# DMA

15. Huffmanův kód 16. Automorfismy grafu 17. Př. homomorfismů grafu

TYPOVÉ PŘÍKLADY (DMA)								
1. Grupa		Τ		$\Box$	Г		Г	*
2. Těleso			(2)			02		
3. Graf relace								
4. Hasseův diagram								
5. Booleova funkce								
6. Zbytek při dělení		T						]
7. Vektory LN, LZ (modulo)								
8. Vektory generující v. pr.								
9. Hodnot matice (modulo)								
10. Soustava rovnic (modulo)								
11. Determinant (modulo)								
12. Počet koster grafu								
13. Grafová posloupnost								
14. Prostor kružnic								

# 1. a) Najděte množinu reálných čísel takovou, že tato množina vybavená danou operací tvoří grupu

$$a \oplus b = a + b + ab$$

 $a \oplus b = a + b - ab$ 

$$a \oplus b = a + b - 2ab$$

$$a \oplus b = a + b + \frac{1}{2}ab$$

7♦

Q

$$a \oplus b = a + b + 2ab$$

$$a \oplus b = a + b - \frac{1}{2}ab$$

## b) Ukažte, že množina nenulových reálných čísel daného tvaru vybavená operací <u>násobení</u> tvoří grupu

$$a + b\sqrt{2}$$

$$a, b \in Q$$

$$a + b\sqrt{3}$$

$$a + b\sqrt{5}$$

$$a, b \in Q$$

# 2. Ukažte, že množina reálných čísel tvaru x, kde a, b Q vybavená operacemi sčítání a násobení tvoří <u>těleso</u>

$$a + b\sqrt{2}$$

$$a - b\sqrt{2}$$

$$a + b\sqrt{3}$$

# 3. Najděte graf následující relace a rozhodněte, jestli je reflexivní, symetrická nebo tranzitivní

$$(x, y) \subset RxR; |x+|y|| \le 2$$

2♦

$$(x, y) \subset RxR$$
;  $\sin x \cdot \sin y \ge 0$ 

$$(x, y) \subset RxR; |x-|y|| \le 1$$
 8 $\heartsuit$ 

$$(x, y) \subset RxR; x + y \subset \mathbb{N}$$

$$(x,y) \subset RxR; \mid \mid x \mid - \mid y \mid \mid \leq 1$$

$$(x, y)$$
 ⊂ RxR;  $x + y$  ⊂  $\mathbb{Z}$ 

80

$$(x, y) \subset RxR; |x - y^2| \le 1$$

 $(x, y) \subset RxR$ ;  $1 \le |x| - |y| \le 2$ 

$$(x, y) \subset RxR; |x|-|y| \subset \mathbb{N}$$

$$(x, y) \subset RxR; |x|-|y| \subset \mathbb{Z}$$
 10.

# 4. Následující číselné množiny jsou uspořádány dělitelností. Najděte jejich Hasseův diagram, rozhodněte, zda se jedná o svaz a v případě kladné odpovědi jestli je svaz distributivní či komplementární

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 12, 16, 48\},\$$

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 12, 10, 40\},$$
  
 $M_2 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 16, 48\}.$ 

$$M_2$$
 je množina všech dělitelů čísla 24  $6$ 

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 16, 48\},\$$

$$M_1 = \{1, 2, 3, 12, 18, 24, 72\},$$
  
 $M_1 = \{2, 3, 4, 12, 18, 24, 48\},$ 

$$M_1 = \{1, 3, 6, 12, 18, 24, 72\},$$

$$M_2$$
 je množina všech dělitelů čísla 105

$$M_1 = \{1, 3, 4, 24, 36, 72\},$$

$$M_{\scriptscriptstyle 2}$$
 je množina všech dělitelů čísla 72

$$M_1 = \{1, 3, 4, 24, 36, 48, 72\},$$
  
 $M_1 = \{1, 3, 5, 15, 25, 30, 75, 150\},$ 

$$M_1 = \{1, 2, 3, 4, 12, 18, 30, 90\},$$

 $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30, 60\},\$ 

M<sub>2</sub> je množina všech dělitelů čísla 108

$$\overline{\overline{A} \vee (B\&C)} \Longrightarrow (A \Leftrightarrow (B \vee C))$$

$$(\overline{\underline{\mathsf{A}} \ \mathsf{v} \ \mathsf{C}}) => ((\mathsf{B} \& \mathsf{C}) => \overline{(\overline{\mathsf{A} \& \overline{\mathsf{C}})}})$$

$$(A\&(\overline{B \vee C})) \Longrightarrow (A\&(B \Leftrightarrow C))$$

$$(\overline{A \& B} \Leftrightarrow C) => (A \lor B) \& C$$

$$(A \Rightarrow (B \otimes \overline{C})) \Leftrightarrow A \otimes (B \vee \overline{C})$$

#### 6. Určete zbytek při dělení čísla

2 <sup>100</sup> číslem 13	6♡	3 <sup>90</sup> číslem <b>2</b> 3	Q <b></b>
2 <sup>120</sup> číslem 13	7 <b>.</b> *	4 <sup>80</sup> číslem 13	K♦
2 <sup>120</sup> číslem 19	2.	4 <sup>80</sup> číslem 19	8\$
3 <sup>100</sup> číslem 17	J⇔	5 <sup>60</sup> číslem 17	5♠
3 <sup>100</sup> číslem 19	3♦	5 <sup>60</sup> číslem 19	10♠

### 7. Rozhodněte, zda jsou modulo x lineárně závislé či nezávislé vektory

```
mod 5 v_1=(1, 2, 1, 1), v_2=(2, 1, 1, 1), v_3=(2, 1, 1, 1), v_4=(1, 1, 0, 2)
                                                                                    4♡
mod 5 v_1=(1, 2, 1, 3), v_2=(2, 1, 3, 1), v_3=(2, 1, 0, 1), v_4=(1, 3, 0, 2)
                                                                                    10♡
mod 3 v_1=(1, 2, 1, 2), v_2=(2, 1, 0, 1), v_3=(2, 1, 0, 1), v_4=(1, 1, 0, 2)
                                                                                    4♦
mod 3 v_1=(1, 2, 1, 2), v_2=(2, 1, 0, 1), v_3=(2, 1, 0, 1), v_4=(2, 1, 1, 1)
                                                                                    10♦
mod 5 v_1=(1, 4, 1, 2), v_2=(2, 3, 0, 1), v_3=(2, 1, 0, 3), v_4=(0, 3, 1, 1)
                                                                                    3♠
mod 5 v_1=(2, 4, 1, 2), v_2=(2, 3, 0, 1), v_3=(3, 1, 0, 3), v_4=(0, 3, 1, 1)
                                                                                    9.
mod 7 v_1=(2, 4, 5, 2), v_2=(4, 3, 0, 1), v_3=(3, 1, 0, 6), v_4=(2, 1, 5, 2)
                                                                                    3 *
mod 7 v_1=(2, 4, 1, 2), v_2=(2, 3, 0, 1), v_3=(3, 1, 2, 6), v_4=(2, 1, 4, 2)
                                                                                    9.
```

#### 8. Rozhodněte, zda následující vektory generují vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{Z}_x$

$\mathbb{Z}_5$	$v_1$ =(1, 3, 2, 1), $v_2$ =(2, 2, 4, 1), $v_3$ =(1, 1, 2, 2), $v_4$ =(1, 2, 3, 1), $v_5$ =(0, 3, 1, 1)	2♡
$\mathbb{Z}_5$	$v_1$ =(1, 3, 2, 1), $v_2$ =(2, 2, 4, 1), $v_3$ =(3, 0, 1, 2), $v_4$ =(1, 2, 3, 1), $v_5$ =(4, 2, 4, 3)	9♡
$\mathbb{Z}_7$	$v_1$ =(1, 3, 6, 1), $v_2$ =(5, 2, 4, 1), $v_3$ =(0, 5, 3, 2), $v_4$ =(1, 2, 3, 1), $v_5$ =(4, 2, 4, 3)	5♦
$\mathbb{Z}_7$	$v_1$ =(1, 3, 6, 1), $v_2$ =(5, 2, 4, 1), $v_3$ =(0, 5, 3, 2), $v_4$ =(1, 2, 3, 1), $v_5$ =(0, 0, 6, 3)	Q♦
$\mathbb{Z}_5$	$v_1$ =(2, 3, 1, 1), $v_2$ =(0, 2, 4, 1), $v_3$ =(0, 1, 3, 2), $v_4$ =(2, 1, 3, 4), $v_5$ =(1, 0, 2, 3)	7♠
$\mathbb{Z}_5$	$v_1=(2,3,1,1), v_2=(0,2,4,1), v_3=(0,1,3,2), v_4=(2,1,3,4), v_5=(4,0,2,2)$	A♠

#### 9. Určete hodnost matice modulo x

#### 10. Řešte modulo x soustavu rovnic

mod 5	$x_1   2x_2   x_3   x_4   x_5 = 1$	mod 5	$x_1 \mid 2x_2 \mid 3x_3 \mid x_4 \mid x_5 = 2$
	$2x_1   x_2   x_3   2x_4   x_5 = 2$		$2x_1   x_2   3x_3   2x_4   x_5 = 3$
3♡	$x_1 \mid 2x_2 \mid 2x_3 \mid 3x_4 \mid 2x_5 = 1$	80	$x_1   2x_2   3x_3   3x_4   2x_5 = 4$
	$2x_1   x_2   2x_3   2x_4   2x_5 = 3$		$2x_1   x_2   3x_3   2x_4   2x_5 = 3$
mod 7	$x_1   2x_2   3x_3   5x_4   x_5 = 6$	mod 7	$x_1   2x_2   3x_3   5x_4   x_5 = 5$
	$2x_1   x_2   6x_3   2x_4   x_5 = 2$		$2x_1   3x_2   5x_3   2x_4   x_5 = 6$
2♦	$x_1   2x_2   5x_3   3x_4   2x_5 = 1$	6♦	$3x_1 \mid 2x_2 \mid 5x_3 \mid 3x_4 \mid 2x_5 = 1$
	$2x_1   x_2   4x_3   x_4   x_5 = 3$		$2x_1   x_2   3x_3   x_4   x_5 = 1$

mod 5 
$$x_1 \mid 2x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 = 2$$
  
 $2x_1 \mid x_2 \mid 2x_3 \mid 2x_4 \mid x_5 = 3$   
Ka  $x_1 \mid 2x_2 \mid 4x_3 \mid x_4 \mid 4x_5 = 4$   
 $4x_1 \mid 2x_3 \mid 4x_4 \mid x_5 = 4$ 

mod 7 
$$x_1 \mid 2x_2 \mid 3x_3 \mid 5x_4 \mid x_5 = 1$$
  
 $2x_1 \mid x_2 \mid 6x_3 \mid 2x_4 \mid x_5 = 2$   
 $x_1 \mid 2x_2 \mid 5x_3 \mid 3x_4 \mid 2x_5 = 1$   
 $2x_1 \mid x_2 \mid 4x_3 \mid x_4 \mid x_5 = 3$ 

mod 3 
$$x_1 \mid x_2 \mid 2x_3 \mid x_4 \mid 2x_5 = 1$$
  
 $2x_1 \mid 2x_2 \mid x_3 \mid 2x_4 \mid x_5 = 2$   
 $4 x_1 \mid 2x_2 \mid 2x_4 \mid 2x_5 = 1$   
 $2x_1 \mid 2x_2 \mid x_3 \mid x_4 \mid x_5 = 1$ 

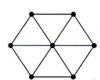
mod 7 
$$x_1 \mid 2x_2 \mid 3x_3 \mid 5x_4 \mid x_5 = 5$$
  
 $2x_1 \mid 3x_2 \mid 5x_3 \mid 2x_4 \mid x_5 = 6$   
Jacob 3x 1 | 3x 2 | 5x 3 | 3x 4 | 2x 5 = 1  
 $6x_1 \mid x_2 \mid 6x_3 \mid 3x_4 \mid 4x_5 = 1$ 

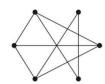
mod 7 
$$x_1 \mid 2x_2 \mid 3x_3 \mid 5x_4 \mid x_5 = 6$$
  
 $2x_1 \mid x_2 \mid 6x_3 \mid 2x_4 \mid x_5 = 2$   
8.  $x_1 \mid 2x_2 \mid 5x_3 \mid 3x_4 \mid 2x_5 = 1$   
 $2x_1 \mid x_2 \mid 4x_3 \mid x_4 \mid x_5 = 2$ 

# 11. Vypočtěte determinant modulo x

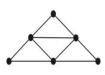
12. Určete počet koster grafu (nějaké typy)

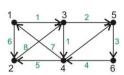












2♥, 6♥, 5♦, 9♦, J♦, 4♠, 10♠, J♠, 6♣, A♣

13. Rozhodněte, zda následující posloupnost je grafová a v případě kladné odpovědi nakreslete příslušný graf

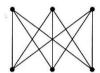
(nějaké posloupnosti)

3♥, 7♥, 3♦, 7♦, 5♠, 5♣, 9♣

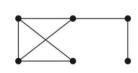
6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 1

14. Najděte prostor kružnic následujícího grafu (nějaké typy)











15. Abeceda je dána následující frekvenční tabulkou. Najděte optimální Huffmanův kód, spočtěte jeho váhu a zakódujte dané slovo. (nějaké typy)

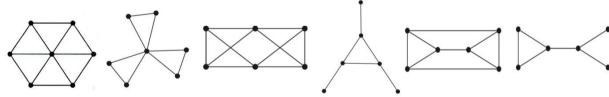
3♥, 7♥, 3♦, 7♦, 5♠, 5♣, 9♣

A-20, B-6, D-10, E-20, L-12, N-15, P-8, S-4 **BEDNA** 

A-25, D-10, E-10, L-30, O-15, I-8, T-4 **LOLITA** A-15, B-6, D-10, E-20, M-12, O-15, L-8, R-12 **MODLA** 

16. Najděte automorfismy následujícího grafu (nějaké typy)

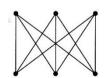


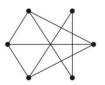


17. Najděte nějaké příklady homomorfismů mezi následujícími grafy (pokud existují)

9♡, 4♦, Q♦, 7♠, 2♣, 10♣

18. Pomocí fundamentální matice řezů najděte prostor řezů následujícího grafu (nějaké typy)



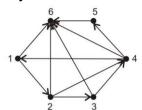


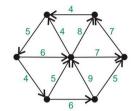




2♦, 8♦, 10♦, A♦, 2♠, 8♠, A♠, J♣, K♣

#### 19. Najděte ω-distanční matici následujícího grafu (nějaké typy)





2♡, 8♡, J♡, 2♦, 3♦, 9♦, 10♦, A♦, 4♠, 6♠, Q♠, 4♣, 9♣

#### ohodnocení hran:

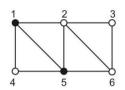
w(1,2)=4	w(1,6)=12
w(2,4)=2	w(2,6)=6
w(3,6)=4	w(2,3)=1
w(4,1)=1	w(3,4)=1
w(4,6)=3	w(4,5)=1

w(5,6)=1

#### 20. Určete matici vzdálenosti následujícího grafu (nějaké typy)

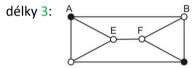


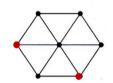


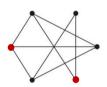


3♥, 4♥, 5♦, J♦, 8♠, 3♣, Q♣

#### 21. Určete počet sledů délky x mezi vyznačenými vrcholy (nějaké typy)







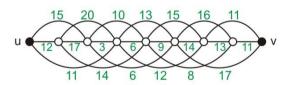
 $5\heartsuit$ ,  $6\heartsuit$ ,  $9\heartsuit$ ,  $K\heartsuit$ ,  $4\diamondsuit$ ,  $8\diamondsuit$ ,  $Q\diamondsuit$ ,  $3\spadesuit$ ,  $7\spadesuit$ ,  $J\spadesuit$ ,  $2\spadesuit$ ,  $6\spadesuit$ ,  $10\spadesuit$ ,  $A\clubsuit$ 

7♥, 10♥, 6♦, 2♠, 5♠, K♠, A♠, 7♣, J♣, K♣

# 22. Pomocí Dijkstrova algoritmu určete vzdálenost mezi vyznačenými vrcholy



Ohodnocení hran: 
$$w(u,1) = 4, \ w(1,2) = 5, \ w(2,3) = 3, \ w(3,4) = 4, \\ w(4,5) = 5, \ w(5,6) = 4, \ w(6,v) = 3, \ w(u,2) = 7, \\ w(1,3) = 6, \ w(2,4) = 8, \ w(3,5) = 6, \ w(4,6) = 7, \\ w(5,v) = 6, \ w(u,3) = 12, \ w(1,4) = 11, \ w(2,5) = 13, \\ w(3,6) = 14, \ w(4,v) = 11$$



#### 23. Sestrojte graf následujícího projektu a najděte kritickou cestu

В 5 С 2 D 4 A, B Ε 7 C, D F 6 l D G 3 D 5 | E, F 7 G 6 Н

4 | H, I

Q♡, A♡, 7♦, K♦, 9♠, 10♠, 5♣, 8♣