

# Bayesovská klasifikace

- ◆ Bayesův vztah pro výpočet podmíněné pravděpodobnosti

~ pravděpodobnost, že platí hypotéza  $H$ , pokud pozorujeme  $E$

$$P(H | E) = \frac{P(E | H) P(H)}{P(E)}$$

- $P(H)$  ..... apriorní pravděpodobnost hypotézy  $H$
- $P(H|E)$  ..... posteriorní (podmíněná) pravděpodobnost
- $P(E)$  ..... pravděpodobnost pozorování  $E$

# Bayesovská klasifikace (2)

→ **nejpravděpodobnější hypotéza**  $H_{MAP}$

~ největší a posteriori pravděpodobnost

$$H_{MAP} = H_J \quad ; \quad P(H_J | E) = \max_t \frac{P(E | H_t) P(H_t)}{P(E)}$$

→ zanedbat jmenovatele:  $P(E) = \sum_t P(E | H_t) P(H_t)$

$$H_{MAP} = H_J \Leftrightarrow P(E | H_J) P(H_J) = \max_t (P(E | H_t) P(H_t))$$

# Bayesovská klasifikace (3)

## Příklad:

♦ *Poskytnout úvěr klientovi s vysokým příjmem?*

- $P(PUJCIT) = 0.667$
  - $P(NEPUJCIT) = 0.333$
  - $P(VYS\_PRIJEM|PUJCIT) = 0.91$
  - $P(VYS\_PRIJEM|NEPUJCIT) = 0.12$
  - $P(NIZ\_PRIJEM|PUJCIT) = 0.09$
  - $P(NIZ\_PRIJEM|NEPUJCIT) = 0.88$
- 
- $P(VYS\_PRIJEM|PUJCIT) P(PUJCIT) = 0.607$
  - $P(VYS\_PRIJEM|NEPUJCIT) P(NEPUJCIT) = 0.040$
- $H_{MAP} = PUJCIT$

# Naivní Bayesovský klasifikátor

## ◆ Předpoklad:

- jednotlivá pozorování  $E_1, \dots, E_K$  jsou **podmíněně nezávislá** při platnosti hypotézy  $H$
- tento předpoklad bývá v reálných úlohách jen málokdy splněn  $\rightarrow$  proto označení „naivní“

$\rightarrow$  výpočet aposteriorní pravděpodobnosti hypotézy při platnosti všech  $E_1, \dots, E_K$

$$P(H | E_1, \dots, E_K) = \frac{P(E_1, \dots, E_K | H) P(H)}{P(E_1, \dots, E_K)}$$

# Naivní Bayesovský klasifikátor (2)

→ výpočet a posteriori pravděpodobnosti hypotézy při platnosti všech  $E_1, \dots, E_K$  jako

$$P(H | E_1, \dots, E_K) = \frac{P(H)}{P(E_1, \dots, E_K)} \prod_{k=1}^K P(E_k | H)$$

→ při klasifikaci pomocí naivního Bayesovského klasifikátoru budeme hledat hypotézu s největší a posteriori pravděpodobností  $H_{MAP}$

$$H_{MAP} = H_J \Leftrightarrow P(H_J) \prod_{k=1}^K P(E_k | H_J) = \max_t \left( P(H_t) \prod_{k=1}^K P(E_k | H_t) \right)$$

# Naivní Bayesovský klasifikátor (3)

- ♦  $P(H_t) = P(\text{třída}_t) =$   
 $= \text{Počet\_vzorů\_z\_t} / \text{Počet\_všech\_vzorů}$
- ♦  $P(E_k|H_t) = P(\text{vzorů\_z\_třída}_t\_vyhovujících\_E_k) =$   
 $= \frac{\text{Počet\_vzorů\_z\_t\_splňujících\_E}_k}{\text{Počet\_vzorů\_z\_t}}$

# Naivní Bayesovský klasifikátor (4)

- + možnost klasifikovat i neúplně popsané vzory
  - nulová aposteriorní pravděpodobnost  $P(E_k|H_t)$  při chybějících vzorech v trénovací množině (pro  $E_k$ )
- evtl. podhodnocení  $P(E_k|H_t)$  při nízké vzájemné četnosti  $E_k$  a  $H_t$

# Bayesovská síť - příklady

**Příklad:** trénovací data pro Bayesovský klasifikátor

KLIENT	PŘÍJEM	KONTO	POHLAVÍ	NEZAMĚSTNANÝ	ÚVĚR
k1	VYSOKÝ	VYSOKÉ	ŽENA	NE	ANO
k2	VYSOKÝ	VYSOKÉ	MUŽ	NE	ANO
k3	NÍZKÝ	NÍZKÉ	MUŽ	NE	NE
k4	NÍZKÝ	VYSOKÉ	ŽENA	ANO	ANO
k5	NÍZKÝ	VYSOKÉ	MUŽ	ANO	ANO
k6	NÍZKÝ	NÍZKÉ	ŽENA	ANO	NE
k7	VYSOKÝ	NÍZKÉ	MUŽ	NE	ANO
k8	VYSOKÝ	NÍZKÉ	ŽENA	ANO	ANO
k9	NÍZKÝ	STŘEDNÍ	MUŽ	ANO	NE
k10	VYSOKÝ	STŘEDNÍ	ŽENA	NE	ANO
k11	NÍZKÝ	STŘEDNÍ	ŽENA	ANO	NE
k12	NÍZKÝ	STŘEDNÍ	MUŽ	NE	ANO



# Bayesovská síť - příklady (2)

## Příklad (pokračování):

- Apriorní pravděpodobnost různých hodnot cílového atributu **ÚVĚR**:

Handwritten calculations for prior probabilities of the target attribute **ÚVĚR**:

$$\begin{aligned} P(\text{ÚVĚR}(\text{ANO})) &= 8/12 = 0,667 \\ P(\text{ÚVĚR}(\text{NE})) &= 4/12 = 0,333 \\ P(\text{KONTO}(\text{STŘEDNÍ}) \mid \text{ÚVĚR}(\text{ANO})) &= 2/8 = 0,25 \\ P(\text{KONTO}(\text{STŘEDNÍ}) \mid \text{ÚVĚR}(\text{NE})) &= 2/4 = 0,5 \\ P(\text{NEZAMĚSTNANÝ}(\text{NE}) \mid \text{ÚVĚR}(\text{ANO})) &= 5/8 = 0,625 \\ P(\text{NEZAMĚSTNANÝ}(\text{NE}) \mid \text{ÚVĚR}(\text{NE})) &= 1/4 = 0,25 \\ &\dots \end{aligned}$$

# Bayesovská síť - příklady (3)

## Příklad (pokračování):

→ Pro uchazeče o úvěr, který má středně vysoký zůstatek na kontě a není nezaměstnaný, spočítáme:

$$\begin{aligned} & P(\text{ÚVĚR}(\text{ANO})) P(\text{KONTO}(\text{STŘEDNÍ}) | \text{ÚVĚR}(\text{ANO})) \cdot \\ & \quad \cdot P(\text{NEZAMĚSTNANÝ}(\text{NE}) | \text{ÚVĚR}(\text{ANO})) = 0,1042 \\ & P(\text{ÚVĚR}(\text{NE})) P(\text{KONTO}(\text{STŘEDNÍ}) | \text{ÚVĚR}(\text{NE})) \cdot \\ & \quad \cdot P(\text{NEZAMĚSTNANÝ}(\text{NE}) | \text{ÚVĚR}(\text{NE})) = 0,0416 \end{aligned}$$

→ Uchazeč bude zařazen do třídy **ÚVĚR (ANO)**