Metody Probabilistyczne i Statystyka

Rafał Włodarczyk

INA 3, 2024

Contents

1 Ciała Podzbiorów

Definition. Ciało podzbiorów. Ustalmy przestrzeń Ω. Rodzinę zbiorów $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nazywamy ciałem podzbiorów zbioru Ω, jeśli:

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$
2. $A \in \mathcal{S} \implies A^C \in \mathcal{S}$
3. $A, B \in \mathcal{S} \implies A \cup B \in \mathcal{S}$

Fact. Przekrój w ciele podzbiorów. Jeśli $\mathcal{S}$ jest ciałem podzbiorów, to:

$$A, B \in \mathcal{S} \implies A \cup B \in \mathcal{S}$$

Fact. Skończony zbiór indeksów. Jeśli $\mathcal{S}$ jest ciałem podzbiorów Ω i dla pewnego nieskończonego zbioru indeksów zachodzi $\forall i \in I(A_i \in \mathcal{S})$, wówczas:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{S} \text{ oraz } \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{S}$$

Fact. Omega i zbiór pusty. Niech $\mathcal{S}$ będzie ciałem podzbiorów Ω, wówczas:

$$\Omega \in \mathcal{S} \text{ oraz } \emptyset \in \mathcal{S}$$

1.1 Sigma ciało podzbiorów

Definition. σ-ciało podzbiorów. Ustalmy przestrzeń Ω. Rodzinę zbiorów $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ nazywamy σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω, jeśli:

1. $\mathcal{S} \neq \emptyset$
2. $A \in \mathcal{S} \implies A^C \in \mathcal{S}$
3. $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S} \implies \bigcup_{i \geqslant 1} A_i \in \mathcal{S}$

Ciało podzbiorów jest zamknięte na **skończone sumy** jego elementów, natomiast σ-ciało podzbiorów jest zamknięte na **sumy przeliczalne**

Fact. Ciało z sigma ciała. Jeśli $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω to jest też ciałem podzbiorów Ω. Każde σ-ciało zawiera $\emptyset$ oraz Ω.

Fact. Skończone ciało podzbiorów Ω. Jeśli $\mathcal{S}$ jest skończonym ciałem podzbiorów Ω, to $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω (przeliczalne sumy redukują się do sum skończonych)

Information. Przykład Sigma Ciał. Zobaczmy przykłady σ-ciał:

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ jest sigma ciałem.
2. $\{\emptyset, \Omega\}$ jest sigma ciałem (nazywany zdegenerowanym).
3. Najmniejsze sigma ciało zawierające A to $\{\emptyset, A, A^C, \Omega\}$.

Definition. Sigma ciało generowane. Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ będzie rodziną podzbiorów Ω. Sigma ciałem generowanym przez rodzinę $\mathcal{A}$ nazywamy rodzinę podzbiorów:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcup \mathcal{H}$$

gdzie $\mathcal{H} = \{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) : \mathcal{S} \text{ jest sigma ciałem } \wedge \mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}\}$

Niech $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ będzie rodziną podzbiorów Ω. Wówczas istnieje najmniejsze σ-ciało podzbiorów Ω zawierające $\mathcal{A}$.

Definition. Sigma ciało zbiorów borelowskich. Sigma ciało generowane przez rodzinę wszystkich otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ nazywamy σ-ciałem zbiorów borelowskich prostej rzeczywistej i oznaczamy je przez $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{B}$.

Information. Elementy $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zobaczmy elementy zbiorów borelowskich:

1. wszystkie odcinki otwarte $(a, b), a < b \in \mathbb{R}$
2. półprosta $(0, \infty) = \bigcup_{n \geqslant 1}(0, n)$
3. półprosta $(-\infty, 0] = (0, \infty)^C = \bigcap_{n \geqslant 1}(-\infty, \frac{1}{n})$
4. półproste $(-\infty, a)$ oraz $[a, \infty), a \in \mathbb{R}$
5. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R} \wedge a < b\})$
6. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\{A \subseteq \mathbb{R}^n : \text{A jest zbiorem otwartym}\})$

2 Przestrzenie Mierzalne

Definition. Przestrzeń mierzalna. Parę $(S, \mathcal{S})$, gdzie S jest niepustym zbiorem, a $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów S nazywamy **przestrzenią mierzalną**. Zbiory $A \in \mathcal{S}$ nazywamy wówczas zbiorami mierzalnymi.

Definition. Miara. Niech $(S, \mathcal{S})$ będzie przestrzenią mierzalną. **Miarą** na przestrzeni nazywamy funkcję zbioru $\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$, taką że:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. dla dowolnej rodziny $\{E_n\}_{n \geqslant 1}$ parami rozłącznych zbiorów z $\mathcal{S}$, zachodzi:

$$\mu\left(\bigcup_{n \geqslant 1} E_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} \mu(E_n)$$

Trójkę $(S, \mathcal{S}, \mu)$ nazywamy **przestrzenią z miarą**.
(własność 2 to przeliczalna addytywność)

Information. Miara Lebesgue'a. Miara Lebesgue'a na przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$staniowi naturalną formalizację pojecia długości.

$$\lambda([a, b]) = b - a$$

Uwaga, istnieją zbiory niemierzalne w sensie Lebesgue'a.

2.1 Przestrzeń probabilistyczna

Definition. Przestrzeń Probabilistyczna. Nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ taką, że $\Omega \neq \emptyset, \mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ jest σ-ciałem podzbiorów Ω, a $P : \mathcal{S} \to [0, 1]$ jest funkcją zbioru (nazywaną **prawdopodobieństwem**) spełniającą:

1. $P(\Omega) = 1$
2. Jeśli $(A_n)_{n \geqslant 1}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów z $\mathcal{S}$ to:

$$P\left(\bigcup_{n \geqslant 1} A_n\right) = \sum_{n \geqslant 1} P(A_n)$$

P jest miarą na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{S})$
Miarę spełniającą warunek 1. nazywamy miarą probabilistyczną.

Fact. Fakty z Przestrzeni probabilistycznych. Z definicji widzimy, że:

1. $P(\emptyset) = 0$

Information. Notacja w Przestrzeni probabilistycznej. Wprowadzamy nazewnictwo:
Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych ($\omega \in \Omega$ - zdarzenie elementarne)
$\mathcal{S}$ - σ-ciało zdarzeń. ($A \in \mathcal{S}$) - zdarzenie
P - prawdopodobieństwo, $P(A)$ - prawdopodobieństwo zdarzenia $A \in \mathcal{S}$

2.2 Przestrzeń kombinatoryczna

Przestrzeń $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, gdzie:

1. $|\Omega| < \infty$
2. $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$
3. $P(A) = |A|/|\Omega|, A \in \mathcal{S}$

2.3 Przestrzeń dyskretna skończona

Przestrzeń $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, gdzie:

1. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$
2. $\mathcal{S} = \mathcal{P}(\Omega)$
3. P zadane przez wektor $(p_1, \ldots, p_n)$, $p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
4. $P(\{\omega_i\}) = p_i$
5. Dla $A \subseteq \Omega$ określamy $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\Omega\}) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

2.4 Przestrzeń dyskretna nieskończona (przeliczalna)

Przestrzeń $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, jak wyżej tylko P jest zadane przez ciąg $(p_1, p_2, \ldots)$

Jeśli Ω jest przeliczalna to za σ-ciało możemy bezpiecznie przyjąć $\mathcal{P}(\Omega)$

2.5 Geometryczny model Prawdopodobieństwa

Weźmy $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, taki że $\lambda^n(\Omega) < \infty$. (Miarę Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$). Ustalmy $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\Omega)$. Wtedy:

$$P(A) = \frac{\lambda^n(A)}{\lambda^n(\Omega)}, A \in \mathcal{S}$$

$n = 1$ - długość, $n = 2$ - pole powierzchni, $n = 3$ objętość.

3 Prawdopodobieństwo Warunkowe

Definition. Prawdopodobieństwo Warunkowe. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Niech $A, B \in \mathcal{S}$ i załóżmy, że $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zdarzenia B określamy jako:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Fact. Prawdopodobieństwo Warunkowe jest dobrze określone. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, niech $B \in \mathcal{S}$ będzie zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$. Niech:

$$P_B(A) = P(A|B), \text{ dla } A \in \mathcal{S}$$

Wówczas $(\Omega, \mathcal{S}, P_B)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

3.1 Prawdopodobieństwo Całkowite

Definition. Prawdopodobieństwo Całkowite. Ustalmy przstrzeń probablistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Niech $\{A_1, \ldots, A_n\}$ będzie rozbiciem Ω na zdarzenia $\forall 1 \leqslant i \leqslant n (A_i \in \mathcal{S}) A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$ oraz $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$. Niech $B \in \mathcal{S}$ Wtedy:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cup A_i)$$

Jeśli ponadto $P(A_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$ to:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Fact. Rozbicie. Jeśli $\{A_1, \ldots, A_n\}$ jest rozbiciem Ω na zdarzenia, a $B \in \mathcal{S}$, takie że $P(B) > 0$, to:

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i|B) = 1$$

3.2 Wzór Bayesa

Definition. Wzór Bayesa. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. oraz rozbicie Ω na zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$, takie że $P(A_i) > 0$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Niech $B \in \mathcal{S}$ będzie takie, że $P(B) > 0$. Wtedy dla $1 \leqslant i \leqslant n$ mamy:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

Dla $n = 2$:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^C) \cdot P(A^C)}$$

4 Zdarzenia niezależne

Definition. Zdarzenie niezależne. Zdarzenia A i B są niezależne, gdy:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Powiemy, że zdarzenia A_t, $t \in T$ (T - zbiór indeksów) są niezależne, jeśli dla dowolnych róznych indeksów $i_1, \ldots, i_n \in T$ zachodzi:

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{n} P(A_{i_j})$$

Information. Niezależność, a prawdopodobieństwo warunkowe. Jeśli zdarzenia A i B są niezależne oraz $P(B) > 0$, to:

$$P(A|B) = P(A)$$

5 Zmienne Losowe

Definition. Zmienne Losowe. Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Zmienną losową nazywamy funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ taką, że:

$$(\forall B \in \mathcal{B})(X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega \in B\} \in \mathcal{S})$$

(Intuicja) Każdemu zdarzeniu $B \in \mathcal{B}$ mogę przyporządkować ppb. odpowiadające ppb. zdarzenia z Ω reprezentowanego przez B, czyli $P(X^{-1}(B))$

Definition. Funkcje mierzalne. Niech $(S, \mathcal{S})$ oraz $(T, \mathcal{T})$ będą przestrzeniami mierzalnymi. Funkcję $f : S \to T$ nazywamy funkcją $\mathcal{S}/\mathcal{T}$-mierzalną, jeśli

$$(\forall B \in \mathcal{T})(f^{-1}(B) = \{s \in S : f(s) \in B\} \in \mathcal{S})$$

Zmienne losowe to funkcje mierzalne z $(\Omega, \mathcal{S})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.
(Zachowuje strukturę σ-ciał)

Fact. Funkcje ciągłe. Funkcje ciągłe są mierzalne.

Definition. Równość prawie wszędzie. Niech $(S, \mathcal{S}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą, a $f, g : S \to \mathbb{R}$ będą funkcjami mierzalnymi ($\mathcal{S}/\mathcal{B}$ mierzalnymi). Mówimy, że f i g są równe μ-prawie wszędzie, jeśli:

$$\mu\{s \in S : f(s) \neq g(s)\} = 0$$

Information. Oznaczenie. Dla dowolnego $B \in \mathcal{B}$ niech:

$$P_X(B) = (P \circ X^{-1})(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B)$$

Prawdopodobieństwo P_X na przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ oznaczamy rozkładem zmiennej losowej X.

5.1 Dystrybuanta

Definition. Dystrybuanta. (Cumulative Distribution Function -CDF) zmiennej losowej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ taką, że:

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant t\}) = P(X^{-1}((-\infty, t]))$$

Information. Własności dystrybuanty. Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie zmienną losową

1. dystrybuanta $F_X(t)$ jest funkcją niemalejącą tzn.

$$(\forall s, t \in \mathbb{R})(s \leqslant t \implies F_X s) \leqslant F_X(t))$$

2. granica dystrybuanty w $\infty, -\infty$ wyraża się poprzez:

$$\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1 \text{ oraz } \lim_{t\to\infty} F_X(t) = 0$$

3. dystrybuanta $F_X(t)$ jest prawostronnie ciągła tzn.

$$(\forall a \in \mathbb{R}) \left(\lim_{t\to a^+} F_X(t) = F_X(a) \right)$$

Theorem. Twierdzenie. Funkcja $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ jest dystrybuantą pewnej zmiennej losowej wtedy i tylko wtedy,g dy spełnia powyższe 3 warunki.

5.2 Dyskretna zmienna losowa

Theorem. Dyskretna zmienna losowa. Rozkład dyskretnej zmiennej losowej X jest wyznaczony jednoznacznie przez określenie ppb. przyjmowania dla poszczególnych wartości przez X $(P(X = x))$ dla każdego $x \in \mathrm{rng}(X)$. Dla dowolnego $A \in \mathbb{B}$ mamy:

$$\begin{aligned} P(X \in A) &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}) && (1)\\ &= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A \cap \mathrm{rng}(X)\}) && (2)\\ &= P\left(\bigcup_{x\in \mathrm{rng}(X)\cap A} \{x\} \right) && (3)\\ &= \sum_{x\in \mathrm{rng}(X)\cap A} P(X = x) && (4) \end{aligned}$$

Definition. Funkcja masy prawdopodobieństwa. (Probablity Mass Function - PMF) dyskretnej zmiennej losowej X nazywamy funkcję: $p_X : \mathrm{rng}(X) \to [0, 1]$ zadaną wzorem:

$$p_X(x) = P(X = x)$$

Fact. Wzór na Dystrybuantę. Dystrybuanta dyskretnej zmiennej losowej X z PMF p_x zadana jest wzorem:

$$F_X(t) = P(X \leqslant t) = \sum_{y\in \mathrm{rng}(X) y\leqslant t} p_X(y)$$

Theorem. Istnienie zmiennej losowej o zadanym rozkładzie dyskretnym. Niech $B = \{b_i : i \in I\}$ będzie przeliczalnym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych, takich że $b_i \neq b_j$ dla $i \neq j$. Niech $p_i, i \in I$ będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi, takimi że $\sum_{i \in I} p_i = 1$.

Istnieje wówczas ppb. $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ i dyskretna zmienna losowa $X : \Omega \to \mathbb{R}$, której PMF zadana jest przez:

$$p_X(b_i) = p_i, i \in I \text{ oraz } p_X(b) = 0, b \notin B.$$