

# Лабораторная работа 1.3.1.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ ЮНГА

Попова Софья Б04-401

October 2024

### Цель работы

Экспериментально получить зависимость между напряжением и деформацией (закон Гука) для простейших напряженных состояний упругих тел: одноосного растяжения и чистого изгиба.

### Часть 1: Определение модуля Юнга на основе исследования деформаций растяжения проволоки.

#### Оборудование

Прибор Лермантова, проволока из исследуемого материала, лазер закрепленный на шкале, набор грузов, микрометр, двухметровая линейка.

#### Теоретическая часть

Связь между удлинением проволоки  $\Delta l$  и силой  $P$ , вызывающей это удлинение, выражается законом Гука:

$$\frac{P}{S} = E \frac{\Delta l}{l} \quad (1)$$

где  $l$  - начальная длина проволоки,  $S$  - ее сечение,  $E$  - константа, характеризующая упругие свойства материала (модуль Юнга).

Проволока слабо растяжима, следовательно справедлива оценка  $\Delta l \ll r$ , где  $r$  - длина рычага. С учетом этого, угол наклона зеркальца к горизонтали можно найти как  $\alpha = \frac{\Delta l}{r}$ . С другой стороны,  $\alpha = \frac{n}{2h}$ , где  $n$  - показания шкалы,  $h$  - расстояние от шкалы до зеркальца. Таким образом, удлинение проволоки можно выразить как:

$$\Delta l = n \frac{r}{2h} \quad (2)$$

#### Экспериментальная часть

1.

Расстояние до зеркала:  $h = 150,5 \pm 0,5 \text{ см}$  ( $= 1,505 \pm 0,005 \text{ м}$ )

Длина рычага:  $r = 13 \text{ мм}$  ( $= 0,013 \text{ м}$ )

2.

Диаметр проволоки:  $d = 0,73 \text{ мм}$  ( $= 0,00073 \text{ м}$ )

Сечение  $S \approx 0,42 \text{ мм}^2$  ( $= 4,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2$ )

3.

Длина проволоки:  $l = 178 \pm 1 \text{ см}$  ( $= 1,78 \pm 0,01 \text{ м}$ )

4.

Максимальная величина нагрузки:  $\sigma S = 90 \cdot 0,42 = 37,8 \text{ кг}$

30% от максимальной величины = 11,34 кг

Это меньше максимальной массы, которую можно получить всеми грузами, значит в ходе эксперимента масса не выйдет за пределы области, где удлинение проволоки пропорционально ее

натяжению. Это подтвердилось в ходе экспериментальной проверки (остаточные деформации не наблюдались).

## 5.

Расчет  $\Delta l$  производим по формуле (2), а погрешность измерения  $\Delta l$  оцениваем по формуле:

$$\varepsilon_{\Delta l} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_h}{h}\right)^2}$$

где  $\frac{\sigma_n}{n} < 1\%$ ,  $r$  - дано,  $\frac{\sigma_h}{h} = \frac{0,5}{1,505} < 1\%$ . Значит  $\varepsilon_{\Delta l} < 1\%$

Из (1):  $E = \frac{Pl}{S\Delta l} = \frac{lg}{S} \cdot \frac{m}{\Delta l} = \frac{124600000}{3} \cdot \frac{m}{\Delta l}$

Количество грузов	Масса грузов $m$ , г	Значение шкалы $n$ , см	$\Delta n$ , см	$\Delta l$ , см
0	478,7	23,9	-	-
1	724,4	25,4	1,5	$6,5 \cdot 10^{-3}$
2	969,6	26,6	1,2	$5,2 \cdot 10^{-3}$
3	1215,2	27,9	1,3	$5,6 \cdot 10^{-3}$
4	1460,7	29,4	1,5	$6,5 \cdot 10^{-3}$
5	1706,2	30,4	1	$4,3 \cdot 10^{-3}$
6	1952,3	31,9	1,5	$6,5 \cdot 10^{-3}$
7	2198	33,1	1,2	$5,2 \cdot 10^{-3}$
8	2443,6	34,3	1,2	$5,2 \cdot 10^{-3}$
9	2689,7	35,5	1,2	$5,2 \cdot 10^{-3}$
10	2935,5	36,6	1,1	$4,8 \cdot 10^{-3}$
9	2689,7	35,5	1,1	$4,8 \cdot 10^{-3}$
8	2443,6	34,3	1,2	$5,2 \cdot 10^{-3}$
7	2198	33	1,3	$5,6 \cdot 10^{-3}$
6	1952,3	31,7	1,3	$5,6 \cdot 10^{-3}$
5	1706,2	30,3	1,4	$6 \cdot 10^{-3}$
4	1460,7	28,7	1,6	$6,9 \cdot 10^{-3}$
3	1215,2	27,8	0,9	$3,9 \cdot 10^{-3}$
2	969,6	26,5	1,3	$5,6 \cdot 10^{-3}$
1	724,4	25,3	1,2	$5,6 \cdot 10^{-3}$
0	478,7	23,8	1,5	$6,5 \cdot 10^{-3}$

## 6.

Зависимость  $\Delta l$  от  $m$  изображена на графиках (рис. 1 и рис. 2)

Из полученного графика модуль Юнга определяется по формуле:

$$E = \frac{\Delta m}{\Delta l} \cdot \frac{lg}{S} = k \cdot \frac{lg}{S}$$

$$E = 1,875 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\left(\frac{0,01}{1,78}\right)^2} \approx 0,006 (< 1\%)$$

## Вывод

Полученное значение модуля Юнга (187,5 ГПа) отличается от табличного значения модуля Юнга для стали и железа (200 ГПа) на  $\frac{200-187,5}{200} = 0,0625$  6,25%

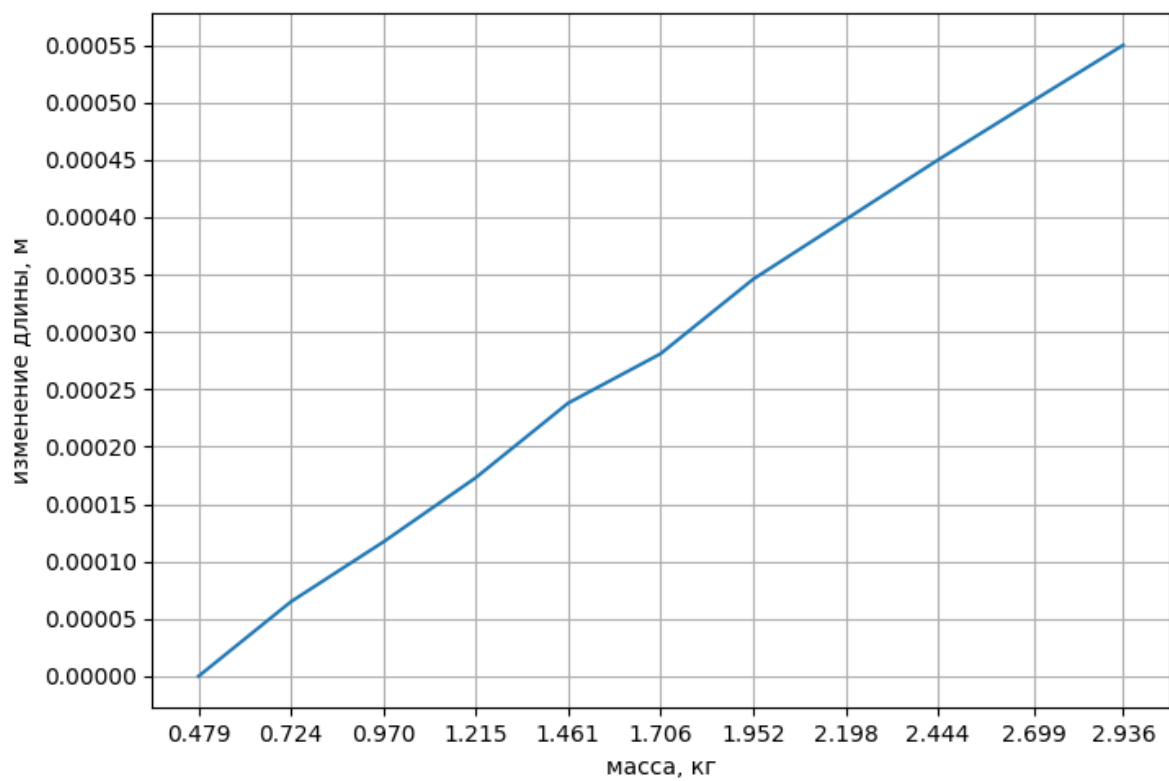


Рис. 1: Возрастающ. нагрузка

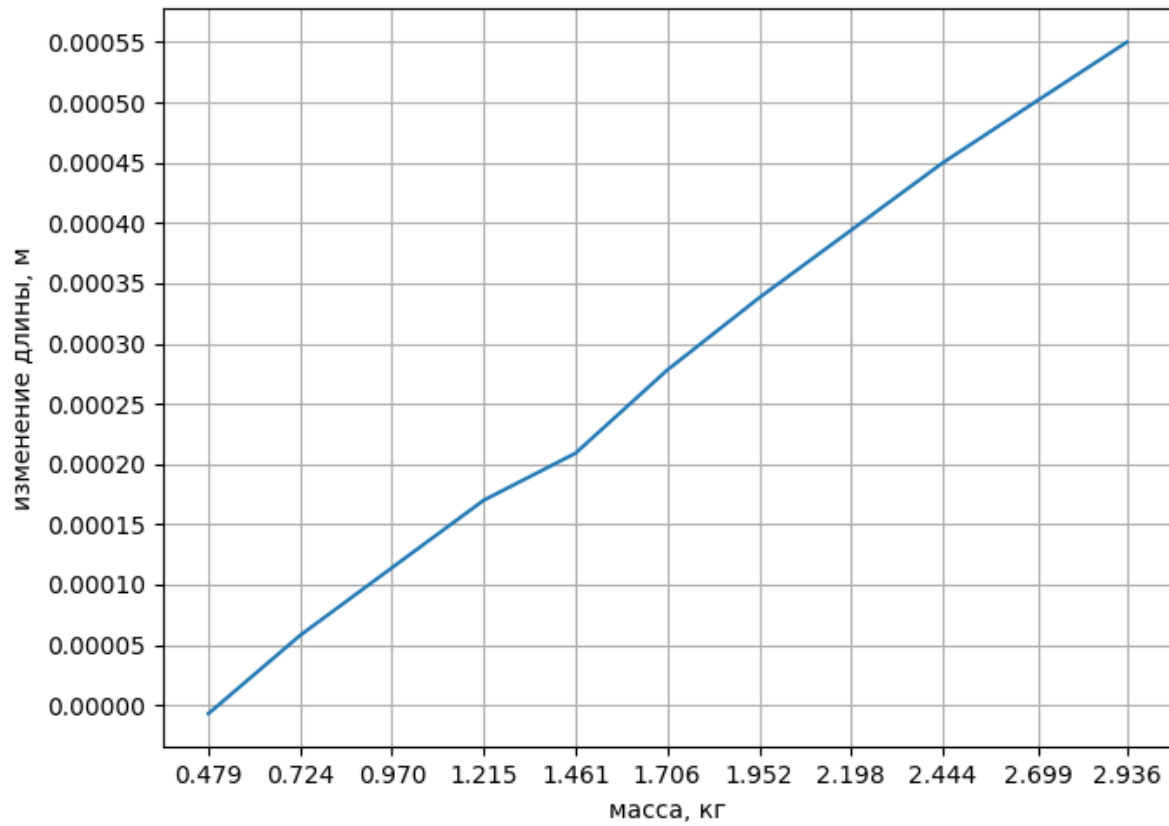


Рис. 2: Убывающ. нагрузка

## Часть 2: Определение модуля Юнга по измерениям изгиба балки.

### Оборудование

Стойка для изгибания балки, индикатор для измерения величины прогиба, набор исследуемых балок, грузы, линейка, штангенциркуль.

### Теоретическая часть

Модуль Юнга материала стержня  $E$  связан с величиной прогиба  $y_{max}$  как:

$$E = \frac{Pl^3}{4ab^3y_{max}} \quad (3)$$

где  $P$  - нагрузка на стержень,  $l$  - расстояние между точками опоры,  $a$  - ширина балки,  $b$  - толщина балки.

### Экспериментальная часть

1.

Расстояние  $AA' = 50 \pm 0.5$  см

2.

Металлическая балка:

Ширина =  $2,05 \pm 0.05$  см | Толщина =  $0,4 \pm 0.05$  см

Деревянная балка:

Ширина =  $1,9 \pm 0.05$  см | Толщина =  $1 \pm 0.05$  см

3.

Результаты измерений изгиба металлической балки зафиксированны в таблице 1.

4.

При смещении призмы от точки, принятой за середину балки, изменение  $\lambda$  не наблюдалось.

5.

Результаты измерений изгиба перевернутой металлической балки зафиксированны в таблице 2.  $\lambda$  увеличилась, что может говорить о меньшем сопротивлении изгибу в этом направлении у балки.

6.

Результаты измерений изгиба деревянной балки зафиксированны в таблицах 3 и 4.

7.

По данным из таблиц построим графики зависимости  $\lambda$  от веса для повышения и понижения нагрузки. По наклону графиков определяем средние значения модуля Юнга по формуле (3) и погрешность по формуле:

$$\sigma_E = \sqrt{3\left(\frac{\sigma_l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{P/\lambda}}{P/\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2}$$

Металлическая балка		
	Значение	$\sigma$
$P/\lambda$	9226,1 Н/м	100
$E$	$2,2 \cdot 10^{11}$ Н/м	0,61
Деревянная балка		
	Значение	$\sigma$
$P/\lambda$	7502,6 Н/м	100
$E$	$1,23 \cdot 10^{11}$ Н/м	0,39

### Вывод

Полученные значения модуля Юнга для стали ( $E = 2,2 \cdot 10^{11}$  Па) и дерева ( $E = 1,23 \cdot 10^{11}$  Па) близки к табличным значениям (для стали:  $E \approx 2 \cdot 10^{11}$ , для дерева  $E$  лежит в пределах 11-15 ГПа в зависимости от породы)

## Таблицы и графики

Количество грузов	Масса грузов $m$ , г	$\lambda$ , мм
0	105,1	0
1	587,6	0,36
2	1065,8	0,98
3	1533,7	1,65
4	2035	2,29
5	2538,1	3,00
6	3041,4	3,68
7	3508,1	4,29
8	4012,6	4,96
9	4474,4	5,64
10	4985,4	6,36
9	4474,4	5,77
8	4012,6	5,19
7	3508,1	4,43
6	3041,4	3,80
5	2538,1	3,10
4	2035	2,41
3	1533,7	1,72
2	1065,8	1,08
1	587,6	0,48
0	105,1	0

Таблица 1: Металлическая балка. Измерение 1

Количество грузов	Масса грузов $m$ , г	$\lambda$ , мм
0	105,1	0
1	587,6	0.67
2	1090,7	1.35
3	1568,9	2.00
4	2036,8	2.60
5	2538,1	3.33
6	3041,4	4.01
7	3508,1	4.61
8	4012,6	5.32
9	4474,4	6.00
10	4985,4	6.80
9	4474,4	6.04
8	4012,6	5.50
7	3508,1	4.82
6	3041,4	4.17
5	2538,1	3.50
4	2036,8	2.80
3	1568,9	2.16
2	1090,7	1.53
1	587,6	0.82
0	105,1	0.13

Таблица 2: Металлическая балка. Измерение 2

Количество грузов	Масса грузов $m$ , г	$\lambda$ , мм
0	105,1	0
1	587,6	0.54
2	1090,7	1.32
3	1558,6	1.96
4	2025,3	2.70
5	2487,1	3.44
6	2998,7	4.24
7	3502,6	5.02
8	4005,9	5.78
9	4484,1	6.58
10	4985,4	7.19
9	4484,1	6.43
8	4005,9	5.73
7	3502,6	4.96
6	2998,7	4.23
5	2487,1	3.43
4	2025,3	2.71
3	1558,6	2.08
2	1090,7	1.32
1	587,6	0.55
0	105,1	0

Таблица 3: Деревянная балка. Измерение 1

Количество грузов	Масса грузов $m$ , г	$\lambda$ , мм
0	105,1	0
1	587,6	0.69
2	1054,3	1.42
3	1557,4	2.15
4	2019,2	2.90
5	2487,1	3.60
6	2998,1	4.39
7	3501,4	5.17
8	4005,9	5.95
9	4484,1	6.67
10	4985,4	7.43
9	4484,1	6.90
8	4005,9	6.12
7	3501,4	5.33
6	2998,1	4.54
5	2487,1	3.74
4	2019,2	3.03
3	1557,4	2.32
2	1054,3	1.55
1	587,6	0.84
0	105,1	0.07

Таблица 4: Деревянная балка. Измерение 2

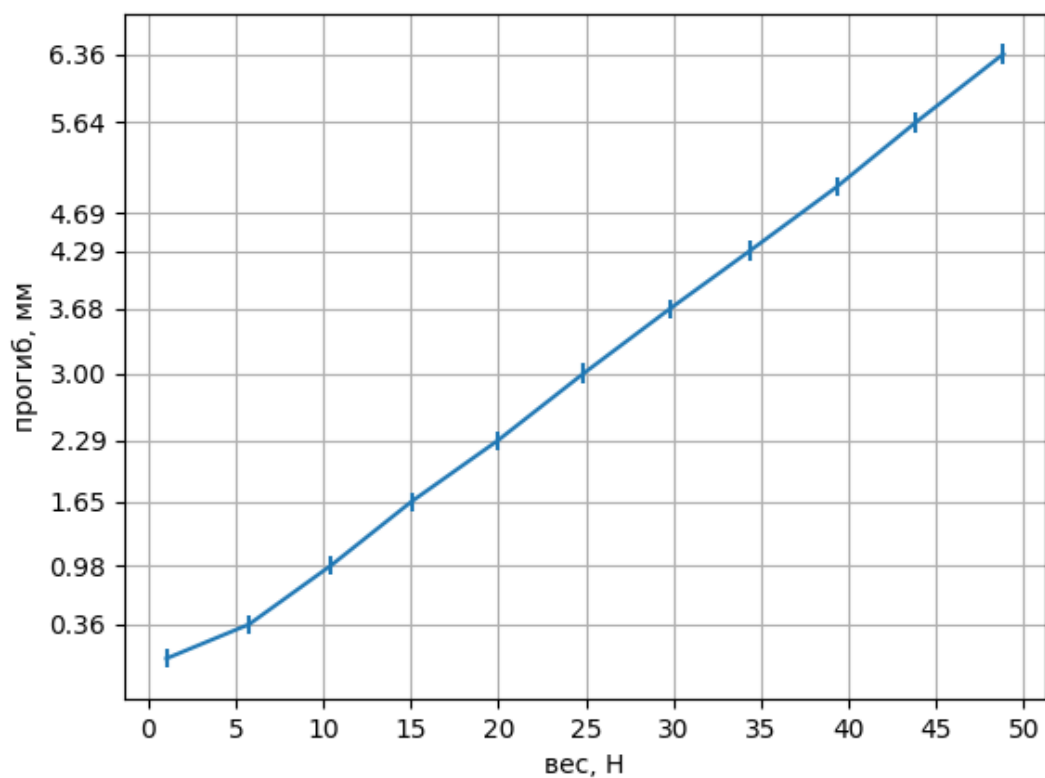


Рис. 3: Металлическая балка. Измерение 1. Повышение нагрузки.

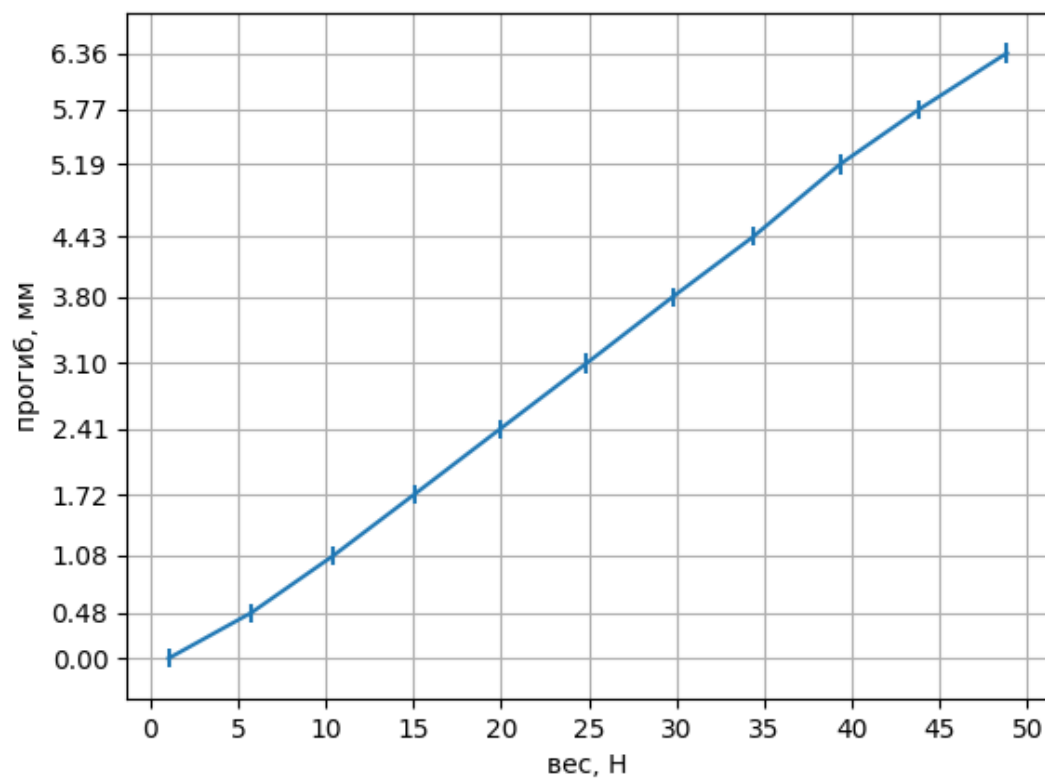


Рис. 4: Металлическая балка. Измерение 1. Понижение нагрузки.

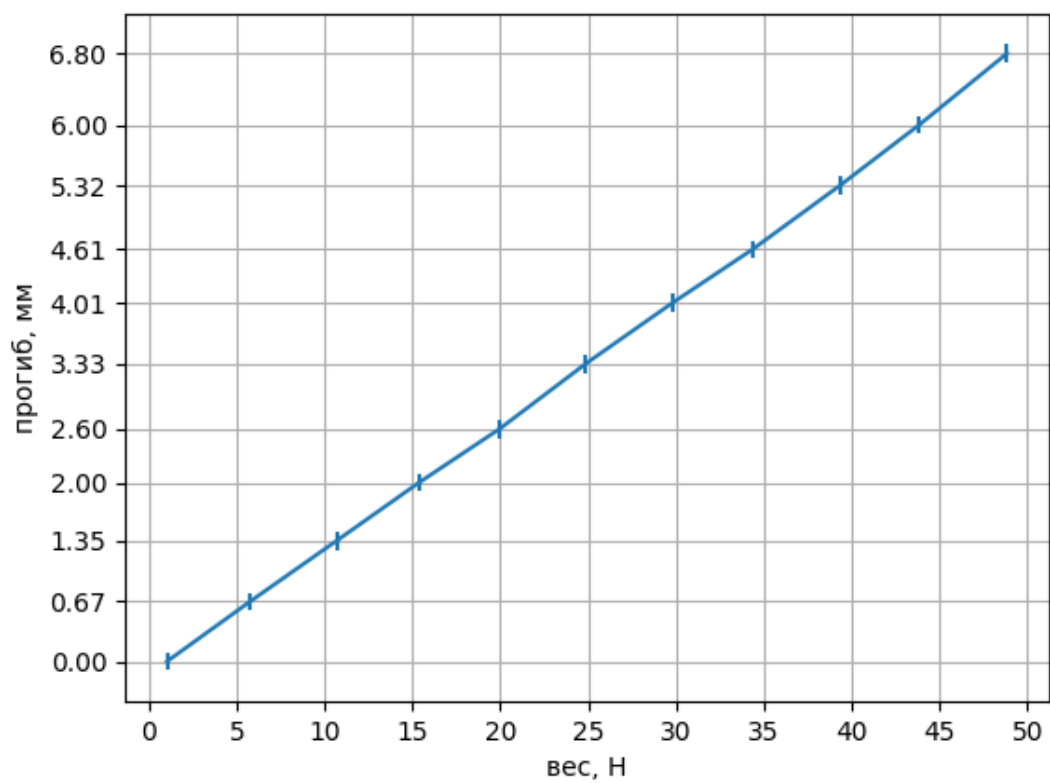


Рис. 5: Металлическая балка. Измерение 2. Повышение нагрузки.

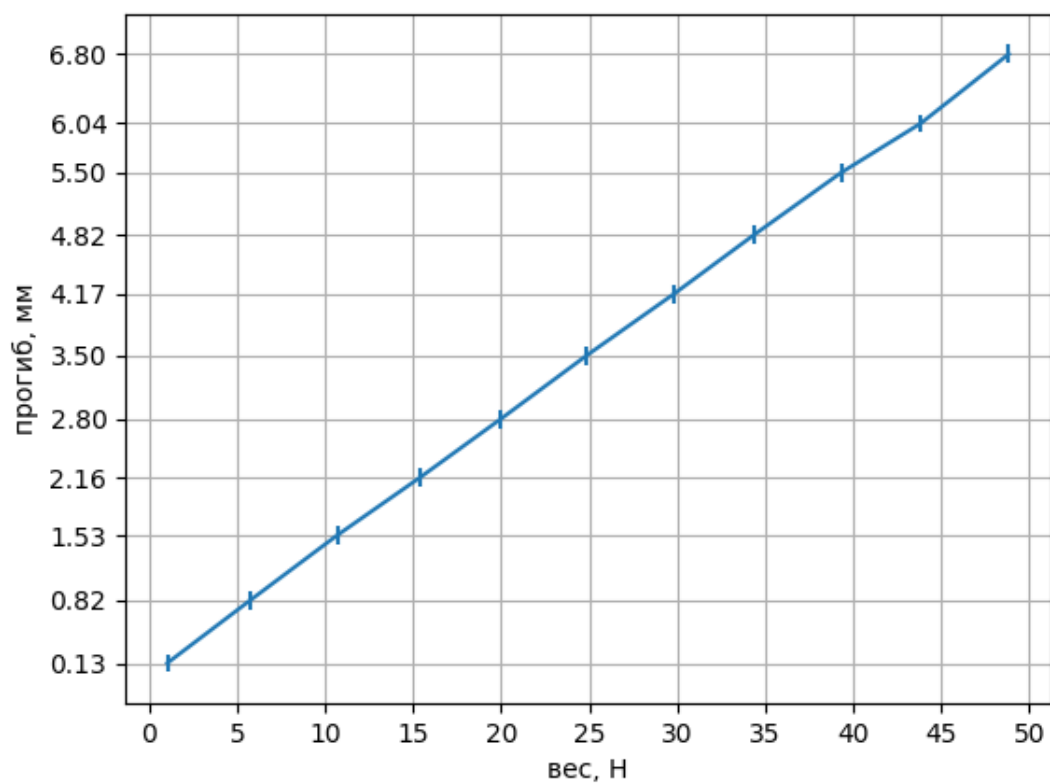


Рис. 6: Металлическая балка. Измерение 2. Понижение нагрузки.



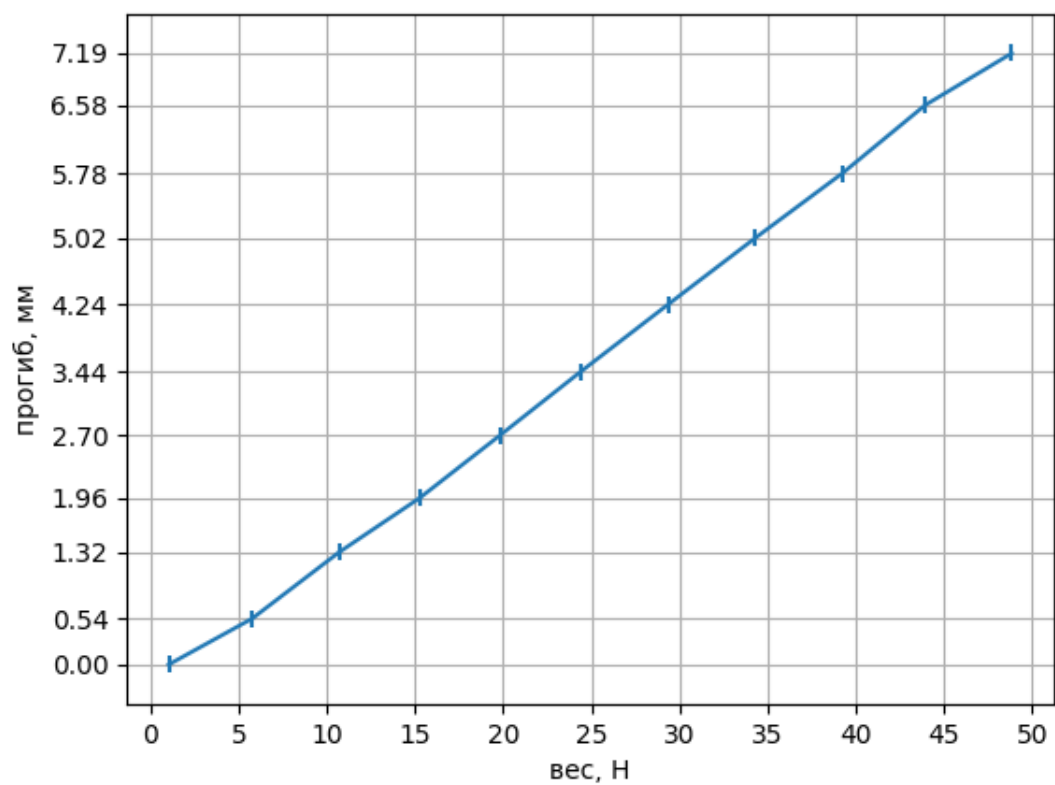


Рис. 7: Деревянная балка. Измерение 1. Повышение нагрузки.

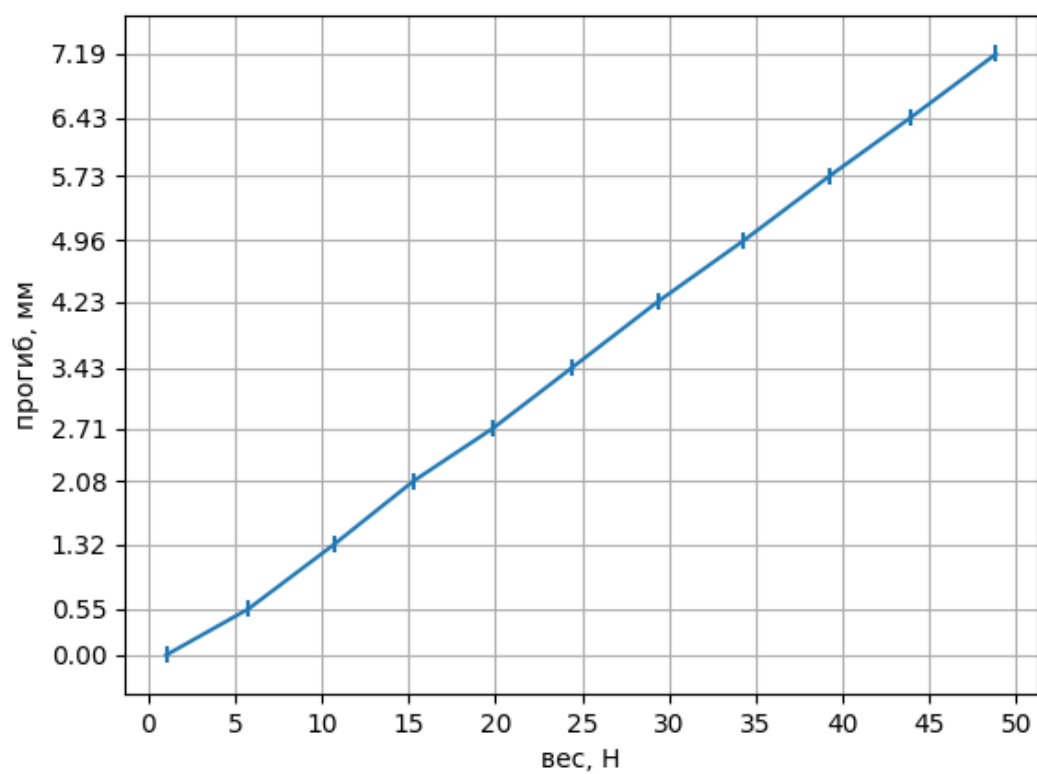


Рис. 8: Деревянная балка. Измерение 1. Понижение нагрузки.

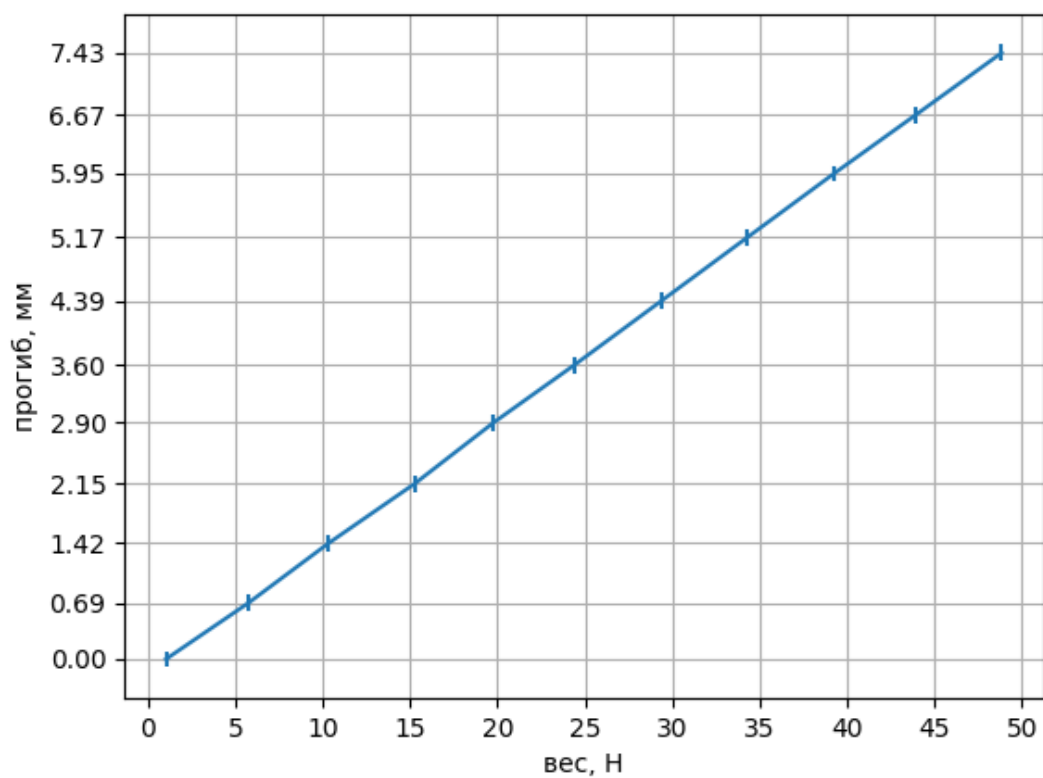


Рис. 9: Деревянная балка. Измерение 2. Повышение нагрузки.

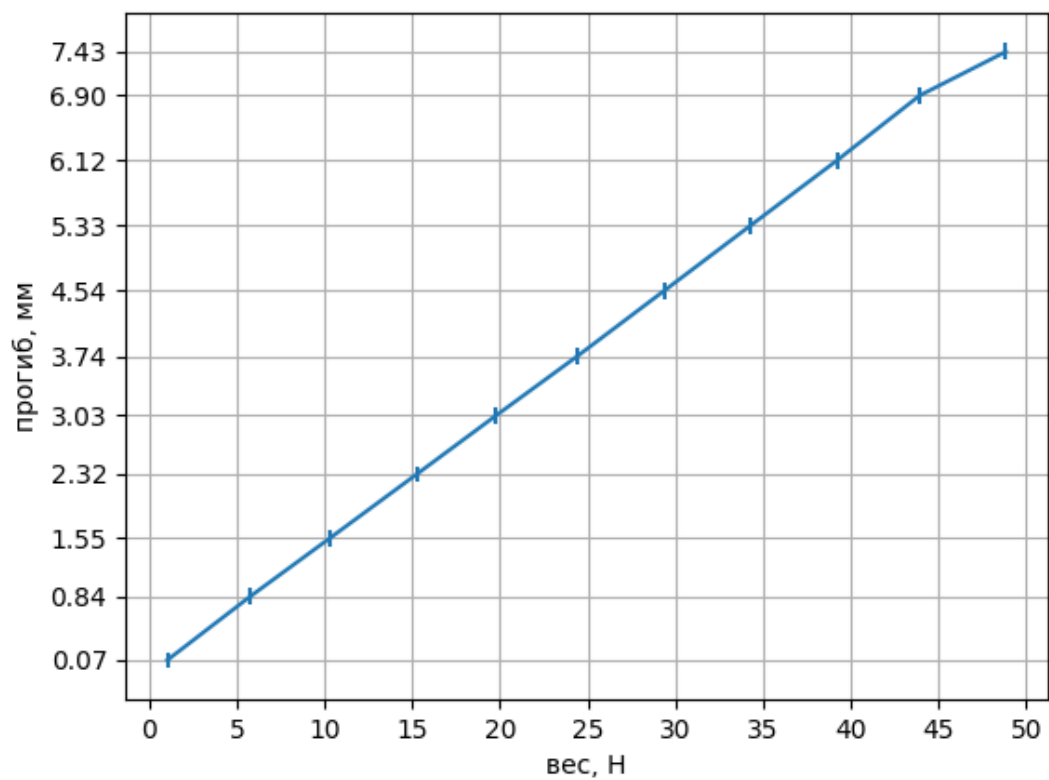


Рис. 10: Деревянная балка. Измерение 2. Понижение нагрузки.