A production and pricing decision for deteriorating items with time-varying and price dependent demand rate

Yongrui Duan
School of Economics and Management
Tongji University
Shanghai, 200092 China
yrduan@163.com

Jin Yang
School of Economics and Management
Tongji University
Shanghai, 200092 China
252732607@qq.com

Abstract—This paper considers the production and pricing problem for deteriorating items with time-varying and price dependent demand rate. In this production system, the production rate is finite and shortages can be backlogged in the same cycle. The demand rate is linearly dependent on time and price over a finite planning horizon. A nonlinear model to minimize the average cost is presented. The proposed nonlinear constrained problem is numerically solved by using the box complex algorithm. As a result, the optimal number of production cycles and price can be determined.

Keywords-deteriorating items; time-varying; pricing dependent demand; production and pricing

I.导言

经典的经济订货批量（EOQ 模型）模型是在 1915 年提出的，它基于固定的需求率的假设，在实际应用中具有很大的局限性。自从 Donaldson [1]研究了在不允许缺货情况下的需求随时间变化时的库存物料补货策略后，这方面的研究引起了研究者的广泛关注。

Donaldson [1]使用简单的计算得出了一个在有限时间里寻找最优再订货点的计算程序。Wagner 和 Whitin [2]使用动态规划技术讨论了这个问题的离散情形。Silver [3]使用 Silver－Meal 启发式算法开发了一个需求随时间线性变化的近似的求解过程。

但是上述存货模型都不允许库存短缺。Zangwill[4]通过扩展 Wagner-Whitin 离散时间 DP 技术研究了允许缺货的问题。

商品库存的物理衰减或变质是真实库存系统的重要特征。Ghare 和 Schrader [5]开发出了需求连续且呈指数衰减的 EOQ 模型。 Dave 和 Patel 6]引入商品的腐坏的情形扩展了 Donaldson 模型。Sachan [7]将模型进一步扩展为允许物料积压情形。Bahari-Kashani[8]开发了通过放宽平等补给周期限制的一种启发式模型。

Hong 等 [9]讨论了线性趋势化的需求和统一的生产速度下的 EPLS 模型。Giri 和 Chaudhuri [10]提出了一个需求随时间变化，存在库存短缺并允许订货充分积压的生产库存模型。Yan 和 Cheng [11]研究了单个易腐品的生产率，需求率和变质率都是时间的函数且允许存在部分订货积压和短缺的情形。

在本文中，我们讨论了在有限的规划期内易腐品的生产和定价模型，在模型中需求率是随时间和价格线性变化的，生产率是不变的，允许短缺和完全积压。这个生产库存系统在每个周期包括四个阶段。库存在每个周期的开始时刻为零。随着生产的继续，库存被用来不断满足市场的需求，当然，有一部分库存变质腐坏。生产在特定的时间停止，随后累积的库存由于需求和腐坏而逐渐减少，并最终降为零。此时，生产不立即重新启动，库存继续短缺并在该段时间顾客的需求被积压。此后，生产启动，在满足当前需求后逐步满足短缺的需求，在周期结束时库存为零。

II.假设和符号

假设:

1.产品的生产速度是有限的且恒定不变的。

2.产品变质腐坏的速度是恒定的。

3.允许短缺，短缺时需求被完全积压，之后被充分满足。

4.时间范围是有限的。

5.有限的时间范围被划分为很多相等的连续的时间周期。

6.需求率和时间、价格呈现线性的关系。

符号:

$f(t)=a+bt+mp$ 是在时间 t 时刻商品价格为 p 时的需求率， $a\geqslant 0$ ，$b\neq 0$。在这里 a 是最初的需求率，b 是需求率随时间变化的速度，p 是商品价格，m 是需求率随价格

978-1-4577-0536-6/11/$26.00 ©2011 IEEE

变动系数。m<0。

θ　变质率，其中 $0<\theta<1$

P　生产率，$P>a+bt+mp$，$m<0, t\in[0,H]$

C_h　每个产品单位时间库存持有成本

C_s　每个产品单位时间库存短缺成本

A_s　每个周期的固定生产成本

C_p　每个产品单位生产成本

III.模型及其解决方案

如图 1 所示，该生产系统第 i（i=1，2，…，n）个周期的初始库存是零而且在每一周期开始的时候投产。随着生产的持续，在满足需求后，库存开始积累并以一定的比例腐坏。生产在 t'_i 时刻停止。累积的库存仅足以满足时间间隔 $[t'_i, t_i]$ 内的需求和变质。在 t_i 时刻库存变为 0，缺货发生，生产在 s_i 时刻启动，因此缺货发生 $[t_i, s_i]$。在 $[s_i, T_i]$ 时间段内，在满足目前需求后，积压的需求（$[t_i, s_i]$ 内未满足的）得到充分的供应。周期结束时库存为零。这样的周期不断重复。

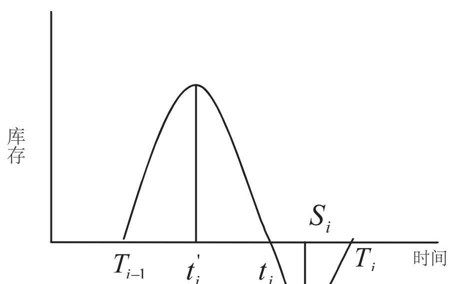

图 1 第 i 周期时间/库存图

我们的问题是：当生产率确定，需求与价格和时间有关，在允许缺货的条件下，如何确定在每个周期的生产计划和价格，以最小化库存系统的平均成本。

这里不同时间点之间的关系如下：

$$\begin{cases} t'_i = k_i t_i + (1-k_i)T_{i-1}, \\ t_i = rT_i + (1-r)T_{i-1}, \\ S_i = d_i T_i + (1-d_i)t_i, \\ T_i = \dfrac{H}{n} i, i = 1,2,\ldots,n, \\ 0\le r\le 1, 0\le k_i\le 1, 0\le d_i\le 1 \end{cases} \quad \text{(A)}$$

在 t 时刻的库存水平 $I(t)$ 由下列微分方程确定：

$$\frac{dI(t)}{dt} = P - f(t) - \theta I(t), T_{i-1}\le t\le t'_i \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -f(t) - \theta I(t), t'_i\le t\le t_i \quad (2)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = -f(t), t_i\le t\le S_i \quad (3)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = P - f(t), S_i\le t\le T_i \quad (4)$$

其中，$I(T_{i-1})=0$，$I(T_i)=0$，$I(t_i)=0$；

式(1)的解为：

$$I(t) = \left(\frac{p-a-mp}{\theta}\right)\left\{1-e^{\theta(T_{i-1}-t)}\right\} - \frac{b}{\theta^2}\left\{(\theta t-1)-(\theta T_{i-1}-1)e^{\theta(T_{i-1}-t)}\right\}, \quad (5)$$
$$T_{i-1}\le t\le t'_i.$$

解式(2)可得：

$$I(t)e^{\theta t} - I(t'_i)e^{\theta t'_i} = -\frac{a+mp}{\theta}(e^{\theta t}-e^{\theta t'_i}) - \frac{b}{\theta^2}\left\{(\theta t-1)e^{\theta t}-(\theta t'_i-1)e^{\theta t'_i}\right\}$$

把式(5)中得到的 $I(t'_i)$ 的值代入，可得：

$$I(t) = \left\{\frac{P}{\theta}\left(e^{\theta t'_i}-e^{\theta T_{i-1}}\right) + \frac{a+mp}{\theta}e^{\theta T_{i-1}} + \frac{b}{\theta^2}(\theta T_{i-1}-1)e^{\theta T_{i-1}}\right\}e^{-\theta t} \quad (6)$$
$$-\left\{\frac{a+mp}{\theta}+\frac{b}{\theta^2}(\theta t-1)\right\}, t'_i\le t\le t_i.$$

利用 $I(t_i)=0$ 代入式(6) 可得：

$$k_i = \frac{n}{\theta r H}\ln[1+\frac{1}{P}\{a+mp+\frac{bH}{n}(r+i-1-\frac{n}{\theta H})\}e^{\frac{\theta H}{n}r} \quad (7)$$
$$-\frac{a+mp}{P}-\frac{bH}{nP}(i-1-\frac{n}{\theta H})].$$

式(3)的解为：

$$I(t) = -(t-t_i)[a+mp+\frac{b}{2}(t+t_i)], t_i\le t\le S_i \quad (8)$$

式（4）的解为：

$$I(t)-I(S_i) = (P-a-mp)(t-S_i) - \frac{b}{2}(t^2-S_i^2), S_i\le t\le T_i.$$

将式(8)中得到的 $I(s_i)$ 的值代入，可得：

$$I(t) = -(a+mp)(t-t_i) + P(t-S_i) - \frac{b}{2}(t^2-t_i^2), S_i\le t\le T_i \quad (9)$$

将 $I(T_i)=0$ 代入式(9)，可得：

$$d_i = 1-\frac{a+mp}{P}-\frac{bH}{2nP}(2i-1+r). \quad (10)$$

$[T_{i-1}, t'_i]$ 时间段的总的库存量：

$$I(t)dt = -(\frac{P-a-mp}{\theta^2})\{\theta(t'_i-T_{i-1})+e^{\theta(T_{i-1}-t'_i)}-1\}$$

$$-\frac{b}{\theta^3}\{\frac{\theta^2}{2}(t_i^{'2}-T_{i-1}^2)-\theta(t_i^{'}-T_{i-1})+(\theta T_{i-1}-1)(e^{\theta(T_{i-1}-t_i^{'})}-1)\} \tag{11}$$

时间间隔$[t'_i, t_i]$内的总的库存量

$$\begin{aligned}I_{i2} &= \int_{t_i^{'}}^{t_i} I(t)dt \\ &= -\{\theta P(e^{\theta t_i^{'}}-e^{\theta T_{i-1}})+(a+mp)\theta e^{\theta T_{i-1}}+b(\theta T_{i-1}-1)e^{\theta T_{i-1}}\} \\ &\times\frac{(e^{-\theta t_i}-e^{-\theta t_i^{'}})}{\theta^3} \\ &-\frac{1}{2\theta^2}\{2[(a+mp)\theta-b](t_i-t_i^{'})+b\theta(t_i^2-t_i^{'2})\}\end{aligned} \tag{12}$$

时间间隔$[t_i, s_i]$总的缺货量为:

$$I_{i3} = \int_{t_i}^{S_i}[-I(t)]dt = \{\frac{a+mp}{2}(S_i-t_i)^2+\frac{b}{6}S_i^3-\frac{b}{2}t_i^2 S_i+\frac{b}{3}t_i^3\} \tag{13}$$

时间间隔$[s_i, T_i]$总的短缺量:

$$I_{i4} = \int_{S_i}^{T_i}[-I(t)]dt = \frac{a+mp}{2}(T_i-t_i)^2-\frac{a+mp}{2}(S_i-t_i)^2-\frac{P}{2}(T_i-S_i)^2+\frac{b}{6}(T_i^3-S_i^3)-\frac{b}{2}t_i^2(T_i-S_i) \tag{14}$$

并且

$$\begin{cases} t_i^{'} = \dfrac{H}{n}(rk_i+i-1), \\ t_i = \dfrac{H}{n}(r+i-1), \\ S_i = \dfrac{H}{n}[i-(1-d_i)(1-r)]. \end{cases} \tag{15}$$

根据式(11)、(12)，第 i 个周期的总库存量为

$$\begin{aligned}Inv_i &= e^{-\frac{\theta rH}{n}k_i}[(\frac{P-a-mp}{\theta^2})-\frac{b}{\theta^3}\{\frac{\theta H}{n}(i-1)-1\}-\frac{p}{\theta^2}e^{-\frac{\theta rH(1-k_i)}{n}} \\ &+\frac{1}{\theta^3}\{-\theta P+\theta(a+mp)+b(\frac{\theta H}{n}(i-1)-1)\}]+\frac{b}{\theta^3}\left(\frac{\theta H}{n}(i-1)-1\right) \\ &+k_i\begin{bmatrix}\left(\frac{P-a-mp}{\theta}\right)\frac{rH}{n}-\frac{brH}{n\theta^2}\left\{\frac{H}{n}(i-1)-1\right\} \\ +\frac{rH}{n\theta^2}\left\{[(a+mp)\theta-b]+\frac{b\theta H}{n}(i-1)\right\}\end{bmatrix}-\left(\frac{P-a-mp}{\theta^2}\right) \\ &-\frac{1}{\theta^3}\left[e^{-\frac{\theta rH}{n}}\left\{-\theta P+(a+mp)\theta+b\left(\frac{\theta H}{n}(i-1)-1\right)\right\}-\theta P\right] \\ &-\frac{rH}{2n\theta^2}\left\{2[(a+mp)\theta-b]+\frac{b\theta H}{n}(r+2i-2)\right\}.\end{aligned}$$

根据式(13)和(14)，第 i 个周期的总的缺货量为:

$$Shor_i = \frac{H^2}{6n^2}\{2\frac{bH}{n}(r+i-1)^3+3(a+mp)(1-r)^2-3P(1-r)^2(1-d_i)^2+\frac{bH}{n}i^3-3\frac{bH}{n}i(r+i-1)^2\} \tag{16}$$

第 i 个周期的总的变质的产品的数量为θInv_i

[0,H]内的平均成本可以表示为:

$$\text{Avc}(r,p) = \frac{1}{H}[(C_h+\theta C_p)\sum_{i=1}^{n} Inv_i + C_s\sum_{i=1}^{n} Shor_i + nA_s].$$

所以，本文所研究的问题可以用以下模型表示:

$$\max z = \text{-Avc}(r,p) = -\frac{1}{H}[(C_h+\theta C_p)\sum_{i=1}^{n} Inv_i - C_s\sum_{i=1}^{n} Shor_i + nA_s].$$

$$s.t.\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ \underline{p} \le p \le \overline{p} \\ 0 \le k_i(r,p) \le 1 \\ 0 \le d_i(r,p) \le 1 \\ i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{17}$$

$\text{Avc}(r,p)$是非线性目标函数。(r,p)是模型的显变量，而 k_i和 d_i是隐变量。

模型（17）可以采用 box complex algorithm [12]求解。该算法采用顺序搜索技术，这种方法可以有效解决具有非线性约束和目标函数的优化问题。这种方法不需要计算导数，并且由于初始值的集合分散在整个可行区域内，所以所得到的极大值是全局极大值。对于非线性规划问题

$$Max\ f(X_1, X_2, \cdots, X_N)$$

$$s.t.\quad G_k \le X_k \le H_k\,,\quad k = 1,2,\cdots,M\,,\ M > N$$

其中隐变量$X_{N+1},\cdots,X_M$是显性独立变量$X_1, X_2\cdots, X_M$的函数，G_k和H_k均为常数。

Box complex 算法的步骤如下:

第一步.初始的 box 由$k \ge N+1$个点组成，这 k 个点由 1 个初始可行点和 k-1 个附加点组成，这 k-1 个附加点按照下面的方法产生:

$$X_{ij} = G_i + R_{i,j}(H_i - G_i), i = 1,2,...,N; j = 1,2,...,(k-1)$$

其中$R_{i,j}$是在[0,1]内的随机数

第二步.以上选择的点必须同时满足显性和隐性的约束条件。如果某一个点不满足显性约束，则该点向不满足的

约束条件内移动δ。如果不满足隐性约束，则将该点移动到该点和剩余点的中心所构成的线段的中点的位置，即：

$$X_{i,j}(new)=(X_{i,j}(old)+\overline{X_{i,c}})/2$$

其中：$\overline{X}_{i,c}=\frac{1}{k-1}[\sum_{j=1}^{k}X_{i,j}-X_{i,j}(old)],i=1,2,..,N.$

不断重复这个过程，直到所有的隐性约束得到满足。

第三步.在每个点都计算目标函数值。目标函数最小的点被α倍$\overline{X_{i,c}}$到该点的距离加上$\overline{X_{i,c}}$取代，即：

$$X_{i,j}(new)=\alpha(\overline{X}_{i,c}-X_{i,j}(old))+\overline{X}_{i,c}$$

一般取$\alpha=1.3$。

第四步.若在连续的试验中，某点的函数值总是最小，则将该点移动到该点与剩余点中心所构成的线段的中点的位置，即

$$X_{i,j}(new)=(X_{i,j}(old)+\overline{X_{i,c}})/2$$

第五步.若新产生的点不满足约束条件，则返回第三步。

第六步.当在γ次迭代后每个点的目标函数值都小于等于ε，则认为函数是收敛的，这里ε是γ次迭代的精度。

第七步.结束。

IV 结论

本文建立了易腐品需求依赖于时间和价格的定价的生产模型。模型允许缺货。每个周期开始的时候没有库存，随着生产的进行，在满足需求之后库存开始积累，累积的库存满足需要的同时有一定的腐坏消耗，直到库存为零。由于机器需要保养，故需要停产一段时间才能开始生产，此时发生缺货，之后一段时间开始生产，生产的产品满足当前的需求以及之前的缺货，直到库存为 0，此时一个完整的周期结束。本文建立了使得系统平均成本最小的生产和定价模型，并给出了确定生产周期的方法。由于模型中需求函数与时间和价格有关、同时考虑了短缺和腐坏，为了简化模型我们假定每个周期时间长度相等。在以后的研究中我们将进一步将模型扩展到周期时间长度不等的情况。

致谢

本文由国家自然科学基金(71002020,70832005,71090404)，上海市教委科研创新项目(09ZS39)资助。

References

[1] W.A. Donaldson. Inventory replenishment policy for a linear trend in demand-an analytical solution [J].Operational ResearchQuarterly,1977,28: 663﹣670.

[2] H.M. Wagner,T.M. Whitin. Dynamic version of the economic lot size model [J].Management Science,1958,5:89﹣96.

[3] E.A. Silver. A simple inventory replenishment decision rule for a linear trend in demand[J].Journal of the Operational ResearchSociety , 1979,30: 71﹣75.

[4] W.I. Zangwill.A deterministic multiperiod production scheduling model with backlogging[J].Management Science ,1966,13: 105﹣119.

[5] P.M. Ghare,G.F. Schrader. A model for exponentially decaying inventory[J].Journal of Industrial Engineering,1963,14:238﹣243.

[6] U. Dave, L.K. Patel.(T,Si) policy inventory model for deteriorating items with time proportional demand [J]. Journal of theOperational Research Society, 1981, 32: 137﹣142.

[7] R.S. Sachan.On (T,Si) inventory policy for deteriorating items with time proportional demand [J]. Journal of the OperationalResearch Society, 1984 , 35:1013﹣1019.

[8] H.Bahari-Kashani.Replenishmentschedule for deteriorating items with time-proportionaldemand[J].Journalof the OperationalResearch Society,1989 ,40:75﹣81.

[9] J. Hong,R. Sandrapaty ,J. Hayya.On production policies for linearly increasing demand and finite uniform production rate [J].Computer and Industrial Engineers,1990,18 :110﹣127.

[10] G.L.Adler,R.Nanda.The effects of the learning on optimal lot size determination-single product case [J]. AIIE Transactions,1974,6:14﹣20.

[11] H. Yan,T.C.E. Cheng.Optimal production stopping and restarting times for an EOQ model with deteriorating items [J]. Journal ofthe Operational Research Society,1998,49:1288﹣1295.

[12] M.J. Box, A new method of constrained optimization and a comparison with other methods[J].Computer Journal ,1965,8:42﹣52.