

Für ^{40}K erhielten wir den Wert

$$T_{1/2}(^{40}\text{K}) = (1,45 \pm 0,05) \cdot 10^9 a.$$

Dieser stimmt im Rahmen von 4σ mit dem Literaturwert $T_{1/2,lit} = 1,28 \cdot 10^9 a$ überein.

Für ^{147}Sm ergab sich ein Wert von

$$T_{1/2}(^{147}\text{Sm}) = (0,179 \pm 0,005) \cdot 10^{11} a.$$

Dieser Wert liegt deutlich vom Literaturwert $T_{1/2,lit} = 1,06 \cdot 10^{11} a$ entfernt.

Eine Diskussion der möglichen Gründe der jeweiligen Abweichungen ist dem Kapitel 'Auswertung' zu entnehmen.

7 Literaturverzeichnis

[ver] - Versuchsanleitung 'Lange Halbwertszeiten', Institut für Mathematik und Physik, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg, 2012

[sta] - T. Kotyk: 'Versuche zur Radioaktivität im Physikalischen Fortgeschrittenen-Praktikum an der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg', 2005

[bstr] - [http : //www.kernfragen.de/kernfragen/physik/03 – Strahlungsarten/3 – 5 – Die – Beta – Strahlung.php](http://www.kernfragen.de/kernfragen/physik/03-Strahlungsarten/3-5-Die-Beta-Strahlung.php)

[wis] - [http : //www.wissenschaft – online.de/abo/lexikon/physik/393](http://www.wissenschaft-online.de/abo/lexikon/physik/393)

[uwa] - [http : //astro.uni – wuppertal.de/ kampert/KP/Uran – Radium – Reihe.jpg](http://astro.uni-wuppertal.de/kampert/KP/Uran-Radium-Reihe.jpg)

[cem] - [http : //www.chemicalelements.com/elements/](http://www.chemicalelements.com/elements/)

[che] - [http : //www.chemie.de/lexikon/Avogadro – Konstante.html](http://www.chemie.de/lexikon/Avogadro-Konstante.html)

[wal] - www.wolframalpha.com

8 Anhang

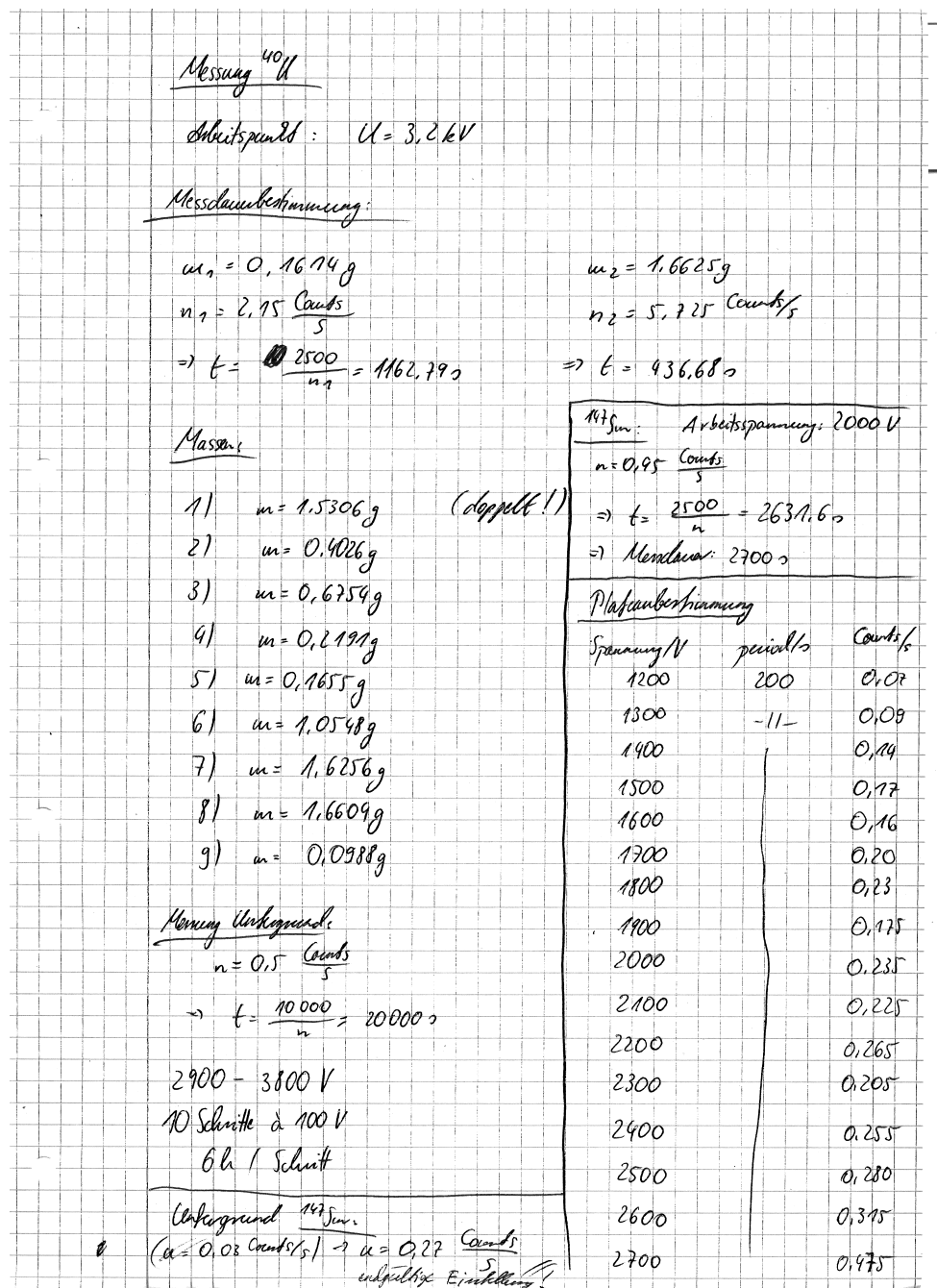


Abbildung 7: Aufzeichnungen