POLITECNICO
MILANO 1863

SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
E DELL'INFORMAZIONE

Appunti di

Metodi Numerici per le EDP

per il corso di Ingegneria Matematica
tenuto dal Prof. P. Zunino
a.a. 2022/2023

A cura di
Teo Bonfa

Indice

Capitolo 1

Preparazione orale EDP Numerica

1.1 Contesto

1. Consideriamo la formulazione debole di un generico problema ellittico posto su un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, che si può esprimere tramite il PVA

$$\text{trovare } u \in V \ : \qquad a(u,v) = F(v) \qquad \forall\, v \in V$$

essendo V un opportuno spazio di Hilbert, sottospazio di $H^1(\Omega)$, $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineare continua e coerciva, $F(\cdot) : V \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare e limitato. Sotto tali ipotesi il *Lemma di Lax-Milgram* assicura esistenza e unicità della soluzione u.

2. Sia V_h una famiglia di spazi dipendenti da un parametro positivo h, tali che

$$V_h \subset V, \qquad \dim V_h = N_h < \infty \qquad \forall\, h > 0$$

Il problema approssimato assume la forma

$$\text{trovare } u_h \in V_h \ : \qquad a(u_h, v_h) = F(v_h) \qquad \forall\, v_h \in V_h$$

e viene detto *problema di Galerkin*.

3. Dato che
   - lo spazio V_h è sottospazio chiuso di V spazio di Hilbert, quindi è anch'esso di Hilbert
   - la forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ e il funzionale $F(\cdot)$ sono i medesimi del PVA

   allora sono soddisfatte le ipotesi richieste dal *Lemma di Lax-Milgram*, e possiamo dunque dire che anche la soluzione u_h esiste unica.

4. Il *metodo agli elementi finiti* è un caso particolare di *metodo di Galerkin* in cui il sottospazio V_h è definito come uno spazio di funzioni continue su Ω, polinomiali a tratti su una partizione di Ω e di grado $r = 1, 2, 3, 4$ (per r maggiori si usano i *metodi spettrali*).

5. Abbiamo tutti gli ingredienti per enunciare il seguente

   Teorema 1.1. Siano $u \in V$ la soluzione esatta del PVA e $u_h \in V_h$ la sua soluzione approssimata tramite il *metodo FEM-Galerkin* $\mathbb{P}^r$.

   (a) Se $u \in H^{r+1}(\Omega)$ allora vale la seguente stima *in norma dell'energia* dell'errore:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq \frac{M}{\alpha} C h^r \, |u|_{H^{r+1}} \tag{1.1}$$

   essendo C una costante indipendente da h e da u.

   (b) In generale, se $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^{p+1}(\Omega)$ per qualche $p > 0$, allora vale la stima a priori:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C h^s \, |u|_{H^{s+1}} \qquad \text{con } s = \min\{r, p\} \tag{1.2}$$

1.2 Stima dell'errore in L^2

Si può decidere di studiare l'errore solamente nella norma H^0 cioè L^2. Supponiamo $u \in H^{r+1}(\Omega)$, possiamo subito dire che in norma L^2 vale la seguente stima:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \|u - u_h\|_{H^1} \overset{(1.1)}{\leq} \frac{M}{\alpha} C h^r |u|_{H^{r+1}}$$

ma questa è una stima non ottimale. Infatti, essendo la norma L^2 meno stringente della precedente, ci si deve aspettare una più elevata velocità di convergenza rispetto ad h.

Con la norma L^2 si guadagna un ordine di convergenza:

Teorema 1.2. Siano $u \in V$ la soluzione esatta del PVA e $u_h \in V_h$ la sua soluzione approssimata tramite il *metodo FEM-Galerkin* $\mathbb{P}^r$. Se $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^{p+1}(\Omega)$ per qualche $p > 0$, allora vale la stima a priori:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^{s+1} |u|_{H^{s+1}} \qquad \text{con } s = \min\{r, p\} \tag{1.1}$$

essendo C una costante indipendente da h e da u.

Dimostriamo il teorema per l'equazione $-\Delta u = f$, ma si può estendere ad operatori ellitici più generali.

1.3 Dimostrazione

Vogliamo trovare una maggiorazione di $\|u - u_h\|_{L^2} = \|e_h\|_{L^2}$ rispetto h.

Prerequisito

Iniziamo menzionando il

Lemma 1.3 — Regolarità ellittica. Si consideri il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson:

$$\begin{cases} -\Delta w = g & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $g \in L^2(\Omega)$. Se $\partial\Omega$ è sufficientemente regolare (e.g., $\partial\Omega$ è una curva di classe $\mathcal{C}^2$ oppure Ω è un poligono convesso), allora $w \in H^2(\Omega)$ e inoltre $\exists\, C > 0$ tale che

$$\|w\|_{H^2} \leq C \|g\|_{L^2} \tag{1.1}$$

NB: la (1.1) definisce la stabilità del problema $-\Delta u = f$ in H^2.

Passo I: formula di rappresentazione dell'errore

Applichiamo il *trucco di Aubin-Nitsche*, ovvero consideriamo il seguente problema di Poisson ausiliario detto *problema aggiunto*:

$$\begin{cases} -\Delta \phi = e_h & \text{in } \Omega \\ \phi = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

La sua formulazione debole è

$$\text{trovare } \phi \in H_0^1(\Omega) \;:\qquad a(\phi, v) = \int_\Omega e_h v \; d\Omega \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Con la scelta particolare della funzione test $v \equiv e_h$ si ottiene

$$\|e_h\|_{L^2}^2 = a(\phi, e_h)$$

che è una forma alternativa di rappresentazione dell'errore di approssimazione.

Passo II: fb simmetrica e ortogonalità di Galerkin

Sotto l'ipotesi che $a(\cdot, \cdot)$ sia simmetrica abbiamo

$$\|e_h\|_{L^2}^2 = a(\phi, e_h) \overset{\text{sym}}{=} a(e_h, \phi) = \underbrace{a(u - u_h, \phi)}_{\perp ??}$$

Ricordando la

> **Proprietà 1.4.** Il metodo di Galerkin è fortemente consistente, ovvero
> $$a(u - u_h, v_h) = 0 \qquad \forall\, v_h \in V_h$$

possiamo dire che per una certa funzione $\phi_h \in V_h$ da determinare vale

$$a(u - u_h, \phi_h) = 0$$

Ma allora

$$\|e_h\|_{L^2}^2 = a(\phi, e_h) = a(\phi - \phi_h, e_h)$$

Passo III: Cauchy-Schwarz e interpolazione

Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|e_h\|_{L^2}^2 = a(\phi - \phi_h, e_h) &= (\nabla(\phi - \phi_h), \nabla e_h)_{L^2} \\ &\le \|\nabla(\phi - \phi_h)\|_{L^2} \|\nabla e_h\|_{L^2} = |e_h|_{H^1} |\phi - \phi_h|_{H^1} \end{aligned}$$

Ora consideriamo come $\phi_h = \Pi_h^1 \phi$ cioè l'interpolante FEM $\mathbb{P}^1$ di ϕ.

NB: è possibile applicare l'operatore di interpolazione Π_h^1 a ϕ perché per il *lemma di regolarità ellittica* $\phi \in H^2(\Omega)$ e quindi in particolare $\phi \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ per via del fatto che $H^k(\Omega)$ è contenuto in $\mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ se $k > m + n/2$ (n dimensione di Ω).

Sappiamo che vale il

> **Teorema 1.5 — Errore d'interpolazione.** Sia $u \in H^{r+1}(\Omega)$ e sia $\Pi_h^r u$ la sua interpolante FEM $\mathbb{P}^r$. Allora:
> $$|u - \Pi_h^r u|_{H^k} \le C_{k,r} h^{r+1-k} |u|_{H^{r+1}} \qquad \text{per } k = 0, 1$$

Nel nostro caso $u = \phi$, $r = 1$, $k = 1$, quindi la stima è

$$\left|\phi - \Pi_h^1 \phi\right|_{H^1} \le C h^1 |\phi|_{H^2}$$

da cui

$$\|e_h\|_{L^2}^2 \le |e_h|_{H^1} \left|\phi - \Pi_h^1 \phi\right|_{H^1} \le |e_h|_{H^1} Ch \underbrace{|\phi|_{H^2}}_{??}$$

Passo IV: regolarità ellittica

Sempre per il *lemma di regolarità ellittica*, la quantità $|\phi|_{H^2}$ può essere ancora maggiorata:

$$|\phi|_{H^2} \le C \|e_h\|_{L^2}$$

Perciò deduciamo che

$$\|e_h\|_{L^2}^{\cancel{2}} \le |e_h|_{H^1} Ch \cancel{\|e_h\|_{L^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \|e_h\|_{L^2} \le Ch |e_h|_{H^1}$$

dove C ingloba tutte le costanti apparse nei conti.

A questo punto è sufficiente applicare la (1.2) per ottenere la tesi.