离散数学知识点笔记（ppt来自学术大礼包-离散，屈婉玲）

1.命题逻辑

ch1 命题逻辑的基本概念

核心知识点

命题：判断结果唯一的陈述句；

命题分类为：简单命题（原子命题）和复合命题；

合式公式（简称公式）的定义（17页）

定义1.6 合式公式（简称公式）的递归定义：

(1) 单个命题变项和命题常项是合式公式, 称作原子命题公式

(2) 若A是合式公式，则 $(\neg A)$也是

(3) 若A, B是合式公式，则$(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$也是

(4) 只有有限次地应用(1)—(3) 形成的符号串才是合式公式

公式的类型：永真式、永假式、可满足式；

一般知识点

否定式+否定联结词、合取式+合取联结词、析取式+析取联结词、蕴含式+蕴含式的前件和后件+蕴含联结词、等价式+等价联结词；

k层公式（18页）；成真赋值+成假赋值；真值表；

重言式也叫永真式；A不是矛盾式，则是可满足式（25）；

ch2 命题逻辑等价演算

核心知识点

基本概念

(1) 文字——命题变项及其否定的总称

(2) 简单析取式——有限个文字构成的析取式

$p, \neg q, p\vee\neg q, p\vee q\vee r, \ldots$

(3) 简单合取式——有限个文字构成的合取式

$p, \neg q, p\wedge\neg q, p\wedge q\wedge r, \ldots$

(4) 析取范式——由有限个简单合取式组成的析取式

$p, \neg p\wedge q, p\vee\neg q, (p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q\wedge\neg r)\vee(q\wedge r)$

(5) 合取范式——由有限个简单析取式组成的合取式

$p, p\vee\neg q, \neg p\wedge q, (p\vee q\wedge\neg p\wedge(p\vee\neg q\vee\neg r)$

(6) 范式——析取范式与合取范式的总称

主析取范式——由极小项构成的析取范式;

主合取范式——由极大项构成的合取范式;

定义2.7 设S是一个联结词集合，如果任何$n(n\geq 1)$元真值函数都可以由仅含S中的联结词构成的公式表示，则称S是**联结词完备集**

一般知识点

A与B等值（等值式）;

等值演算：由已知的等值式推演出新的等值式的过程;

定义2.4 在含有n个命题变项的简单合取式（简单析取式）中，若每个命题变项均以文字的形式在其中出现且仅出现一次，而且第i个文字出现在左起第i位上（$1\leq i\leq n$），称这样的简单合取式（简单析取式）为**极小项**（**极大项**）.

定义2.6 称$F:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$为n**元真值函数**.

复合联结词：与非、或非。。。

定义2.9 设$C_1=l\vee C_1'$, $C_2=l^c\vee C_2'$, C_1'和C_2'不含l和l^c, 称$C_1'\vee C_2'$为C_1和C_2(以l和l^c为**消解文字**)的**消解式**或**消解结果**, 记作$\mathrm{Res}(C_1,C_2)$

（上面的我没看懂）

消解序列和否证（42页）、消解算法；

ch3 命题逻辑的推理理论

核心知识点

一般知识点

定义3.1 设$A_1, A_2, \ldots, A_k, B$为命题公式. 若对于每组赋值，$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$ 为假，或当$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k$为真时，$B$也为真，则称由前提$A_1, A_2, \ldots, A_k$推出结论$B$的推理是有效的或正确的, 并称$B$是有效结论.

定义3.2 一个形式系统I由下面四个部分组成:

(1) 非空的字母表，记作$A(I)$.

(2) $A(I)$中符号构造的合式公式集，记作$E(I)$.

(3) $E(I)$中一些特殊的公式组成的公理集，记作$A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作$R(I)$.

记$I=\langle A(I),E(I),A_X(I),R(I)\rangle$, 其中$\langle A(I),E(I),A_X(I),R(I)\rangle$是$I$的形式语言系统, $\langle A(I),E(I),A_X(I),R(I)\rangle$ 是I的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即$A_X(I)=\varnothing$

公理推理系统 推出的结论是系统中的重言式, 称作定理

2.谓词逻辑

ch4 一阶逻辑基本概念

核心知识点

谓词——表示个体词性质或相互之间关系的词；

量词——表示数量的词，有全称量词和存在量词；

一阶逻辑——一阶逻辑也叫一阶谓词演算，允许量化陈述的公式，是使用于数学、哲学、语言学及计算机科学中的一种形式系统。一阶逻辑是区别于高阶逻辑的数理逻辑，它不允许量化性质；

原子公式和合式公式（简称公式）（12、13页）；

定义4.5 在公式 $\forall xA$ 和 $\exists xA$ 中，称x为指导变元，A为相应量词的辖域. 在$\forall x$和$\exists x$的辖域中，x的所有出现都称为约束出现，A中不是约束出现的其他变项均称为是自由出现的.

一般知识点

个体词——所研究对象中可以独立存在的具体或抽象的客体；

谓词常项和谓词变项（3页）；

定义4.6 若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式.

公式的解释（16页）——

定义4.7 设$\mathscr{L}$是L生成的一阶语言，$\mathscr{L}$的解释I由4部分组成：

(a) 非空个体域D_I.

(b) 对每一个个体常项符号$a\in L$，有一个$\bar{a}\in D_I$，称$\bar{a}$为a在I中的解释.

(c) 对每一个n元函数符号$f\in L$，有一个D_I上的n元函数$\bar{f}:D_I^n\to D_I$，称$\bar{f}$为f在I中的解释.

(d) 对每一个n元谓词符号$F\in L$，有一个D_I上的n元谓词常项$\bar{F}$，称$\bar{F}$为F在I中的解释.

设公式A，取个体域D_I，把A中的个体常项符号a、函数符号f、谓词符号F分别替换成它们在I中的解释$\bar{a}$、$\bar{f}$、$\bar{F}$，称所得到的公式A'为A在I下的解释，或A在I下被解释成A'.

定义4.9 设A_0是含命题变项$p_1, p_2, \ldots, p_n$的命题公式，$A_1, A_2, \ldots, A_n$是n个谓词公式，用$A_i\,(1\le i\le n)$处处代替A_0中的p_i，所得公式A称为A_0的代换实例.

ch5 一阶逻辑等值演算与推理

核心知识点

一阶逻辑前束范式：

定义5.2 设A为一个一阶逻辑公式，若A具有如下形式

$$Q_1x_1Q_2x_2\ldots Q_kx_kB$$

则称A为前束范式，其中Q_i $(1\le i\le k)$为$\forall$或$\exists$，B为不含量词的公式.

一般知识点

定义5.3 自然推理系统$N_{\mathscr{L}}$定义如下:

1. 字母表. 同一阶语言$\mathscr{L}$的字母表
2. 合式公式. 同$\mathscr{L}$的合式公式
3. 推理规则:

3.集合

---

ch6 集合代数

核心知识点

集合定义：没有精确的数学定义，可理解为——由离散个体构成的整体称为集合，称这些个体为集合的元素；

空集：不含有任何元素的集合。幂集、全集——

2. 定义6.5 幂集：$P(A)=\{x \mid x\subseteq A\}$

   实例：$P(\varnothing)=\{\varnothing\}$，$P(\{\varnothing\})=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$

   计数：如果 $|A|=n$，则 $|P(A)|=2^n$.

3. 定义6.6 全集E：包含了所有集合的集合

   全集具有相对性：与问题有关，不存在绝对的全集

文氏图；

2. 包含排斥原理

定理6.2 设集合S上定义了n条性质，其中具有第 i 条性质的元素构成子集A_i, 那么集合中不具有任何性质的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_n}|=|S|-\sum_{1\le i\le n}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$-\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

推论 S中至少具有一条性质的元素数为

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j|$$

$$+\sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{m-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|$$

12

一般知识点

集合的基本运算有

定义6.7 并 $A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$

交 $A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$

相对补 $A-B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

定义6.8 对称差 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

定义6.9 绝对补 $\sim A=E-A$

1. 集合的广义并与广义交

定义6.10 广义并 $\cup A=\{x\mid\exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$

广义交 $\cap A=\{x\mid\forall z(z\in A\to x\in z)\}$

运算的优先权规定：

1 类运算：初级运算$\cup,\cap,-,\oplus$,
优先顺序由括号确定

2 类运算：广义运算和~运算，
运算由右向左进行

混合运算：2 类运算优先于1 类运算

4.关系

ch7 二元关系

核心知识点

定义7.3 如果一个集合满足以下条件之一：

(1) 集合非空, 且它的元素都是有序对

(2) 集合是空集

则称该集合为一个二元关系, 简称为关系，记作R.

关系可用关系矩阵和关系图来进行表示；（11页）

定义7.7 关系的逆运算

$$R^{-1} = \{ <y, x> \mid <x, y> \in R \}$$

定义7.8 关系的合成运算

$$R \circ S = \{ <x, z> \mid \exists y\ (<x, y> \in R \wedge <y, z> \in S) \}$$

定义7.9 设R为二元关系, A是集合

(1) R在A上的限制记作 $R \upharpoonright A$, 其中

$$R \upharpoonright A = \{ <x,y> \mid xRy \wedge x \in A \}$$

(2) A在R下的像记作$R[A]$, 其中

$$R[A] = \mathrm{ran}(R \upharpoonright A)$$

关系的幂运算：

定义7.10

设 R 为 A 上的关系, n为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

(1) $R^0 = \{ <x,x> \mid x \in A \} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

自反、反自反、对称、反对称、传递：

定义7.11 设 R 为A上的关系,

(1) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow <x,x> \in R)$, 则称 R 在 A 上是自反的.

(2) 若 $\forall x(x \in A \rightarrow <x,x> \notin R)$, 则称 R 在 A 上是反自反的.

定义7.12 设 R 为 A 上的关系,

(1) 若 $\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \rightarrow \langle y,x\rangle \in R)$, 则称 R 为 A 上对称的关系.

(2) 若 $\forall x \forall y(x,y \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,x\rangle \in R \rightarrow x=y)$, 则称 R 为 A 上的反对称关系.

定义7.13 设R为A上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z(x,y,z \in A \wedge \langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R),$$

则称 R 是A上的传递关系.

闭包:

定义7.14 设R是非空集合A上的关系, R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R', 使得R'满足以下条件:

(1) R'是自反的(对称的或传递的)

(2) $R \subseteq R'$

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R'' 有$R' \subseteq R''$

R的自反闭包记作$r(R)$, 对称闭包记作$s(R)$, 传递闭包记作$t(R)$.

等价关系:

定义7.15 设R为非空集合上的关系. 如果R是自反的、对称的和传递的, 则称R为A上的等价关系. 设 R 是一个等价关系, 若 $\langle x,y\rangle \in R$, 称 x等价于y, 记做$x \sim y$.

等价类:

定义7.16 设R为非空集合A上的等价关系, $\forall x \in A$, 令

$$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$$

称$[x]_R$ 为x关于R的等价类, 简称为x的等价类, 简记为$[x]$或 $\bar{x}$

偏序关系:

定义7.19

偏序关系：非空集合A上的自反、反对称和传递的关系，记作$\preccurlyeq$. 设$\preccurlyeq$ 为偏序关系, 如果 $<x, y> \in \preccurlyeq$, 则记作 $x \preccurlyeq y$, 读作

x“小于或等于” y.

可比、全序、覆盖：

定义7.20 设 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $x, y \in A$, x与y可比 $\Leftrightarrow x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$

(2) 任取元素 x 和 y, 可能有下述几种情况发生：

$x \prec y$ (或 $y \prec x$), $x=y$, x与y不是可比的

定义7.21 R 为非空集合A上的偏序关系,

(1) $\forall x,y \in A$, x与y都是可比的，则称R为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系,整除关系不是正整数集合上的全序关系

定义7.22 $x,y \in A$, 如果 $x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$, 则称 y

覆盖x.

偏序集、哈斯图：

定义7.23 集合A和A上的偏序关系$\preccurlyeq$ 一起叫做偏序集, 记作 $<A,\preccurlyeq>$.

实例: $<Z,\leq>$, $<P(A),R_{\subseteq}>$

哈斯图: 利用偏序关系的自反、反对称、传递性进行简化的关系图

一般知识点

定义7.1 由两个元素 x 和 y，按照一定的顺序组成的二元组称为有序对，记作$<x,y>$.

定义7.2 设A,B为集合，A与B的笛卡儿积记作$A\times B$，且

$$A\times B=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in B\}.$$

定义7.4

设A,B为集合，$A\times B$的任何子集所定义的二元关系叫做从A到B的二元关系，当$A=B$时则叫做A上的二元关系.

定义7.6 关系的定义域、值域与域分别定义为

$$\mathrm{dom}R=\{x\mid \exists y\,(<x,y>\in R)\}$$

$$\mathrm{ran}R=\{y\mid \exists x\,(<x,y>\in R)\}$$

$$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup \mathrm{ran}R$$

商集与划分：

定义7.17 设R为非空集合A上的等价关系，以R的所有等价类作为元素的集合称为A关于R的商集，记做A/R，

$$A/R=\{[x]_R\mid x\in A\}$$

实例 设$A=\{1,2,\ldots,8\}$，A关于模3等价关系R的商集为

$$A/R=\{\{1,4,7\},\{2,5,8\},\{3,6\}\}$$

A关于恒等关系和全域关系的商集为：

$$A/I_A=\{\{1\},\{2\},\ldots,\{8\}\},\quad A/E_A=\{\{1,2,\ldots,8\}\}$$

定义7.18 设A为非空集合，若A的子集族$\pi(\pi\subseteq P(A))$满足：

(1) $\varnothing\notin\pi$

(2) $\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$

(3) $\cup\pi=A$

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块.

60

偏序集中的特殊元素：

定义7.24 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集，$B\subseteq A$，$y\in B$

(1) 若$\forall x(x\in B\rightarrow y\preccurlyeq x)$成立，则称$y$为$B$的最小元

(2) 若$\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq y)$成立，则称$y$为$B$的最大元

(3) 若$\forall x(x\in B\wedge x\preccurlyeq y\rightarrow x=y)$成立，则称$y$为$B$的极小元

(4) 若$\forall x(x\in B\wedge y\preccurlyeq x\rightarrow x=y)$成立，则称$y$为$B$的极大元

定义7.25 设$<A, \preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

(1) 若$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$成立, 则称$y$为$B$的上界

(2) 若$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$成立, 则称$y$为$B$的下界

(3) 令$C=\{y \mid y$为B的上界$\}$, C的最小元为B的最小上界或上确界

(4) 令$D=\{y \mid y$为B的下界$\}$, D的最大元为B的最大下界或下确界

5.函数

ch8 函数

核心知识点

函数

定义8.1 设 F 为二元关系, 若$\forall x \in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y \in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立, 则称 F 为函数

函数的性质：满射、单射、双射：

定义8.6 设f: $A \rightarrow B$,

(1) 若 $\mathrm{ran}f=B$, 则称 $f:A \rightarrow B$是满射的

(2) 若 $\forall y \in \mathrm{ran}f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x)=y$, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是单射的

(3) 若 $f:A \rightarrow B$ 既是满射又是单射的, 则称 $f:A \rightarrow B$是双射的

复合函数：

定理8.1 设F, G是函数, 则$F \circ G$也是函数, 且满足

(1) $\mathrm{dom}(F \circ G)=\{x \mid x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x \in \mathrm{dom}(F \circ G)$有$F \circ G(x)=G(F(x))$

集合的等势：

定义8.8 设A, B是集合, 如果存在着从A到B的双射函数, 就称A和B是等势的, 记作$A \approx B$. 如果A不与B 等势, 则记作$A \not\approx B$.

集合的优势和真优势：

定义8.9 (1) 设A, B是集合, 如果存在从A到B的单射函数, 就称B优势于A, 记作$A \preccurlyeq \cdot B$. 如果B不是优势于A, 则记作$A \not\preccurlyeq \cdot B$.
(2) 设A, B是集合, 若$A \preccurlyeq \cdot B$ 且 $A \not\approx B$, 则称 B 真优势于A, 记作$A \prec \cdot B$. 如果 B 不是真优势于A, 则记作$A \not\prec \cdot B$.

集合基数的定义:

定义8.12

(1) 对于有穷集合A, 称与A等势的那个惟一的自然数为A的基数, 记作card$A$ (也可以记作$|A|$)

$$\mathrm{card}A = n \Leftrightarrow A \approx n$$

(2) 自然数集合N的基数记作$\aleph_0$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{N} = \aleph_0$$

(3) 实数集R的基数记作$\aleph$, 即

$$\mathrm{card}\mathbf{R} = \aleph$$

可数集:

定义8.14 设A为集合, 若card$A \leq \aleph_0$, 则称A为可数集或可列集.

一般知识点

定义8.2 设F, G 为函数, 则

$$F=G \Leftrightarrow F \subseteq G \wedge G \subseteq F$$

如果两个函数F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

(1) dom$F$=dom$G$

(2) $\forall x \in$dom$F$=dom$G$ 都有$F(x)=G(x)$

函数$F(x)=(x^2-1)/(x+1)$, $G(x)=x-1$不相等, 因为 dom$F \subset$dom$G$. 3

定义8.3 设A, B为集合, 如果

f 为函数, dom$f$=A, ran$f \subseteq B$,

则称 f 为从A到B的函数, 记作 f: $A \to B$.

定义8.4 所有从A到B的函数的集合记作B^A, 符号化表示为

$$B^A = \{f \mid f: A \to B\}$$

$|A|=m$, $|B|=n$, 且$m, n>0$, $|B^A|=n^m$

$A=\varnothing$, 则$B^A=B^\varnothing=\{\varnothing\}$

$A\neq\varnothing$且$B=\varnothing$, 则$B^A=\varnothing^A=\varnothing$

像和完全原像：

定义8.5 设函数$f: A\to B$, $A_1\subseteq A$, $B_1\subseteq B$

(1) A_1在f下的像$f(A_1)=\{f(x) \mid x\in A_1\}$, 函数的像$f(A)$

(2) B_1在f下的完全原像$f^{-1}(B_1)=\{x \mid x\in A \land f(x)\in B_1\}$

常函数、恒等函数、单调递增、严格单调递增（12页）；

特征函数、自然映射：

(4) 设A为集合, 对于任意的$A'\subseteq A$, A'的特征函数

$\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$定义为

$$\chi_{A'}(a)=1,\ a\in A'$$
$$\chi_{A'}(a)=0,\ a\in A-A'$$

(5) 设R是A上的等价关系, 令

$$g: A\to A/R$$
$$g(a)=[a],\ \forall a\in A$$

称g是从A到商集A/R的自然映射

反函数：

反函数存在的条件

(1) 任给函数F, 它的逆F^{-1}不一定是函数, 只是一个二元关系.

(2) 任给单射函数$f:A\to B$, 则f^{-1}是函数, 且是从$\mathrm{ran}f$到A的双射函数, 但不一定是从B到A的双射函数

(3) 对于双射函数$f:A\to B$, $f^{-1}:B\to A$是从B到A的双射函数.

自然数的集合定义（39页）；

6.图

ch14 图的基本概念

核心知识点

顶点的度数;

握手定理:

定理14.1 设$G=<V,E>$为任意无向图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $|E|=m$, 则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i)=2m$$

图的同构:

若G与G'**同构**，其充要条件是：两个图的结点和边分别存在一一对应，且保持关联关系，特别是对有向图还要保持边的方向一致。

图的阶数：图的顶点个数;

正则图是指各顶点的度均相同的无向简单图;

定义14.7 n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图

通路、回路方面:

定义14.11 给定图$G=<V,E>$（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列 $\Gamma=v_0e_1v_1e_2\ldots e_lv_l$，$v_{i-1}, v_i$ 是 e_i 的端点.

(1) 通路与回路：Γ为通路；若 $v_0=v_l$，Γ为回路，l 为回路长度.

(2) 简单通路与回路：所有边各异，Γ为简单通路，又若$v_0=v_l$，Γ为简单回路

(3) 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ中所有顶点各异，则称Γ为初级通路(路径)，又若除$v_0=v_l$，所有的顶点各不相同且所有的边各异，则称Γ为初级回路(圈)

(4) 复杂通路与回路：有边重复出现

有向图的连通性:

D弱连通(连通)——基图为无向连通图

D单向连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\to v_j$ 或 $v_j\to v_i$

D强连通——$\forall v_i,v_j\in V$，$v_i\leftrightarrow v_j$

二部图和完全二部图:

定义14.23 设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2 ($V_1 \cup V_2=V$，$V_1 \cap V_2=\varnothing$)，使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集，常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$.

又若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$.

关联矩阵、邻接矩阵、可达矩阵；

一般知识点

1 . $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为无向图$G$的顶点集，称$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$为$G$的度数列

2. $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$为有向图$D$的顶点集，
D的度数列：$d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_n)$
D的出度列：$d^+(v_1), d^+(v_2), \ldots, d^+(v_n)$
D的入度列：$d^-(v_1), d^-(v_2), \ldots, d^-(v_n)$

给定一个非负整数序列 (d1,d2,...dn)，若存在一个无向简单图使得图中各点的度与此序列一一对应，则称此序列**可简单图化**；

给定一个非负整数序列{d1,d2,...dn}，若存在一个无向图使得图中各点的度与此序列一一对应，则称此序列**可图化**；

n阶竞赛图：基图为n阶无向完全图的有向简单图；

多种子图：

定义14.8 $G=<V,E>, G'=<V',E'>$
(1) $G'\subseteq G$ —— G'为G的子图，G为G'的母图
(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图
(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图
(4) V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$
(5) E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$

图G的**补图**，通俗的来讲就是完全图Kn去除G的边集后得到的图Kn-G；

自补图是一个无向图如果同构于它的补图，则称该图为自补图；

点割集、割点、边割集、割边（25页）；

vi可达vj的意思；

ch15 欧拉图与哈密顿图

核心知识点

欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图：

(1) 欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

欧拉图的判别方法：

定理15.1 无向图G是欧拉图当且仅当G连通且无奇度数顶点.

定理15.2 无向图G是半欧拉图当且仅当G连通且恰有两个奇度顶点.

定理15.3 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图：

(1) 哈密顿通路——经过图中所有顶点一次仅一次的通路.

(2) 哈密顿回路——经过图中所有顶点一次仅一次的回路.

(3) 哈密顿图——具有哈密顿回路的图.

(4) 半哈密顿图——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图.

带权图：

定义15.3 给定图$G=<V,E>$，(G为无向图或有向图)，设$W:E\to R$ (R为实数集)，对G中任意边$e=(v_i,v_j)$ (G为有向图时，$e=<v_i,v_j>$)，设$W(e)=w_{ij}$，称实数w_{ij}为边e上的权，并将w_{ij}标注在边e上，称G为带权图，此时常将带权图G记作$<V,E,W>$.

设$G'\subseteq G$，称 $\sum_{e\in E(G')} W(e)$ 为G'的权，并记作$W(G')$，即

$$W(G')=\sum_{e\in E(G')} w(e)$$

一般知识点

无向哈密顿图的一个必要条件：

定理15.6 设无向图$G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，均有$p(G-V_1)\leq |V_1|$

无向哈密顿图的一个充分条件：

定理15.7 设G是n阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j)\geq n-1 \qquad (*)$$

则G中存在哈密顿通路.

判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题；

平凡图：仅有一个节点的图；

竞赛图是通过在无向完全图中为每个边缘分配方向而获得的有向图；

ch17 平面图（未整理）

核心知识点

一般知识点

平面图的基本概念：可嵌入曲面、平面图、平面嵌入、非平面图（2）；极大平面图（6）；极小非平面图（9）；欧拉公式（10）；平面图的判断（13、14、15）；

//感觉不太重要的点

G的面、无限面（外部面）、有限面（内部面）、面Ri的边界、面Ri的次数（4）；平面图的对偶图（16）；自对偶图、n阶轮图、奇阶轮图、偶阶轮图（21）；

7.树

ch16 树

核心知识点

无向树、平凡树、森林、树叶、分支点；

树、生成树、树枝、弦、余树（1页0）；

最小生成树；求最小生成树的方法：prim、避圈法（就是kruskal算法）；

定义16.6 T是有向树（基图为无向树）

(1) T 为根树——T 中一个顶点入度为0，其余的入度均为1.

(2) 树根——入度为0的顶点

(3) 树叶——入度为1，出度为0的顶点

(4) 内点——入度为1，出度不为0的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点v的层数——从树根到v的通路长度

(7) 树高——T 中层数最大顶点的层数

(8) 平凡根树——平凡图

(1) T 为有序根树——同层上顶点标定次序的根树

(2) 分类

① r 叉树——每个分支点至多有r 个儿子

② r 叉有序树——r 树是有序的

③ r 叉正则树——每个分支点恰有r 个儿子

④ r 叉正则有序树

⑤ r 叉完全正则树——树叶层数相同的r叉正则树

⑥ r 叉完全正则有序树

最优二叉树和求它的方法：huffman算法；

最佳前缀码；

波兰符号法：按前序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树；

逆波兰符号法：按后序行遍法访问存放算式的2叉有序正则树；

① 中序行遍法——次序为：左子树、根、右子树
② 前序行遍法——次序为：根、左子树、右子树
③ 后序行遍法——次序为：左子树、右子树、根

一般知识点

基本回路系统：基本回路、基本圈、圈秩（12页）；

基本割集、基本割集系统、割集秩（14页）；

定义16.8 设v为根树T中任意一顶点，称v及其后代的导出子图为以v为根的根子树.

若图G的一个子图包含G的所有顶点，则称该子图为G的一个**生成子图**；

导出子图是指，由该图顶点的一个子集和该图中两端均在该子集的所有边的集合组成的图；

8.组合数学

ch12 基本的组合计数公式

核心知识点

分类处理和分步处理：

- 分类处理：对产生方式的集合进行划分，分别计数，然后使用加法法则
- 分步处理：一种产生方式分解为若干独立步骤，对每步分别进行计数，然后使用乘法法则
- 分类与分步结合使用
  先分类，每类内部分步
  先分步，每步又分类

二项式定理：

定理12.4 设 n 是正整数，对一切 x 和 y

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

一般知识点

r排列和r组合（全排列：r=n的排列）：

定义12.1 设S为n元集，
(1) 从 S 中有序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 排列，S 的不同 r 排列总数记作 $P(n,r)$, $r=n$的排列是S的全排列.
(2) 从 S 中无序选取的 r 个元素称为 S 的一个 r 组合，S 的不同 r 组合总数记作 $C(n,r)$

二项式系数

组合数$C(n,r)$也称为二项式系数，记作$\binom{n}{r}$

多项式定理：

定理12.6 设n为正整数，x_i为实数，$i=1, 2, \ldots, t$.

$$(x_1+x_2+\ldots+x_t)^n=\sum\binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_t}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}$$

ch13 递推方程和生成函数（生成函数没搞，我们没教吧？）

核心知识点

递推方程：

定义13.1 设序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, 简记为$\{a_n\}$. 一个把 a_n 与某些个a_i $(i<n)$ 联系起来的等式叫做关于序列 $\{a_n\}$ 的递推方程. 当给定递推方程和适当的初值就唯一确定了序列.

一般知识点

常系数线性齐次递推方程：

定义13.2 常系数线性齐次递推方程的标准形：

$$\begin{cases} H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\ldots-a_kH(n-k)=0 \\ H(0)=b_0, H(1)=b_1, H(2)=b_2, \ldots, H(k-1)=b_{k-1} \end{cases}$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 为常数，$a_k \neq 0$

称为 k 阶常系数线性齐次递推方程

$b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$ 为 k 个初值

特征方程:

定义13.3 特征方程 $x^k - a_1x^{k-1} - \ldots - a_k = 0$，

特征方程的根称为递推方程的 特征根