

Untersuchung elektromagnetischer Wellenausbreitung in Kabeln und experimentelle Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Sofia Klein und Liz Fechner

Durch Reflexionsminimierung an einem Kohleschichtpotentiometer wird der Wellenwiderstand $Z = (50 \pm 1) \Omega$ eines Koaxialkabels vom Typ RG213/U bestimmt. Das Reflexionsverhalten von verschiedenen Widerständen wird durch den jeweiligen Abschluss an den Kabelenden untersucht. Durch Laufzeitmessung wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Signalen im Koaxialkabel und in einem Verzögerungskabel bestimmt. Es ergeben sich dabei folgende Werte: $v_{Koaxial} = (1,97 \pm 0,04) \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ und $v_{Verzögerung} = (5,08 \pm 0,15) \cdot 10^5 \frac{m}{s}$. Das Betrachten stehender Wellen gibt Aufschlüsse über die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit und Dämpfung im Kabel. Außerdem wurde durch Laufzeitmessung die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bestimmt. Dabei hat sich ein Wert von $c = (3,0 \pm 0,1) \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ ergeben.

Versuchsdurchführung: 01.07.25

Protokollabgabe: 15.07.25

1 Einleitung

In diesem Versuch wird untersucht, wie sich elektrische Signale auf Koaxialkabeln ausbreiten und was bei unterschiedlicher Anpassung an den Kabelenden geschieht. Das ist wichtig, um eine möglichst reflexions- und verzerrungsfreie Übertragung zu gewährleisten. Dazu ist vor allem eine genaue Kenntnis des Wellenwiderstands erforderlich. Verzerrungen des Signals entstehen vor allem durch die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit, die sogenannte Dispersion. Koaxialkabel finden eine breite Anwendung zur Übertragung von Signalen und werden daher im Folgenden näher auf ihre Eigenschaften untersucht. Im zweiten Versuchsteil geht es um die Messung der Lichtgeschwindigkeit, eine fundamentale Naturkonstante. Sie spielt eine zentrale Rolle in der modernen Physik, wie etwa in der Relativitätstheorie oder der Astrophysik.

2 Theorie

2.1 Wellenausbreitung auf Kabeln

2.1.1 Wellenwiderstand

Bei der Untersuchung des Ausbreitungsverhaltens von Wellen auf einer homogenen Leitung sind die In-

duktivität $L^* = \text{Induktivität/Längeneinheit}$ und die Kapazität $C^* = \text{Kapazität/Längeneinheit}$ von großer Bedeutung. Über ihren Zusammenhang mit der Spannung U_{\pm}

$$U_{\pm}(x_0, t) = \sqrt{\frac{L^*}{C^*}} I_{\pm}(x_0, t) = Z \cdot I_{\pm}(x_0, t)$$

lässt sich in Analogie zum Ohmschen Gesetz der Wellenwiderstand Z der Leitung definieren. Da hierbei jedoch keine Energieverluste auftreten, handelt es sich nicht direkt um einen ohmschen Widerstand. Vielmehr gibt der Wellenwiderstand das Verhältnis zwischen Spannung und Strom an allen Stellen des Kabels an.

2.1.2 Reflexionskoeffizient

Am Ende der Leitung wird das einlaufende Signal reflektiert. Um anzugeben, welcher Anteil der einfallenden Welle reflektiert wird, lässt sich der Reflexionskoeffizient ρ berechnen:

Über einen Verbraucher R_V fließt die Summe von einlaufender und auslaufender Stromwelle:

$$I(x_0, t) = I_+(x_0, t) - I_-(x_0, t) \quad (1)$$

Der durch diesen Strom bewirkte Spannungsabfall ist gleich der Summe der ein- und auslaufenden Spannungswelle:

$$\begin{aligned}
U(x_0, t) &= U_+(x_0, t) + U_-(x_0, t) \\
&= R_V I_+(x_0, t) - R_V I_-(x_0, t) \\
&= \frac{R_V}{Z} U_+(x_0, t) - \frac{R_V}{Z} U_-(x_0, t)
\end{aligned} \quad (2)$$

Der Reflexionskoeffizient ρ ist nun über das Verhältnis der Spannungen von einlaufender und reflektierter Welle definiert:

$$\rho = \frac{U_-(x_0, t)}{U_+(x_0, t)} = \frac{R_V - Z}{R_V + Z} \quad (3)$$

Anhand dieser Formel lassen sich drei spezielle Werte ausweisen, die auch im weiteren Verlauf des Experiments genauer untersucht werden:

1. Kurzschluss der Leitung:

Das reflektierte Signal entspricht dem einfallenden Signal, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Für $R_V = 0\Omega$ gilt $\rho = -1$

2. Reflexionsfreier Abschluss:

Der Eingangswiderstand des an die Leitung angeschlossenen Geräts ist gleich dem Wellenwiderstand.

Für $R_V = Z\Omega$ gilt $\rho = 0$

3. Offenes Ende der Leitung:

Das reflektierte Signal ist gleich dem einfallenden Signal, es kommt zur konstruktiven Addition.

Für $R_V \rightarrow \infty$ gilt $\rho = 1$

2.2 Mathematische Beschreibung von stehenden Wellen

Wird ein sinusförmiges Signal in ein Koaxialkabel eingespeist, welches am Ende nicht angepasst ist (siehe 1. Kurzschluss der Leitung oder 3. Offenes Ende der Leitung), so kommt es zu einer vollständigen Reflexion des Signals. Die reflektierte Welle überlagert sich mit der einlaufenden Welle gleicher Frequenz, was zur Ausbildung sogenannter stehender Wellen führt.

Eine stehende Welle entsteht bei der Überlagerung zweier Wellen gleicher Frequenz und Amplitude, die sich in entgegengesetzte Richtungen ausbreiten. In einem Koaxialkabel geschieht dies durch Superposition der einlaufenden und reflektierten Welle. Die resultierende Welle weist feste Orte auf, an denen die Amplitude konstant 0 ist. Sie werden Knoten genannt. Als Bäuche werden solche Orte bezeichnet, an denen sich die Amplitude der beiden Wellen zum doppelten Wert addiert.

Die mathematische Beschreibung einer stehenden Welle ergibt sich aus der Addition zweier gegenläufiger Wellen:

$$\begin{aligned}
y(x, t) &= A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) \\
&= 2A \sin(kx) \cos(\omega t)
\end{aligned} \quad (4)$$

Hierbei entspricht A der Amplitude, ω der Frequenz und k der Wellenzahl.

Im vorliegenden Versuch wird diese stehende Welle durch ein sinusförmiges Signal am Anfang des Kabels erzeugt, wobei das andere Ende je nach gewünschter Resonanzbedingung entweder offen oder kurzgeschlossen ist. Die resultierenden stehenden Wellen treten dann bei bestimmten Frequenzen auf, die zur Kabellänge L in Beziehung stehen.

Für ein offenes Kabelende tritt eine Reflexion ohne Phasensprung auf. Es bildet sich ein Bauch am Ende des Kabels aus, was der Resonanzbedingung:

$$L = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}, \dots$$

entspricht. Für ein kurzgeschlossenes Kabelende hingegen, tritt eine Reflexion mit Phasensprung auf. Am Ende des Kabels tritt ein Knoten auf, was wiederum der Resonanzbedingung:

$$L = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$$

entspricht. Im Versuch wird die Frequenz so eingestellt, dass ein Amplitudenminimum am Kabelanfang beobachtet werden kann. Dies entspricht der Resonanzbedingung für stehende Wellen. Aus der bekannten Kabellänge und der gemessenen Frequenz kann die Wellenlänge und damit die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet werden.

3 Experiment und Auswertung

3.1 Signalübertragung auf Koaxialkabeln bei verschiedenartiger Anpassung

3.1.1 Beobachtung des Signalverlaufs

Zunächst wurde der Funktionsgenerator direkt an das Oszilloskop angeschlossen, um den Verlauf des Graphen zu beobachten. Dabei wurde bei Anlegen einer Peak to Peak Spannung von $U_{pp} = 10V$ eine Amplitude von $U_{pp} = 20V$ beobachtet. Das Oszilloskop hat einen nahezu unendlichen Widerstand ($R_1 = \infty$), was einem offenen Ende der Leitung entspricht. Das reflektierte Signal ist gleich dem einlaufenden Signal, dadurch addieren sich beide Signale konstruktiv und man beobachtet die doppelte Amplitude. Um dieses Problem zu beheben, wird ein Widerstand $R_2 = 50\Omega$ parallel geschaltet. Dadurch ergibt sich, gemäß folgender Gleichung:

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (5)$$

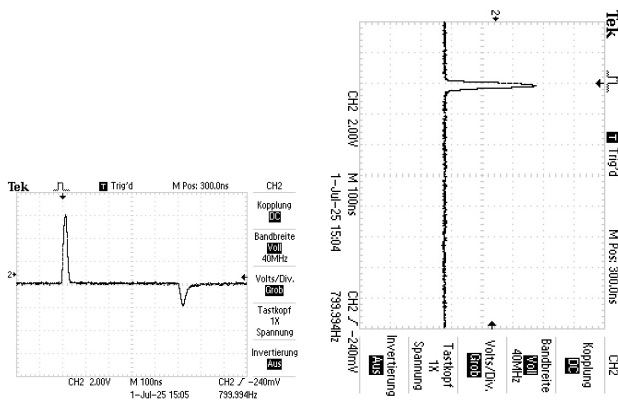
ein Widerstand von $R_{ges} = 50 \Omega$ am Ende des Kabels, was genau der Impedanz $Z = 50 \Omega$ des Kabels entspricht. Dadurch ergibt sich ein reflexionsfreier Abschluss und am Oszilloskop ist eine Amplitude von $U_{pp} = 10 \text{ V}$ zu sehen. Der Widerstand wurde, wenn nicht explizit dazu geschrieben, in jedem der folgenden Versuchsteile eingebaut.

3.1.2 Messung des Wellenwiderstandes eines Koaxialkabels

Zunächst wird über T-Stecker das Ende des 50m langen Koaxialkabels mit dem Funktionsgenerator und dem Oszilloskop verbunden. Das Oszilloskop wird extern über den Funktionsgenerator getriggert. Es wird ein Rechteckimpuls mit $\nu = 800 \text{ kHz}$ und $U_{pp} = 10 \text{ V}$ und Impulsbreite $t_s = 20 \text{ ns}$. Das andere Ende des Kabels wird an ein Kohleschichtpotentiometer angesteckt. Man bestimmt nun diejenigen Werte von R_v , bei denen keine Reflexion auftritt. Dann gilt für die Impedanz Z :

$$R_v = Z \quad (6)$$

Damit ergibt sich $Z = (50 \pm 1) \Omega$. Der Fehler wurde dem Datenblatt [1] entnommen. Das ist mit dem Literaturwert von $Z = 50 \Omega$, der während der Versuchsdurchführung am Koaxialkabel abgelesen wurde, vereinbar.

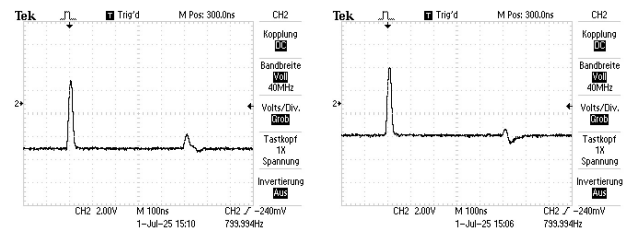


(a) Zu sehen ist der maximale reflektierte Impuls. (b) Der reflektierte Impuls kann fast vollständig unterdrückt werden. Für den Wellenwiderstand ergibt sich damit $R_v = (50 \pm 1) \Omega$

Abb. 1: Anpassung mit einem Kohleschichtpotentiometer

Außerdem wurde die Anpassung für ein Wendepotentiometer und eine Widerstandsdekade durchgeführt. Hierbei ließ sich der reflektierte Impuls nicht vollständig unterdrücken, wie in Abb. 2 und 3 zu

sehen ist. Versucht man trotzdem, den Impuls möglichst klein zu halten, ergibt sich ein Widerstand von $R_v = (29 \pm 1) \Omega$ und $R_v = (10 \pm 1) \Omega$. Das ist nicht mit dem Literaturwert vereinbar. Grund hierfür könnte im Aufbau des Wendepotentiometers liegen. Ein Wendepotentiometer besteht aus einem spiralförmigen aufgewickelten Widerstandsdraht. Dadurch entsteht eine echte Spule, zusätzlich zum reinen Widerstand. Durch den Stromfluss im Widerstand wird ein Magnetfeld aufgebaut, welches eine Spannung entgegen der Stromänderung induziert. Somit hat das Wendelschichtpotentiometer eine zusätzliche Impedanz, die vom Voltmeter nicht gemessen wird.



(a) Zu sehen ist der maximale reflektierte Impuls. (b) Der reflektierte Impuls kann nicht unterdrückt werden. Versucht man trotzdem den Impuls möglichst klein zu halten ergibt sich ein Widerstand von $R_v = (29 \pm 1) \Omega$

Abb. 2: Anpassung mit einem Wendepotentiometer.

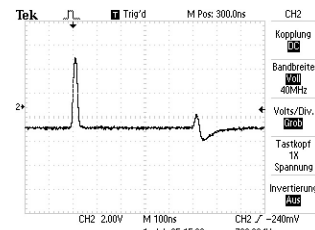


Abb. 3: Anpassung mit einer Widerstandsdekade. Der Impuls lässt sich nicht unterdrücken. Versucht man trotzdem den Impuls möglichst klein zu halten ergibt sich ein Widerstand von $R_v = (10 \pm 1) \Omega$.

Wird nun ein 50Ω -Stecker an das Ende des Koaxialkabels geschlossen (siehe Abb4), ist keine Reflexion mehr zu erkennen, was zu erwarten war, da $R_v = Z$, was einem reflexionsfreien Abschluss entspricht.

Zuletzt wurde die Anpassung noch mit einem Kurzschlussstecker durchgeführt. Es ist zu erwarten, dass das reflektierte Signal gleich dem einfallenden Signal, aber invertiert ist. Das wurde während der Durchführung auch beobachtet, siehe Abb. 5.

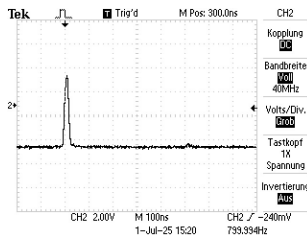


Abb. 4: Anpassung mit einem 50 Ω -Stecker. Es ist, wie aus der Theorie erwartet, keine Reflexion mehr zu sehen.

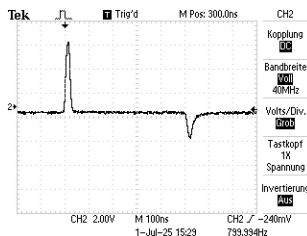


Abb. 5: Anpassung mit einem Kurzschlussstecker. Der reflektierte Impuls wird invertiert.

3.1.3 Kombination von Abschlusswiderständen am Anfang und Ende des Kabels

Nun gibt man das Signal vom Anfang des Kabels (generatorfernes Ende) auf CH I und das vom Ende des Kabels (generatorseitiges Ende) auf CH II. Zudem werden an den Enden des Kabels die Widerstände R_A (generatorseitig) und R_E (generatorfern) angeschlossen. Für $R = 0$ benutzt man einen Kurzschlussstecker, für $R = Z$ einen 50 Ω -Stecker und für $R = \infty$ lässt man das Leitungsende offen. Es werden folgende Kombinationen eingestellt:

Kombination	R_A	R_E
a	0 Ω	0 Ω
b	0 Ω	50 Ω
c	0 Ω	$\infty \Omega$
d	50 Ω	0 Ω
e	50 Ω	50 Ω
f	50 Ω	$\infty \Omega$
g	$\infty \Omega$	0 Ω
h	$\infty \Omega$	50 Ω
i	$\infty \Omega$	$\infty \Omega$

Tabelle 1: Kombinationen von Abschlusswiderständen

Für die Fälle a,b,c gilt $R_A = 0 \Omega$. Der Reflexionskoeffizient beträgt in diesem Fall $\rho = -1$. Die Impulse werden also am Kabelanfang mit gespiegelter Amplitude reflektiert und löschen sich aus, somit beträgt die Spannung an diesem Punkt null. Nichtsdestotrotz wird ein Strom im Kabel eingespeist und es kann sich eine elektromagnetische Welle in der Leitung aufbauen. Im Fall a ist weder ein einlaufender noch reflektier-

ter Impuls zu sehen, da auch das generatorferne Ende kurzgeschlossen wurde. In Kombination b erwartet man einen Impuls, da der perfekte Abschluss für eine vollständige Absorption, ohne Reflexion sorgt. Hier muss in der Durchführung ein grober Fehler unterlaufen sein. In Kombination c, wird der Impuls am fernen Ende reflektiert und dann wieder an das generatornahe Ende zurückreflektiert. Hier ist das entstehende Muster also von der Dämpfung im Kabel abhängig. (Siehe Abbildung 6).

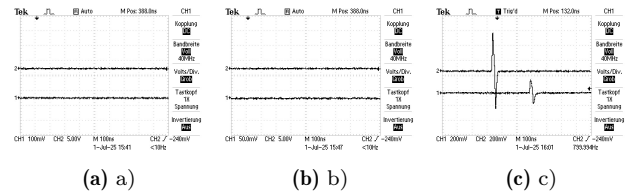


Abb. 6: Kombination verschiedener Widerstände an den Kabelenden. Am generatornahen Ende (CH II) ist $R_A = 0 \Omega$ und am generatorfernen Ende (CH I) ist $R_E = 0 \Omega$ a), $R_E = 50 \Omega$ b) und $R_E = \infty \Omega$ c)

Wenn am Anfang der Abschlusswiderstand $R_A = 50 \Omega$ parallel geschaltet wird, ergibt sich zusammen mit dem Innenwiderstand des Funktionsgenerators ein effektiver Widerstand am Anfang von $R_{A,eff} = 25 \Omega$ und somit gilt $\rho = -\frac{1}{3}$. Der Anfang ist also nicht mehr reflexionslos. Die reflektierte Welle addiert sich gleich zu Beginn zur auslaufenden Welle und reduziert deren Amplitude (siehe Abb6).

Für $R_E = 0 \Omega$ ergibt sich ein Reflexionskoeffizient von $\rho = -1$. Das reflektierte Signal ist gleich groß und invertiert. Der einlaufende und reflektierte Impuls löschen sich am Ende aus.

Wird das Ende mit $R_E = 50 \Omega$ abgeschlossen, wird die Reflexion am Ende unterdrückt. Wir beobachten den einlaufenden Impuls am Anfang **dieser Impuls wird "durchgelassen" und ist wegen der Dämpfung gegenüber dem ursprünglichen Impuls reduziert.**

Wird das Ende leer gelassen, also $R_E = \infty \Omega$. Somit ergibt sich $\rho = 1$, weshalb sich beide Amplituden am Ende zu einer größeren Gesamtamplitude addieren. **Bei dem zweiten, kleineren Peak in CH2 handelt es sich um den am Ende reflektierten, gedämpften Impuls und somit ist der zweite Peak in CH1 der zweifach reflektierte Impuls.**

Wird für R_A kein Widerstand eingesteckt, ist der effektive Anfangswiderstand gleich dem Innenwiderstand R_i des Funktionsgenerators.

$$R_{A,eff} = 50 \Omega$$

Dadurch gibt es keine Reflexion am generatornahen Ende. Ansonsten erhält man die selben Bilder wie bei $R_A = 50 \Omega$ (siehe Abb. 8).

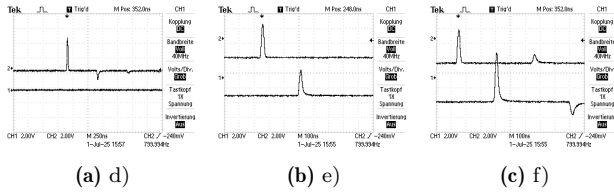


Abb. 7: Kombination verschiedener Widerstände an den Kabelenden. Am generatornahen Ende (CH II) ist $R_A = 50 \Omega$ und am generatorfernen Ende (CH I) ist $R_E = 0 \Omega$ a), $R_E = 50 \Omega$ b) und $R_E = \infty \Omega$ c)

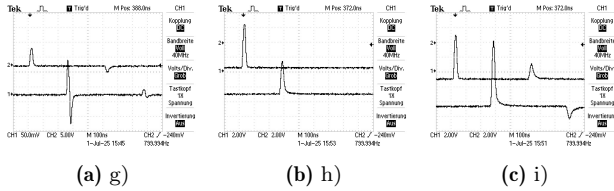


Abb. 8: Kombination verschiedener Widerstände an den Kabelenden. Am generatornahen Ende (CH II) ist $R_A = \infty \Omega$ und am generatorfernen Ende (CH I) ist $R_E = 0 \Omega$ a), $R_E = 50 \Omega$ b) und $R_E = \infty \Omega$ c)

3.1.4 Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit durch Laufzeitmessung

Die Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit wird für ein Koaxialkabel und ein Verzögerungskabel bestimmt. Die Laufzeit Δt wird mithilfe der Cursor-Funktion am Oszilloskop als die Zeit zwischen einlaufendem und reflektiertem Impuls bestimmt. Der Fehler entsteht durch eine Ablesegenauigkeit von $0,1 \text{ div} E_t$, wobei E_t der Empfindlichkeit (Zeitauflösung/div) und div einer Division/Kästchen auf der Zeitskala des Oszilloskops entspricht. Diese wird am Oszilloskop eingestellt.

Die gemessenen Zeitintervalle können an den Abbildungen 9 und 10 abgelesen werden. Für das Verzögerungskabel wurde ein minimales und ein maximales Zeitintervall gemessen. Durch Mittelwert-Bildung ergibt sich:

$$\Delta t_{Koaxial} = (508 \pm 10) \text{ ns}$$

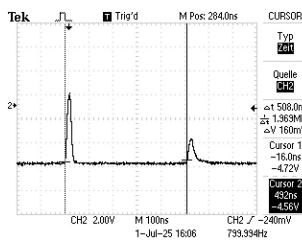
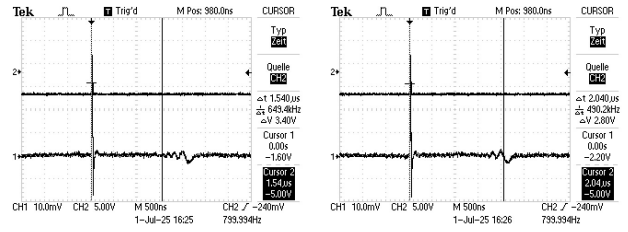


Abb. 9: Messung zur Ausbreitungsgeschwindigkeit im Koaxialkabel.



(a) Messung zur Bestimmung der minimalen Zeitspanne. (b) Messung zur Bestimmung der maximalen Zeitspanne.

Abb. 10: Messung zur Ausbreitungsgeschwindigkeit im Verzögerungskabel

$$\Delta t_{Verz\ddot{u}gerung} = (1790 \pm 35) \text{ ns}$$

Mithilfe der Länge l , die für das Verzögerungskabel mithilfe eines weiteren Kabels abgemessen wurde, kann dann die Geschwindigkeit der Wellen bestimmt werden:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2l}{\Delta t} \quad (7)$$

Es ergeben sich folgende Werte:

$$v_{Koaxial} = (1,97 \pm 0,04) * 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{Verz\ddot{u}gerung} = (5,08 \pm 0,15) * 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Der Fehler ergibt sich durch Gaußsche Fehlerfortpflanzung. Der Fehler der Länge des Verzögerungskabels wurde aufgrund der ungenauen Messmethode auf $\pm 1 \text{ cm}$ geschätzt.

Auf dem Verzögerungskabel am Arbeitsplatz war eine reziproke Geschwindigkeit von $1,9 \frac{\text{ms}}{\text{m}}$ angegeben. Das liefert einen Literaturwert von $v = 5,26 * 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Damit passt unser ermittelter Wert nicht im Rahmen seines Fehlers mit dem Literaturwert überein. Die Werte liegen trotzdem in der selben Größenordnung und es handelt sich bei unserer Messung um eine gute Näherung. Die Abweichung vom Literaturwert kann dadurch erklärt werden, dass am Anfang und Ende des Verzögerungskabels Verbindungsstücke verbaut sind, die bei der Längenmessung nicht berücksichtigt wurden. Verzögerungskabel sind darauf ausgelegt, auf möglichst kurzen Strecken eine möglichst hohe Laufzeit zu erzeugen. Das kann, gemäß Gleichung 10, durch eine hohe Permeabilitätszahl μ_r oder Permittivitätszahl ϵ_r erreicht werden, da beide Konstanten materialspezifisch sind. Es ist also nicht verwunderlich, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Verzögerungskabel deutlich geringer im Vergleich zu der im Koaxialkabel ist.

3.2 Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe von stehenden Wellen

3.2.1 Modellversuch zur Darstellung von stehenden Wellen

Zur modellierten Darstellung von stehenden Wellen wird dem Oszilloskop das Triggersignal eines Funktionsgenerators zugeführt. Hierfür werden die Buchsen A und B des Generators an die Eingänge CHI und CHII des Oszilloskops angeschlossen. Der Funktionsgenerator erzeugt Wellen mit variabler Amplitude und Geschwindigkeit. Mithilfe der mathematischen Funktionen des Oszilloskops werden beide Kanäle addiert und gemeinsam dargestellt, um die Überlagerung zu simulieren. Bei gleicher Amplitude der beiden Teilwellen kann sowohl konstruktive (siehe Abb. 11 a) als auch destruktive Überlagerung (siehe Abb. 11 b) beobachtet werden.

Des Weiteren wurde am Funktionsgenerator die Überlagerung einer nach links und einer nach rechts laufenden Welle beobachtet. Die Wellen haben hierbei die gleiche Frequenz, aber unterschiedliche Amplituden. Es bildet sich eine stehende Welle mit asymmetrischer Amplitudenverteilung aus (siehe Abb. 11 c).

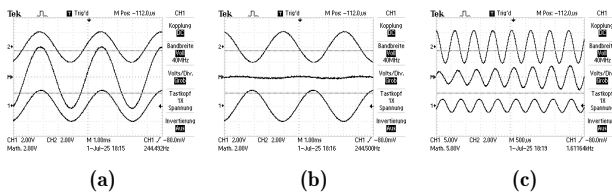


Abb. 11: a) Konstruktive Überlagerung zweier Wellen gleicher Amplitude, b) destruktive Überlagerung zweier Wellen gleicher Amplitude, c) Überlagerung zweier Wellen mit entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung und unterschiedlicher Amplitude

3.2.2 Messung der Ausbreitungsgeschwindigkeit

Zur Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit mithilfe von stehenden Wellen wird zunächst am Funktionsgenerator ein sinusförmiges Ausgangssignal eingestellt. Ein Ende des Koaxialkabels wird wieder über einen T-Stecker sowohl mit dem Funktionsgenerator, als auch mit dem Oszilloskop verbunden. So lässt sich am Oszilloskop die Überlagerung der einlaufenden und der reflektierten Welle aufzeichnen. Da das Koaxialkabel kein idealer Leiter ist, sondern ohmsche Verluste aufweist, besitzt die reflektierte Welle eine verringerte Amplitude gegenüber der einlaufenden Welle. Somit bilden sich keine perfekten Knoten, sondern lediglich lokale Minima aus.

Das generatorferne Ende wird zunächst offen gelassen. Dies entspricht somit einer Reflexion ohne Phasensprung am generatorfernen Ende des Kabels. Die

Frequenz wird nun so variiert, dass am Anfang des Kabels ein Knoten - bzw. in diesem Fall nur ein Minimum - entsteht. Die eingestellten Frequenzen ν entsprechen physikalisch den Resonanzfrequenzen der stehenden Welle. Die erste Resonanz bildet sich bei Kabellänge $L = \frac{\lambda}{4}$, die zweite bei $L = \frac{3\lambda}{4}$ aus.

Anschließend wird das generatorferne Ende mit einem Kurzschlussstecker kurzgeschlossen. Dies entspricht einer Reflexion mit Phasensprung am Kabelende. Die Frequenz, bei der die erste Resonanz auftritt, also bei $L = \frac{\lambda}{2}$, wird ebenfalls bestimmt. Alle drei Frequenzen lassen sich Tab. 2 entnehmen. Die Fehler der Resonanzfrequenzen wurden auf $\Delta\nu = 2kHz$ geschätzt.

Um nun die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Koaxialkabel zu bestimmen, wird zunächst die Wellenlänge mithilfe der Kabellänge L berechnet:

Beispiel für $L = \lambda/4$:

$$\lambda = 4 \cdot L \quad (8)$$

Die Berechnung für $L = \lambda/2$ und $L = 3\lambda/4$ erfolgt analog. $L = 50m$ wird als fehlerfrei angenommen.

Eine Fehlerrechnung mit einem angenommenen Fehler von $\Delta L = 0,01m$ wurde ebenfalls durchgeführt. Diese hat jedoch lediglich eine Änderung der Fehler der Ausbreitungsgeschwindigkeit in der vierten Nachkommastelle bewirkt und hatte somit keine weiteren Auswirkungen.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit folgt dann mit:

$$v = \lambda \cdot \nu \quad (9)$$

Der Fehler von ν erfolgt gemäß Gauß'scher Fehlerrechnung über den Fehler der Resonanzfrequenz mit analoger Formel. Die drei bestimmten Ausbreitungsgeschwindigkeiten lassen sich ebenfalls Tab. 2 entnehmen.

L (m)	ν (kHz)	v (10^8 m/s)	ϵ_r
$\lambda/4$	945 ± 2	$1,890 \pm 0,004$	$2,51 \pm 0,01$
$\lambda/2$	1897 ± 2	$1,897 \pm 0,002$	$2,498 \pm 0,005$
$3\lambda/4$	2929 ± 2	$1,953 \pm 0,001$	$2,356 \pm 0,003$

Tabelle 2: Experimentell bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeiten in einem Koaxialkabel bei unterschiedlichen Frequenzen

Anhand dieser Ergebnisse lässt sich nun die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r des Kabels bestimmen.

Allgemein gilt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (10)$$

Hierbei entspricht c der Lichtgeschwindigkeit [3] und μ_r der Permeabilitätszahl. Bei handelsüblichen Kabeln gilt $\mu_r = 1$ [2] und damit:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (11)$$

ϵ_r ist eine Funktion der Frequenz. Somit ergibt sich für die Wellen auf dem Koaxialkabel auch keine konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit, sondern v wird ebenso frequenzabhängig. Diese Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit nennt man Dispersion.

Stellt man Gl. 11 nun nach ϵ_r um, lässt sich die frequenzabhängige Dielektrizitätskonstante des Kabels bestimmen. Die experimentell bestimmten Werte werden ebenfalls in Tab. 2 aufgetragen. Die Fehler ergeben sich gemäß Gauß'scher Fehlerrechnung aus den Fehlern der Ausbreitungsgeschwindigkeiten.

Bei dem Kabel handelt es sich um ein Koaxialkabel vom Typ RG213/U. Mithilfe dieser Angabe lassen sich Literaturwerte für sowohl die Ausbreitungsgeschwindigkeit als auch die Dielektrizitätskonstante bestimmen. Gemäß [5] beträgt das Verhältnis von Ausbreitungsgeschwindigkeit zu Lichtgeschwindigkeit in einem Kabel eines solchen Typs ca. 66%. Die im Experiment bestimmten Werte liegen im Bereich von 63 – 65% der Lichtgeschwindigkeit. Eine plausible Ursache für die gemessene Abweichung der Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Unsicherheit bei der Bestimmung der Resonanzfrequenz. Da das Amplitudenminimum durch Dämpfung oft nur flach ausgeprägt ist, lässt sich der exakte Resonanzpunkt schwer erkennen. Schon geringe Abweichungen in der Frequenz führen bei typischer Kabellänge zu spürbaren Fehlern im berechneten v . Dadurch kann die ermittelte Geschwindigkeit leicht unter dem Literaturwert von 66% liegen.

Bei dem im Koaxialkabel verbauten Dielektrikum handelt es sich um Polyethylen niedriger Dichte [5]. Im Bereich von $\nu = 1\text{MHz}$ weist dieser Stoff eine Dielektrizitätskonstante von $\epsilon_r = 2,2 - 2,35$ auf [6]. Die experimentell bestimmten Werte stimmen also im Rahmen ihrer Fehler nicht mit dem Literaturwert überein. Diese Abweichung lässt sich wieder auf die Unsicherheit bei der Bestimmung der Resonanzfrequenzen zurückführen.

3.2.3 Bestimmung der Dämpfung des Signals im Koaxialkabel

Wie bereits in 3.2.2 erwähnt, ist der ohmsche Widerstand des Koaxialkabels nicht vernachlässigbar. Dieser bewirkt sowohl eine Dämpfung der einlaufenden, als auch der reflektierten Welle und somit einen exponentiellen Abfall der Amplitude mit der Länge des Kabels. Vor allem bei hohen Frequenzen bewirkt der endliche ohmsche Widerstand des Kabels einen sog. Skin-Effekt. Anstatt den gesamten Leiter gleichmäßig zu durchsetzen, fließt der Strom nur in einer dünnen Oberflächenschicht. Die Stromdichte im Inneren des Leiters ist also niedriger als in den äußeren Bereichen. Somit wird der effektive Querschnitt, welcher zum Ladungstransport zur Verfügung steht, verringert und

dadurch wiederum der Wirkwiderstand erhöht.

Um die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung des Koaxialkabels quantitativ zu untersuchen, wird zunächst das logarithmische Dämpfungsmaß D bestimmt. Es ist allgemein definiert über:

$$D = 20 \cdot \log_{10} \frac{U_e}{U_a} \text{dB} \quad (12)$$

Hierbei entspricht U_e der Spannung der einlaufenden Welle und U_a der Spannung der reflektierten Welle. U_a lässt sich wiederum über die Spannung U_{min} der Minima der stehenden Welle bestimmen:

$$U_a = U_e - U_{min} \quad (13)$$

Die Spannungen werden mithilfe der Cursor-Funktion des Oszilloskops bestimmt (siehe Abb. 12). Um U_{min} zu erhalten, müssen die gemessenen $\Delta V = V_{pp}$ zusätzlich halbiert werden.

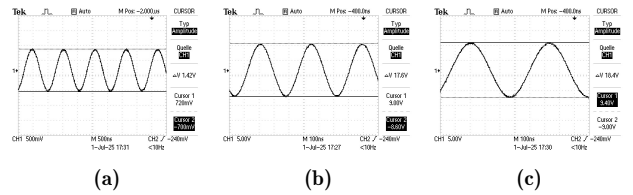


Abb. 12: Bestimmung der Minimalspannung U_{min} an den Knoten der gedämpften, stehenden Welle. a) Knoten bei $L = \lambda/4$, b) Knoten bei $L = \lambda/2$, c) Knoten bei $L = 3\lambda/4$.

Bei der Berechnung der Spannung der einlaufenden Welle U_a wird nun jedoch ersichtlich, dass anscheinend bei der Versuchsdurchführung ein Fehler unterlaufen ist. Die Eingangsspannung U_e betrug bei allen Messungen $\frac{V_{pp}}{2} = 5\text{V}$. Lediglich der in Abb. 12 a) gemessene Wert von $\Delta V = 1,42\text{V}$ liegt jedoch im realistischen Bereich. Für die beiden höheren Frequenzen gilt $\Delta V > 2U_e$, was physikalisch nicht plausibel ist. Dies lässt sich am wahrscheinlichsten dadurch erklären, dass versehentlich an einem Bauch der stehenden Welle statt an einem Knoten gemessen wurde. Es kam hierbei also zu einer konstruktiven Überlagerung, wodurch sich Werte $> 2U_e$ ergeben. Somit lassen sich diese beiden Werte nicht für eine gültige Bestimmung der Dämpfung heranziehen.

Um den Dämpfungswert korrekt zu bestimmen, ist es erforderlich, die Spannung im Minimum der stehenden Welle exakt und konsistent zur Eingangsspannung zu erfassen. Die ist augenscheinlich nur für die Messung bei $L = \lambda/4$ der Fall. Hier entspricht $U_{min} = \frac{1,42}{2}\text{V} = 0,71\text{V}$. Mit Gl. 12 ergibt sich:

$$D_{\lambda/4} = (1,3 \pm 0,7)\text{dB}$$

Der Fehler ergibt sich aus den Fehlern von $\sigma U_e = 0,051\text{V}$ [4] und dem geschätzten Fehler

von $\sigma U_{min} = 0,01V$ mithilfe von Gauß'scher Fehlerrechnung.

3.3 Messung der Lichtgeschwindigkeit

Anschließend wird zuletzt die Lichtgeschwindigkeit über eine Laufzeitmessung bestimmt. Der Versuchsaufbau hierfür erfolgt gemäß Abb. 13. Eine Hochleistungs-LED sendet sehr kurze, rote Lichtimpulse aus, welche - nach Durchlaufen eines Strahlteilers S und Hin- und Rücklauf über eine bekannte Messstrecke s - in Spannungspulse umgewandelt werden und mit dem Oszilloskop beobachtet werden. Der andere, von dem Strahlteiler reflektierte Strahl, wird wiederum an einem Tripelspiegel T_2 gespiegelt und erzeugt somit einen Referenzimpuls, dessen Laufzeitverzögerung aufgrund der minimalen Messstrecke vernachlässigbar ist.

Die Messstrecke s, des am Strahlteiler transmittierten Strahls wird nun variiert, um über eine Messreihe die Lichtgeschwindigkeit bestimmen zu können. Hierfür wird der den Strahl reflektierende Spiegel T_1 auf die LED zu, bzw. von der LED weg bewegt. Für jeden gemessenen Lichtweg wird die Zeitdifferenz zwischen den beiden Spannungsimpulsen, welche von gemessenem Strahl und Referenzstrahl erzeugt werden, mithilfe der Cursor-Funktion des Oszilloskops gemessen. Hierbei ist es zur Minimierung des Einflusses des Ansprechverhaltens der Diode wichtig, den Zeitpunkt abzulesen, bei dem sich die Spannung signifikant vom Untergrund abhebt und nicht die beiden Peaks der Impulse.

Um die von den Lichtstrahlen zurückgelegte Distanz korrekt zu bestimmen, ist es zusätzlich notwendig, die Position der LED, welche sich nicht bei $s = 0$ sondern bei $s_{LED} = 232mm$ befand, von allen Lichtwegen abzuziehen. Der Fehler der Distanz s berechnet sich mithilfe von Gauß'scher Fehlerrechnung aus dem Ablesefehler. Der Fehler der Laufzeit Δt entsteht ebenfalls aus einem Ablesefehler, da hier das genaue Festlegen des Punktes, an dem die Spannung signifikant steigt, sich, vor allem je größer die Messstrecke wurde, als schwierig erwies. Demnach wurde hier für größere Messstrecken auch ein größerer Ablesefehler geschätzt.

Die Lichtgeschwindigkeit berechnet sich zuletzt mit trivialer Formel:

$$c = \frac{s}{\Delta t} \quad (14)$$

Die Fehler folgen mit Gauß'scher Fehlerrechnung.

Um eine Aussage über die Güte der Messung zu treffen, wird aus der in Tab. 3 aufgeführten Messreihe der Mittelwert sowie der Standardfehler berechnet:

$$c = (3,0 \pm 0,1) \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

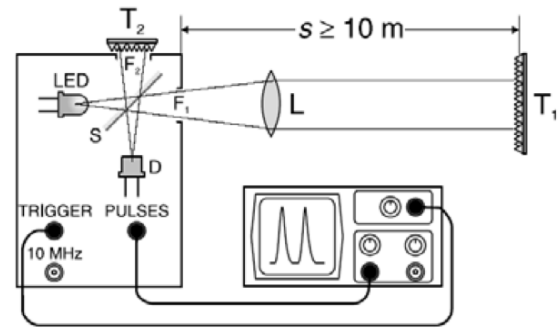


Abb. 13: Versuchsaufbau zur Messung der Lichtgeschwindigkeit: Von einer Hochleistungs-LED ausgesandte Lichtimpulse werden durch einen Strahlteiler geteilt. Beide Strahlen werden nach Durchlaufen unterschiedlicher Messstrecken reflektiert und zurück am Strahlteiler schließlich vom Oszilloskop als Spannungsimpulse gemessen. Über Variation des Lichtwegs des einen Strahls und Minimierung des Lichtwegs des anderen Strahls, lässt sich durch die Zeitdifferenz zwischen den Spannungsimpulsen die Lichtgeschwindigkeit bestimmen.

Dieser Bestwert stimmt im Rahmen seines Fehlers gut mit dem Literaturwert von $c_{Lit} = 2,99792458 \frac{m}{s}$ [3] überein.

Dennoch ist zu beachten, dass bei den 3 kleinsten Messstrecken scheinbar Überlichtgeschwindigkeit gemessen wurde. Dieses unphysikalische Ergebnis ist vermutlich das Resultat einer ungenauen Wahl der Startpunkte der Flanken zur Zeitmessung. Es müsste für diesen Teil der Messung vermutlich ein noch größerer Fehler der Laufzeit angenommen werden.

Bei einer Wiederholung der Messung wäre somit zu empfehlen, den in Abb. 13 aufgeführten Mindestabstand von $s \geq 10m$ zu beachten. In der Nähe dieses Abstands wurde in Messreihe 3 die beste Übereinstimmung mit dem Literaturwert gemessen.

4 Zusammenfassung

Der Wellenwiderstand eines Koaxialkabels wurde durch Unterdrückung der Reflexion an einem Kohleschichtpotentiometer am Ende des Kabels bestimmt. Der gemessene Widerstand beträgt $Z = (50 \pm 1) \Omega$. Die Messung wurde analog mit anderen Widerständen am Ende des Kabels durchgeführt, allerdings war eine vollständige Unterdrückung nur bei einem 50Ω Widerstand und dem Kohleschichtpotentiometer möglich. Bei einem Kurzschlussstecker wurde eine Reflexion mit negativer Amplitude, gemäß Theorie beobachtet. Außerdem wurden verschiedene Kombinationen von Widerständen, parallel zu den jeweiligen

Messstrecke s (mm)	Laufzeit Δt (ns)	Geschwindigkeit c (10^8 m/s)
7324 ± 8	20 ± 3	$3,7 \pm 0,6$
$7319,2 \pm 8$	21 ± 3	$3,5 \pm 0,5$
7344 ± 8	21 ± 3	$3,5 \pm 0,5$
15324 ± 8	52 ± 4	$2,9 \pm 0,2$
15344 ± 8	54 ± 4	$2,8 \pm 0,2$
15364 ± 8	55 ± 4	$2,8 \pm 0,2$
22908 ± 8	84 ± 6	$2,7 \pm 0,2$
22928 ± 8	86 ± 6	$2,7 \pm 0,2$
22948 ± 8	87 ± 6	$2,6 \pm 0,2$

Tabelle 3: Messreihe zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Kabelenden gemessen und die dadurch auftretenden Reflexions- und Dämpfungseffekte analysiert. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit v im Koaxialkabel wurde auf zwei verschiedenen Wegen bestimmt. Zunächst mittels Laufzeitmessung, was eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von:

$$v_{\text{Koaxial}} = (1,97 \pm 0,04) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

ergeben hat. Außerdem wurde v mithilfe von stehenden Wellen bestimmt. Hierfür wurden drei verschiedene Resonanzfrequenzen bestimmt und somit aus der bekannten Wellenlänge und diesen Frequenzen die Ausbreitungsgeschwindigkeit berechnet. Es ergaben sich Werte von:

$$v_{\lambda/4} = (1,890 \pm 0,004) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{\lambda/2} = (1,897 \pm 0,002) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{3\lambda/4} = (1,953 \pm 0,001) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Von den drei Ausbreitungsgeschwindigkeiten stimmt nur die letzte mit dem Bestwert der Ausbreitungsgeschwindigkeit, welche mithilfe von Laufzeitmessung bestimmt wurde, überein. Es ist jedoch zu beachten, dass im Falle der stehenden Wellen zusätzlich der Effekt der Dispersion, also die Frequenzabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit, zu beobachten ist. Die Methode der stehenden Wellen ist in diesem Fall genauer und führt zu kleineren Fehlern, da bei der Laufzeitmessung eine große Fehlerquelle durch das manuelle Ablesen der Impulse entsteht.

Außerdem wurde durch die Methode der Laufzeitmessung die Ausbreitungsgeschwindigkeit in einem Verzögerungskabel

$$v_{\text{Verzögerung}} = (5,34 \pm 0,11) \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

bestimmt.

Durch weitere Laufzeitmessungen wurde die Vakuumlichtgeschwindigkeit bestimmt. Die Lichtgeschwindigkeit wurde durch Verschieben des Reflektorschirms

für verschiedene Distanzen gemessen, daraus wurde dann der Mittelwert gebildet. Es ergibt sich ein Wert von:

$$c = (3,0 \pm 0,1) \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Das Ergebnis stimmt mit dem Literaturwert überein.

Literatur

- [1] https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11000000/03_Studium/02_Bachelor/Grundpraktikum/_imported/fileadmin/11016800/Geraete/VOLTCRAFT_VC_150_DMM_de_en_fr_nl.pdf, zuletzt besucht am 04.07.25
- [2] https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11000000/03_Studium/02_Bachelor/Grundpraktikum/_imported/fileadmin/11016800/Modulbeschreibungen/C-Modul/Versuch_41_ueberarbeitet.pdf, zuletzt besucht am 14.07.2025
- [3] <https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?c>, zuletzt besucht am 08.07.2025
- [4] <https://www.manualslib.de/manual/46925/Agilent-Technologies-33220A.html?page=2#manual>, zuletzt besucht am 13.07.2025
- [5] https://kabel-kusch.de/Kabel/Koaxialkabel/RG213-U/rg213u_htm_files/RG%20213.pdf, zuletzt besucht am 14.07.2025
- [6] <https://www.professionalplastics.com/professionalplastics/ElectricalPropertiesofPlastics.pdf?srsltid=AfmB0oo4wUU8zpiMqzMWInLBi0np9gaLse4bU1ixkaW26ahgtCDjFru>, zuletzt besucht am 14.07.2025