

Лабораторная работа 1.2.5.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Попова Софья Б04-401

October 2024

Цель работы

Исследовать вынужденную прецессию гироскопа. Установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента силы, действующей на ось гироскопа, и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

Оборудование

Гироскоп в кардановом подвесе, набор грузов разной массы, секундомер, линейка с транспортиром, осциллограф.

Теоретическая часть

Измерение частоты вращения ротора

Гироскоп - быстро вращающееся твердое тело, для которого момент импульса относительно одной оси значительно больше момента импульса относительно других осей. Гироскоп уравновешен если его центр масс неподвижен.

Устойчивость вращения гироскопа связана с тем, что приращение момента импульса при действии внешних сил в течение короткого промежутка времени много меньше самого момента импульса и практически не изменяет его.

Рассмотрим гироскоп, вращающийся относительно оси OZ со скоростью ω . Для того чтобы гироскоп начал совершать регулярную прецессию вокруг оси OY с угловой скоростью Ω необходимо приложить к нему момент внешних сил \vec{M} , направленный вдоль оси OX . При этом, если выполнено условие $\bar{L}_\Omega \ll \bar{L}_\omega$, то момент импульса гироскопа относительно главной оси \vec{L} практически не меняется со временем по модулю и связан с моментом приложенных сил \vec{M} и скоростью прецессии Ω следующим соотношением:

$$\vec{M} = \frac{d \cdot \vec{L}}{d \cdot t} = \bar{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (1)$$

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа подвесим к нему дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент силы тяжести, вызывающий прецессию. Тогда скорость вращения ротора гироскопа равна:

$$\omega = \frac{L}{I_z} = \frac{M}{I_z \cdot \Omega} \quad (2)$$

где $M = mgl$

Измерение момента инерции ротора

Момент инерции ротора измеряем по периоду крутильных колебаний на жесткой проволоке. Чтобы исключить модуль кручения проволоки f , подвешиваем цилиндр правильной формы с известным моментом инерции I

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{f}}, \quad I = I_{\text{ц}} \frac{T^2}{T_{\text{ц}}^2} \quad (3)$$

Измерение момента сил трения

Так как силы трения имеют составляющую, не лежащую в плоскости осей вращения, они меняют момент импульса и по направлению, и по величине. Для ротора гироскопа действие сил трения скомпенсировано электромотором, для карданова подвеса компенсации нет. В результате чего ось гироскопа будет опускаться в направлении действия груза. Момент сил трения $M_{\text{тр}}$ может быть вычислен по формуле:

$$M_{\text{тр}} = \frac{\Delta\alpha}{t} L \quad (4)$$

Экспериментальная часть

Измерение периода прецессии

Для измерения периода прецессии гироскопа даем ротору гироскопа раскрутиться и подвешиваем различные по массе грузы на рычаг, укрепленный на оси гироскопа. Полученные данные представлены в таблице:

1	м, г	77					Ω, рад/с
	t, с	263,98	263,25	263,68	264,68	264,65	0,047
	n, обороты	2	2	2	2	2	
2	м, г	174					Ω, рад/с
	t, с	231,56	232,11	232,77	233,75	232,50	0,11
	n, обороты	4	4	4	4	4	
3	м, г	218					Ω, рад/с
	t, с	139,87	139,80	139,63	139,30	138,69	0,135
	n, обороты	3	3	3	3	3	
4	м, г	271					Ω, рад/с
	t, с	149,43	149,53	149,18	149,21	148,34	0,168
	n, обороты	4	4	4	4	4	
5	м, г	329					Ω, рад/с
	t, с	184,26	153,12	152,28	153,76	152,47	0,204
	n, обороты	6	5	5	5	5	

Для вычисления Ω используется формула $\Omega = \frac{2\pi n \pm \Delta\varphi}{t}$, где n - количество оборотов, $\Delta\varphi$ - угол, на который опустилась ось ($20^\circ \approx 0,349$ рад), t - время оборотов.

$$M = mgl = m[\text{кг}] \cdot 9,815[\text{м/с}^2] \cdot 0,12[\text{м}] = m \cdot 0,0011778$$

$$\frac{\sigma_M}{M} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

$$\sigma_M = M \cdot \sqrt{\left(\frac{0,001}{\text{от } 0,077 \text{ до } 0,329}\right)^2 + \left(\frac{0,001}{0,12}\right)^2} \approx M \cdot 0,01 - \text{относительная погрешность} \approx 1\%$$

$$\frac{\sigma_\Omega}{\Omega} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_t}{t}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta\varphi}}{\Delta\varphi}\right)^2}$$

$$\sigma_\Omega = \Omega \cdot \sqrt{\left(\frac{0,5}{\text{от } 138,69 \text{ до } 264,68}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{0,349}\right)^2} \approx \Omega \cdot 0,14 - \text{относительная погрешность} \approx 14\%$$

Зависимость Ω от M представлена в графике:

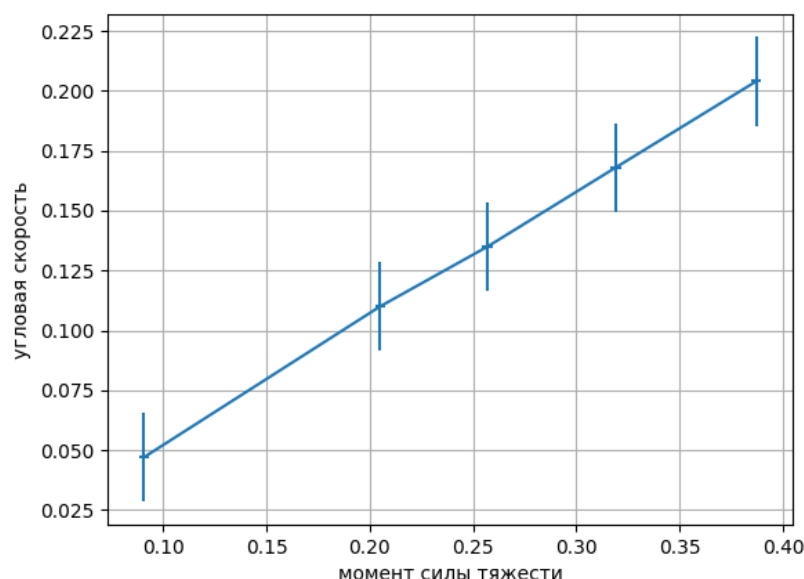


Рис. 1: График Ω (угловая скорость регулярной прецессии) в зависимости от M (момент силы тяжести)

Измерение момента инерции

Для измерения момента инерции ротора гироскопа относительно оси симметрии I_0 его подвесили к концу вертикально висящей проволоки так, чтобы ось ротора была вертикальна и измерили период крутильных колебаний получившегося маятника. После, ротор заменили цилиндром и определили период крутильных колебаний для него.

Полученные данные представлены в таблице:

	n	t, c	T, c
Ротор	20	61	3,05
		63	3,15
		64	3,2
Цилиндр	20	79	3,95
		79	3,95
		80	4

n - количество колебаний, t - время колебаний, T - период колебаний

Эталонный цилиндр

- Масса: 1616,3г
- Диаметр (5 измерений): 7,80см, 7,77см, 7,83см, 7,81см, 7,80см

Период крутильных колебаний цилиндра вычисляется по формуле: $I = \frac{m \cdot r^2}{2}$

Примем период колебаний цилиндра за среднее из трех измерений, т.е. $T_{\text{ц}} = 3,96\text{с}$ ($T = 3,13\text{с}$). Диаметр цилиндра - за среднее из пяти измерений, т.е. $d = 7,802\text{см}$, т.е. $r = 3,901\text{см} = 0,03901\text{м} \approx 0,04\text{м}$

Тогда $I_{\text{ц}} \approx 1,3 \cdot 10^{-3}$. По формуле (3): $I = 1,3 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3,13^2}{3,96^2} = 0,812 \cdot 10^{-3}$.

$$I = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \frac{T^2}{T_c^2} \Rightarrow \frac{\sigma_I}{I} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{T_{\text{ц}}}}{T_{\text{ц}}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2}$$

$$\sigma_I = I \cdot \sqrt{\left(\frac{0,05}{1616,3}\right)^2 + \left(\frac{0,0005}{0,04}\right)^2 + \left(\frac{0,0245}{3,96}\right)^2 + \left(\frac{0,0625}{3,13}\right)^2} \approx 0,024 \cdot I - \text{отн. погрешность} \approx 2,4\%$$

(Для определения $\sigma_T, \sigma_{T_{\text{ц}}}$ используется формула $\sigma_{\text{отд}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - x_{cp})^2}$)

По формуле (2) определим угловую скорость вращения ротора гироскопа:

$$\omega = \frac{mgl}{I \cdot \Omega} \approx \frac{9,815 \cdot 0,12}{0,62 \cdot 0,812 \cdot 10^{-3}} \approx 2339,5 \text{ с}^{-1}$$

$$\sigma_\omega = \omega \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\Omega}{\Omega}\right)^2} = \omega \cdot \sqrt{0,01 + 0,024 + 0,14} \approx 0,42\omega$$

Используя полученную угловую скорость можно определить частоту вращения ротора гироскопа:

$$v = \frac{\omega}{2\pi} \approx 372,34 \text{ Гц}$$

С помощью осциллографа получено значение частоты вращения ротора 378 Гц

Вывод

Значения частоты вращения ротора, полученные разными методами отличаются на 5,66 Гц, что составляет погрешность 1,5%