

Aplikasi Romberg Integration dalam Analisis Kecepatan Freefall Skydiving

Deandro Najwan Ahmad
Syahbanna
Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia
deandronas@gmail.com

Bonifasius Raditya Pandu
Hendrianto
Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia
radityahendrianto@gmail.com

Falah Andhesryo
Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia
falahand@gmail.com

Bryan Herdianto
Teknik Komputer

Universitas Indonesia
Depok, Indonesia

bryan.herdianto17@gmail.com

Wesley Frederick Oh
Teknik Komputer
Universitas Indonesia
Depok, Indonesia
pempekplg3@gmail.com

Abstract—Metode Romberg Integration merupakan salah satu metode numerik yang digunakan untuk menghitung integral dengan presisi tinggi. Dalam konteks fisika, metode Romberg Integration dapat diterapkan untuk menganalisis jarak tempuh seorang skydiver selama fase freefall dengan mempertimbangkan gaya hambat udara linear. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui cara perhitungan jarak tempuh skydiver dengan pendekatan Romberg Integration berdasarkan fungsi kecepatan freefall. Hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa metode ini memberikan estimasi jarak yang sangat akurat, yang dapat menjadi acuan penting dalam perencanaan pelatihan dan keselamatan aksi skydiving.

Keywords—romberg integration, freefall, numerik, kecepatan

I. PENDAHULUAN

Salah satu olahraga ekstrem yang cukup berbahaya di dunia adalah *freefall skydiving*. Olahraga ini tergolong berisiko tinggi karena satu kesalahan kecil, baik dari segi peralatan seperti parasut maupun faktor lainnya, dapat mengancam nyawa pelakunya. Pada tahun 2023, tercatat 10 kasus kematian akibat skydiving di Amerika Serikat menurut United States Parachute Association (USPA), dari total sekitar 3,65 juta lompatan. Angka ini setara dengan sekitar 0,27 kematian per 100.000 lompatan, sebagaimana dilaporkan oleh Wisconsin Skydiving Center. Lebih lanjut, USPA menyatakan bahwa 60% dari kematian pada tahun 2022 disebabkan oleh masalah saat pendaratan dengan parasut, dan 40% dari kasus tersebut terjadi karena skydiver secara sengaja melakukan manuver putaran rendah saat mendarat.

Meskipun demikian, olahraga ini tetap diminati oleh banyak orang karena tantangan yang ditawarkannya. Oleh karena itu, pelarangan total terhadap olahraga ini bukanlah solusi yang tepat. Sebaliknya, aspek keselamatan dan kenyamanan dalam olahraga ini harus terus ditingkatkan. Salah satu cara untuk melakukannya adalah dengan memahami aspek fisika di balik fenomena *freefall skydiving*, sehingga ke depannya dapat dikembangkan teknologi dan solusi yang sesuai untuk meningkatkan keselamatan.

Salah satu aspek yang dapat diteliti dari fenomena ini adalah jarak tempuh skydiver saat fase jatuh bebas. Ketika

seorang skydiver berada di udara, ia mengalami gaya hambat udara yang bekerja berlawanan dengan gaya gravitasi bumi. Kombinasi kedua gaya ini memengaruhi percepatan dan kecepatan skydiver seiring waktu. Pemahaman terhadap perubahan kecepatan ini sangat penting karena dapat digunakan untuk merancang sistem prediksi dan pencegahan terhadap kemungkinan kecelakaan.

Dalam konteks ini, jarak tempuh skydiver dapat dihitung dengan menggunakan metode integral. Karena fungsi kecepatan tidak selalu dapat diintegrasikan secara analitik, maka pendekatan numerik menjadi solusi yang tepat. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan adalah **Romberg Integration**, yang memungkinkan perhitungan integral dengan akurasi tinggi melalui pendekatan algoritma. Metode ini sangat aplikatif karena dapat diimplementasikan dalam pemrograman untuk menghitung jarak berdasarkan data seperti massa, koefisien hambat udara, dan percepatan gravitasi.

II. STUDI LITERATUR

Metode Romberg Integration merupakan suatu metode yang diperkenalkan oleh Werner Romberg di tahun 1955 dan merupakan teknik numerik yang menggabungkan aturan trapesium berulang dengan ekstrapolasi Richardson untuk meningkatkan akurasi perhitungan integral. Metode ini lebih efisien dibandingkan pendekatan kuadratur tradisional karena mampu mencapai konvergensi cepat dengan meminimalkan error komputasi.

Dalam literatur ini kita akan menggunakan metode Romberg Integration untuk menganalisa suatu kasus pada gerak jatuh bebas skydiver dimana terdapat gaya hambat udara linear yang akan memengaruhi kecepatan. Sehingga perlu suatu solusi numerik untuk menghitung jarak tempuh yang ada. Romberg Integration dipilih karena kemampuannya menangani fungsi eksponensial semacam ini dengan presisi tinggi, bahkan untuk variasi parameter seperti massa (m) dan koefisien hambat (c).

Jika kita telaah beberapa study yang dilakukan sebelumnya oleh Branlard (2017) yang membuktikan bahwa integrasi numerik diperlukan ketika solusi analitik tidak tersedia, Sementara itu, Landau dan Paez (2014) menunjukkan bahwa integrasi numerik cocok untuk sistem dinamika non-linear. Oleh karena itu dengan adanya penelitian ini akan mengisi gap dengan mengaplikasikan Romberg Integration secara spesifik pada case skydiving dan memvalidasi hasilnya dengan menggunakan program dan juga algoritma yang tepat untuk mendapatkan hasil yang baik juga.

III. DATA PENGUJIAN

Dalam studi ini, digunakan lima set data dengan kombinasi acak parameter massa (m), koefisien hambat udara linier (c), dan waktu jatuh bebas (T). Parameter ini merepresentasikan berbagai kemungkinan kondisi nyata yang mungkin dialami oleh skydiver dengan karakteristik tubuh dan durasi terjun yang berbeda. Nilai percepatan gravitasi (g) digunakan secara konstan sebesar 9.8 m/s^2 untuk menyederhanakan pengaruh gravitasi dalam perhitungan.

TABLE I. PARAMETER UJI SKYDIVER

Uji ke-n	Massa m (kg)	Koefisien Hambat c (kg/s)	Waktu T (s)
1	75	12	6
2	85	10	8
3	90	15	10
4	70	8	5
5	95	11	7

Kelima kombinasi tersebut dipilih untuk mengamati seberapa besar pengaruh masing-masing parameter terhadap jarak tempuh akhir selama fase free fall. Data digunakan sebagai input fungsi kecepatan analitik, yang kemudian diintegrasikan secara numerik untuk menghitung jarak.

IV. METODE PENGUJIAN

Dalam penelitian ini, digunakan metode Romberg Integration untuk menghitung jarak tempuh skydiver selama fase freefall dengan gaya hambat udara linier. Pemilihan metode ini dilatarbelakangi oleh sifat fungsi kecepatan yang bersifat non-linear eksponensial, sehingga tidak dapat diintegrasikan secara langsung dengan cara analitik sederhana. Dibandingkan metode numerik dasar seperti aturan trapesium biasa atau metode Simpson, Romberg Integration memiliki keunggulan dalam hal konvergensi cepat dan tingkat akurasi tinggi, khususnya untuk fungsi yang halus dan memiliki turunan kontinu. Oleh karena itu, metode ini dinilai paling sesuai untuk menghasilkan estimasi jarak tempuh yang presisi dengan efisiensi komputasi yang baik.

A. Kecepatan Skydiver

Dasar perhitungan jarak dimulai dari fungsi kecepatan skydiver yang diperoleh secara analitik sebagai solusi dari hukum Newton untuk benda jatuh dengan hambatan linier. Fungsi tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$v(t) = \frac{g \cdot m}{c} \left(1 - e^{-\frac{c \cdot t}{m}} \right)$$

Fungsi ini menunjukkan bahwa kecepatan meningkat secara eksponensial hingga mendekati kecepatan terminal. Dalam rumus ini:

- $v(t)$ menyatakan kecepatan saat waktu t ,
- $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ adalah percepatan gravitasi,
- m adalah massa skydiver dalam kilogram,
- c adalah koefisien hambat udara dalam kg/s.

B. Jarak sebagai Integral dari Kecepatan

Karena kecepatan adalah turunan dari posisi terhadap waktu, maka untuk memperoleh jarak tempuh total, fungsi $v(t)$ perlu diintegrasikan dari waktu $t = 0$ hingga $t = T$. Bentuk umum integralnya adalah:

$$s = \int_0^T v(t) dt$$

atau jika dituliskan secara eksplisit berdasarkan fungsi kecepatan:

$$s = \int_0^T \frac{g \cdot m}{c} \cdot \left(1 - e^{-\frac{ct}{m}} \right) dt$$

Integral ini tidak diselesaikan secara simbolik, melainkan secara numerik.

C. Aturan Trapesium

Sebagai langkah awal dalam metode Romberg, digunakan **aturan trapesium** untuk mendekati nilai integral. Aturan ini menghitung luas di bawah kurva dengan mengasumsikan bentuk trapesium antar titik fungsi:

$$T \approx (b - a) \cdot \frac{(f(x_0) + f(x_1))}{2}$$

Untuk kasus dengan lebih banyak titik partisi (trapesium komposit), rumusnya diperluas menjadi:

$$Trapun = \sum \left[(x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{(y_i + y_{i-1}))}{2} \right]$$

Pseudocode algoritma trapesium komposit dituliskan sebagai berikut:

```

FUNCTION Trapun(x, y, n)
  LOCAL i, sum
  sum = 0
  DOFOR i = 1, n
    sum = sum + (xi - xi-1) * (yi + yi-1) / 2
  END DO
  Trapun = sum
END Trapun

```

D. Romberg Integration

Setelah diperoleh beberapa estimasi integral dari aturan trapesium dengan ukuran langkah berbeda, dilakukan extrapolasi dengan rumus Romberg berikut:

$$I_{j,k} \approx \frac{(4^{k-1} \cdot I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1})}{(4^{k-1} - 1)}$$

Sebagai contoh, pada kolom kedua dan baris pertama ($I_{1,2}$), formula menjadi:

$$I_{1,2} \approx \frac{(4 \cdot I_{2,1} - I_{1,1})}{3}$$

Proses iteratif ini dilanjutkan hingga selisih relatif antar iterasi berturut-turut memenuhi batas toleransi yang ditentukan. Dalam studi ini, digunakan kriteria:

$$\varepsilon_s \leq 1\%$$

Hal ini berarti proses akan dihentikan saat tingkat kesalahan relatif antar hasil iterasi kurang dari 1%.

V. DISKUSI DAN ANALISA HASIL EKSPERIMEN

Seperti yang telah dipelajari, Romberg Integration adalah sebuah **shortcut** jenius yang meminimalisir jumlah iterasi perhitungan dengan memberikan estimasi pada total jarak yang ditempuh.

Dalam konteks memberikan estimasi jarak tempuh penerjun payung ini, kita menggunakan Romberg yang berdasarkan atas beberapa input konstanta yang berbeda, seperti *Linear Drag* (Hambatan Linear), waktu, serta massa skydiver.

Untuk eksperimen ini, kita dapat menggunakan beberapa parameter sesuai yang tertera di bagian data pengujian, kemudian didapatkan hasil seperti berikut:

Massa (kg)	Koefisien Hambat (kg/s)	Waktu (s)	Jarak (m)
75	12	6	131.40
85	10	8	141.44
90	15	10	302.14
70	8	5	102.26
95	11	7	186.89

Data di atas dihitung dengan menggunakan 2 buah formula yang berbeda, yaitu dengan *Trapezoidal Rule* dan juga *Richardson Extrapolation*, dengan tujuan untuk mempercepat konvergensi sekaligus mendapatkan nilai *approximation* yang cukup akurat.

Sebagai contohnya, mari lihat pada pengujian pertama ($m=75$, $c=12$, $t=6$). Dengan menggunakan *Trapezoidal Rule* dan *Richardson Extrapolation*, kita bisa mendapatkan *Romberg Integration Table*. Lalu, karena *order of error* memiliki nilai:

$$O(h^{(2n+2)})$$

Maka, kita bisa menghitung dari $O(h^2)$ hingga $O(h^{12})$ dengan jumlah iterasi Rombert $n = 6$. Untuk kasus ini hasilnya bisa dilihat seperti berikut:

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$
113.50 91397 9					
126.87 45997 6	131.32 97530 9				
130.26 36222 4	131.39 32964 0	131.39 75326 2			
131.11 39206 8	131.39 73534 9	131.39 76239 6	131.39 76254 1		
131.32 66864 9	131.39 76084 3	131.39 76254 2	131.39 76254 5	131.39 76254 5	
131.37 98899 1	131.39 76243 8	131.39 76254 5	131.39 76254 5	131.39 76254 5	131.39 76254 5

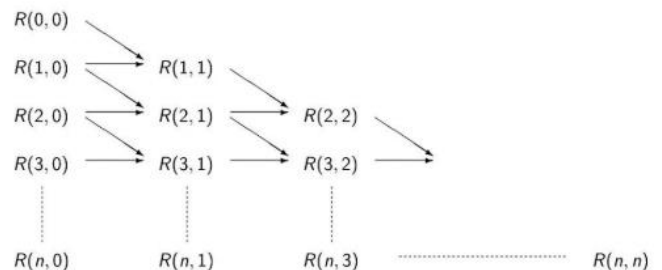
Kolom $O(h^2)$ dihitung dengan *Trapezoidal Rule* sedangkan kolom sisanya menggunakan rumus *Richardson Extrapolation*. Contohnya:

$$I_{1,2} = \frac{4I_{2,1} - I_{1,1}}{3}$$

$$I_{1,2} = \frac{4(126.87459966) - 113.50913979}{3}$$

$$I_{1,2} = 131.32975309$$

dimana $I_{1,2}$ merupakan $O(h^4)$ yang didapatkan dari dua data sebelumnya di kolom $O(h^2)$. Begitupun seterusnya untuk kolom $O(h^6)$, $O(h^8)$, $O(h^{10})$, dan $O(h^{12})$ yang menggunakan *Richardson Extrapolation*.



Gambar 1. Romberg Triangle

Kemudian, hasil dari *Romberg Integration* akan diambil dari hasil yang didapatkan dari **Order of Error tertinggi**, di mana dalam kasus pengujian pertama ($m=75$, $c=12$, $t=6$), hasilnya adalah 131.39762545. Untuk pengujian kedua, ketiga, dan seterusnya diterapkan hal yang sama dengan jumlah iterasi yang sama, lalu hasilnya akan merepresentasikan jarak yang ditempuh untuk setiap parameter pengujian.

VI. KESIMPULAN

Salah satu olahraga ekstrem yang cukup berbahaya di dunia adalah *freefall skydiving* (terjun payung bebas). Olahraga ini tergolong berisiko tinggi karena satu kesalahan kecil—baik dari segi peralatan, seperti parasut, maupun faktor lainnya—dapat mengancam nyawa pelakunya. Oleh karena itu, penting untuk merancang sistem prediksi dan pencegahan terhadap kemungkinan kecelakaan dalam aktivitas ini.

Salah satu variabel yang bisa diprediksi adalah jarak tempuh skydiver. Hal ini dapat dihitung menggunakan metode integral. Untuk memberikan estimasi tersebut, digunakan metode **Romberg Integration**, yang melibatkan beberapa input konstanta seperti hambatan linear (*linear drag*), waktu, dan massa skydiver.

Hasil integral Romberg diperoleh dari nilai dengan *order of error* tertinggi. Pada pengujian pertama dengan parameter massa (m) = 75 kg, hambatan (c) = 12, dan waktu (t) = 6 detik, diperoleh hasil sebesar **131.39762545**.

VII. LINK GITHUB

Berikut adalah link GitHub dari kelompok kami: https://github.com/BonifasiusRaditya/Tugas_PemogramanB

REFERENCES

- [1] S. C. Chapra and R. Canale, Numerical methods for engineers. McGraw-Hill, 2021.
- [2] Brynjulf Owren, “Werner Romberg Vereinfachte numerische Integration,” Det Kongelige Norske Videnskabers Selskabs Skrifter, 2015.
https://www.ntnu.no/ojs/index.php/DKNVS_skrifter/article/view/1458 (accessed May 30, 2025).
- [3] “Richardson Extrapolation and Romberg Integration,” Utah, <https://www.sci.utah.edu/~beiwang/teaching/cs6210-fall-2016/lecture24.pdf> (accessed May 30, 2025).
- [4] “Trapezoidal Rule,” Cuemath, <https://www.cuemath.com/trapezoidal-rule-formula/> (accessed May 30, 2025).