

Pembuktian *Bisection Method* dalam Perhitungan Ketinggian Awal Air pada Tangki (*Bernoulli*)

Bonifasius Raditya Pandu Hendrianto

Teknik Komputer

Universitas Indonesia

Depok, Indonesia

radityahendrianto@gmail.com

Abstract—Penentuan parameter aliran fluida merupakan aspek krusial dalam berbagai aplikasi rekayasa. Studi ini berfokus pada penentuan ketinggian awal air (H) dalam sebuah tangki silinder yang mengalir melalui pipa panjang. Kecepatan air keluar (v) dari sistem ini dapat dihitung menggunakan persamaan yang melibatkan H , panjang pipa (L), waktu (t), dan percepatan gravitasi (g). Penelitian ini bertujuan untuk menerapkan dan membandingkan tiga metode numerik pencarian akar — metode grafis, *bisection method* (bisection), dan metode posisi palsu (false position) — untuk menentukan nilai H yang memenuhi kondisi aliran tertentu. Hasil dari setiap metode akan dianalisis untuk mengevaluasi akurasi dan efisiensinya dalam menyelesaikan permasalahan ini, dengan kriteria penghentian $\epsilon_s = 1\%$.

Index Terms—KEYWORD:

ketinggian awal, aliran pipa, metode grafis, *bisection method*, metode posisi palsu, numerik, pencarian akar

I. PENDAHULUAN

Dalam disiplin ilmu mekanika fluida, analisis aliran dari tangki penyimpanan melalui pipa merupakan salah satu problem fundamental dengan aplikasi yang luas, mulai dari sistem irigasi hingga proses industri. Salah satu parameter penting dalam analisis tersebut adalah ketinggian awal (H_0) fluida dalam tangki, karena parameter ini mempengaruhi kecepatan aliran keluar. Persamaan yang menggambarkan fenomena ini seringkali bersifat non-linear dan transenden, sehingga penyelesaian analitik untuk mencari parameter tertentu seperti ketinggian awal menjadi tidak praktis atau bahkan tidak mungkin dilakukan.

Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk mendemonstrasikan penerapan *bisection method* secara sistematis dalam menemukan solusi numerik untuk permasalahan aliran fluida yang diberikan. Untuk memfokuskan analisis, studi ini menggunakan serangkaian parameter yang telah ditetapkan: kecepatan target air adalah $v = 4$ m/s, panjang pipa $L = 5$ m, dan waktu $t = 3$ s. Implementasi *bisection method* akan dilakukan dengan menggunakan interval awal tebakan $[0, 2]$ meter dan kriteria penghentian berupa galat relatif perkiraan (ϵ_a) yang lebih kecil dari 1%.

II. DASAR TEORI

Dinamika fluida adalah cabang dari mekanika fluida yang mempelajari bagaimana fluida (cairan dan gas) bergerak serta gaya yang bekerja padanya. Studi ini sangat penting dalam

berbagai aplikasi rekayasa, mulai dari desain pesawat hingga sistem perpipaan. Prinsip fundamental yang mendasari dinamika fluida adalah hukum kekekalan massa, momentum, dan energi. Dari prinsip-prinsip ini, diturunkan persamaan-persamaan yang menggambarkan hubungan antara properti fluida seperti tekanan, kecepatan, dan ketinggian. Salah satu persamaan paling terkenal dalam dinamika fluida adalah Persamaan Bernoulli, yang menghubungkan energi kinetik, energi potensial, dan energi aliran fluida di sepanjang garis aliran. Persamaan ini menjadi dasar untuk memahami fenomena seperti gaya angkat pada sayap pesawat dan aliran air dalam pipa.

Salah satu aplikasi langsung dari Prinsip Bernoulli adalah Hukum Torricelli. Hukum ini, yang dirumuskan oleh Evangelista Torricelli, secara spesifik menjelaskan kecepatan aliran keluar (efluks) suatu fluida dari sebuah lubang kecil pada sebuah wadah atau tangki. Dalam kondisi ideal, di mana lubang dianggap kecil dibandingkan luas penampang tangki dan viskositas diabaikan, hukum ini menyatakan bahwa kecepatan aliran keluar, v , sama dengan kecepatan yang akan diperoleh sebuah benda jika jatuh bebas dari ketinggian h , yaitu ketinggian permukaan fluida di atas lubang. Secara matematis, hukum ini dinyatakan sebagai $v = \sqrt{2gh}$, dengan g adalah percepatan gravitasi. Hukum ini memberikan fondasi teoretis yang kuat untuk menganalisis sistem aliran sederhana, seperti yang digambarkan pada studi kasus ini.

Namun, Hukum Torricelli merupakan model ideal. Dalam sistem nyata yang melibatkan pipa panjang, faktor-faktor seperti gesekan (friksi) dan efek transien (perubahan seiring waktu) saat fluida mulai bergerak menjadi signifikan.

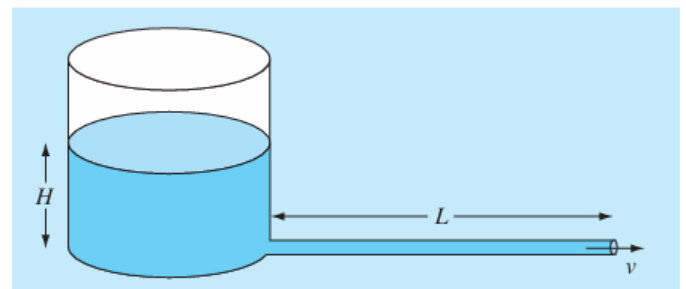


Fig. 1: Diagram skematik sistem tangki silinder dan pipa pembuangan.

$$v = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) \quad (1)$$

Untuk mencari nilai ketinggian awal air (H) yang diperlukan untuk mencapai kecepatan aliran tertentu (v), kita perlu menyelesaikan persamaan berikut:

$$f(H) = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) - v \quad (2)$$

dimana:

- H adalah ketinggian air (m)
- g adalah percepatan gravitasi (9.81 m/s^2)
- v adalah kecepatan aliran air (m/s)
- L adalah panjang pipa (m)
- t adalah waktu yang telah berlalu (s)

Fungsi tangen hiperbolik (\tanh) dalam persamaan ini merepresentasikan bagaimana kecepatan aliran air (v) mempengaruhi ketinggian air (H) secara bertahap. Metode numerik diperlukan untuk menyelesaikan persamaan ini karena sifat non-linear dari fungsi \tanh yang membuat solusi analitik sulit dicapai. Oleh karena itu, metode pencarian akar seperti *bisection method* akan digunakan untuk menemukan nilai H yang memenuhi persamaan tersebut.

Bisection method merupakan metode numerik yang digunakan untuk menemukan akar dari suatu fungsi dengan cara membagi interval yang mengandung akar menjadi dua bagian dan memilih bagian yang mengandung akar. Metode ini sangat efektif untuk fungsi kontinu dan dapat menjamin konvergensi ke akar yang diinginkan jika interval awal dipilih dengan benar. Metode ini dimulai dengan memilih dua tebakan awal, x_l (batas bawah) dan x_u (batas atas), yang harus mengurung akar. Kemudian, titik tengah dari interval tersebut dihitung sebagai estimasi awal akar. Proses ini diulang dengan memperbarui interval berdasarkan tanda dari fungsi pada titik tengah hingga galat relatif perkiraan (ϵ_a) mencapai kriteria penghentian yang ditentukan.

III. DATA PENGUJIAN

Terdapat beberapa variabel yang digunakan dalam perhitungan numerik *bisection method* ini. Parameter waktu (t), panjang saluran (L), dan percepatan gravitasi akan berperan sebagai variabel kontrol karena nilainya sudah ditetapkan diawal. Parameter yang dijaga konstan selama simulasi adalah:

- Kecepatan Aliran Air (v) sebesar 4.00 m/s .
- Percepatan gravitasi (g) sebesar 9.81 m/s^2 .
- Panjang saluran (L) sepanjang 5.00 m .
- Waktu yang telah berlalu (t) selama 3.00 s .

Hasil dari perhitungan numerik ini adalah perbandingan perhitungan numerik *bisection method* dengan rumus prinsip bernoulli untuk mencari nilai H (m) sebagai variabel terikat. Rumus yang digunakan mengandung unsur prinsip bernoulli.

IV. METODE PENYELESAIAN

Metode yang dipakai untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah *bisection method* (**bisection method**). Metode ini merupakan metode pencarian akar yang didasarkan pada teorema nilai antara. Prosesnya dimulai dengan menentukan dua tebakan awal, x_l (batas bawah) dan x_u (batas atas), yang harus mengurung akar, yang berarti perkalian nilai fungsi pada kedua titik tersebut harus negatif ($f(x_l)f(x_u) < 0$). Estimasi akar berikutnya, H_0 , dihitung sebagai titik tengah interval:

$$H_0 = \frac{x_l + x_u}{2} \quad (3)$$

Interval kemudian diperbarui untuk iterasi selanjutnya. Galat relatif perkiraan (ϵ_a) dihitung untuk mengukur perubahan antara estimasi akar yang baru dan yang sebelumnya, menggunakan rumus:

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_r^{\text{baru}} - x_r^{\text{lama}}}{x_r^{\text{baru}}} \right| \times 100\% \quad (4)$$

Iterasi akan berhenti ketika nilai ϵ_a lebih kecil atau sama dengan kriteria penghentian yang ditentukan (ϵ_s).

Berikut merupakan pseudocode untuk pengimplementasian *bisection method*:

- 1: Definisikan fungsi $f(H) \leftarrow \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) - v$.
- 2: Inisialisasi parameter yang diperlukan: batas awal x_l dan x_u , serta kriteria berhenti ϵ_s .
- 3: Inisialisasi variabel penyimpanan: $H_0^{\text{lama}} \leftarrow 0$.
- 4: **while true do**
- 5: Hitung estimasi akar baru: $H_0 \leftarrow \frac{x_l + x_u}{2}$.
- 6: Hitung galat relatif perkiraan:
 $\epsilon_a \leftarrow |(H_0 - H_0^{\text{lama}})/H_0| \times 100\%$.
- 7: **if** $\epsilon_a \leq \epsilon_s$ **then**
- 8: **break**
- 9: **end if**
- 10: **if** $f(x_l) \cdot f(H_0) < 0$ **then**
- 11: Perbarui batas atas: $x_u \leftarrow H_0$.
- 12: **else**
- 13: Perbarui batas bawah: $x_l \leftarrow H_0$.
- 14: **end if**
- 15: Simpan estimasi saat ini untuk iterasi berikutnya:
 $H_0^{\text{lama}} \leftarrow H_0$.
- 16: **end while**
- 17: **return** H_0

Setelah itu, dilakukan perhitungan untuk mencari nilai galat relatif v_{numerik} perhitungan bernoulli menggunakan hasil dari *bisection method* dari v_{target} kita dapat menggunakan rumus:

$$\epsilon_r = \left| \frac{v_{\text{target}} - v_{\text{numerik}}}{v_{\text{target}}} \right| \times 100\% \quad (5)$$

V. ANALISA HASIL EKSPERIMEN

Hasil perhitungan numerik *bisection method* akan dibandingkan dengan perhitungan nilai fungsi $f(H)$ sehingga perbandingan tersebut akan menjadi tolak ukur dari keakuratan *bisection method*. Dengan menggunakan *bisection method*, kita akan mencari nilai ketinggian awal (H) yang diperlukan untuk

mencapai kecepatan aliran 4 m/s dengan parameter sebagai berikut:

- Fungsi target: $f(H) = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) - 4 = 0$
- Interval awal: $[x_l, x_u] = [0, 2]$
- Kriteria berhenti: $\epsilon_s = 1\%$

TABLE I: Hasil Iterasi *bisection method* untuk Mencari H

Iterasi	x_l	x_u	x_r	$f(x_r)$	$\epsilon_a(\%)$
1	0.000000	2.000000	1.000000	-0.15097	-
2	1.000000	2.000000	1.500000	1.01452	33.33
3	1.000000	1.500000	1.250000	0.46467	20.00
4	1.000000	1.250000	1.125000	0.16543	11.11
5	1.000000	1.125000	1.062500	0.00934	5.88
6	1.000000	1.062500	1.031250	-0.07026	3.03
7	1.031250	1.062500	1.046875	-0.03032	1.49
8	1.046875	1.062500	1.054688	-0.01046	0.74

Nilai pada tabel ini didapat dari perhitungan iteratif menggunakan *bisection method* dengan memasukan nilai kecepatan aliran yang diinginkan ($v = 4$ m/s) untuk mendapatkan nilai H_0 yang sesuai.

Berikut merupakan perhitungan setiap iterasi yang ada menggunakan *bisection method* untuk mencari nilai ketinggian awal (H) yang diperlukan untuk mencapai kecepatan aliran 4 m/s dengan parameter awal sebagai berikut:

- Fungsi target: $f(H) = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) - 4 = 0$
- Interval awal: $[x_l, x_u] = [0, 2]$
- Kriteria berhenti: $\epsilon_s = 1\%$

Iterasi ke-1 adalah nilai tengah dari interval 0 dan 2, yakni 1.0 sebagai nilai bagi dua.

Perhitungan untuk Iterasi ke-2:

- 1) Identifikasi nilai x_r yang relevan:

- $x_{r,baru}$ (dari iterasi ke-2) = **1.5**
- $x_{r,lama}$ (dari iterasi ke-1) = **1.0**

- 2) Masukkan ke dalam rumus:

$$\epsilon_a = \left| \frac{1.5 - 1.0}{1.5} \right| \times 100\% \quad (6)$$

- 3) Selesaikan kalkulasi:

$$\epsilon_a = \left| \frac{0.5}{1.5} \right| \times 100\% = 0.3333 \times 100\% = \mathbf{33.33\%} \quad (7)$$

Perhitungan untuk Iterasi ke-3:

- 1) Identifikasi nilai x_r yang relevan:

- $x_{r,baru}$ (dari iterasi ke-3) = **1.25**
- $x_{r,lama}$ (dari iterasi ke-2) = **1.50**

- 2) Masukkan ke dalam rumus:

$$\epsilon_a = \left| \frac{1.25 - 1.5}{1.250000} \right| \times 100\% \quad (8)$$

- 3) Selesaikan kalkulasi:

$$\epsilon_a = \left| \frac{-0.25}{1.25} \right| \times 100\% = 0.2 \times 100\% = \mathbf{20.00\%} \quad (9)$$

Perhitungan selesai sampai nilai galat relatif mencapai nilai yang lebih kecil dari kriteria penghentian yang ditentukan

(pada kasus ini, nilai $\epsilon_s = 1\%$). Pada kasus ini, iterasi terakhir adalah 8.

Perhitungan untuk Iterasi ke-8:

- 1) Identifikasi nilai x_r yang relevan:

- $x_{r,baru}$ (dari iterasi ke-8) = **1.054688**
- $x_{r,lama}$ (dari iterasi ke-7) = **1.046875**

- 2) Masukkan ke dalam rumus:

$$\epsilon_a = \left| \frac{1.054688 - 1.046875}{1.054688} \right| \times 100\% \quad (10)$$

- 3) Selesaikan kalkulasi:

$$\epsilon_a = \left| \frac{0.007813}{1.054688} \right| \times 100\% = 0.00741 \times 100\% = \mathbf{0.74\%} \quad (11)$$

Perhitungan dihentikan pada **iterasi ke-8** karena nilai galat relatif perkiraan ($\epsilon_a = 0.74\%$) telah lebih kecil dari kriteria penghentian yang ditentukan, yakni 1%. Dengan demikian, nilai ketinggian awal (H) yang diperlukan untuk mencapai kecepatan aliran 4 m/s adalah sekitar **1.054688 meter**.

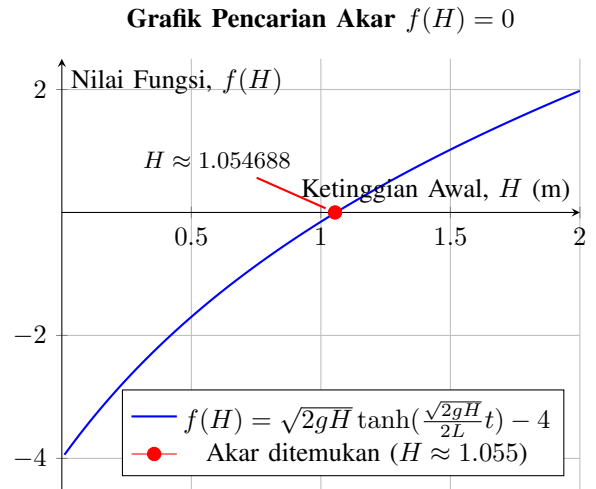


Fig. 2: Visualisasi pencarian akar dari fungsi $f(H)$ pada interval $[0, 2]$

Perhitungan dengan rumus bernoulli dilakukan untuk memvalidasi hasil perhitungan numerik *bisection method* dengan rumus:

$$v = \sqrt{2gH} \tanh\left(\frac{\sqrt{2gH}}{2L}t\right) \quad (12)$$

Dengan memasukkan nilai-nilai yang telah ditetapkan:

$$v = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.054688} \tanh\left(\frac{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.054688}}{2 \cdot 5} \cdot 3\right) \quad (13)$$

$$v = \sqrt{20.68} \tanh\left(\frac{\sqrt{20.68}}{10} \cdot 3\right) \quad (14)$$

$$v \approx 3.9916 \text{ m/s} \quad (15)$$

Untuk menghitung galat relatif antara kecepatan target dan kecepatan yang dihasilkan dari perhitungan bernoulli, kita dapat menggunakan rumus:

$$\epsilon_r = \left| \frac{4 - 3.9916}{4} \right| \times 100\% \quad (16)$$

$$\epsilon_r = \left| \frac{0.0084}{4} \right| \times 100\% \approx 0.21\% \quad (17)$$

Hasil perhitungan dari *bisection method* menunjukkan bahwa nilai ketinggian awal air (H) adalah **1.054688 meter** untuk mendapat nilai kecepatan aliran air sebesar 4.00 m/s dengan galat relatif sebesar **0.74%** untuk nilai ketinggiannya. Dengan ketinggian yang sama, hasil perhitungan bernoulli menunjukkan bahwa kecepatan aliran air yang dihasilkan adalah sekitar 3.9916 m/s galat relatif antara kecepatan target (4 m/s) dan kecepatan yang dihasilkan (3.9916 m/s) adalah sekitar 0.21%.

VI. KESIMPULAN

Dengan menggunakan *bisection method*, hasil dari ketinggian awal air (H) yang diperlukan untuk mencapai kecepatan aliran 4 m/s adalah sekitar 1.054688 meter dengan galat relatif sebesar 0.74%. Perbandingan dengan hasil perhitungan bernoulli menunjukkan bahwa kecepatan aliran yang dihasilkan adalah sekitar 3.9916 m/s dengan galat relatif antar kecepatan perhitungan bernoulli dengan kecepatan target sebesar 0.21% yang menunjukan persen error sangat kecil hingga dibawah 1%. Hal ini menunjukkan bahwa *bisection method* adalah metode yang efektif untuk mencari akar dari fungsi non-linear dalam konteks aliran fluida.

VII. LINK GITHUB

Berikut adalah link GitHub: <https://github.com/BonifasiusRaditya/FinproKomputasiNumerik.git>

REFERENCES

- [1] F. M. White, *Fluid Mechanics*, 8th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2016.
- [2] S. C. Chapra and R. P. Canale, *Numerical Methods for Engineers*, 7th ed. New York: McGraw-Hill Education, 2015.
- [3] J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill Education, 1995.
- [4] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed. New York: Wiley, 2011.