



Project Report

Course Name	Linear Systems
Project Name	Single Inverted Pendulum System Modeling
School	School of Information Science and Technology
Student Name	Liang Lingyu,Zhou Peng
Professor	Lu Jie
Finish Time	May 28,2017



目录

1	理论分析	3
1.1	实际问题	3
1.2	数学建模	4
2	仿真结果	6
2.1	可控性分析	6
2.2	状态反馈	6
2.3	可观测性分析	8
2.4	状态估计器	9
3	二级倒立摆模型分析	12
3.1	系统模型	12
3.2	线性化	14
3.3	可控性和可观性分析	15
4	小结	21
5	参考文献	22
6	致谢	23



摘要

本文介绍了单级倒立摆系统的构成和数学模型, 并且根据倒立摆系统的数学模型在 Matlab 环境下设计了加入反馈以及状态观测器之后的分析, 并运用了 Matlab 中的 simulink 进行仿真。同时我们将单级倒立摆系统拓展到对二级倒立摆系统的建模与分析。仿真结果表明了加入状态观测器可以更好地对系统进行控制。

关键词: 倒立摆; 数学建模; Matlab 仿真; 状态反馈; 状态观测器

Abstract: The paper introduces the structure and the mathematical model of single inverted pendulum system, and according to the mathematical model of inverted pendulum system, we design in the Matlab environment to analysis the state feedback and state estimator system and use the simulink tool in Matlab to simulate the model. At the same time, we extend the single inverted pendulum system to the modeling and analysis of the double inverted pendulum system. The simulation results show that the system can be better controlled by adding the state estimator.

Keywords: Inverted pendulum; Mathematical model; Matlab simulation; State feedback; State estimator

1 理论分析

1.1 实际问题

倒立摆 (Inverted Pendulum) 作为一个被控对象, 是快速、多变量、开环不稳定、非线性的高阶系统, 必须施加十分强有力的控制手段才能使之稳定。许多新的实时控制理论, 都通过倒立摆控制试验来加以验证。从工程背景来讲, 小到日常生活中所见到的各种重心在上、支点在下的物体的稳定问题, 大到火箭的垂直发射控制等关键技术问题, 都与倒立摆控制有很大的相似性。本文首先由单级倒立摆系统入手分析, 对其系统进行建模, 从而得到状态空间方程。如下图所示, 质量为 M 的小车在水平方向滑动, 质量为 m 的球连在长度为 l 的刚性摆一端, x 表示小车的位移, u 是作用在小车上的力, 通过移动小车使带有小球的摆杆始终处于垂直的位置, 倒立摆与小车的夹角为 θ 。为了简单起见, 假设小车和摆仅在一个平面内运动, 且不考虑摩擦、摆杆的质量和空气阻力。

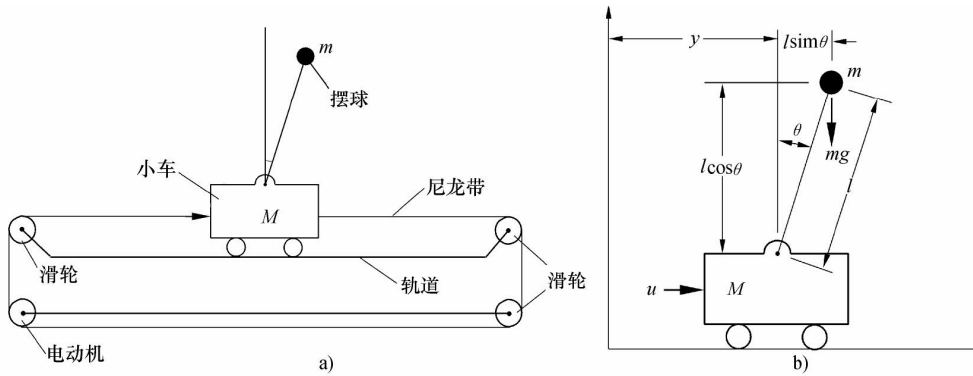


图 1: 单级倒立摆系统模型

设小车的位移为 x , 则倒立摆的位移为 $x + l \sin \theta$, 因此可以得到如下的方程:

在水平方向上:

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + m \frac{d^2 (y + l \sin \theta)}{dt^2} = u \quad (1)$$



在垂直方向上:

$$m \frac{d^2(y + l \sin \theta)}{dt^2} \cos \theta = mg \sin \theta \quad (2)$$

1.2 数学建模

由导数知识可知:

$$\begin{aligned} \frac{d(\sin \theta)}{dt} &= (\cos \theta) \dot{\theta} \\ \frac{d(\cos \theta)}{dt} &= (-\sin \theta) \dot{\theta} \\ \frac{d^2(\sin \theta)}{dt^2} &= (-\sin \theta) \dot{\theta}^2 + (\cos \theta) \ddot{\theta} \\ \frac{d^2(\cos \theta)}{dt^2} &= (-\cos \theta) \dot{\theta}^2 + (\sin \theta) \ddot{\theta} \end{aligned}$$

因此化简上述式 (1)(2) 可得下述方程:

$$(M + m)\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = u \quad (3)$$

$$m\ddot{y} + ml\ddot{\theta} = mg\theta \quad (4)$$

同时由于当 θ 和 $\dot{\theta}$ 非常小的时候, $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$ 以及 $\theta\dot{\theta}^2 \approx 0$ 成立, 于是可以得到下面的方程:

$$\ddot{y} = -\frac{mg}{M}\theta + \frac{1}{M}u \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(M + m)g}{Ml}\theta - \frac{1}{Ml}u \quad (6)$$

选择状态变量小车的位移、小车的速度、小车的角度、小车的角速度分别为 $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$ 。对单级倒立摆系统建立的状态空间方程



为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ -\frac{1}{Ml} \end{bmatrix} u \quad (7)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

由式 (7) 矩阵 A , B 的形式可以看出, 对状态空间中的任意状态 x_0 和 x_1 , 存在一个有限的时刻 $t_1 > t_0$ 以及一个输入 u , 使得状态 x_0 转移到 x_1 , 符合可控性的定义, 因此该系统是可控的。由式 (7)(8) 矩阵 A , C 的形式可以看出, 存在一个有限的时刻 $t_1 > t_0$ 以及一个输入 u 和 y , 足以确定状态 x_0 , 符合可观测性的定义, 因此该系统是可观测性的。

为了方便起见, 选取 $m = M = l = 1$, $g = 10$, 此时由状态空间方程的形式 $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ 可以得到以下 $A B C$ 矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

由以上的状态空间方程也可以得到下图所示的状态反馈图:

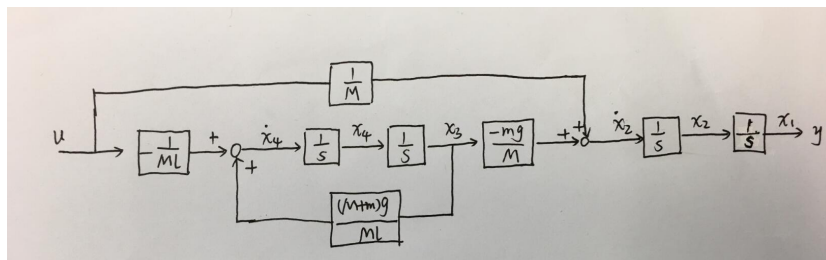


图 2: 单级倒立摆系统反馈控制系统结构图



2 仿真结果

2.1 可控性分析

判断系统状态可控性的判据如下：

对于状态空间方程
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$
，当且仅当系统的可控矩阵 $C = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$

满秩的时候，系统状态完全可控。

理论分析：在该系统中，可控矩阵

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -20 \\ -1 & 0 & -20 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

因为 $\text{rank}(C)=4$ ，是满秩矩阵，所以理论上系统状态是可控的。在 Matlab 中计算被控对象状态空间模型是否可控，可以直接利用用来计算可控性矩阵的 `ctrb` 命令来计算，下面使用程序来验证系统状态是否可控。

```
1 A=[0 1 0 0;0 0 -10 0;0 0 0 1;0 0 20 0];
2 B=[0;1;0;-1];
3 C=[1 0 0 0];
4 rct=rank(ctrb(A,B));
5
6 rct=4
```

经过程序验证得知可控矩阵是满秩的，与理论分析结果一致，所以该系统状态完全可控。

2.2 状态反馈

由上文的可控性分析得知，系统状态是完全可控的，所以可以在系统中加入状态反馈部分。根据理论可知，可以用以下步骤得到状态反馈增益 K ：



1. 检验 (A, B) 是否可控
2. 从 $\det(\lambda I - A)$ 得到 $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2} \dots \alpha_1 \alpha_0$ 的值
3. 由已给出的 $(A - BK)$, 可以由 $\prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$ 得到 $\bar{\alpha}_{n-1}, \bar{\alpha}_{n-2} \dots \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0$ 的值
4. 令 $\bar{K} = [\bar{\alpha}_{n-1} - \alpha_{n-1}, \bar{\alpha}_{n-2} - \alpha_{n-2} \dots \bar{\alpha}_1 - \alpha_1, \bar{\alpha}_0 - \alpha_0]$
5. 使用公式 $P^{-1} = C_{A,B} C_{\bar{A},\bar{B}}^{-1}$ 求得 P^{-1} , 其中 $C_{A,B} = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B]$,

$$C_{\bar{A},\bar{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
6. 由矩阵的逆的性质可知 $P = (P^{-1})^{-1}$ 可得 P 的值
7. 状态反馈增益可由 $K = \bar{K}P$ 公式求得

在该系统中, 极点配置在 $P = [-6 \quad -6.5 \quad -7 \quad -7.5]$, 运用 Matlab 中的 place 函数可以求得状态反馈增益 K , 所写程序如下:

```

1 A=[0 1 0 0;0 0 -10 0;0 0 0 1;0 0 20 0];
2 B=[0;1;0;-1];
3 P=[-6 -6.6 -7 -7.5];
4 K=place(A,B,P);
5
6 K= -207.9 -123.57 -502.7 -150.67

```

所以我们可以得到该系统的状态反馈增益 $K = [-207.9 \quad -123.57 \quad -502.7 \quad -150.67]$ 。然后可以用 Matlab 的 Simulink 工具对加入状态反馈的系统进行仿真, 仿真电路图如下图所示, 将 A, B, C, K 配置在电路图中, 由电路图右边的 scope 模块可以得到系统的位移 y 和角度 θ 的曲线图。其中结果图中的黄色曲线代表位移 y , 蓝色曲线代表着角度 θ , 从图中可以看出, 该系统的平衡点在 $y = 0, \theta = 0$ 处。

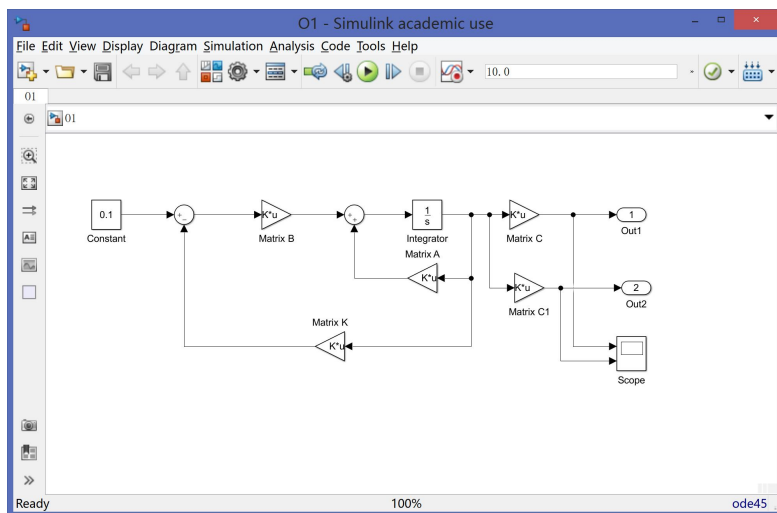


图 3: 单级倒立摆系统状态反馈控制系统模型

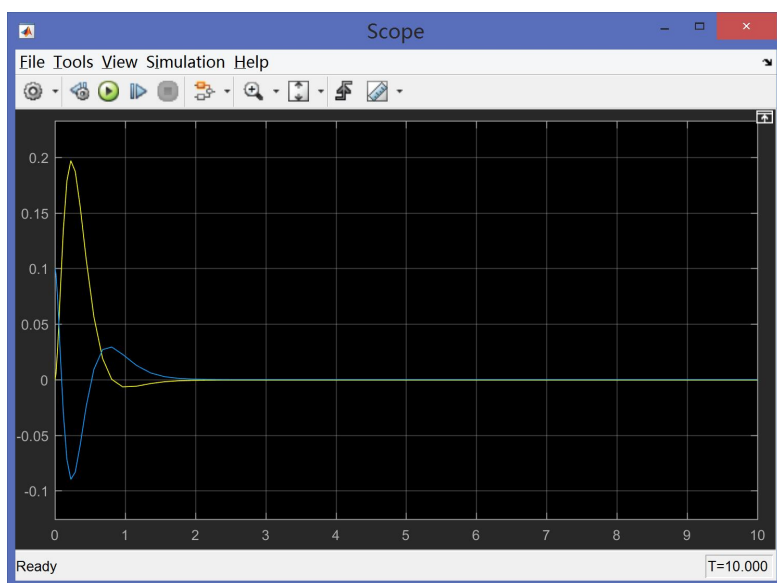


图 4: 单级倒立摆系统状态反馈控制系统仿真结果图

2.3 可观测性分析

下面对该系统的可观测性进行分析，其中可观测性判据和可控性判据类似，描述如下：



对于同样的状态方程,当且仅当系统的可观矩阵 $O = [C \quad CA \quad CA^2 \quad CA^3]^T$ 满秩的时候,系统完全可观。

理论分析:在该系统中,可观矩阵

$$O = [C \quad CACA^2CA^3]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad (11)$$

因为 $\text{rank}(O) = 4$, 是满秩矩阵, 所以理论上系统状态是可观的。为了验证该系统状态是否可观, 可以借助 Matlab 中的 `obsv` 命令来计算, 以下是所使用的程序:

```
1 A=[0 1 0 0;0 0 -10 0;0 0 0 1;0 0 20 0];
2 C=[1 0 0 0];
3 rob=rank(obsv(A,C));
4
5 rob=4.
```

经过程序验证得知该系统的可观矩阵是满秩的, 与理论分析结果一致, 所以该系统状态完全可观。

2.4 状态估计器

因为该系统的可观测性矩阵满秩, 所以该系统是能观测的, 因此, 可以对该系统设计加入状态观测器。在该系统中 (C, A) 是可观测的, 由对偶性定理可知, (A^T, C^T) 是可控的, 那么我们可以由上文中求状态反馈增益 K 的方法来求解状态估计器的增益 H (在本文中的表示为 G)。设计的过程需要使得 $A - HC = A - GC$ 是 Hurwitz 矩阵, 且其绝对值要大于状态反馈所配置极点的绝对值。通过仿真发现, 这样才能保证状态观测器有足够快的收敛速度, 使得状态观测器所观测到的状态与原系统的状态充分接近。此时将极点配置在 $P = [-20 \quad -21 \quad -22 \quad -23]$, 同样运用 Matlab 程序求出 $G = [86 \quad 2791 \quad -4137 \quad -26834]$ 。程序如下:



```
1 A=[0 1 0 0;0 0 -10 0;0 0 0 1;0 0 20 0];  
2 B=[0;1;0;-1];  
3 C=[1 0 0 0];  
4 A1=A';  
5 C1=C';  
6 P=[-20 -21 -22 -23];  
7 G1=place(A1,C1,P);  
8 G=G1';
```

求出 G 之后，可以将 A, B, C, K, G 配置在仿真电路图中，在此仿真电路图中，为了研究方便，加入了两个 scope 模块：其中 scope 模块显示的是只有状态反馈的系统位移 y 、角度 θ 的曲线图，scope1 模块显示的是只有状态观测器的系统位移 y 、角度 θ 的曲线图。

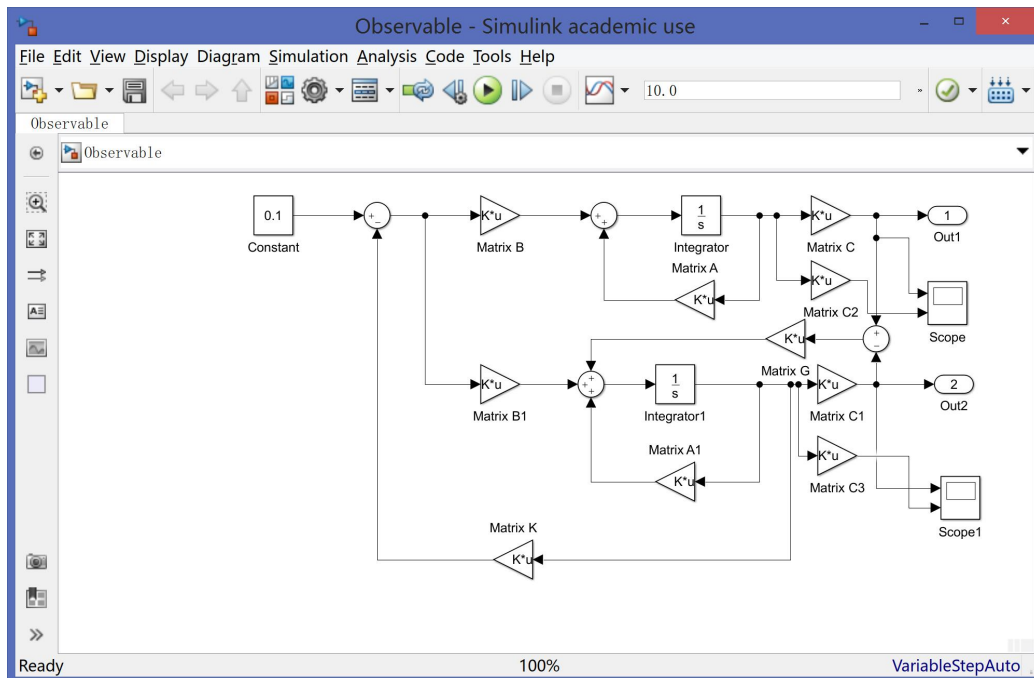


图 5: 具有状态观测器的单级倒立摆状态反馈控制系统模型

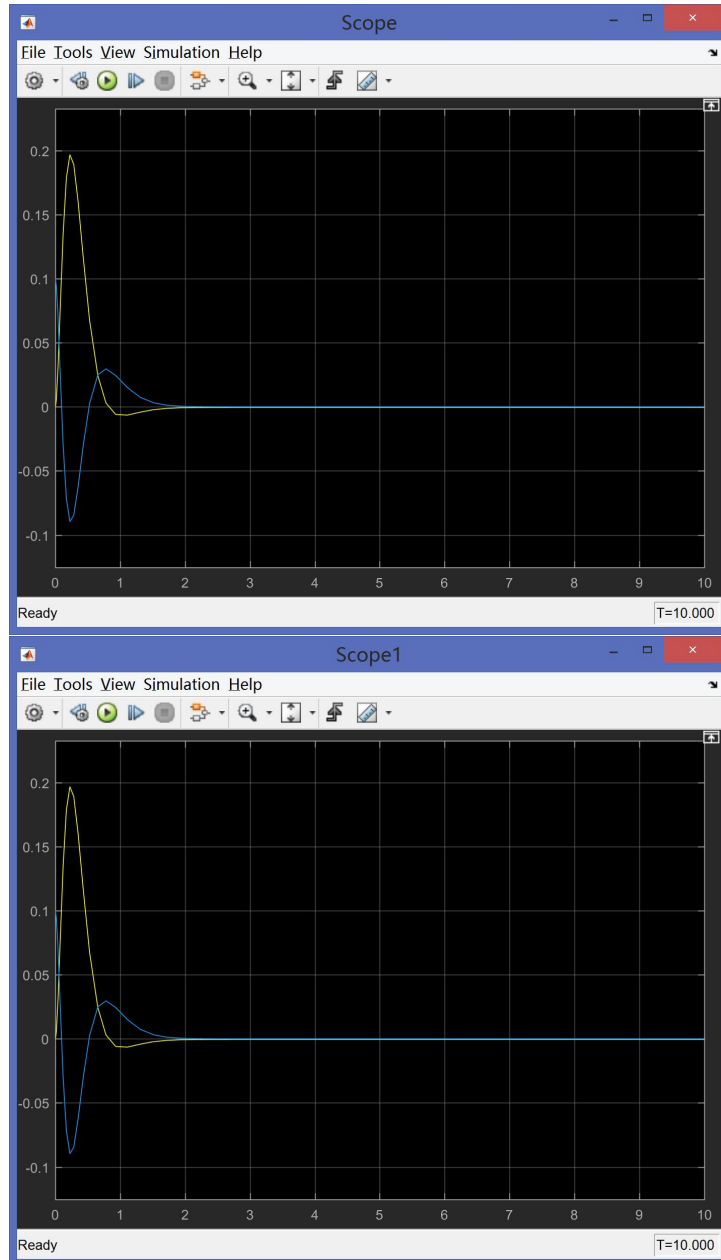


图 6: 具有状态观测器的单级倒立摆状态反馈控制系统仿真结果图

由上图可以发现，两个图的曲线并没有什么差别，而且平衡点均是在 $y = 0, \theta = 0$ 处。

3 二级倒立摆模型分析

3.1 系统模型

由单级倒立摆模型可以拓展到二级倒立摆模型，其构成结构如下图所示：

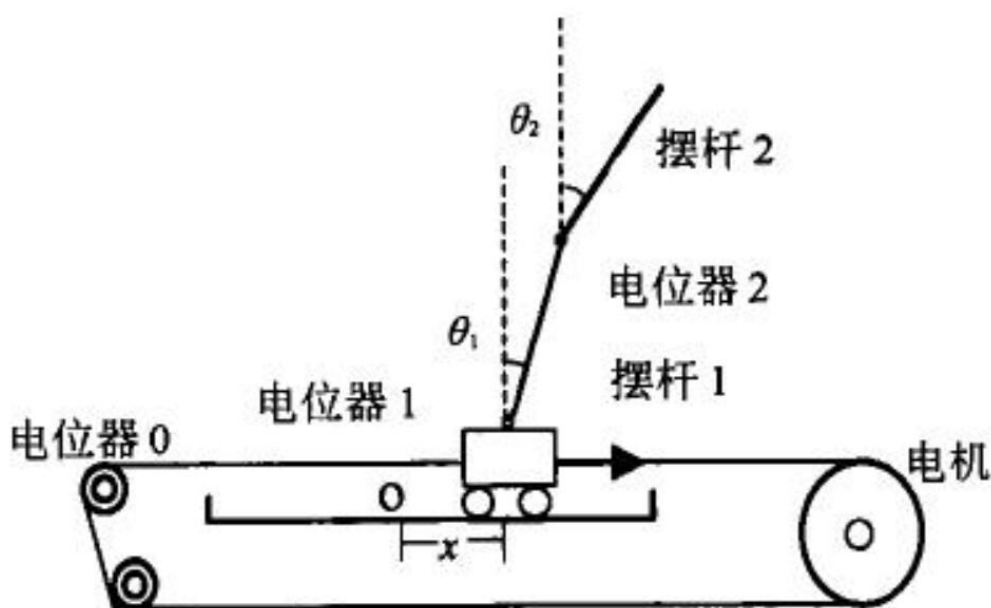


图 7: 二级倒立摆模型

利用运动合成原理: 绝对运动 = 相对运动 + 牵连运动, 首先对系统进行运动学分析, 将运动坐标系建在摆杆 1、摆杆 2 的质心处便于理解, 下面的分析过程便以此为基础。其中, 小车的质量为 m_0 , 摆杆 1 的质量为 m_1 , 摆杆 2 的质量为 m_2 , 地面对小车的支持里为 N , 外界给小车一个 F 的力, 小车给摆杆 1 的力为 F_1 , 摆杆 2 对摆杆 1 的力为 F_2 。利用牛顿力学对系统进行动力学分析, 由此得出二级倒立摆数学模型。利用力学中的隔离法, 将二级倒立摆系统分为小车、摆杆 1、摆杆 2 三部分。受力分析如下图所示:

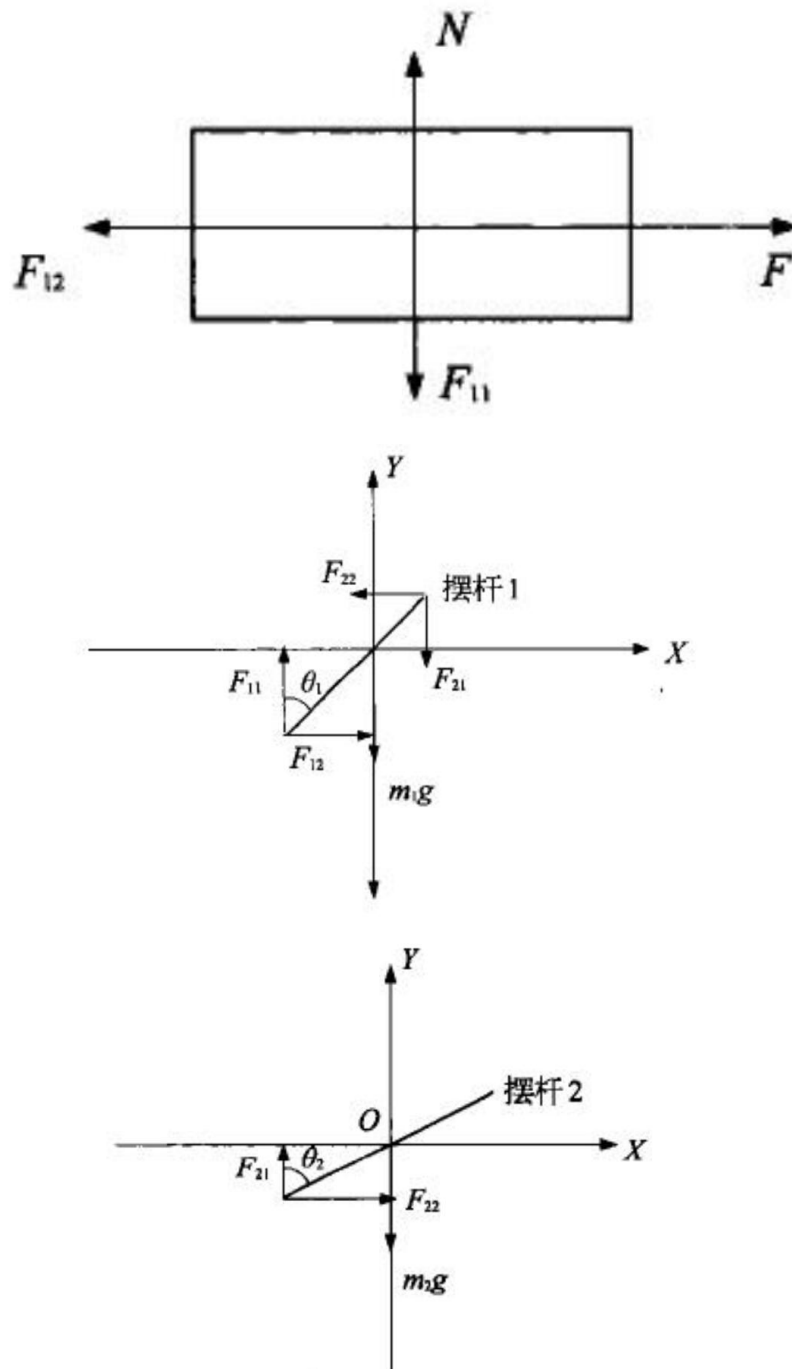


图 8: 小车、摆杆 1 摆杆 2 三者的受力分析情况



利用牛顿第二定律和动量矩定理得小车，摆杆 1 和摆杆 2 的运动学和动力学方程如下：

$$F - F_{12} = m_0 \ddot{r} \quad (12)$$

$$F_{12} - F_{22} = m_1 \ddot{r} + m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 - m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_1 \quad (13)$$

$$m_1 g - F_{11} + F_{21} = m_1 l_1 \ddot{\theta} \sin \theta_1 + m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 \quad (14)$$

$$d \frac{(J_1 \dot{\theta}_1)}{dt} = F_{11} l_1 \sin \theta_1 + F_{21} (L_1 - l_1) \sin \theta_1 - F_{12} l_1 \cos \theta_1 - F_{22} (L_1 - l_1) \cos \theta_1 \quad (15)$$

$$F_{22} = m_2 \ddot{r} + m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 - m_2 L_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - m_2 l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \quad (16)$$

$$m_2 g - F_{21} = m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 + m_2 L_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \theta_1 + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \quad (17)$$

$$d \frac{(J_2 \dot{\theta}_2)}{dt} = F_{21} l_2 \sin \theta_2 - F_{22} l_2 \cos \theta_2 \quad (18)$$

3.2 线性化

对该系统进行线性化可以得到以下方程：

$$(m_0 + m_1 + m_2) \ddot{r} + (m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 = F \quad (19)$$

$$(m_1 l_1 + m_2 L_1) \ddot{r} + (J_1 + m_1 l_1^2 + m_2 L_1^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 L_1 l_2 \ddot{\theta}_2 = (m_1 l_1 + m_2 L_1) g \theta_1 \quad (20)$$

$$m_2 l_2 \ddot{r} + m_2 L_1 \ddot{\theta}_1 + (J_2 + m_2 l_2^2) \ddot{\theta}_2 = m_2 g l_2 \theta_2 \quad (21)$$



二级倒立摆系统的 A, B, C , 我们参考的是文献 [1] 中的数值, 取值如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.96 & 0.094 & -4.8 & 0.004 & -0.004 \\ 0 & 46.12 & -25.01 & 18.76 & -0.13 & 0.24 \\ 0 & -51.01 & 78.16 & -20.75 & 0.24 & -0.57 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 14.4137 \\ -56.2864 \\ 62.2553 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3 可控性和可观性分析

在此直接运用 Matlab 的 `ctrb` 函数以及可观性判据对二级倒立摆系统进行可控性和可观性分析, 程序如下:

```
1 A=[ 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1;  
2 0 -1.96 0.094 -4.8 0.004 -0.004;  
3 0 46.12 -25.01 18.76 -0.13 0.24;  
4 0 -51.01 78.16 -20.75 0.24 -0.57];  
5 B=[0; 0; 0; 14.4137; -52.2864; 62.2532];  
6 C=[1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0];  
7 rct=rank(ctrb(A,B))  
8 rob=rank(observ(A,C))  
9  
10 rct=6  
11 rob=6
```

由程序结果可知, 可控矩阵和可观矩阵的秩都是 6, 满秩, 所以该系统是可控的和可观的。和上文单级倒立摆系统相类似, 由于该二级倒立摆系统是完全可控的, 所以可以通过极点配置法求出状态反馈增益 K 。在此处, 将极点配置在 $P = [-6 \quad -6.5 \quad -7 \quad -7.5 \quad -8 \quad -8.5]$, 并借助 Matlab 求得 K 。程序如下:



```
1 A=[ 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 1;  
2 0 -1.96 0.094 -4.8 0.004 -0.004;  
3 0 46.12 -25.01 18.76 -0.13 0.24;  
4 0 -51.01 78.16 -20.75 0.24 -0.57];  
5 B=[0; 0; 0; 14.4137; -52.2864; 62.2532];  
6 P=[-6 -6.5 -7 -7.5 -8 -8.5];  
7 K=place(A,B,P)  
8  
9 K=[4.8696 28.2425 36.0516 6.3136 7.8320 5.7267]
```

根据上述程序的结果可知状态反馈增益为 $K = [4.8696 \ 28.2425 \ 36.0516 \ 6.3136 \ 7.8320 \ 5.7267]$ 。利用 Matlab 的 Simulink 工具构造二级倒立摆状态反馈控制系统的模型如下图所示：

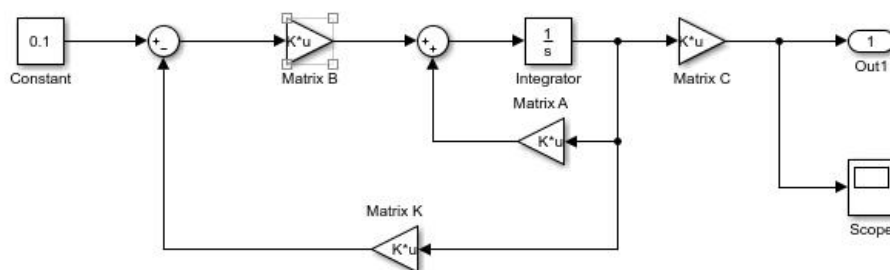


图 9: 二级倒立摆状态反馈控制系统模型

由仿真电路图的 scope 模块可以得到下面的曲线图，其中黄色曲线代表位移 r ，蓝色曲线代表摆杆 1 的角度 θ_1 ，红色曲线代表摆杆 2 的角度 θ_2 。从图中可以看出，平衡点是在 $r = 0.03$ ， $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = 0$ 处取得。

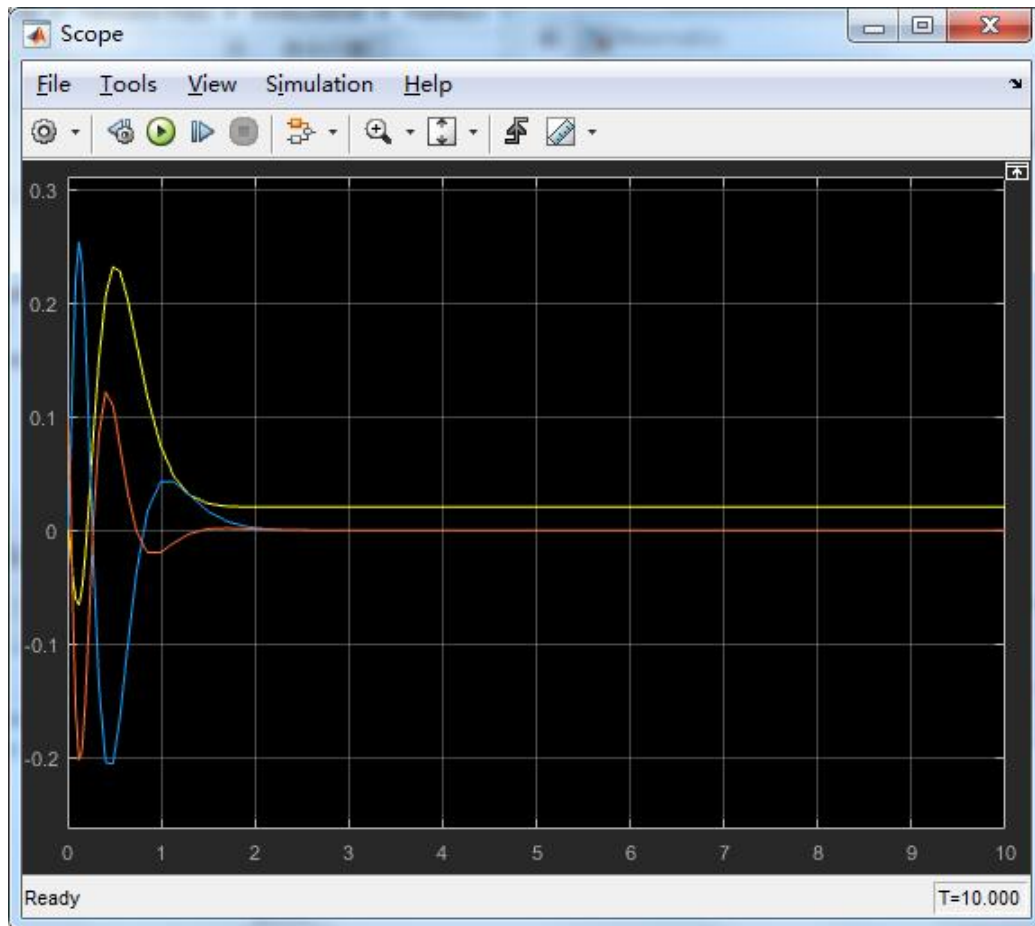


图 10: 二级倒立摆状态反馈控制系统仿真结果图

因为该系统的可观性矩阵是满秩的，所以该系统是可观的，于是该系统可以用来设计加入状态观测器。设计状态观测器使得 $A-HC = A-GC$ 是 Hurwitz 矩阵，且其绝对值要大于状态反馈所配置极点的绝对值。通过仿真发现，这样才能保证状态观测器有足够快的收敛速度，使得状态观测器所观测到的状态与原系统的状态充分接近。在此处，将极点配置为 $P = [-20 \quad -21 \quad -22 \quad -23 \quad -24 \quad -25]$ ，运用 Matlab 程序求得状态观测器矩阵为：



$$G = \begin{bmatrix} 38.2600 & 0.1197 & -0.2836 \\ 17.7903 & 44.7264 & 0.7555 \\ -17.4652 & 0.6889 & 46.5137 \\ 275.9610 & 1.1437 & -5.5261 \\ 690.8092 & 544.3198 & -7.4808 \\ -704.7150 & -33.5983 & 609.9059 \end{bmatrix}$$

```
1 A=[0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 1 0 ;0 0 0 0 0 1;
2 0 -1.96 0.094 -4.8 0.004 -0.004;
3 0 46.12 -25.01 18.76 -0.13 0.24;
4 0 -51.01 78.16 -20.75 0.24 -0.57];
5 A1=A';
6 C=[1 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0];
7 C1=C';
8 P=[-20 -21 -22 -23 -24 -25];
9 G1=place(A1,C1,P);
10 G=G1'
11
12 G =
13 38.2600 0.1197 -0.2836
14 17.7903 44.7264 0.7555
15 -17.4652 0.6889 46.5137
16 275.9610 1.1437 -5.5261
17 690.8092 544.3198 -7.4808
18 -704.7150 -33.5983 609.9059
```

利用 Matlab 的 Simulink 工具构造具有状态观测器的二级倒立摆状态反馈控制系统的模型如下图所示：

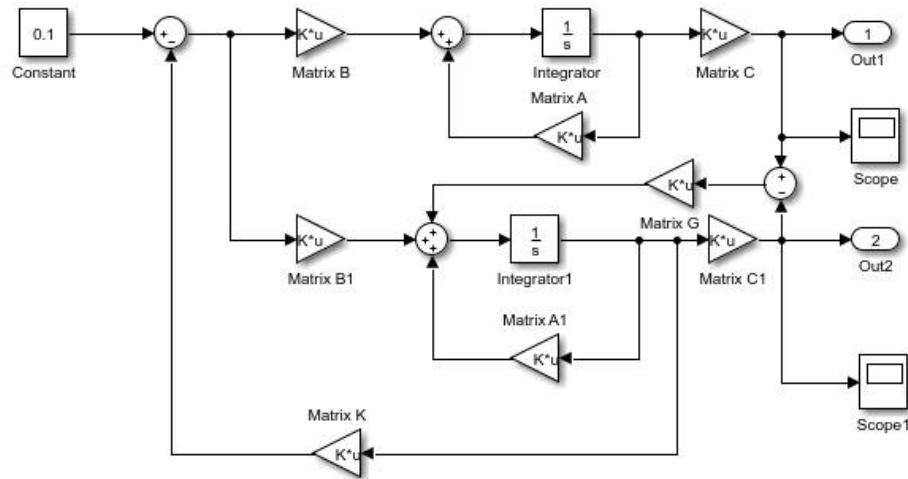


图 11: 具有状态观测器的二级倒立摆状态反馈控制系统模型

和未加入状态观测器模块的曲线一样，黄色曲线代表位移 r ，蓝色曲线代表摆杆 1 的角度 θ_1 ，红色曲线代表摆杆 2 的角度 θ_2 。图中加入了两个 scope 模块，其中 scope 模块显示的是加入状态反馈后的系统状态，scope1 模块显示的是加入状态观测器之后的系统状态。从图中可以看出：两者的曲线基本是一致的，没什么差别，平衡点均是在 $r = 0.03$ ， $\theta_1 = 0$ ， $\theta_2 = 0$ 处取得。

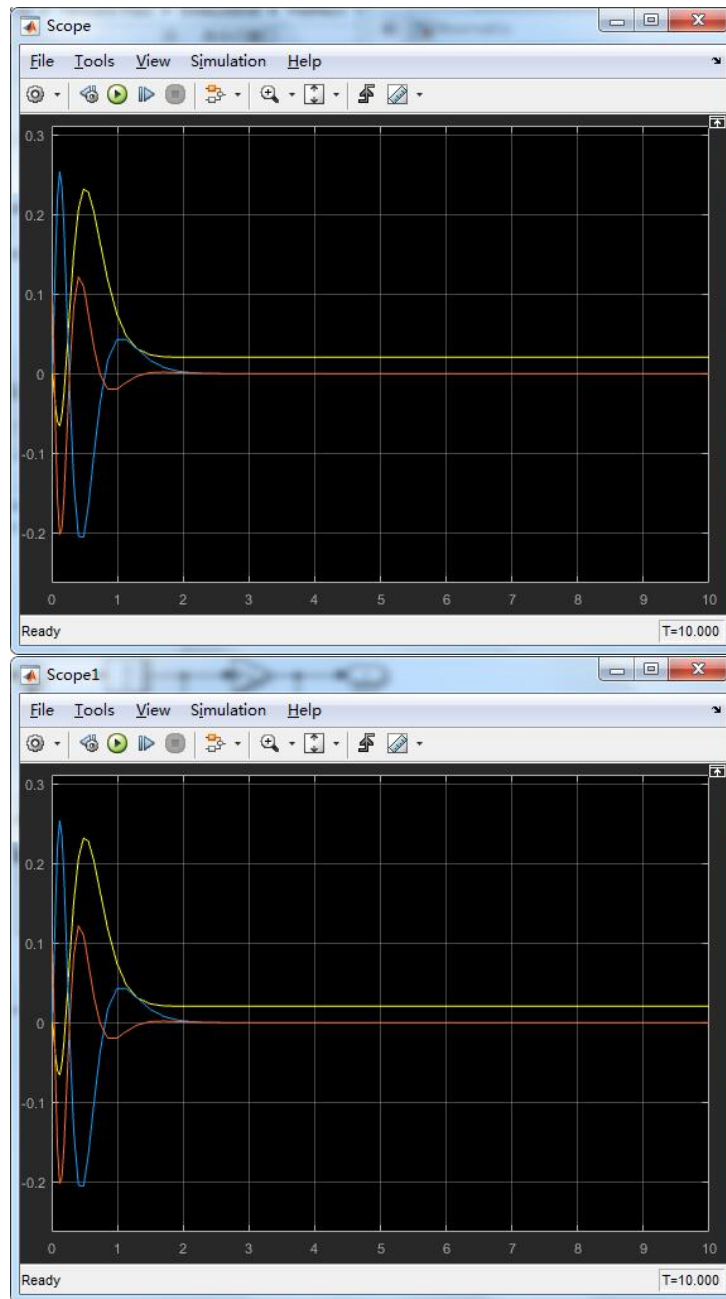


图 12: 具有状态观测器的二级倒立摆状态反馈控制系统仿真结果图



4 小结

无论是单级倒立摆系统还是二级倒立摆系统，通过比较两个系统的仿真结果，具有状态观测器的倒立摆状态反馈系统的控制效果和没有状态观测器的控制系统的控制效果是一样的。可见，加状态观测器并不影响系统的输出，但是却会更加对状态进行控制。



5 参考文献

- [1] 淡丹 二级倒立摆数学模型的建立, 控制工程, 2014.
- [2] 汤乐, 倒立摆系统建模与控制方法研究, 河南: 河南工业大学, 2013.
- [3] 郑大钟, 线性系统理论, 清华大学出版社, 2002.
- [4] Chi-Tong Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1999.
- [5] 朱江滨, 易建强, 二级倒立摆的摆起控制, 系统仿真学报, 2003.
- [6] 桑英军, 范媛媛等, 单级倒立摆的控制方法研究, 控制工程, 2010.



6 致谢

硕士研究生一年级的生活马上就要结束了，回想在线性系统的课上的学习历程，受益匪浅。首先感谢陆婕老师在课堂上孜孜不倦的教导，尤其是那每周一周三一丝不苟的板书；每个 Quiz 和 homework 出的非常好，使得我们每一个人在牢牢地掌握了该阶段的知识。其次也非常感谢助教吴旭阳对我们的帮助，平时的作业批改以及答疑都是由助教一个人完成，非常辛苦！而且在线性系统的学习期间，我们经常课下找助教答疑解惑，应该耽误了助教不少时间，在此非常感谢助教耐心的解答。