Křivky a plochy v počítačové grafice

I.Kolingerová

Obsah

- 1. Způsoby zadání
- 2. Aproximační křivky
- 3. Bézierovy křivky
- 4. B-spline křivky
- 5. NURBs křivky
- 6. Aproximační plochy

Literatura: např. J.Žára a kol.: Moderní počítačová grafika, 2.vyd., Computer Press, 2004

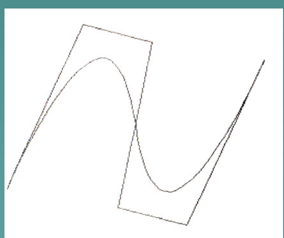
Obrázky: J.Žára a kol.: Moderní počítačová grafika, 2.vyd., Computer Press, 2004 a vlastní, pokud není uvedeno jinak

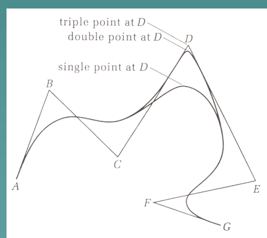
1. Způsoby zadání

- Analytické - explicitní, implicitní a parametrický popis
- Interpolační - zadané body, kt. má křivka-plocha procházet
- Aproximační - k zadaným bodům se jen přibližujeme, některými procházíme; v PG nejčastěji

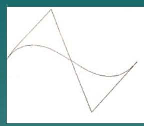
2. Aproximační křivky

- Zadány řídícími body, i násobnými (snížení řádu spojitosti)
- Polynomiální vztahy => při vysokém řádu numer. nestabilní => nejčastěji jen kubiky

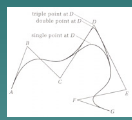


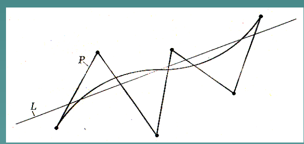


Požadavky

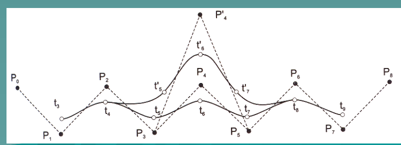


- Možnost ovlivňování tvaru pomocí říd. bodů
- Možnost zadávání násobných ř. bodů
- Nezávislost tvaru na volbě SS
- Pokud možno lokální řízení tvaru
- Dodržení požad. stupně spojitosti (též při skládání křivek/ploch)
- Odvozování tvaru z rozmístění říd.bodů, vyhlazování jejich odchylek
- Symetrie
- Jednoduchost výpočtu
- Vzhled - subjektivní
- Všestrannost





Obvykle metoda nesplňuje vše.



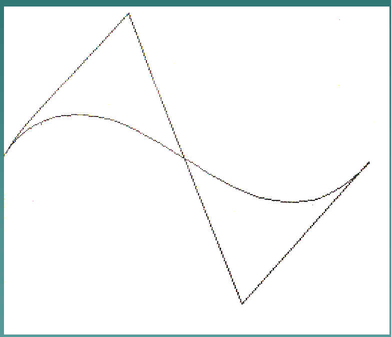
3. Bézierovy křivky

- Od cca 1960, francouzské automobilky
- Křivka stupně n zadána $n+1$ body

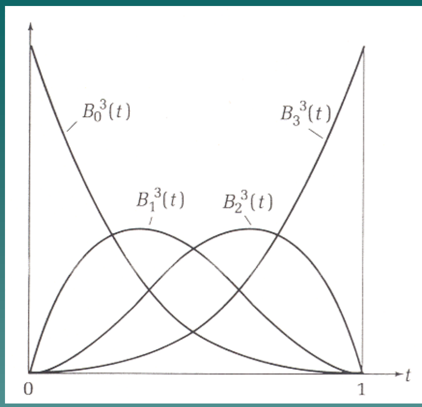
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_i^n(t), t \in <0;1>$$

- kde t - parametr, P_i - řídicí body, B_i^n - Bernsteinovy polynomy

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, i = 0,1,\dots,n,$$
$$\binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1$$

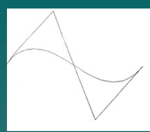


Ukázka Bézierovy křivky stupně 3

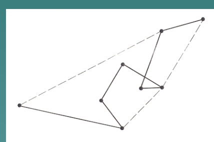


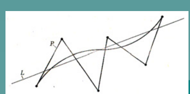
Bernsteinovy polynomy stupně 3

Vlastnosti Bézierovy křivky

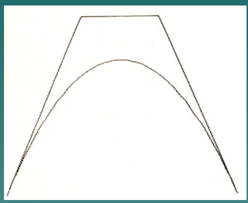


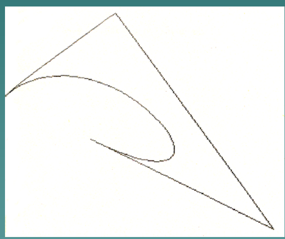
- Začíná a končí v krajních zadaných bodech
- Bod ovlivňuje celou křivku
- Afinní invariance, invariance vůči afinní trans. Parametru
- Vlastnost konvexní obálky
- Zmenšování výchylek říd. bodů
- Pokud více bodů než n+1, buď růst stupně křivky nebo nutno navázat několik částí

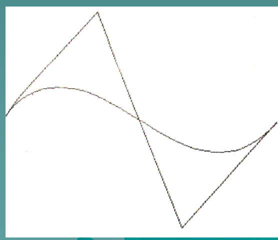




Ukázky Bézierových křivek







Bézierovy kubiky s jejich řídící polygony

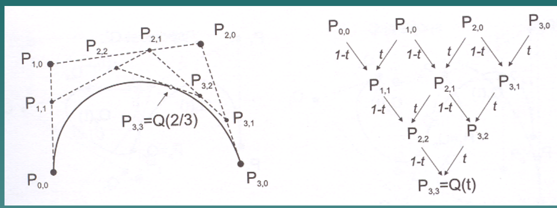
Výpočet

- Algoritmus de Casteljau - bod $P(t)$ postupným iteračním dělením úseček říd. polygonu poměrem ~ t

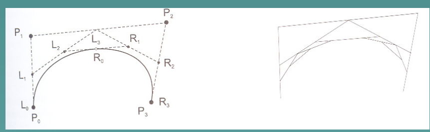
$$P_j^i = (1-t)P_{j-1}^{i-1} + tP_j^{i-1},$$
$$i = 1,2,\ldots,n,\ j = i, i+1,\ldots,n$$

- P_n^n je bodem křivky

Algoritmus de Casteljau



Výpočet bodu v t=2/3 a schéma výpočtu



Dělení řídicího polygonu na 2 části, konvergence ř.p. k Béz. křivce

4. B-spline křivky

- Není nutné zvyšovat stupeň křivky s růstem počtu bodů

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i N_i^k(t), t \in < 0; t_n >$$

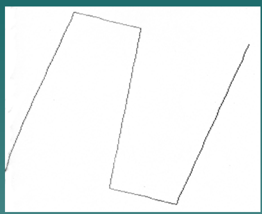
$$N_i^1(t) = \begin{cases} 1 \text{ pro } x_i \le t < x_{i+1} \\ 0 \text{ v ostat. případech} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{(t - x_i) N_i^{k-1}(t)}{x_{i+k-1} - x_i} + \frac{(x_{i+k} - t) N_{i+1}^{k-1}(t)}{x_{i+k} - x_{i+1}}$$

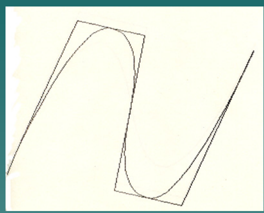
$$\frac{0}{0} = 0$$

kde t - parametr,
P_i - řídicí body,
N_i^k - bázové funkce,
k – stupeň křivky
$n+1$ – počet ř. bodů
x_i - uzlový vektor

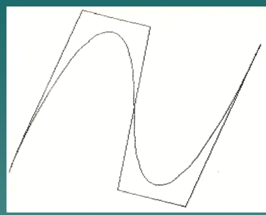
Ukázky B-spline křivek



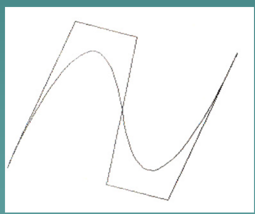
1. stupně



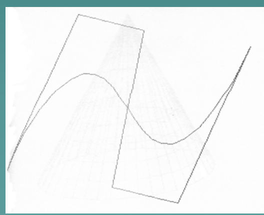
2. stupně



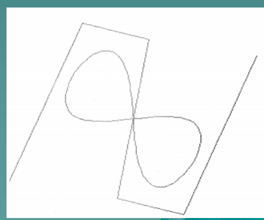
3. stupně



4. stupně



5. stupně



5. stupně periodická

Vlastnosti B-spline křivky

- Začíná a končí v krajních zadaných bodech
- Bod ovlivňuje jen *k* intervalů
- Afinní invariance, invariance vůči afinní trans. Parametru
- Vlastnost konvexní obálky
- Zmešování výchylek říd. bodů
- Pokud více bodů než $n+1$, není nutný ani růst stupně křivky ani navazování několika částí

Volba uzlového vektoru

- Pro neperiodické B-spline modelující otevřené křivky: celkem $k+n+1$ hodnot

  $x_i=0$ pro $i = 0,1,\dots,k-1$

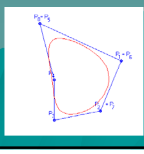
  $x_i=i-k+1$ pro $k \le i \le n$

  $x_i=n-k+1$ pro $i = n+1,n+2,\dots,n+k$
- Dostaneme $n-k+1$ segmentů
- Pro periodické B-spline modelující uzavřené křivky:

  $x_i=i$, $i=0,1,\dots,n+1$

  Pro tuto volbu nutná redukce bázové fce na:

$$N_i^k(t) = N_0^k((t-i+n+1)\bmod(n+1))$$



Příklady 1

- B-spline zadaný 4 body, stupně 3, otevřený:

  dostaneme 1 kubický segment

  uzlový vektor je (0,0,0,1,1,1,1)

  totožná křivka s Bézierovou kubikou
- B-spline zadaný 5 body, stupně 3, otevřený

  dostaneme 2 kubické segmenty

  uzlový vektor je (0,0,0,1,2,2,2,2)

Příklady 2

- B-spline zadaný 4 body, stupně 3, uzavřený:
  dostaneme 4 kubické segmenty
  uzlový vektor je (0,1,2,3,4)
  křivka nezačíná a nekončí v zadaných bodech

- B-spline zadaný 5 body, stupně 3, uzavřený:
  dostaneme 5 kubických segmentů
  uzlový vektor je (0,1,2,3,4,5)
  křivka nezačíná a nekončí v zadaných bodech

Coonsova B-spline křivka

- Uniformní kubická B-spline křivka, nezačíná a nekončí v krajních řídicích bodech

$$P_j(t) = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{3} P_{j+i} C_i(t-j), t \in < j; j+1 >, j = 0,\dots,n-3$$

$$C_0(s) = -s^3 + 3s^2 - 3s + 1 = (1-s)^3$$

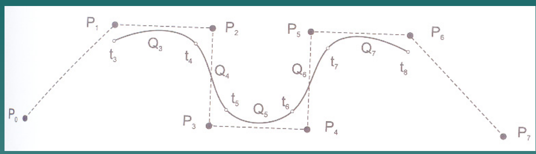
$$C_1(s) = 3s^3 - 6s^2 + 4$$

$$C_2(s) = -3s^3 + 3s^2 + 3s + 1$$

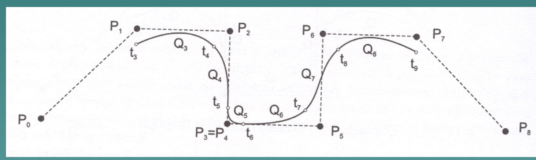
$$C_3(s) = s^3$$

- Výhoda: snazší výpočet než B-spline, snadné napojování, změna vrcholu ovlivní max. 4 segmenty

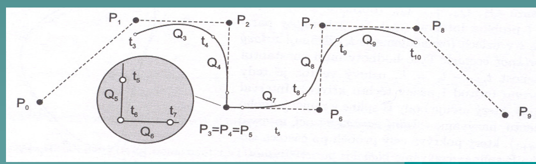
Ukázky - Coonsův kubický B-spline



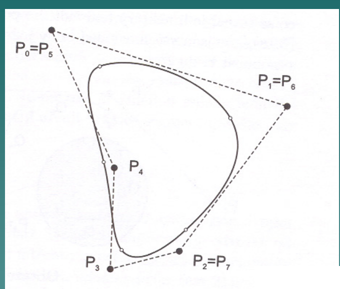
Dvojnásobný bod



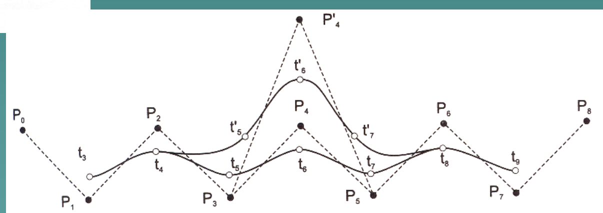
Trojnásobný bod



Ukázky - Coonsův kubický B-spline



Uzavřený spline



Lokalita změny tvaru při změně polohy říd. bodu

5. NURBs křivky

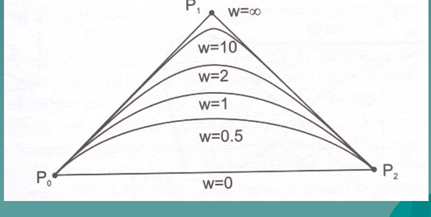
- Neuniformní racionální B-spline křivky
- Neuniformní - o parametru, racionální - o váhách bodů a dělení sumou vah

$$P(t) = \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i P_i N_i^k(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i N_i^k(t)}$$

w_i - váhy řídicích bodů, obvykle nezáporné

Vlastnosti NURBs křivky

- Jako B-spline, ale umí vyjádřit i kuželosečky (např. kružnici) a širší možnosti řízení
- Pro jednotkové váhy totožné s B-spline křivkou, pro *n*+1 bodů a stupeň *n* s Bézierovou

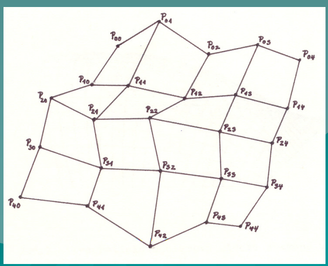


Výpočet

- Algoritmus Cox-de Boorův - zobecnění de Casteljau, postupné dělení úseček říd. polygonu v těch částech, kt. ovlivňují současný segment

6. Aproximační plochy

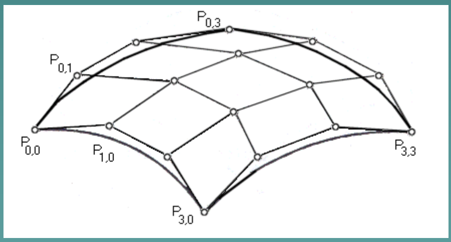
- Zadány maticí řídicích bodů (tvoří síť nebo mapu plochy, řídicí mnohostěn)
- Vztahy kombinací říd. bodů a vždy 2 bázových f-cí pro 2 parametry
- Vlastnosti odpovídají křivkám, z nichž složeny



Aproximační plochy

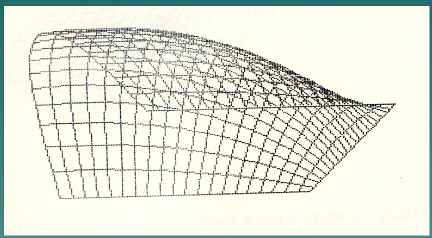
Bézierovy plochy

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}B_i^m(u)P_{i,j}B_i^n(v), u,v\in<0;1>$$

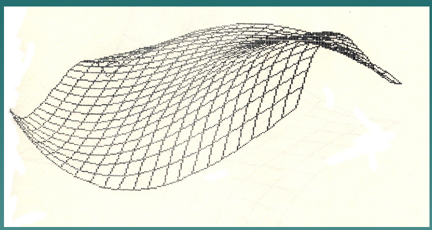


Bézierův bikubický plát

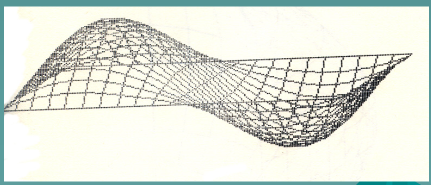
Ukázky Bézierových ploch



Bikvadratická

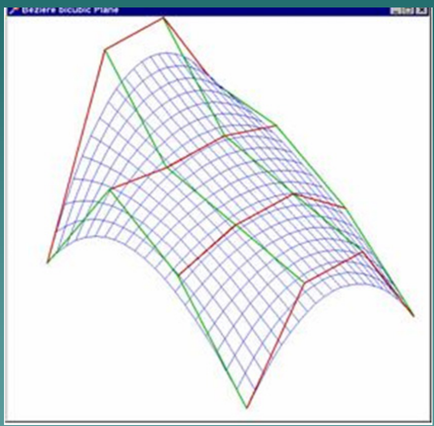


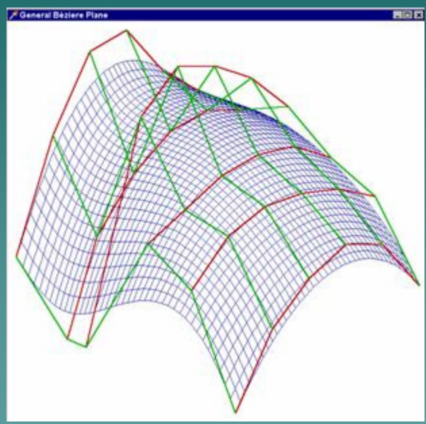
Bikubická



Stupně 3 a 5

Ukázky Bézierových ploch

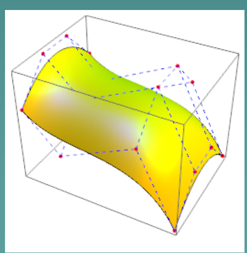




Obr.: http://mathonline.fme.vutbr.cz/pg/Algoritmy/07_TECHNICKE_PLOCHY.htm

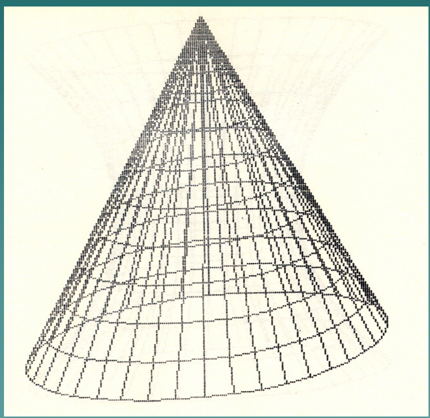
B-spline plochy

$$P(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}N_i^k(u)P_{i,j}N_j^l(v), u,v\in<0;t_n>$$

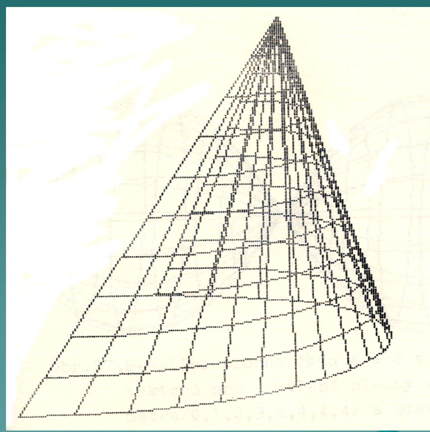


Obr.: http://blog.wolfram.com/wp-content/uploads/2009/01/splines_in28.png

Ukázky B-spline ploch

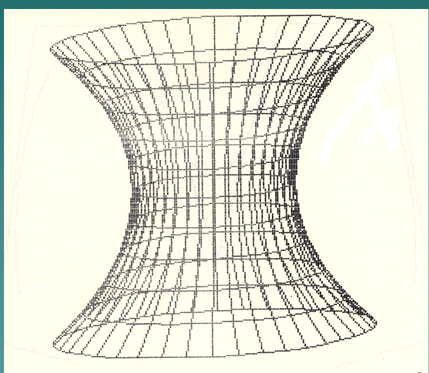


Stupně 1 (periodická) a
3 (neperiodická)

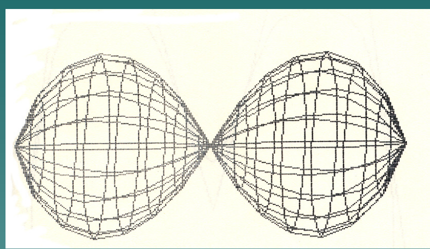


Stupně 1 a 3 (2x neperiodická)

Ukázky B-spline ploch

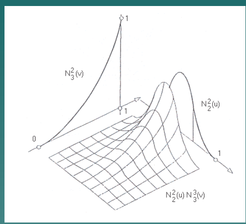


Stupně 2 (neperiodická) a
3 (periodická)

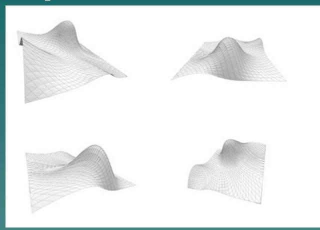


Stupně 3 (periodická) a
3 (neperiodická)

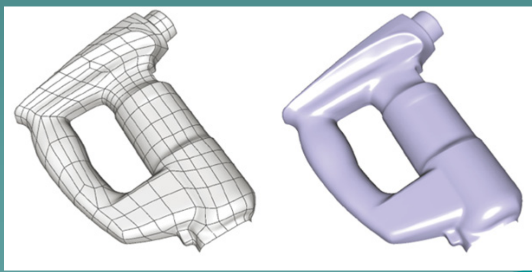
Ukázky B-spline ploch



Plocha $N^2_2(u)N^3_3(v)$



Obr.: http://martha.pnoe.net/blog/wp-content/uploads/2006/10/surfaces.jpg

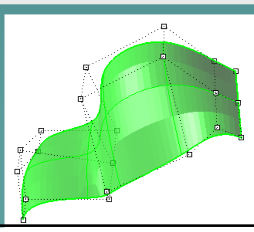


Obr.: http://graphics.c.u-tokyo.ac.jp/~kanai/archives/uploads/2008/04/spray.png

Aproximační plochy

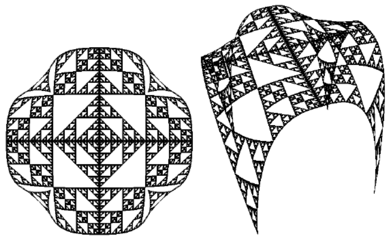
NURBs plochy

$$P(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{i,j} P_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v)}{\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} w_{i,j} N_i^k(u) N_j^l(v)}$$

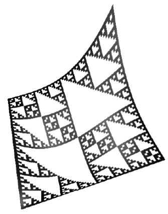


Obr.: H.Novotná: Modelování v prostoru, 2009

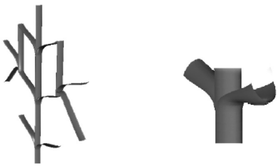
Aproximační plochy



A top and perspective views of a fractal bicubic surface generated by an L-system



The double Sierpinski triangle



Branching structures as the result of tensor product surface rewriting

Kolingerová I., Märtz P., Beneš B.: Tensor Product Surfaces as Rewriting Process, Proceedings of the Spring Conference on Computer Graphics, Častá-Papiernička, Slovakia, 2006, pp.107-112