

### 一、小波变换的矩阵形式（第 4.2.1 节）

$N+1$  级多分辨率小波分析矩阵可以用如下方式递归定义：

$$H_N = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c|c} H_{N-1} & 0 \\ \hline 0 & I_{N-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} L_N \\ B_N \end{array} \right]$$

$L_N$  表示采用小波变换低通滤波器去卷积一个长度为  $2^N$  的信号并进行降采样，

例如，对于 Haar 小波变换， $L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$ ， $L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ；

$B_N$  表示采用小波变换高通（或带通）滤波器去卷积一个长度为  $2^N$  的信号并进行降采样，

例如，对于 Haar 小波变换， $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$ ， $B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

$I_N$  为大小为  $2^N \times 2^N$  的单位阵。

式中  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  为归一化系数（注：此处与课件中相关例题有所不同，例题中正交基函数不满足归一化条件）。

正交归一化条件为（ $L$ ， $B$  均带归一化系数  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ）：

$$L^T L + B^T B = I$$

$$L L^T = B B^T = I; \quad L B^T = B L^T = 0$$

对于 Haar 小波变换， $H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{array}{c} L_1 \\ B_1 \end{array} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ 。

(a) 请根据如上定义，推导出多分辨率 Haar 小波分析矩阵  $H_3$  与合成矩阵  $H_3^{-1}$ 。

(b) 请计算向量  $[7 \ 11 \ 9 \ 6 \ 4 \ 3 \ 1 \ 3]^T$  的多分辨率 Haar 小波分析结果。

### 二、有如下的六个样本点：

$$\omega_1 : x_1 = (1, 5)^T, x_2 = (2, 9)^T, x_3 = (-5, -3)^T$$

$$\omega_2 : x_4 = (2, -3)^T, x_5 = (-1, -4)^T, x_6 = (0, 2)^T$$

(1) 请用 PCA（主成分分析）将其变换至一维，并画出变换后的样本分布；

(2) 请用 LDA（线性判别分析）将其变换至一维，并画出变换后的样本分布；

### 三（上机题）

请下载 SIFT 特征变换示例程序（例如：<https://www.cs.ubc.ca/~lowe/keypoints/> 也可使用其他开源 SIFT 代码），任选图像提取 SIFT 特征，并显示在图像上。

#### 四（上机题）

请下载附件中的人脸数据（下载地址：<http://www.cad.zju.edu.cn/home/dengcai/Data/FaceData.html> 选择 ORL 64x64 Data File），并完成如下操作。

(1) 设计 Gabor 滤波器组，从数据中任选一幅图像，并完成 Gabor 特征提取；

matlab 例程如下：

```
load('ORL_64x64.mat');
im = reshape(fea(1,:),[64,64]);
kx = ; ky = ; sigm = ; %设计方向和尺度系数
[x,y] = meshgrid(-round(3*sigm):round(3*sigm));
G_even = ; %代入 Gabor 滤波器函数
G_odd = ; %代入 Gabor 滤波器函数

fe = filter2(G_even,im); % Gabor 滤波
fo = filter2(G_odd,im); % Gabor 滤波
% 输出结果
figure(1), subplot(1,3,1); imshow(im,[]);
subplot(1,3,2); imshow(fe,[]);
subplot(1,3,3); imshow(fo,[]);
```

(2) 对上述所有人脸图像，并结合 PCA 算法计算并输出前 10 个主成分向量所对应的特征脸；选择一张人脸图像，给出在 10 个主分量上的系数值，并用其重建，考察重建人脸图像和原图像的差异。

matlab 例程如下：

```
load('ORL_64x64.mat');
[U, Z, lambda] = princomp(fea); % PCA 变换
% 鼓励同学们利用协方差矩阵和特征值分解进行 PCA
% 输出特征脸
figure(1), subplot(2,5,1);
% 利用前 10 个主成分进行人脸重建
```