

第一章 TOPSIS 法

TOPSIS(Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution) 是一种常用的多属性决策分析方法，常译为“逼近理想解排序法”或“优劣解距离法”。1981 年，由 Hwang 和 Yoon 首次提出。

这种方法的核心思想是基于评价对象与“最优解”和“最劣解”的相对距离来进行排序。具体地，通过构造评价问题的各指标的最优解和最劣解，并计算每个方案到理想方案的相对贴近度，来对方案进行排序，从而选出最优方案。

1.1 概念

设多属性决策方案集为 $D = \{d_1, d_2, \dots, d_m\}$ ，衡量方案优劣的属性变量为 x_1, x_2, \dots, x_n ，这时方案集 D 中的每个方案 d_i 的 n 个属性值构成的向量为：

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$$

正理想解 C^* ：通常为方案集 D 中并不存在的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最好值。

负理想解 C^0 ：最差的方案，其每个属性值都是决策矩阵中该属性的最差值。

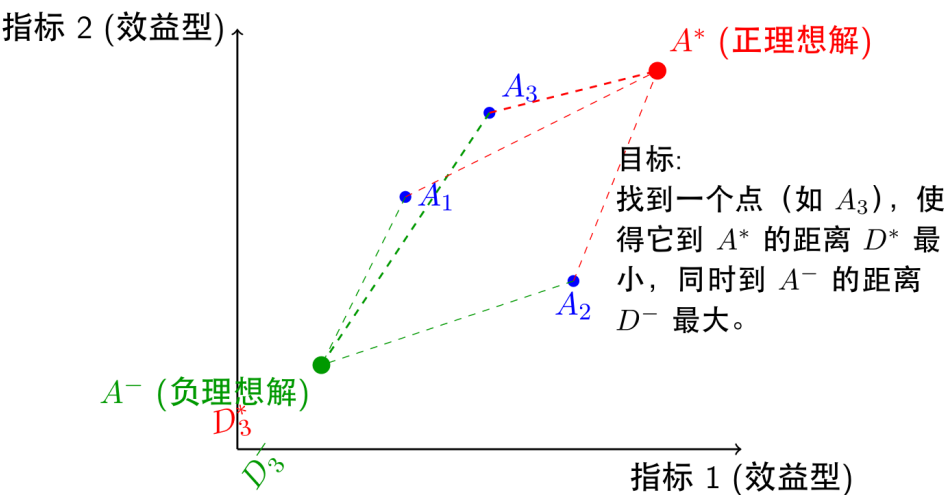
一个好的备选方案应该满足：

最接近“正理想解”：（最好的可能情况）

最远离“负理想解”：（最坏的可能情况）

1.2 TOPSIS 法的思想

在 n 维空间中，将方案集 D 中的各备选方案 d_i 与正理想解 C^* 和负理想解 C^0 的距离进行比较，既靠近正理想解又远离负理想解的方案就是方案集 D 中的最佳方案。据此排定方案集 D 中各备选方案的优先序。



1.3 TOPSIS 法的算法

- (1) 用向量规划化的方法求得规范决策矩阵。

设多属性决策问题的决策矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ，规范化决策矩阵 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ ，其中，

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m a_{ij}^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- (2) 构造加权规范阵 $C = (c_{ij})_{m \times n}$ 。

设由决策人给定各属性的权重向量为 $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]^T$ ，则

$$c_{ij} = \omega_j \cdot b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n$$

- (3) 确定正理想解 C^* 和负理想解 C^0 。

正理想解 C^* 的第 j 个属性值为 c_j^* ：

$$c_j^* = \begin{cases} \max_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性} \\ \min_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性} \end{cases}$$

负理想解 C^0 的第 j 个属性值为 c_j^0 ：

$$c_j^0 = \begin{cases} \min_i c_{ij}, & j \text{ 为效益型属性} \\ \max_i c_{ij}, & j \text{ 为成本型属性} \end{cases}$$

- (4) 计算各方案到正理想解与负理想解的距离。

备选方案 d_i 到正理想解的距离为：

$$s_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^*)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

备选方案 d_i 到负理想解的距离为：

$$s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (c_{ij} - c_j^0)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- (5) 计算各方案的排序指标值（即综合评价指数）：

$$f_i^* = \frac{s_i^0}{s_i^0 + s_i^*}, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- (6) 按 f_i^* 由大到小排列方案的优劣次序。

例题 1.1 为了客观地评价我国研究生教育的实际状况和各研究生院的教学质量，国务院学位委员会办公室组织过一次研究生院的评估。为了取得经验，先选 5 所研究生院，收集有关数据资料进行了试评估，部分数据如下表所示。

	人均专著（本/人）	生师比	科研经费（万元/年）	逾期毕业率（%）
院校 1	0.1	5	5000	4.7
院校 2	0.2	6	6000	5.6
院校 3	0.4	7	7000	6.7
院校 4	0.9	10	10000	2.3
院校 5	1.2	2	400	1.8

记给定的数据为矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 5 & 5000 & 4.7 \\ 0.2 & 6 & 6000 & 5.6 \\ 0.4 & 7 & 7000 & 6.7 \\ 0.9 & 10 & 10000 & 2.3 \\ 1.2 & 2 & 400 & 1.8 \end{pmatrix}$$

由命令 `zscore(A)` 即可完成数据的标准化处理，结果见下表。

	人均专著（本/人）	生师比	科研经费（万元/年）	逾期毕业率（%）
院校 1	-0.9741	-0.3430	-0.1946	0.2274
院校 2	-0.7623	0	0.0916	0.6537
院校 3	-0.3388	0.3430	0.3777	1.1747
院校 4	0.7200	1.3720	1.2362	-0.9095
院校 5	1.3553	-1.3720	-1.5109	-1.1463

设研究生院的生师比最佳区间为 [5,6]，无法容忍的下限和上限分别为： $a'_j = 2, a''_j = 12$ ，对数据进行处理，结果见下表。

	生师比	处理后的生师比
院校 1	5	1
院校 2	6	1
院校 3	7	0.8333
院校 4	10	0.3333
院校 5	2	0

设权向量为 $\omega = [0.2, 0.3, 0.4, 0.1]$ ，得加权的向量规范化属性矩阵。计算正理想解为：

$$C^* = [0.1530, 0.1791, 0.2759, 0.0174]$$

负理想解为：

$$C^0 = [0.0128, 0, 0.0110, 0.0648]$$

求各方案到正理想解的距离和负理想解的距离后，即可计算出排序指标值 f_i^* ，由该值的大小可确定各方案的从优到劣的次序为：

院校 4、院校 3、院校 2、院校 1、院校 5

```

clc
clear
A = [0.1 5 5000 4.7; 0.2 6 6000 5.6; 0.4 7 7000 6.7; 0.9 10 10000 2.3; 1.2 2 400 1.8];
[m, n] = size(A);
x2 = @(I, lb, ub, x)(1-(I(1)- x)./(I(1)-lb)). * (x >= lb & x < I(1))
+ (x >= I(1) & x <= I(2))./(ub - I(2)). * (x > I(2) & x <= ub);
I=[5,6]; lb=2; ub=12;
A(:,2) = x2(I, lb, ub, A(:,2));    % 对属性 2 进行变换
B = A./vecnorm(A);    % 向量规范化
w=[0.2 0.3 0.4 0.1];
C=B.* w;    % 求加权矩阵
Cm = max(C);    % 求正理想解
Cm(4) = min(C(:,4))    % 属性 4 为成本型的
C0 = min(C);    % 求负理想解
C0(4) = max(C(:,4))    % 属性 4 为成本型的
Sm = vecnorm(C - Cm, 2, 2)    % 到正理想解的距离
S0 = vecnorm(C - C0, 2, 2)    % 到负理想解的距离
f = S0./(Sm+S0)
[fv, ind] = sort(f,'descend')

```