

3 Domácí cvičení č. 3

Příklad 3.1. Rozhodněte, zda prvky lineárního vektorového prostoru \mathcal{L} jsou lineárně závislé či nezávislé.

1. $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
 $v_1 = [1, 2, -3, 4, 5]^T$, $v_2 = [-2, 1, 5, -2, -1]^T$, $v_3 = [0, -4, 2, 1, -1]^T$, $v_4 = [-1, -1, 4, 3, 3]^T$.
2. $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$,
 $p_1 = x^3 - x^2 + 2x + 1$, $p_2 = -x^3 + 2x^2 - x + 4$, $p_3 = 2x^3 - 3x^2 + x - 3$, $p_4 = x^3 + 4x^2 - x + 2$.
3. $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{2,3}$,
 $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.
4. $\mathcal{L} = \mathcal{C}(0, 1)$,
 $f_1 = e^x$, $f_2 = e^{-x}$, $f_3 = \sinh x$.

Příklad 3.2. Určete bázi a dimenzi prostoru \mathcal{V} .

1. \mathcal{V} je generován prvky $v_1 = [1, -1, 2, 3, -5]^T$, $v_2 = [2, 3, -1, -2, 4]^T$, $v_3 = [-3, 2, 2, 1, 1]^T$,
 $v_4 = [1, 3, 5, 5, -5]^T$.
2. \mathcal{V} je generován prvky $p_1 = x^3 + x^2 - x + 2$, $p_2 = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$, $p_3 = x^2 + 2x + 3$,
 $p_4 = -x^3 + 2x^2 - x + 1$.
3. \mathcal{V} je generován prvky $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
4. \mathcal{V} je generován prvky $f_1 = e^x$, $f_2 = \cosh x$, $f_3 = \sinh x$.

Příklad 3.3. Rozhodněte, zda prvek $y \in \mathcal{V}$. Pokud $y \in \mathcal{V}$, určete \hat{y} souřadnice prvku y v bázi prostoru \mathcal{V} .

1. \mathcal{V} je generován prvky $v_1 = [2, 3, -1, 2, -2]^T$, $v_2 = [-1, 2, 4, -1, 3]^T$, $v_3 = [5, -6, 2, 3, -1]^T$,
 $v_4 = [3, 3, 6, 2, 2]^T$; $y = [-38, 31, -1, -26, 18]^T$.
2. \mathcal{V} je generován prvky $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 5$, $p_2 = -2x^3 - x^2 - 1$, $p_3 = 3x^2 + 2x + 2$,
 $p_4 = x^3 - x^2 - 7x + 10$; $y = 5x^3 + 4x^2 + 3x - 2$.
3. \mathcal{V} je generován prvky $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -5 & 8 & 3 \\ -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 0 & -11 & 4 \\ -7 & 7 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 13 \\ -6 & 3 & 16 \end{bmatrix}$.
4. \mathcal{V} je generován prvky $f_1 = \sinh x$, $f_2 = \cosh x$; $y = e^{-x}$.
5. \mathcal{V} je generován prvky $v_1 = [1, -1, 2, 4]^T$, $v_2 = [-2, 3, 1, -3]^T$, $v_3 = [-1, 3, 8, 6]^T$,
 $v_4 = [-4, 5, -3, -11]^T$; $y = [-13, 22, 19, -7]^T$.

6. \mathcal{V} je generován prvky $p_1 = x^5 - x^4 + 2x^3 + 1$, $p_2 = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 5$, $p_3 = 2x^5 + 4x^3 + x^2 + x$,
 $p_4 = -x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 3$, $p_5 = x^5 + x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 7x - 4$;
 $y = 6x^5 + 6x^4 + 15x^3 + 19x^2 + 6x + 11$.

Příklad 3.4. Ukažte, že množina \mathcal{V} je podprostor prostoru \mathcal{L} . Určete dimenzi a bázi podprostoru \mathcal{V} . Ukažte, že vektor $y \in \mathcal{V}$ a určete \hat{y} souřadnice vektoru y v bázi podprostoru \mathcal{V} .

- $\mathcal{V} = \{ [a - 2b, b + c, 4a + b - c, -a - b, 3b + 2c]^T : a, b, c \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
 $y = [1, 5, 19, -7, 12]^T$;
- $\mathcal{V} = \{ (a - b)x^5 + (4b - c + 3d)x^4 + (2a + c + 3d)x^3 + (-a + b + 2c + 2d)x^2 + (3a - b - 2c)x + (a + 2b + 3d) : a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$,
 $y = 5x^5 + 13x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 29x + 11$;
- $\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a + 2c - d + 3e + 2f & 2a + b - c - 2e + 2f & -a + 2b + d + e + 2f \\ b + 2d + 2e + 3f & a + c + 2e + 2f & a + 2c - d + 3e + 2f \\ 2a - c - 2e + f & 2b + 2f & a + 3b - 2d - 2e + 2f \end{bmatrix} : \right.$
 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,3}$,
 $y = \begin{bmatrix} -11 & 17 & 9 \\ 9 & -3 & -11 \\ 12 & 10 & 14 \end{bmatrix}$;
- $\mathcal{V} = \{ (a - 3c)x^7 + (4b + 2d)x^6 + (a + b - 3c)x^5 + (3b - 2c + 1 + a)x^4 + (c + d)x^3 + 2(a + 4b)x^2 + 3(a - d + c)x + 3d : a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L} = \mathcal{P}_7$,
 $y = 5x^7 + 13x^5 + 9x^3 - 15x^2 + 29x + 11$;
- $\mathcal{V} = \{ [2a - b + 3c, a + d, b - 4c, 2c - d, a - b + 4c]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$, $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$,
 $y = [-7, 5, 11, -8, -10]^T$;
- $\mathcal{V} = \left\{ \begin{bmatrix} a + 3c & b - c \\ d + a & 4c + 2a \\ 3b + c & b + d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,2}$, $y = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ 5 & 20 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$;
- $\mathcal{V} = \{ (a - b + c)x^5 + (3b - 2c)x^4 + (-a + 2b)x^3 + (3a - b)x^2 + (2a + b - 3c)x + (a + b + c) : a, b, c \in \mathbb{R} \}$,
 $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$,
 $y = -5x^5 + 23x^4 + x^3 + 12x^2 + 34x + 1$;
- $\mathcal{V} = \{ [a + 2b - c + 2d, 2a - b - 4d, -a + 2b + 2c + 7d, 3a - 2b + c - 6d, 4a - 2c - 6d]^T : a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$,
 $\mathcal{L} = \mathbb{R}_5$, $y = [14, 9, 9, 14, 22]^T$.

Příklad 3.5. Jsou dány podprostory \mathcal{U} , \mathcal{V} prostoru \mathcal{L} . Určete dimenze a báze podprostorů \mathcal{U} , \mathcal{V} . Ukažte, že $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ je podprostor prostoru \mathcal{L} a určete dimenzi a bázi $\mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

- $\mathcal{L} = \mathbb{R}_7$, \mathcal{U} je generován prvky $u_1 = [3, -1, 2, 3, -2, 0, -1]^T$, $u_2 = [1, 1, -3, 8, -6, -4, 7]^T$,
 $u_3 = [-3, -1, 1, -1, 5, 1, -5]^T$, $u_4 = [2, 0, -3, 18, -9, -7, 8]^T$,
 \mathcal{V} je generován prvky $v_1 = [2, 1, -3, 0, 2, 0, 1]^T$, $v_2 = [-1, -4, 8, 2, 2, 2, -10]^T$,
 $v_3 = [3, -1, -2, 4, 9, 1, -7]^T$, $v_4 = [1, -2, 1, 4, 7, 1, -8]^T$, $v_5 = [4, -11, 16, 10, 19, 7, -35]^T$.
- $\mathcal{L} = \mathcal{P}_5$, \mathcal{U} je generován prvky $u_1 = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 13x + 2$,
 $u_2 = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x - 2$, $u_3 = -2x^5 + x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 7x$,
 $\mathcal{V} = \{ (a + 2b)x^5 + (2a + b + 2c)x^4 + (-a + b - 2c)x^3 + (-3a - 4c)x^2 + (2a + b + 4c)x + (-a + b - c) : a, b, c \in \mathbb{R} \}$.

$$3. \mathcal{L} = \mathcal{M}_{3,3}, \mathcal{U} = \left\{ \begin{bmatrix} a-2d+2e & 2b+e+f & b+d+e+2f \\ a+c+2e+2f & -b+2c+d-e & b-c+d+e+2f \\ -b+2e+2f & a+c+2e+2f & a+b+d+e+2f \end{bmatrix} : \right. \\ \left. a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathcal{V} \text{ je generován prvky } B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$