Trasformazione var continua: Sia $X:\Omega\to\mathbb{R}$ va continua con densità f_X e $Y=g(X)$, con g monotona e $g^{-1}=h\in\mathcal{C}^1$. Allora $X=h(Y)$ e dunque
$f_Y(y)=f_X\left(h(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}h(y)\right|$

Delta di Dirac: δ_n è tc $\mathbb{P}(X=n)=1$

Continua uniforme: $\mathcal{U}(a,b)$
$f(x)=\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x), F(x)=\frac{x-a}{b-a}$
$\mathbb{E}[X]=\frac{a+b}{2}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$
$1-\mathcal{U}(0,1)\sim\mathcal{U}(0,1)$

Bernoulli: $\mathrm{Be}(p)$
$f(x)=p^x(1-p)^{1-x}\mathbb{1}_{\{0,1\}}(x)$
$\mathbb{E}[X]=p\quad \mathrm{Var}(X)=p(1-p)$
$\sum\mathrm{Be}(p)=\mathrm{Bi}(n,p)$
$1-\mathrm{Be}(p)\sim\mathrm{Be}(1-p)$

Binomiale: $\mathrm{Bi}(n,p)$
$\mathbb{P}(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$
$\mathbb{E}[X]=np\quad \mathrm{Var}(X)=np(1-p)$
$\mathrm{Bi}(n,p)+\mathrm{Bi}(m,p)\sim\mathrm{Bi}(n+m,p)$

Geometrica: $\mathcal{G}(p)$ è il numero di fallimenti prima di un successo in un processo di Bernoulli. Priva di memoria.
$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$
$F(k)=\mathbb{P}(X\le k)=1-\mathbb{P}(X\ge k+1)=1-(1-p)^k$
$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{1-p}{p^2}$

Geometrica traslata: $\mathbb{P}(W=k)=p(1-p)^k$

Poisson: $\mathcal{P}(\lambda)$ legge degli eventi rari. Limite delle distribuzioni binomiali con $\lambda=np$.
$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\mathbb{1}_{\mathbb{N}}\quad \mathbb{E}[X]=\lambda\quad \mathrm{Var}(X)=\lambda$
$\mathcal{P}(\lambda)+\mathcal{P}(\mu)\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$ (se $\perp\!\!\!\perp$)

Normale: $\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$
$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$
$\mathbb{E}[X]=\mu\quad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
$\mathbb{E}\left[X^4\right]=\mu^4+6\mu^2\sigma^2+3\sigma^4\quad \mathbb{E}\left[(X-\mu)^4\right]=3\sigma^4$
$\mathbb{P}(x\leqslant t)=\mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=$
$\quad=\mathbb{P}\left(Z\leqslant\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ con $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim\mathcal{N}(0,1)$
$\phi(-z)=1-\phi(z)\quad \mathbb{P}(|Z|>z)=2(1-\phi(z))\quad \phi(k)<0.1\ \Rightarrow\ k<-z_{1-0.1}$
$\mathcal{N}\left(m,s^2\right)+\mathcal{N}\left(n,r^2\right)\sim\mathcal{N}\left(m+n,s^2+r^2\right)$ (se $\perp\!\!\!\perp$)
$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2_{\text{nota}})\ \Rightarrow\ X_1|\sum X_i=t\sim\mathcal{N}\left(\frac{t}{n},\frac{n-1}{n}\sigma^2\right)$

Lognormale: $\log\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2\right)\ \ X=e^{\mathcal{N}}$
$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$
$F(x)=\Phi_{(\mu,\sigma)}(\ln x)$
$\mathbb{E}[X]=e^{\mu+\sigma^2/2}\quad \mathrm{Var}(X)=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$

Chi-quadro: $\left(\chi^2(k)\right)$
$f(x)=\frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}x^{k/2-1}e^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}$
$\mathbb{E}[X]=k\quad \mathrm{Var}(X)=2k$
$\chi^2(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$
$\sum Z^2\sim\chi^2(n)\quad \frac{\sum(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$
$Z^2\sim\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\chi^2(1)$

T di student: $t(n)$ costruita come $\frac{Z}{\sqrt{Q/n}}$ con $Z\perp\!\!\!\perp Q$
$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$
$\mathbb{E}[T]=0$ se $n>1$ oppure indefinito.
$\mathrm{Var}(T)=\frac{n}{n-2}$ se $n>2$ oppure indefinita.

Esponenziale: $\mathcal{E}(\lambda)$ è la durata di vita di un fenomeno. Priva di memoria.
$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)\quad F(x)=1-e^{-\lambda x}$
$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{\lambda}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{1}{\lambda^2}$
$a\mathcal{E}(\lambda)\sim\mathcal{E}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$X_i\sim\mathcal{E}(\lambda)\ \Rightarrow\ X_{(1)}\sim\mathcal{E}(n\lambda)$
$X_i\sim\mathcal{E}(\vartheta)\ \Rightarrow\ \sum X_i\sim\Gamma(n,\vartheta)\ \Rightarrow\ \overline{X}_n\sim\Gamma(n,n\vartheta)$
$Y\sim f_Y=e^{\vartheta-y}\mathbb{1}_{(\vartheta,+\infty)}\ \Rightarrow\ Y\sim\vartheta+\mathcal{E}(1)$
$\quad\Rightarrow\ Y_{(1)}\sim\vartheta+\mathcal{E}(n)\ \Rightarrow\ f_{Y_{(1)}}=ne^{-n(y-\vartheta)}\mathbb{1}_{(\vartheta,+\infty)}$
$Y\sim f_Y=\frac{1}{\vartheta}e^{-\frac{x-\vartheta}{\vartheta}}\mathbb{1}_{(\vartheta,+\infty)}\ \Rightarrow\ Y\sim\vartheta+\mathcal{E}\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$

Gamma: $\Gamma(\alpha,\lambda)$ è la somma di α esponenziali $\mathcal{E}(\lambda)$
$f(x)=\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}\nVdash_{(0,+\infty)}(x)$
$F(x)=\left(1-\sum_{k=0}^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\right)=\frac{\gamma(\alpha,\lambda x)}{\Gamma(\alpha)}$
$\mathbb{E}\left[X^k\right]=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{\lambda^k}\quad \mathbb{E}[X]=\frac{\alpha}{\lambda}\quad \mathbb{E}[X^2]=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$
$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\Gamma(n,\vartheta)}\right]=\frac{\vartheta}{n-1}\quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{\Gamma(n,\vartheta)^2}\right]=\frac{\vartheta^2}{(n-1)(n-2)}$
$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$
$\Gamma(n+1)=n!\quad \Gamma(n)=(n-1)!$
$\Gamma(1)=1\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
$Y=cX\sim\Gamma\left(\alpha,\frac{\lambda}{c}\right)$ con $c>0$
$\Gamma(\alpha,\vartheta)+\Gamma(\beta,\vartheta)\sim\Gamma(\alpha+\beta)$ (se $\perp\!\!\!\perp$)

Weibull: $W(\lambda,k),\ \lambda>0,\ k>0$
$f(x)=\frac{k}{\lambda^k}x^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}\mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$
$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\quad \mathbb{E}[X]=\frac{\lambda}{k}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right),$
$\mathrm{Var}(X)=\frac{\lambda^2}{k^2}\left[2k\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)\right]$
$Y\sim W(\alpha,\beta)\ \Rightarrow\ Y^\alpha\sim\mathcal{E}(\beta)$

Beta: $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ governa la prb p, a priori distribuita unif, di un proc di Bernoulli dopo aver osservato $\alpha-1$ successi e $\beta-1$ insuccessi $(\alpha,\beta>0)$
$f(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$
$\mathbb{E}[X]=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, con $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$
$\mathrm{Var}(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

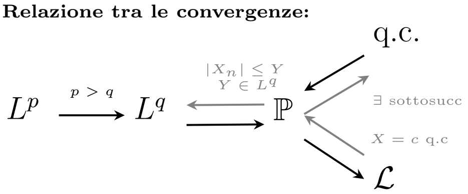
Fisher: $\frac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}=\mathcal{F}(n,m)$

Ipergeometrica: $\mathcal{H}(n,h,r)$ descrive l'estrazione senza reimmissione di palline da un'urna con n palline totali, di cui h del tipo X e $n-h$ del tipo Y. La prob di ottenere k palline del tipo X estraendone r dall'urna è

$$p_X(k)=\frac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

$(k\in[\max\{0,h+r-n\},\min\{r,h\}])$
$\mathbb{E}[X]=\frac{rh}{n}\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{h(n-h)r(n-r)}{n^2(n-1)}$

Relazione tra le convergenze:



Negli spazi $L^p: X_n\xrightarrow{L^p}X$ se
$X_n\in L^p\forall n,\ X\in L^p$ e $\mathbb{E}\left[|X_n-X|^p\right]\to0$
Dato $p\geqslant q\geqslant1$, conv. in $L^p\Longrightarrow$ conv. in L^q.
Convergono i momenti:
$\mathbb{E}\left[|X_n|^p\right]\xrightarrow{L^p}\mathbb{E}\left[|X|^p\right]$
Per $p=1$ e $p=2$:
$\mathbb{E}\left[X_n\right]\to\mathbb{E}[X]$ e $\mathrm{Var}\left(X_n\right)\to\mathrm{Var}(X)$

Probabilità: $X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}X$ se
$\forall\varepsilon>0\ \mathbb{P}\left(|X_n-X|>\varepsilon\right)\to0$
Esiste una sottosuccessione di X_n che converge qc a X. Se X appartiene a L^p ed è possibile trovare una Y tale che $|X_n|\leqslant Y$ allora questa converge anche in L^p.

Debole: siano $\mathbb{P}_n$ e $\mathbb{P}$ prob su $(\mathbb{R},\mathcal{B})$. Allora
$\mathbb{P}_n\xrightarrow{\text{deb}}\mathbb{P}$ se $\int_{\mathbb{R}}h\,\mathrm{d}\mathbb{P}_n\to\int_{\mathbb{R}}h\,\mathrm{d}\mathbb{P}\forall h$ cont. e lim.

In legge o distribuzione:
$X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ se
$P^{X_n}\xrightarrow{\text{deb}}P^X$
Slutsky: $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}c\Longrightarrow X_n\xrightarrow{\mathbb{P}}c$

Criteri conv. in legge: $X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ iff $F_n(t)\to F(t)\forall t$ dove F è cont.
Discreto: $\mathbb{P}\left(X_n=t\right)\to\mathbb{P}(X=t)\forall t\in S$ iff $_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$ dove $S=S_X\cup S_{X_n}$
Continuo: $f_n\xrightarrow{qo}f\Longrightarrow X_n\xrightarrow{\mathcal{L}}X$

TCL: se X_i iid con $\mathbb{E}\left[X_i\right]=\mu$ e $\mathrm{Var}\left(X_i\right)=\sigma^2$, allora $\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{\sigma^2/n}}\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,1)$
ovvero $\overline{X}_n\approx\mathcal{N}\left(\mu,\sigma^2/n\right)$

LGN: Dati $X_n\in L^1$ iid e $\mu\in\mathbb{R}$, allora
$\mathbb{E}\left[X_n\right]=\mu\Longleftrightarrow\overline{X}_n\xrightarrow{qc}\mu$ (vale anche in $L^1,\mathbb{P}$)

Alcune proprietà: per un campione gaussiano, si ha:
$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$
$\frac{\overline{X}_n-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim t(n-1)$
Doppio val atteso: $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X\mid Y]]=\mathbb{E}[X]$
Scomp. varianza: $\mathrm{Var}(X)=\mathbb{E}[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(\mathbb{E}[X\mid Y])$.

Metodi delta:
data Y_n t.c $\sqrt{n}\left(Y_n-\vartheta\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}N\left(0,\sigma^2\right)$
$g'(\vartheta)\neq0\Longrightarrow\sqrt{n}\left(g\left(Y_n\right)-g(\vartheta)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}N\left(0,\sigma^2g'(\vartheta)^2\right)$
$g'(\vartheta)=0$ e $g''(\vartheta)\neq0\Longrightarrow n\left(g\left(Y_n\right)-g(\vartheta)\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\sigma^2\frac{g''(\vartheta)}{2}\chi^2(1)$

Funzione generatrice dei momenti

$$\text{discreto:}\quad g(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]=\sum_{i=1}^n p_ie^{tX_i}$$
$$\text{continuo:}\quad g(t)=\mathbb{E}[e^{tX}]=\int_{\mathbb{R}}e^{tx}f_X(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\text{gaussiano:}\quad g(t)=\exp\left\{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}$$

Valuto in $t=1$ e ottengo $\mathbb{E}[e^X]$
Derivo r volte, valuto in $t=0$ e ottengo $\mathbb{E}[X^r]$