# Forcasting the Precipitation in ShiJiaZhuang Based on Grey Marcov Model

Han Suqing 1st
Institute of Public Administration
Hebei University of Economics and Business
Shijiazhuang，China
e-mail：llyxt@163.com

Jia Shijing 2nd，Dai puzhi 3nd
Institute of Public Administration
Hebei University of Economics and Business
Shijiazhuang，China
jshj-2007@163.com，dai3dai@sina.com

**Abstract—*Basing on the annual precipitation during 1955-2007 of shijiazhuang situated in Taihang Mountain Pedimount region,the Grey Marcov model was set up.Using the model and the data in 2007 ,The research forecasted the precipitation of 2008-2015.The result indicates:Grey Marcov model is better than GM(1,1) on showing the dynamic of the list,and has more useful value;According of the biggest state transfer probability,the result of the Grey Marcov Model inosculated the precipitation in 2008 and 2009 which displayed the accuracy of the Grey Marcov Model.***

***Keywords-** Crey Marcov Model; Precipitation; Forcasting;Shijiazhuang*

## 引言

降水量是判断地表水资源状况的关键参数，是农田水量平衡中的重要组成部分，也是农田水利设计的基础资料，它的准确性直接影响着作物灌溉水量的多少和水利设施的需求状况，进而影响到区域水资源的优化配置。

因此，降水量的预测对正确估算作物的灌溉水量，提高农业用水效率，缓解水资源的供需矛盾以及实现农业可持续发展，资源可持续利用具有重要意义。

目前有关预测的研究很多，形成了多种研究模型，如集成神经网络模型、回归分析法、自适应过滤法、简单指数平滑法等。但降水量和降水年型的预测方法相对偏少。实质上影响降水量和降水年型的因素多且复杂，其规律很难把握，但国内外专家学者普遍认为，虽然整个地球气候的变化趋势很缓慢，但有一定的趋势[2]，是可以预测的。贾海峰，郑耀泉（1998）将灰色预测理论和时序分析结合建立了灰色时序预测模型；王立坤，付强（2002）在季节性周期预测法在建立降雨预报模型中的应用一文中应用了季节周期性预测法；马尔科夫链理论也在降水量预测上得到应用，王艳等（2006）用状态转移矩阵方法预测降雨量等级；徐晓宁（2010）以规范化的各阶自相关系数为权，建立了北京市降水量的权马尔科夫链预测模型。上述研究或者偏重灰色预测，对随机波动大的数据序列预测准确度低，或者侧重马尔可夫链理论，预测的对象随机波动性较大。

本文用灰色理论预测序列趋势，应用马尔科夫链进行预测，建立灰色-马尔科夫预测模型，合理处理降水量的随机性波动，预测石家庄年降水量。

## I. 灰色马尔科夫预测模型的建立

### *1.1 灰色 GM（1,1）模型*

灰色 GM(1,1)模型是指一阶、一个变量的微分方程预测模型，是一阶单序列的线性动态模型，它是利用离散的时间数据序列，通过累加生成运算建立近似连续的灰色微分方程，求解生成函数进行预测。

设原始序列为 $x^{(0)}(k)=\{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)\}$，对原始序列累加，由

$$x^{(1)}(i)=\sum_{j}^{i} x^{(0)}(j) \qquad \text{（公式 1）}$$

得生成数列 $x^{(1)}(k)=\{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)\}$，其具体形式是：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=u \qquad \text{（公式 2）}$$

式中：a 和 u 为待定常数。

其解为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left|x^{(1)}(1)-\frac{u}{a}\right|e^{-ak}+\frac{u}{a} \qquad \text{（公式 3）}$$

该式也称为时间响应方程，其参数列为：

$$\hat{a}=(a, u)^{T} \qquad \text{（公式 4）}$$

利用最小二乘法求出参数：

$$a=\begin{vmatrix} a \\ u \end{vmatrix}=(B^{T}B)^{-1}B^{T}Y_{n} \qquad \text{（公式 5）}$$

B 为构造数据矩阵

978-1-4244-8694-6/11/$26.00 ©2011 IEEE

$$B = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}[x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[x^{(1)}(N-1)+x^{(1)}(N)] & 1 \end{vmatrix}$$

Yn 为列向量，$Yn=[x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\ldots x^{(0)}(N)]^T$

将求出的参数 a 和 u 代入时间响应方程中，可以算出生成数列中的第 k 项和第 k+1 项的估计值 x^(1)(k)和 x^(1)(k+1)，在此基础上，再做累减生成，则 x(0)的灰色预测方程为：

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = (1-e^{a})[x^{(0)}(1)-u/a]e^{-ak}$$

(k =1,2,…)　（公式 6）

式中：$\hat{x}^{(0)}(k+1)$即为真实的预测值。

*1. 2 马尔科夫预测模型*

马尔科夫预测是一种预测事件发生概率的方法，它是基于马尔科夫链，根据事件的目前状况预测其将来各个时刻变动状况的一种预测方法。

（1）状态划分

了解状态的转移规律是利用马尔科夫链对系统未来发展变化作出预测的关键。为构造状态转移概率矩阵，首先作状态的划分，即将数据序列分成几个状态。

（2）状态转移概率矩阵

马尔科夫过程是一个“无后效性”的随机过程，即一个时间序列，它在未来是什么状态，将取什么数值只与它现在的状态、现在取什么数值有关，而与以前状态无关，所以，状态划分好后，就可以利用 m 步状态转移概率的计算公式：

$P_{ij}(k) = M_{ij}(k)/M(i =1,2,\ldots,n)$

其中：$M_{ij}$（k）表示由状态 Ei 经过 k 步转移到状态 Ej 的原始数据的个数；Mi 为处于状态 Ei 的原始数据的个数；Pij(k)表示由状态 Ei 经 k 步转移到状态 Ej 的概率，状态转移概率矩阵：

$$P(k) = \begin{vmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k)\ldots p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k)\ldots p_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k)\ldots p_{nn}(k) \end{vmatrix}$$

状态转移概率矩阵反映了系统内部状态之间的转移规律，通过状态转移概率矩阵和初始状态，,就可以确定未来的发展趋势。

*1. 3 灰色马尔科夫模型*

灰色马尔科夫预测的基本思路：首先建立 GM(1,1) 灰色预测模型，得出预测序列与实测序列的相对残差序列，依其增幅进行状态区间的划分。根据落入各状态区间的点计算出转移概率矩阵，预测未来状态，就可以找到预测值的区间，即是要求的预测值范围。

灰色预测的优势在于短期预测，缺点在于对长期预测和波动较大数据序列的拟合较差，马尔柯夫链预测的对象是一个随机变化的动态系统，对于长期预测和随机波动较大的数据序列的预测效果较好，但是，马尔柯夫链预测对象要求具有平移过程，把灰色预测与马尔柯夫链预测两者结合起来，形成灰色-马尔柯夫链预测模型，这样不仅能揭示数据序列的发展变化总趋势，又能预测状态规律，用马尔柯夫链预测方法对解决无后效性的预测有独到之处，两者结合不仅避免考虑其他多种影响因素，还可使预测具有较强的科学性和实用性。

## II. 灰色马尔科夫模型在降水量预测中的应用

### *A. 2.1 研究区概况*

石家庄市位于太行山山前平原，是河北省重要的粮食主产区。50a 年，降水量最大值 1097.1mm（1996年），最小值 209.3mm（1972 年），最大值是最小值的 5.2 倍，降水量年际变化很大。

本研究利用石家庄气象站 1955 年-2007 年的长系列气象资料，建立太行山山前平原区降水量预测模型，对石家庄降水量进行预测。

### *B. 2.2 GM（1,1）预测模型的建立*

将 1955-2007 年各年降水量数据作为 $x^{(0)}$，可得累加数列 $x^{(1)}$，由式(4)、(5)运用南京航空航天大学编制的灰色系统理论建模软件计算得到：

a =0.0023

u =545.0522

系数$(1-e^{a})[x^{(0)}(1)-u/a]=544.4033$

则预测曲线为:

$\hat{x}(0)(k+1) = 544.4033e^{0.0023k}$　（公式 7）

其模拟效果见图 1。

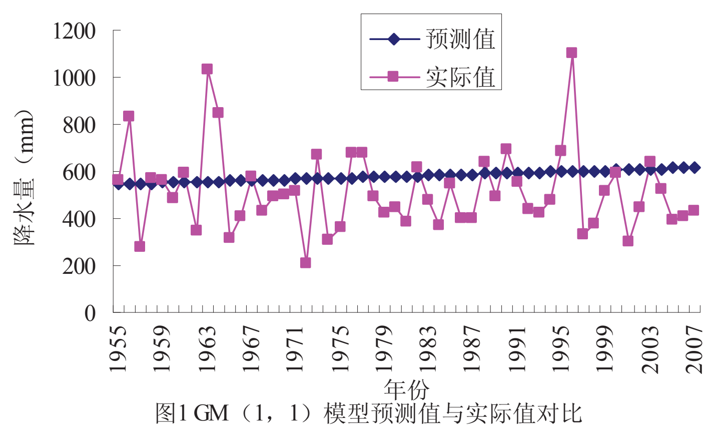


图1 GM（1，1）模型预测值与实际值对比

从图 1 可以看出，当实际数据系列变异较大，周期不明显时，仅用 GM（1,1）模拟，效果很差。

*C. 2.3 灰色马尔科夫预测模型的建立*

根据马尔科夫链分析方法，按照 GM(1,1)模型预测的降水量与实际值的差异的比较，采用分段方法将1955-2007 年的数据划分成 6 种状态。

状态 1：低估状态，即相对误差(灰色预测值与实测值的差)占实际降水量的比例小于-0.3，经过计算，在 53 年(1955-2007 年)中有 4 年呈现这种状态。

状态 2：略微低估状态，即相对误差占实际降水量的比例大于-0.3，小于-0.1，在 53 年中有 6 年呈现这种状态。

状态 3：正常状态，即相对误差占实际降水量的比例大于-0.1，小于 0.1，在 53 年中有 10 年呈现这种状态。

状态 4：略高估状态，即相对误差占实际降水量的比例大于 0.1，小于 0.3，在 53 年中有 11 年呈现这种状态。

状态 5：高估状态，即相对误差占实际降水量的比例大于 0.3，小于 0.5，在 53 年中有 8 年呈现这种状态。

状态 6，即相对误差占实际降水量的比例大于 0.5，在 53 年中有 13 年呈现这种状态

表 1 根据 GM（1,1）模型预测结果划分的状态

| | 状态1 | 状态2 | 状态3 | 状态4 | 状态5 | 状态6 | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 状态1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 4 |
| 状态2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 6 |
| 状态3 | 1 | 0 | 1 | 5 | 2 | 1 | 10 |
| 状态4 | 0 | 2 | 2 | 3 | 1 | 3 | 11 |
| 状态5 | 0 | 0 | 3 | 1 | 3 | 1 | 8 |
| 状态6 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 5 | 13 |
| 合计 | 4 | 5 | 10 | 10 | 9 | 13 | 52 |

由表 1 得出状态转移概率矩阵为：

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} & \frac{3}{13} & \frac{1}{13} & \frac{3}{13} & \frac{3}{13} \end{vmatrix}$$

*D. 2.4 预测模型的检验*

通常离散序列的马氏链可用 $X^2$ 统计量来检验。具体处理方法为:设 mij 表示 $X^{(0)}_{(t)}$从状态 Ei 经过一步转移到状态 Ej 的频数，并将转移频数矩阵 R（见表 1）的各列之和除以各行各列的总和，所得到的值记为 P.'j。

$$P.'j = \frac{\sum_{i=1}^{m} m_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} m_{ij}} \qquad \text{（公式 8）}$$

并记：$P_{ij}' = \dfrac{m_{ij}}{\sum_{j=1}^{m} m_{ij}}$ （公式 9）

则统计量 $\hat{X}^2 = 2\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \left| Ln \dfrac{P'_{ij}}{P.'_j} \right|$ 服从自由度为$(m-1)^2$的 $X^2$ 分布。给定置信度 a，查表可得临界值。如果 $\hat{x}^2$ 大于临界值，则认为该序列 $X^{(0)}_{(t)}$符合马尔科夫性，否则不具有马尔科夫性。此模型 $\hat{x}^2$ =36.227，取 0.05 置信度，查表 $X_{0.05}{}^2[(m-1)^2]=3.325$，$\hat{x}^2 > X_{0.05}{}^2[(m-1)^2]$，该降水量序列具有马尔科夫性，此模型可以用作预测降水量。

*E. 2.5 预测 2008-2017 年的降水量*

以 2007 年的数据为基础，结合上面的状态转移概率矩阵，用灰色马尔科夫模型预测计算得出 2008-2015 年出现的状态情况。选取每年度出现的最大可能状态，估算其降水量区间。结果见表 2 和表 3。

表 2 灰色马尔科夫预测年度降水量估算结果

| 年份 | GM（1,1）预测值 | 灰色马尔科夫预测值 |
|---|---|---|
| 2008 | 616.40 | （410.9，474.2）或（560.4，684.9） |
| 2009 | 617.80 | （475.2，561.6） |
| 2010 | 620.70 | （447.5,564.3）或<413.8 |
| 2011 | 622.10 | <414.7 |
| 2012 | 623.50 | <415.7 |
| 2013 | 625.00 | <416.7 |
| 2014 | 626.40 | <417.6 |
| 2015 | 627.80 | <418.5 |

表 3 灰色马尔科夫预测降水量年度状态

| 年份 | 状态1 | 状态2 | 状态3 | 状态4 | 状态5 | 状态6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2008 | 0.00 | 0.00 | <u>0.38</u> | 0.13 | <u>0.38</u> | 0.13 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2009 | 0.05 | 0.04 | 0.23 | 0.28 | 0.26 | 0.17 |
| 2010 | 0.05 | 0.08 | 0.21 | 0.24 | 0.21 | 0.24 |
| 2011 | 0.07 | 0.10 | 0.21 | 0.23 | 0.20 | 0.28 |
| 2012 | 0.08 | 0.10 | 0.22 | 0.23 | 0.20 | 0.30 |
| 2013 | 0.08 | 0.10 | 0.23 | 0.24 | 0.21 | 0.31 |
| 2014 | 0.08 | 0.11 | 0.23 | 0.24 | 0.22 | 0.33 |
| 2015 | 0.09 | 0.11 | 0.24 | 0.25 | 0.23 | 0.34 |

2007 年实际降水量为 430.4mm，处于状态 5，其用灰色马尔科夫预测模型预测其值的范围在（559.5，645.6），2008 年石家庄实际降水量 619.6mm，2009 年 561.6mm。与表 2 中 2008 年和 2009 年灰色马尔科夫预测值（560.4，684.9）、（475.2，561.6）相吻合，从表 3 可知，两年的预测值刚好皆以最大概率落入其所属区间内，说明该方法具有较高预测精度。

## III. 结论与讨论

1）与单一灰色预测方法相比，灰色马尔科夫预测不仅给出了预测变量所处的准确状态区间，而且给出了处于各个区间的分布概率，具有较强的科学性和实用性。经过 2008 年、2009 年两年的数据验证，此研究方法可用于降水量的预测，效果很好。

2）在马尔科夫预测的状态划分上，本研究采用以相对误差率为中心，采用间隔{0.5,0.3,0.1,-0.1,-0.3}为标准进行了分组。然而，有的研究者用其他的分组方法也得出很好的结果。因此如何根据现有资料合理分组，确定待测变量所处的状态，提高预测的精度，还需进一步探讨。


## 致谢

论文得到国家科技支撑计划（2007BAD69B09）和河北省软科学研究计划项目（10457204D-30）的资助。


## REFERENCES


[1] Xu Jianhua,Mathematical methods in contemporary geography,Higher Education Press,2006. (In Chinese)

[2] Jia Haifeng and Zheng Yaoquang,Grey-Time Series Combined Forecasting Model and Its Application in Annual Precipitation,Systems Engineering-Theory practic,August 1998.(In Chinese)

[3] Wang Li kun and Fu Qiang etc ,Applying the method of season forecast to building up the model of forecasting rainfall, Journal of Northeast Agricultural University,January 2002. (In Chinese)

[4] Yu Miao and Chi Daocai etc,Reference Evaportranspiration Prediction Based on Gray-Markov Model ,Water Saving Irrigation,Aprial 2010. (In Chinese)

[5] Yu Xingjie and Chang Jianxia etc,Prediction of Runoff Based on Grey Markov Model, Journal of Shenyang Agricultural University, Feb 2008. (In Chinese)