# IFS a Chaos Game

I.Kolingerová



## Literatura (1)


- M.F.Barnsley: Fractals Everywhere, Springer-Verlag, New York, 1988
- H.-O.Peitgen, D.Saupe [Eds]: The Science of Fractal Images, Springer-Verlag, New York, 1988
- H.-O.Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe: Fractals for the Classroom, Springer-Verlag, New York, 1988
- R.L. Bowman: Fractal Metamorphosis: A Brief Student Tutorial, Computers & Graphics, Vol.19, No.1, pp.157-164, 1995
- H.J.Jeffrey: Chaos Game Visualization of Sequences, Computers&Graphics, Vol.16, No.1, pp.25-33, 1992

## Literatura (2)

- J.Žára, B. Beneš, P.Felkel: Moderní počítačová grafika, Computer Press, Praha, 1998
- Materiály Pavla Tišnovského na Webu (např. na http://www.root.cz/serialy/fraktaly-v-pocitacove-grafice/)

## 1. Iterovaný funkční systém (IFS)

- M.F.Barnsley, Fractals Everywhere, Springer-Verlag, New York, 1988
- Potřebujeme pojem afinní transformace:

$$w\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) : \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

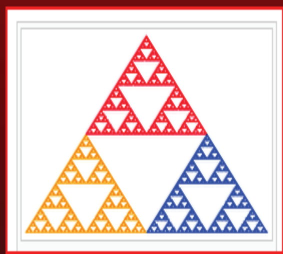
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, a, b, c, d, e, f \in R$$

=> existuje inverzní transformace

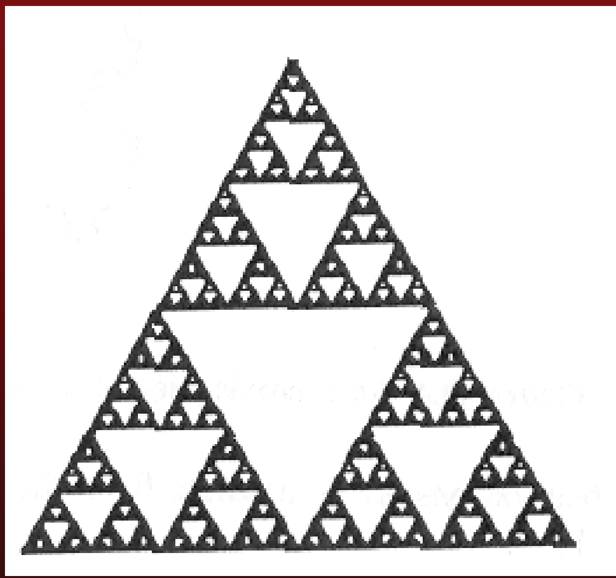
- IFS=[{w1,w2,...,wn},{p1,p2,...,pn}], Σpi=1
- wi – množina afinních transformací ("kontraktivní mapování")
- pi – jim přiřazené pravděpodobnosti
- transformace musí být tzv. průměrně kontraktivní, tj. "v průměru" zmenšovat vzdálenost mezi body
- všechny takto transformované body postupně "přitaženy" do oblasti jedné množiny – tzv. atraktor IFS
- koeficienty a,b,c,d – otáčení, zkosení, změna měřítka, e,f - posunutí

- Iterace – ze starého bodu nový, prvních pár nekreslit, pak už konvergence k atraktoru
- Př. Sierpinského trojúhelník – 3 funkce

| w | a | b | c | d | e | f | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 1/3 |
| 2 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0 | 1/3 |
| 3 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 1/3 |



- Vyšší dimenze – rovnice i pro další souřadnice
- Též možno zahrnout barvy, nelineární transformace



## 2 algoritmy pro výpočet fraktálů z IFS

## a) Deterministický

- naplnit 2D pole T v 1. a posledním řádku a sloupci jedničkami, jinak nuly
- pak aplikace f-cí wi na T, ukládat do jiného pole S

```
for i :=1 to 100 do for j :=1 to 100 do
    if T[i,j]=1 then
      begin
        S[a[1]*i+b[1]*j+e[1],c[1]*i+d[1]*j+f[1]]=1;
        S[a[2] ... ], S[a[3]...] atd. podle počtu f=cí
      end
```

- pak prohodit T, S, výstupní pole vynulovat, nakreslit buňky s T[i,j]=1

- Lze začít i jiným (neprázdným) polem hodnot, výsledek stejný
- pozor na uzavřenost vůči operaci v indexech pole

## b) Náhodná iterace

```
x:=0;y:=0; niter:= 1000;
for i:=1 to niter do
    begin
     k := Random(3)+1;
      // výběr 1 z čísel 1,2,3 se stejnou pravděp.
      newx :=a[k]*x+b[k]*y+e[k];
      newy :=c[k]*x+d[k]*y+f[k];
      x := newx; y := newy;
      if i>10 then plot (x,y)
    end
```

- Počáteční bod by byl výhodný v atraktoru, ale ten dopředu neznáme => libovol. počát. bod, např. počátek, podmínka kontraktivity zaručuje, že po transformacích bod atraktor již neopustí

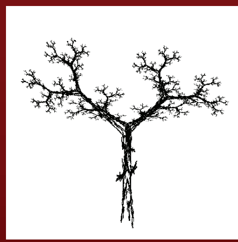
- Př.: čtverec

| w | a | b | c | d | e | f | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 1 | 1/4 |
| 2 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 50 | 1 | 1/4 |
| 3 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 50 | 1/4 |
| 4 | 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 50 | 50 | 1/4 |

- Př.: kapradí (fern)

| w | a | b | c | d | e | f | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0.16 | 0 | 0 | 0.01 |
| 2 | 0.85 | 0.04 | -0.04 | 0.85 | 0 | 1.6 | 0.85 |
| 3 | 0.2 | -0.26 | 0.23 | 0.22 | 0 | 1.6 | 0.07 |
| 4 | -0.15 | 0.28 | 0.26 | 0.24 | 0 | 0.44 | 0.07 |

- Př.: fraktální strom



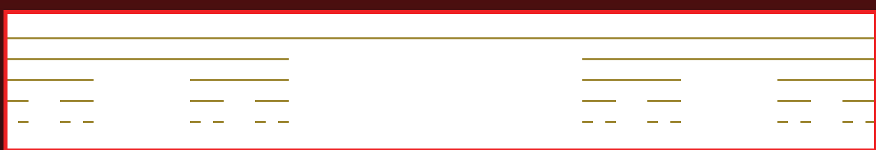
???

| w | a | b | c | d | e | f | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0.5 | 0 | 0 | 0.05 |
| 2 | 0.42 | -0.42 | 0.42 | 0.42 | 0 | 0.2 | 0.4 |
| 3 | 0.42 | 0.42 | -0.42 | 0.42 | 0 | 0.2 | 0.4 |
| 4 | 0.1 | 0 | 0 | 0.1 | 0 | 0.2 | 0.15 |

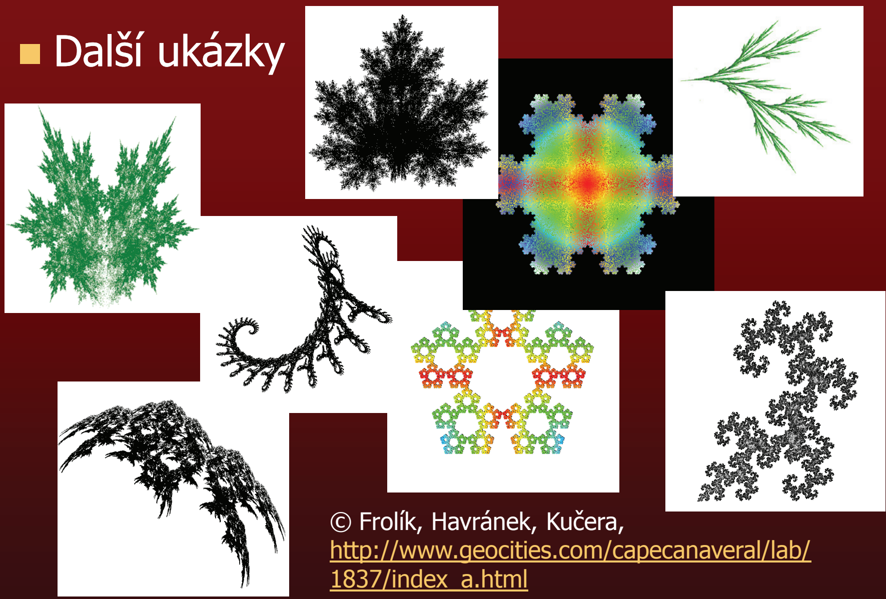
- Př.: Cantorovo discontinuum

| w | a | b | c | d | e | f | p |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.33 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.5 |
| 2 | 0.33 | 0 | 0 | 0 | 0.67 | 0 | 0.5 |

Kde zůstala afinita ????



- Další ukázky



© Frolík, Havránek, Kučera,
http://www.geocities.com/capecanaveral/lab/1837/index_a.html

## IFS – velká role ve fraktální kompresi

- IFS vlastně reprezentací obrazu (fraktálu), stačí znát matici transformací (6 reál. čísel) a vektor pravděpodobností
- pro reprezentaci obrazu n funkcemi 7n reál. čísel - velmi efektivní komprese
- nezávislost na rozlišení
- dekomprese – obraz libovolně velký
- základní problém: nalezení transformací

- Jak se hledají transformace?
  - obraz rozdělit na stejné nebo různé oblasti, adaptivní dělení pomocí kvadtree, nebo na trojúhelníky
  - snaha: maximální soběpodobnost
  - další krok: aplikace transformací a srovnávání shody
  - časově náročné, naprostá shoda nepravděpodobná, obyčejně stačí částečná shoda => vždy ztrátová komprese
  - nalezené transformace=komprimovaná reprezentace obrazu

## 2. Modifikace: Chaos Game

- nejjednodušší ručně

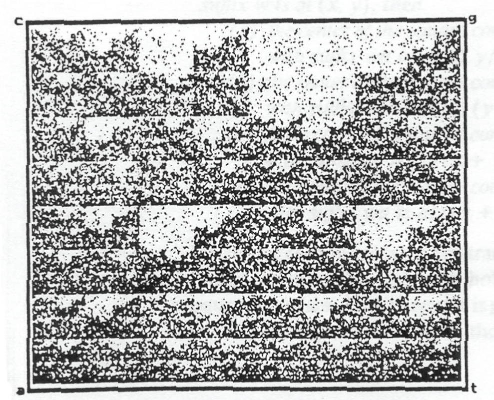
1. Nakresli na papír 3 vrcholy trojúhelníka a očísluj je (1,2 3,4 5,6)
2. Zvol počát. bod kdekoliv na papíru
3. Hoď kostkou.
4. Umísti značku na půli cesty mezi minulým bodem a vrcholem, jehož číslo kostka ukázala
5. Opakuj od 3

- atraktorem je Sierpinského trojúhelník

- 5, 6, 7 bodů – n-úhelník se vzorky
- 8 a více – vyplněný polygon bez středu
- 4 – rovnoměrně vyplněný čtverec
- Matematicky je Chaos Game IFS
  (D.cv.: odvoďte z výše uvedeného algoritmu koeficienty IFS; co zastupuje pravděpodobnost?)
- Pokud pravděpodobnost nerovnoměrná, stejný atraktor, ale jiné stínování (totéž pro obecný IFS)
- Pokud např. nerovnoměrné pokrytí čtverce při stejných pravděpodobnostech => špatný generátor náh. čísel

- Užití: např. čtverec – pro reprezentaci 1D posloupnosti 2D formou zachovávající strukturu posloupnosti
- struktura => nenáhodnost

- Př.: DNA sekvence – formálně řetězec písmen a,c,g,t (nebo u) => čtverec s takto ozn. rohy




CGR of human beta globin region on chromosome 11 (HUMHBB) (73,357 bases).

- pokud abeceda >= 4, raději n stejných nepřekrývajících se čtverců než n-gon (není pravidelně zaplněn)
- neuniformita v posloupnosti vede na neuniformitu v obrazu

- Př.:DNA, 24 tříd ekvivalence trojic aminokyselin
- Př.: podobnost charakteristik prací 1 autora

## 3. Možnosti úprav

a) R.A.Bowman, 1995

Rovnice pro IFS ve tvaru

X = SC*(XP-XF(I))+XF(I)

Y = SC*(YP-YF(I))+YF(I)

kde I – náhodný index jednoho z pevných bodů

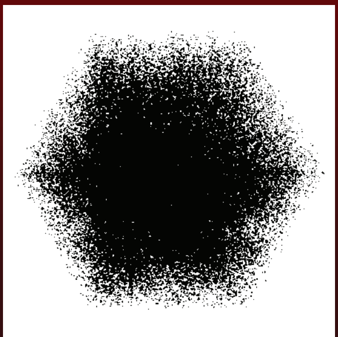
(XP,YP) – minulý vykreslovaný bod

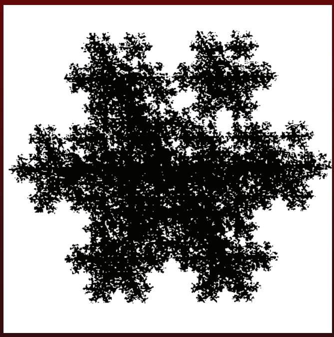
SC=1/B, kde B míra síly atrakce v každém pevném bodě, B>1

iteruje 100 000 x

- Př.: Modifikace vločky – 6 vnějších pevných bodů, 5 pevných vnitřních, chybějící bod ruší symetrii
- B se mění od 2 do 6

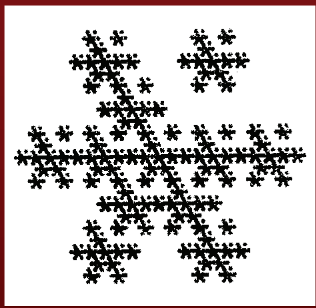
B=2

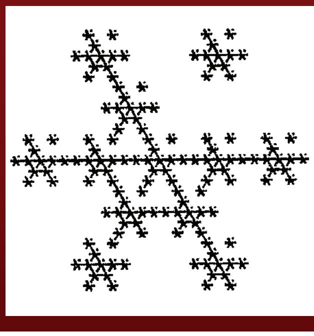




B=3

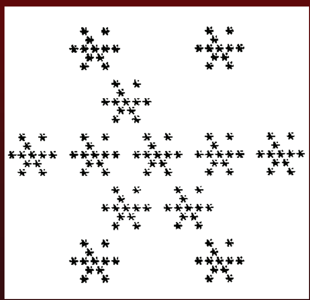
B=4





B=5

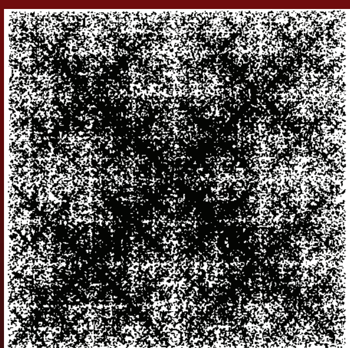
B=6

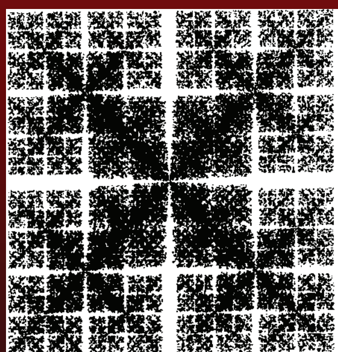


| Point | Coordinates | (x,y) |
|---|---|---|
| 1 | 0.0 | 0.0 |
| 2 | 1.0 | 0.0 |
| 3 | 0.5 | 0.866025447845459 |
| 4 | −0.5 | 0.866025447845459 |
| 5 | −1.0 | 0.0 |
| 6 | −0.5 | −0.866025447845459 |
| 7 | 0.5 | −0.866025447845459 |
| 8 | 0.5 | 0.0 |
| 9 | −0.25 | 0.4330127239227295 |
| 10 | −0.5 | 0.0 |
| 11 | −0.25 | −0.4330127239227295 |
| 12 | 0.25 | −0.4330127239227295 |

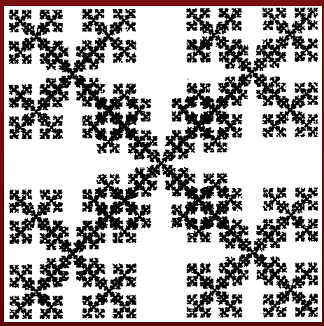
- Př.: 5 pevných bodů beze změn, mění se jen B

B=2

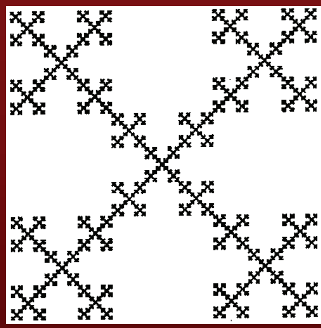




B=2.1

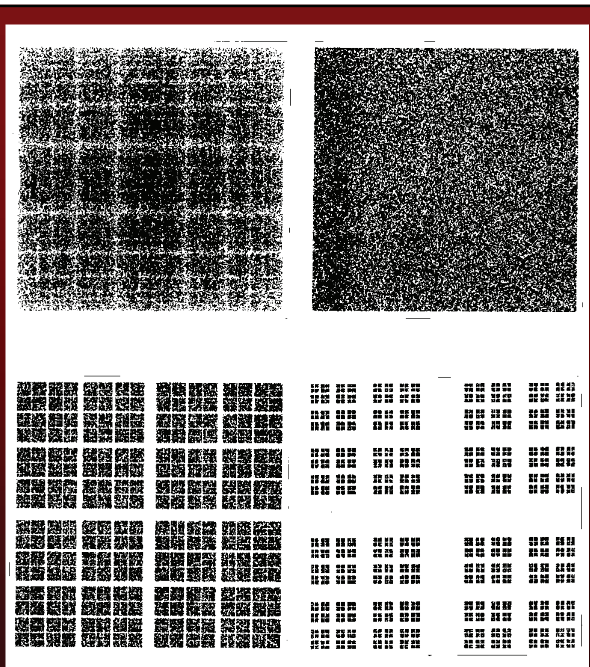


B=2.4

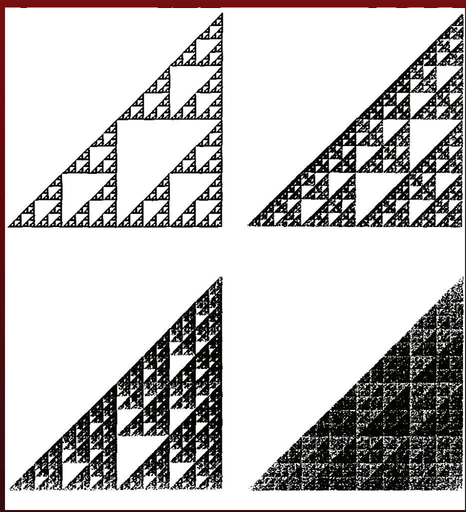


B=3

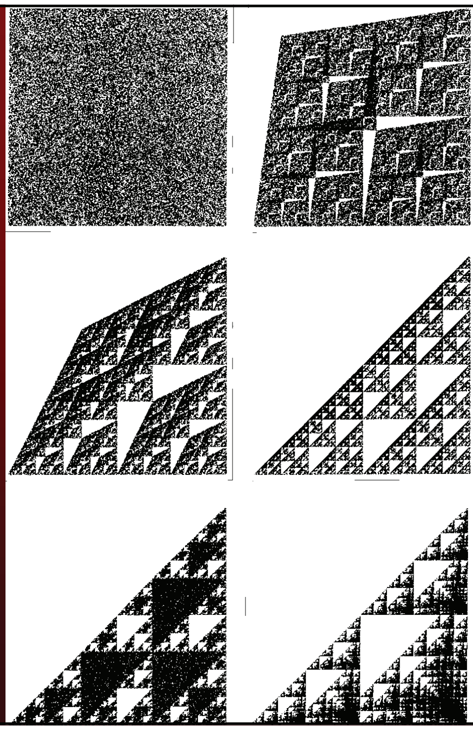
B 1.7, 2,
2.1, 2.4



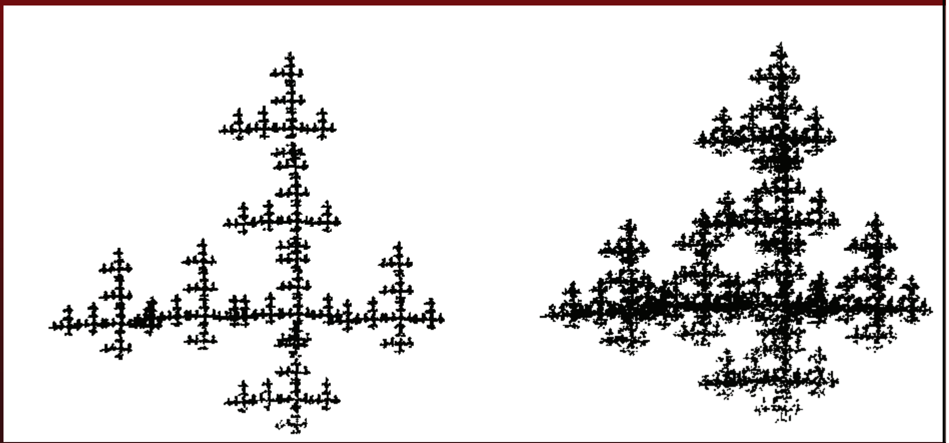
a) Původní stav
b) Přidán bod v těžišti
c) Přidán také bod doprostřed pravé hrany
d) Přidán také bod doprostřed dolní hrany



4. vrchol posouván směrem k trojúhelníku



## Volná tvorba – "Forest Lake" – zima a léto



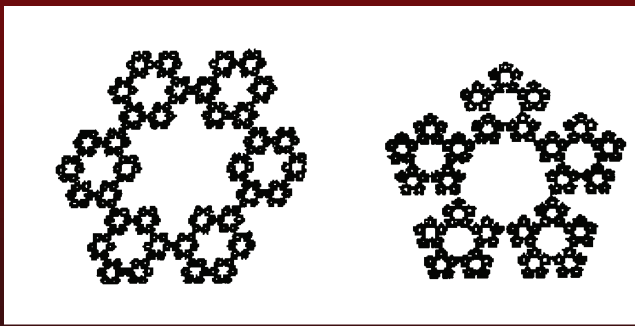
- Možno zahrnout rotaci

X=SC*(COS(TH)*(XP-XF(I))
-SIN(TH)*(YP-YF(I)))+XF(I)

Y=SC*(SIN(TH)*(XP-XP(I))
+COS(TH)*(YP-YF(I))+YF(I)

- Další možná úprava: různé B pro každý pevný bod (místo SC pak SC(I)) b)R. L. Dewaney, 1995

Změna vzdálenosti, po které vyrazíme k vrcholu:



c) I.Kolingerová, P. Lobaz

Fraktály s omezením: do iterace zahrnout omezení

Spočti $x_{i+1}, y_{i+1}$

if $(x_{i+1}, y_{i+1})$ vně omezující oblasti then

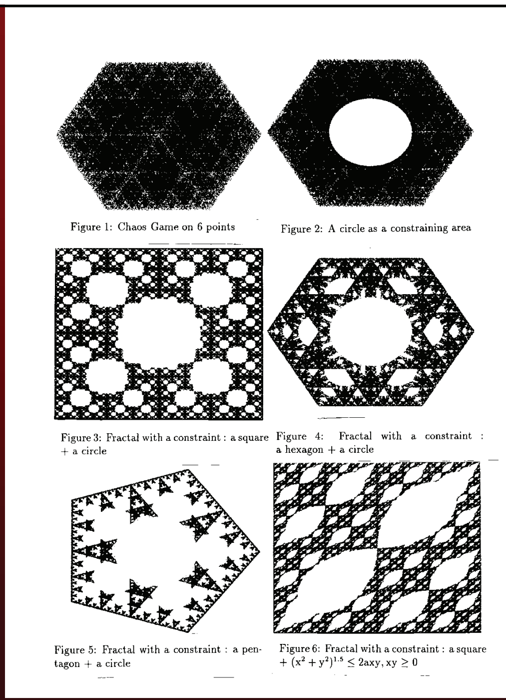
begin

$x_i := x_{i+1}$; $y_i := y_{i+1}$;

plot $(x_i, y_i)$

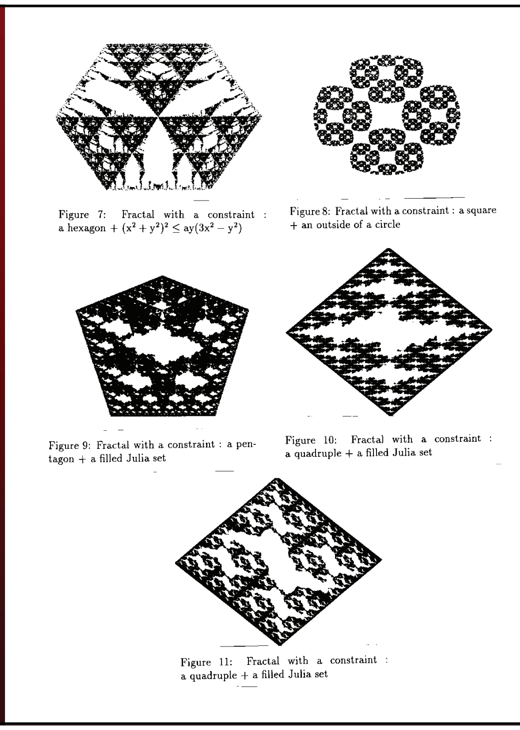
end

- pokud vlezu do omezující oblasti, nechám starý bod




- omezující oblast
  může být opět fraktál

- pro počet vrcholů pod 10,
  pak už málo zřetelné



- Možno body obarvovat podle toho, kolikrát jsme se do nich strefili