第一章 层次分析法

决策的问题在日常中经常会遇到，如：

想买一部新手机，看重“价格”、“拍照”、“续航”，哪个最重要？

毕业后选择哪个 Offer？考虑“薪资”、“发展前景”、“城市”...

去哪里旅游？“风景”、“花费”、“美食”都要考虑。

这些问题都有如下的几个特点：

多标准性：需要考虑多个互相影响的因素。

复杂性：有些因素是定性的（如”舒适度”），难以量化。

主观性：决策者的偏好起着重要作用。

因此，决策问题的核心在于如何将复杂的、定性的、主观的决策问题，转化为一个系统化、可计算的数学问题？

1.1 层次分析法 (Analytic Hierarchy Process, AHP)

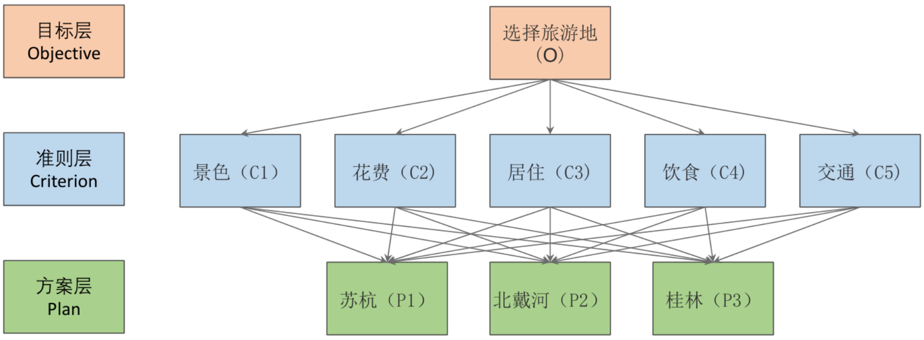
AHP 是由美国运筹学家 T. L. Saaty 在 20 世纪 70 年代提出的一种实用的多标准决策分析方法。

该方法的核心思想在于以下几个方面。

1. 分解 (Decomposition)：将复杂问题分解为目标、准则、方案等不同层次。
2. 判断 (Judgment)：对各层次中的元素进行两两比较，量化其相对重要性。
3. 综合 (Synthesis)：根据判断结果，计算出各方案的最终权重，从而选出最优方案。

AHP 的本质是一种思维方式，它将人的主观判断用数量形式表达和处理，使决策过程更加系统、清晰和有效。

AHP 的第一步，也是最关键的一步，是建立层次结构。



目标层 (Goal)：决策的最终目的，通常只有一个。
准则层 (Criteria)：实现目标的衡量标准或考虑因素。可以有多个子准则层。
方案层 (Alternatives)：可供选择的备选方案。

核心：两两比较与判断矩阵

如何确定准则的权重？我们不直接打分，而是进行两两比较。

Saaty 1-9 标度法用 1 到 9 的数字来表示两个元素相对重要性的程度。

标度含义 1 两个元素同样重要 3 前者比后者稍微重要 5 前者比后者明显重要 7 前者比后者强烈重要 9 前者比后者极端重要 2,4,6,8 上述判断的中间值倒数若元素 i 比 j 的标度为 a_{ij}，则 j 比 i 的标度为 $\frac{1}{a_{ji}}$

1.1.1 AHP 算法

如下的四步法。

步骤 1. 建立层次结构模型：将问题分解为目标、准则、方案等层次。

步骤 2. 构造比较矩阵 A：对同一层次的元素，针对上一层次的某个准则，进行两两比较，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中，$a_{ij} > 0$ 且 $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$。

步骤 3. 计算权重向量并进行一致性检验：计算每个判断矩阵的权重向量 W，并检验其逻辑一致性。

步骤 4. 计算组合权重并排序：汇总所有权重，计算各方案对总目标的最终权重，并进行排序。

步骤 3 中，计算权重向量的三种方法：
算数平均：

$$w_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{kj}}.$$

几何平均：

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

特征向量：

$$Ax = \lambda_{max}x,\ w_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

步骤 3 中，一致性检验的问题。

为什么需要一致性检验？

人的判断可能存在逻辑矛盾。例如：A 比 B 重要 (3)，B 比 C 重要 (3)，但 C 比 A (3)。这显然不合逻辑！检验的步骤如下。

1. 计算最大的特征根 λ_{max}；
2. 计算一致性指标 CI：

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

3. 查找平均随机一致性指标 RI（由 Saaty 给出）：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.54	1.56	1.57

其中，n 为矩阵的阶数。

4. 计算一致性比例 CR：

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

判断标准：当 $CR < 0.1$ 时，认为判断矩阵的一致性可以接受，否则需要重新调整判断矩阵。

说明：当 $n = 1, 2$ 时，判断矩阵是一致的，故有：$CI = 0, RI = 0$。

遵循步骤：建层次、构矩阵、算权重、验一致、总排序。

例题 1.1 小明计划暑假去旅游，有三个备选方案: 巴厘岛、巴黎、东京。他主要考虑三个因素: 景色、人花费和美食。请用 AHP 帮他做出最优决策。

步骤 1. 建立层次结构模型

目标层	准则层	方案层
	景色 (C1)	巴厘岛 (A1)
最优旅游地	花费 (C2)	巴黎 (A2)
	美食 (C3)	东京 (A3)

步骤 2. 构造判断矩阵

1. 准则层对目标的判断矩阵 A

小明认为：景色比花费稍微重要 (3)，景色比美食明显重要 (5)，美食比花费稍微重要 (3)。

若第 1 行（列）表示景色；第 2 行（列）表示花费；第 13 行（列）表示美食，则矩阵 A 为：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 方案层对各准则的判断矩阵 B_1 (景色): 巴黎景色最好，巴厘岛次之。

B_2 (花费): 巴厘岛花费最低，巴黎最高。

B_3 (美食): 东京美食最佳，巴黎次之。

B_1（景色），描述为：

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

B_2 (花费)，描述为：

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

B_3 (美食)，描述为：

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/7 \\ 5 & 1 & 1/3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

接下来对这 4 个矩阵，分别计算权重向量并进行一致性检验。

步骤 3. 计算权重与一致性检验

以准则层矩阵 A 为例，可计算出权重向量：

$$W_A = (0.65, 0.11, 0.24)^\top$$

即：景色、花费、美食分别占 65%、11%、24%。

一致性检验：

$\lambda_{max} \approx 3.08$；

$CI = \frac{\lambda_{max}-3}{3-1} = 0.04$；

$n = 3$，可查表得到：$RI = 0.58$；

$CR = CI/RI = 0.04/0.58 \approx 3.08 < 0.1$

因此，准则层的判断矩阵通过一致性检验，权重有效。

步骤 4. 计算组合权重并排序

最终得分的计算公式为：

$$\text{最终得分} = \sum(\text{准则层权重} \cdot \text{方案层对应权重})$$

计算过程如下。

方案	景色 (0.65)	花费 (0.11)	美食 (0.24)	最终得分
巴厘岛	0.13	0.65	0.08	$0.65 \cdot 0.13 + 0.11 \cdot 0.65 + 0.24 \cdot 0.08 = 0.175$
巴黎	0.59	0.11	0.23	$0.65 \cdot 0.59 + 0.11 \cdot 0.11 + 0.24 \cdot 0.23 = 0.451$
东京	0.28	0.24	0.69	$0.65 \cdot 0.28 + 0.11 \cdot 0.24 + 0.24 \cdot 0.69 = 0.374$

各方案最终得分排序如下：

$$\text{巴黎 } (0.451)\text{、东京 } (0.374)\text{ 、巴厘岛 } (0.175).$$

最终决策：根据小明的偏好，最优的旅游目的地是巴黎。

代码如下。

```
clc
clear
A = [1 1/2 4 3 3; 2 1 7 5 5; 1/4 1/7 1 1/2 1/3; 1/3 1/5 2 1 1; 1/3 1/5 3 1 1];
B{1} = [1 2 5; 1/2 1 2; 1/5 1/2 1];
B{2} = [1 1/3 1/8; 3 1 1/3; 8 3 1];
B{3} = [1 1 3; 1 1 3; 1/3 1/3 1];
B{4} = [1 3 4; 1/3 1 1; 1/4 1 1];
B{5} = [1 1 1/4; 1 1 1/4; 4 4 1];
[V, D] = eig(A);            % 求比较矩阵的特征值、特征向量
[eig_A_max, ind] = max(abs(diag(D)));
W0 = abs(V(:,ind));
RI5 = 1.26; RI3 = 0.89;            % 一致性检验
CI = (eig_A_max - 5) / 4;
CR = CI/RI5;
if CR > 0.1
error(' 一致性检验未通过！ 2');
end
W = zeros(3,5);
CI = zeros(1,5);
for k = 1 : 5
[V, D] = eig(B{k});
[eig_B_max, ind] = max(abs(diag(D)));
W(:, k) = abs(V(:, ind));
CI(k) = (eig_B_max - 3) / 2;
CR = CI(k)/RI3;
if CR > 0.1
error([' 第：', num2str(k),' 个矩阵一致性检验未通过！ ']);
end
end
CI3 = CI*W0;            % 组合一致性检验
RI_3 = [RI3 RI3 RI3 RI3 RI3]*W0;
CR3 = CR + CI3/RI_3;
if CR3 > 0.1
error(' 一致性检验未通过！ 3');
end
W_final = W*W0            % 组合权重
```

1.1.2 AHP 方法的优缺点

优点主要在于以下几个方面：

系统性：提供了一个清晰、结构化的决策框架。

灵活性：可结合定性与定量因素。

简单性：两两比较符合人类思维习惯，计算过程不复杂。

实用性：广泛应用于各行各业的评估、选择、预测等问题。

缺点主要在于以下几个方面：

主观性强：判断矩阵的构建依赖专家经验，结果可能因人而异。

判断量大：当元素过多时（n 较大），需要进行的比较次数（$\frac{n(n-1)}{2}$）会急剧增加。

一致性调整困难：当 $CR > 0.1$ 时，找到矛盾的判断并修正可能很困难。

可能出现“逆序”：增加或减少方案，可能会导致原有方案的排序发生改变。

1.2 模型的应用

参见优秀论文 2016-B-01。