Лабораторная работа 1.2.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Попова Софья Б04-401

November 2024

Цель работы

Измерение момента инерции ряда тел и сравнение результатов с рассчетами по теоретическим формулам; проверка аддитивности моментов инерции и справедливости формулы Гюйгенса-Штейнера

Оборудование

Трифилярный подвес, секундомер, счетчик числа колебаний, набор исследуемых тел (диск, полый цилиндр, две половины диска)

Теоретическая часть

Момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вычисляется по формуле:

$$I = \int r^2 dm \tag{1}$$

Трифилярный подвес состоит из укрепленной на некоторой высоте неподвижной платформе P и подвешенной к ней на трех симмметрично расположенных нитях AA', BB', CC' вращающейся платформы P'. Для экспериментального измерения момента инерции нижнюю платформу закручивают на определенный угол вокруг неподвижной оси и при возвращении к положению равновесия вызываются крутильные колебания. Если пренебречь потерями энергии на трение, то уравнение сохранения энергии можно записать так:

$$\frac{I\dot{\varphi}^2}{2} + mg(z_0 - z) = E \tag{2}$$

Дважды дифференцируя по времени, после сокращений, получаем:

$$I\ddot{\phi}^2 + mg\frac{Rr}{z_0}\phi = 0 \tag{3}$$

Решая уравнение относительно ϕ, получаем:

$$\phi = \phi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{mgRr}{Iz_0}}t + \theta\right) \tag{4}$$

Период крутильных колебний системы равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{5}$$

Тогда формула для вычисления момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} \quad \text{или} \quad I = kmT^2 \tag{6}$$

где $k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0}$ - постоянная

Экспериментальная часть

Определение константы

Параметры установки:

- $r = 30,5 \pm 0,3$ мм
- $R = 114,1 \pm 0,5$ мм
- $m = 1,0048 \pm 0,0005$ кг
- $z_0 = 2175 \pm 0,5$ мм

По этим значением получена $k \approx 0,397$ ($\sigma_k = \sqrt{(\frac{\sigma_R}{R})^2 + (\frac{\sigma_r}{r})^2 + (\frac{\sigma_{z_0}}{z_0})^2} = 0,016$)

Определение момента инерции ненагруженной платформы

Для определения момента инерции вычислим период колебаний пустой платформы. Измерения указаны в таблице(N - количество колебаний, t - время N колебаний, T - период колебаний):

N	t(с)	$T_0(c)$
10	43,67	4,367
10	43,82	4,382
10	43,68	4,368
10	43,36	4,336
10	43,73	4,373

$T_{0(\text{сред})} = \frac{4{,}367+4{,}382+4{,}368+4{,}336+4{,}373}{5} = 4,36$ секунды

Момент инерции вычисялется по формуле (6):

$I_0 = 0,3971 \cdot 1,0048 \cdot 4,365^2 = 7,6$ кг·м$^{\mathbf{2}}$

$\sigma_{I_0} = \sqrt{(\frac{\sigma_k}{k}) + (\frac{\sigma_m}{m}) + 2 \cdot (\frac{\sigma_T}{T})} = \sqrt{(\frac{0{,}0166}{0{,}3971})^2 + (\frac{0{,}0005}{1{,}0048})^2 + 2 \cdot (\frac{0{,}017}{4{,}3652})^2} = 0,042$

Проверка аддитивности моментов инерции

Для проверки аддитивности моментов инерции измерены моменты инерции двух тел: полого цилиндра и диска, и их суммарный момент инерции. Результаты измерений указаны в таблице (N - количество колебаний, t - время N колебаний, T - период колебаний):

Полый цилиндр			Диск			Два тела		
N	t(с)	$T_1(c)$	N	t(с)	$T_2(c)$	N	t(с)	$T_{1+2}(c)$
10	42,16	4,216	10	39,22	3,922	10	39,57	3,957
10	42,19	4,219	10	39,17	3,917	10	39,53	3,953
10	42,54	4,254	10	39,14	3,914	10	39,51	3,951
10	42,13	4,213	10	39,24	3,924	10	39,61	3,961
10	42,20	4,22	10	39,17	3,917	10	39,59	3,959

Характеристики тел:
Полый цилиндр

- $m = 820,7 \pm 0,5$ г
- $r_{\text{внеш}} = 8,3 \pm 0,05$ см
- $r_{\text{внутр}} = 7,9 \pm 0,05$ см

Диск

- $m = 585,3 \pm 0,5$ г
- $r = 8,55 \pm 0,05$ см

Цилиндр + диск

- $m = 1406 \pm 0,5$ г

$T_{1(\text{сред})} \approx 4,22$ с
$T_{2(\text{сред})} \approx 3,92$ с
$T_{1+2(\text{сред})} \approx 3,96$ с

Момент инерции вычисялется по формуле (6):
(здесь к массе тел прибавляется масса платформы, I_1 - момент инерции цилиндра и платформы, I_2 - диска и платформы, I_{1+2} - диска, цилиндра и платформы)
$I_1 \approx 12,91$ кг·м²
$I_2 \approx 9,7$ кг·м²
$I_{1+2} \approx 15,01$ кг·м²

Если аддитивность момента инерции выполняется, то $(I_1 - I_0) + (I_2 - I_0) = I_{1+2} - I_0$:
$(12,91 - 7,6) + (9,7 - 7,6) = 7,41 = 15,01 - 7,6$ - выражение верно. В связи с округлением до сотых, результаты совпали точно, что может говорить о достаточно высокой точности такого способа доказательства аддитивности, но не следует делать вывод о том, что показания будут идеально точны, так как значения могут расходиться при менее грубом округлении.
В таком случае можно вычислить полученные экспериментально значения:
$I_{\text{ц}} = I_1 - I_0 = 12,91 - 7,6 = 5,31$ кг·м²
$I_{\text{д}} = I_2 - I_0 = 9,7 - 7,6 = 2,1$ кг·м²

Теперь сравним полученные нами моменты инерциии для тел, и их теоретические значения. Для цилиндра момент инерции вычисляется так же как и для диска: $I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2$. Радиус данного диска $R_{\text{д}} = 8,55$ см, тогда $I_{\text{д}} = 2,139$ кг·м²·10^{-3}, что подтверждает экспериментальное значение. Для кольца же: $I_{\text{к}} = m_{\text{к}} R_{\text{к}}^2$. Так как данное кольцо не идеально тонко, то $R_{\text{к}} = \frac{r_{\text{внутр}} + r_{\text{внеш}}}{2}$, тогда $R_{\text{к}} = 8,1$ см. Получаем, что $I_{\text{к}} = 5,384$ кг·м²·10^{-3}, что тоже примерно совпадает с полученным экспериментально значением.
Разница между экспериментально и теоретически полученными значениями: $\frac{2,139 - 2,1}{2,139} \approx 1,8\%$ $\frac{5,384 - 5,31}{5,384} \approx 1,37\%$

Выявление зависимости момента инерции системы тел в зависимости от их расположения

В этом опыте в качестве исследуемой системы тел выступает диск, разрезанный по диаметру.
Характеристики:

- масса правой половинки $= m_1 = 525,1 \pm 0,05$ г
- масса левой половинки $= m_2 = 526,8 \pm 0,05$ г
- масса двух тел $= m_{1+2} = 1051,8 \pm 0,05$ г

Проведены по три измерения периода колебаний для разного расстояния между центрами половин диска. Результаты указаны в таблице (2h - расстояние между центрами):

$2h = 0$ см	$2h = 1,2 \pm 0,05$ см	$2h = 2,3 \pm 0,05$ см	$2h = 3,3 \pm 0,05$ см	$2h = 4,2 \pm 0,05$ см
$T \approx 3,259$ с $I \approx 8,672$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,264$ с $I \approx 8,698$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,283$ с $I \approx 8,8$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,299$ с $I \approx 8,886$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,334$ с $I \approx 9,076$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$
$2h = 0,5 \pm 0,05$ см	$2h = 1,7 \pm 0,05$ см	$2h = 2,8 \pm 0,05$ см	$2h = 3,8 \pm 0,05$ см	$2h = 4,7 \pm 0,05$ см
$T \approx 3,262$ с $I \approx 8,688$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,274$ с $I \approx 8,752$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,291$ с $I \approx 8,843$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,317$ с $I \approx 8,983$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$	$T \approx 3,342$ с $I \approx 9,119$ кг·м² $\sigma_I \approx 0,042$

Построим график зависимости момента импульса I от расстояния между центрами $2h$:

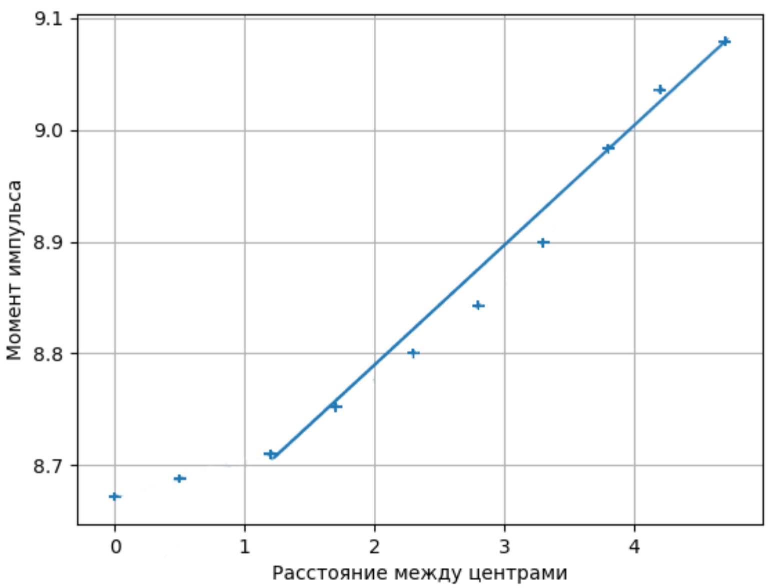

Рис. 1: Зависимость I от $2h$

То, что полученные точки плохо ложатся на прямую можно обьяснить тем, что в ходе эксперимента ось вращения не была неподвижной, так как закручивали нижнюю платформу, что крайне затруднительно сделать не вызвав ее раскачиваний. Чтобы избежать такого отклонения следует закручивать верхнюю платформу.

Вывод

С помощью трифилярного подвеса можно достаточно точно измерить момент инерции тела, а так же экспериментально подтвердить аддитивность моментов инерции и, предположительно, формулу Гюйгенса-Штейнера, но для этого требуется проводить вычисления с наименьшими приданными раскачиваниями нижней платформы.