Kapitola 1. Posloupnosti

Karta 1.0.' (aritmetika a neurčité výrazy na R*)

Uspořádání na rozšířené množině reálných čísel $\mathbb{R}^* = \langle -\infty, +\infty \rangle$ *a absolutní hodnota:*

$$-\infty < +\infty \qquad -\infty < c < +\infty \quad \textit{pro každé } c \in \mathbb{R}$$

$$|-\infty| = |+\infty| = +\infty$$

Stručně o aritmetice $\mathbb{R}^*$*:*

$$\begin{array}{rcll} -(\pm\infty) & = & \mp\infty & \\ c + (\pm\infty) & = & \pm\infty & \textit{pro } c \neq \mp\infty \\ c \cdot (\pm\infty) & = & \begin{cases} \pm\infty & \textit{pro } c > 0 \\ \mp\infty & \textit{pro } c < 0 \end{cases} & \\ \dfrac{c}{\pm\infty} & = & 0 & \textit{pro } c \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (+\infty)^c & = & \begin{cases} 0 & \textit{pro } c < 0 \\ +\infty & \textit{pro } c > 0 \end{cases} \\ c^{+\infty} & = & \begin{cases} 0 & \textit{pro } 0 < c < 1 \\ +\infty & \textit{pro } c > 1 \end{cases} \\ c^{-\infty} & = & \begin{cases} +\infty & \textit{pro } 0 < c < 1 \\ 0 & \textit{pro } c > 1 \end{cases} \end{array}$$

odkud je však na první (druhý, třetí, ...) pohled zřejmé, že existuje **7** *problematických operací:*

$$\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“} \qquad \text{„}\frac{\textit{cokoli}}{0}\text{“} \qquad \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \qquad \text{"}\infty - \infty\text{"} \qquad \text{"}1^{\infty}\text{"} \qquad \text{"}0^0\text{"} \qquad \text{"}\infty^0\text{"}$$

Souhrně je nazýváme **neurčité výrazy** *a snadno se s nimi můžeme setkat při výpočtu limit:*

$$\begin{array}{ll} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} & \textit{limita typu } \text{"}\dfrac{\infty}{\infty}\text{"} \textit{ resp. } \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n & \textit{limita typu } \text{"}0 \cdot \infty\text{"} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) & \textit{limita typu } \text{"}\infty - \infty\text{"} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} & \textit{limita typu } \text{"}1^{\infty}\text{"} \textit{ resp. } \text{"}0^0\text{"} \textit{ resp. } \text{"}\infty^0\text{"} \end{array}$$

Okolí nevlastních čísel $\pm\infty$*:*

okolí plus nekonečna
$U(+\infty) = (1/\delta, +\infty\rangle$

okolí mínus nekonečna
$U(-\infty) = \langle -\infty, -1/\delta)$

prstencové okolí plus nekonečna
$P(+\infty) = (1/\delta, +\infty)$

prstencové okolí mínus nekonečna
$P(-\infty) = (-\infty, -1/\delta)$

Karta 1.0." (limity posloupností)

$$\ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^2 \ll n^3 \ll \cdots \ll n^k \ll e^n \ll n! \ll n^n$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{pro } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{pro } q = 1 \\ +\infty & \text{pro } 1 < q \\ \nexists & \text{pro } q \le -1 \end{cases}$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = \begin{cases} 0 & \text{pro } |a| > 1 \\ +\infty & \text{pro } 0 < a \le 1 \\ \nexists & \text{pro } -1 \le a < 0 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0 \quad \text{pro } a > 0,\ a \neq 1,\ k \in \mathbb{N}$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \text{pro } a \in \mathbb{R}$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

$$\underbrace{\log_a n \ll n^k}_{a>0,\ a\neq 1} \overbrace{\ll}^{|a|>1} \underbrace{a^n \ll n!}_{a\in\mathbb{R}} \ll n^n \qquad k \in \mathbb{N}$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \text{pro } a > 0$$

$\triangleright$ $$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

Definice 1.1. (posloupnost reálných čísel)

Posloupnost reálných čísel je zobrazení,
jehož definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ a oborem hodnot množina $H \subset \mathbb{R}$.

$$\textit{píšeme:} \qquad (a_n)\,, \quad (a_n)_{n=1}^{+\infty}\,, \quad (a_1, a_2, a_3, \dots)\,, \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Číslu n říkáme index prvku a číslu a_n n-tý člen posloupnosti.

Definice 1.2. (algebra posloupností)

$$\text{Posloupnosti} \left\{ \begin{array}{c} (a_n + b_n) \\ (a_n - b_n) \\ (a_n \cdot b_n) \\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \end{array} \right. \quad \text{nazýváme} \quad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{součtem} \\ \textbf{rozdílem} \\ \textbf{součinem} \\ \textbf{podílem} \end{array} \right. \quad \text{posloupností } (a_n) \text{ a } (b_n).$$

(*v případě podílu předpokládáme* $b_n \neq 0$ *pro všechna* $n \in \mathbb{N}$)

Definice 1.3. (omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost (a_n) je

i) **omezená zdola**, jestliže existuje číslo $m \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq m$,

ii) **omezená shora**, jestliže existuje číslo $M \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq M$.

Konečně (a_n) je **omezená posloupnost**, pokud je omezená zdola i shora.

(*pro omezené posloupnosti se často používá zápis* $\exists K > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ |a_n| \leq K$)

Definice 1.4. (monotónní posloupnost)

Posloupnost (a_n) se nazývá:

$$\left. \begin{array}{ll} \textbf{klesající}, & \text{platí-li} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \geq a_{n+1}, \\ \textbf{rostoucí}, & \text{platí-li} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n \leq a_{n+1}, \end{array} \right\} \textbf{monotónní},$$

$$\left. \begin{array}{ll} \textbf{ostře klesající}, & \text{platí-li} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n > a_{n+1}, \\ \textbf{ostře rostoucí}, & \text{platí-li} \ \forall n \in \mathbb{N}: \ a_n < a_{n+1}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \textbf{ostře} \\ \textbf{monotónní}. \end{array}$$

Definice 1.5. (minimum, maximum, infimum a supremum posloupnosti)

$$\left. \begin{array}{l} \textbf{Minimem} \\ \textbf{Maximem} \\ \textbf{Infimem} \\ \textbf{Supremem} \end{array} \right\} \text{posloupnosti } \big(a_n\big), \text{ rozumíme } \left. \begin{array}{l} \textbf{minimum} \\ \textbf{maximum} \\ \textbf{infimum} \\ \textbf{supremum} \end{array} \right\} \text{množiny } \big\{a_n\big\}.$$

(*korektně množina* $\{a_n\} = \{a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : a = a_n\}$ *je oborem hodnot posloupnosti*)

Definice 1.6. (podposloupnost)

Nechť je dána posloupnost (a_n) a nechť $(k_1, k_2, k_3, \ldots)$ je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel. Posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **posloupnost vybraná** z posloupnosti (a_n) nebo také **podposloupnost** posl. (a_n).

Definice 1.7. (limita posloupnosti)

Řekneme, že posloupnost (a_n) má **limitu**, jestliže

$$\text{existuje } a \in \mathbb{R}^* \text{ takové, že } \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ n > n_0 \ \Rightarrow \ a_n \in U_\varepsilon(a)$$

$$\left(\textit{píšeme:} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad \lim a_n = a \qquad a_n \to a \right)$$

Rozlišujeme: **limitu vlastní** ... $a \in \mathbb{R}$
limitu nevlastní ... $a = \pm\infty$

Posloupnost (a_n) nazveme: **konvergentní** pokud má vlastní limitu,
divergentní pokud má limitu nevlastní a nebo limita neexistuje.

Věta 1.8. (o limitách posloupností)

i) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

ii) Každá konvergentní posloupnost je omezená

$$\textit{konvergentní} \quad \Rightarrow \quad \textit{omezená}$$

iii) Každá omezená a monotónní posloupnost je konvergentní.

$$\underset{\substack{\lim a_n = \inf\{a_n\} \\ \lim a_n = \sup\{a_n\}}}{\textit{konvergentní}} \quad \Leftarrow \quad \textit{omezená} \ + \ \underset{\substack{\textit{klesající} \\ \textit{rostoucí}}}{\textit{monotónní}}$$

$$\left(\textit{omezená} \not\Rightarrow \textit{konvergentní} \qquad \textit{monotónní} \not\Rightarrow \textit{konvergentní} \qquad \textit{konvergentní} \not\Rightarrow \textit{monotónní} \right)$$

Věta 1.9. (algebra limit posloupností)

Mějme dvě posloupnosti, které mají limitu: $\begin{cases} a_n \to a, \\ b_n \to b. \end{cases}$

Potom má limitu i jejich součet, rozdíl, součin a podíl, přičemž platí:

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = a \pm b$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = a \cdot b$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n} = \frac{a}{b}$$

(*pokud na pravé straně není neurčitý výraz*

Věta 1.10. (o sevření)

Mějme tři posloupnosti (a_n), (b_n), (c_n) a předpokládejme, že:

i) pro skoro všechna n platí .... $a_n \leq b_n \leq c_n$

ii) posloupnosti (a_n), (c_n) mají stejnou limitu .... a

Potom má posloupnost (b_n) také limitu a platí: $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$

Definice 1.11. (Eulerovo číslo)

Eulerovo číslo definujeme vztahem $\mathrm{e} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \doteq$

Definice 1.12. (cauchyovská posloupnost)

Reálná posloupnost (a_n) se nazývá **cauchyovská v $\mathbb{R}$** (**fundamentální v $\mathbb{R}$**), jestliže:

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n, m \in \mathbb{N} : n > n_0\ \wedge\ m > n_0\ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Definice 1.13. (horní a dolní limita)

Číslo $c \in \mathbb{R}^*$ je **hromadný bod posloupnosti** (a_n), pokud existuje podposloupnost (a_{k_n}) posloupnosti (a_n), pro kterou platí

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = c.$$

Označme: $M = \left\{\ c \in \mathbb{R}^* :\ c \text{ je hromadný bod posloupnosti } (a_n)\ \right\}$

Supremum (infimum) množiny M nazveme **horní (dolní) limitou** posloupnosti (a_n):

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \sup M \qquad \left(= \limsup_{n\to+\infty}\ a_n \quad \text{tzv. } \textbf{limes superior}\right)$$

$$\underline{\lim_{n\to+\infty}}\ a_n = \inf M \qquad \left(= \liminf_{n\to+\infty}\ a_n \quad \text{tzv. } \textbf{limes inferior}\right)$$