

# Analiza Matematyczna

Rafał Włodarczyk

INA 1 Sem. 2023

## 1 Wykład I

Liczby naturalne  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

**Definicja 1.0.1.** Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba  $n$  posiada tę własność, to posiada ją również liczba  $n + 1$ .

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

**Przykład 1.0.1.**  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

1.  $n = 1$   $L = 1$   $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2.  $\forall_{n \geq 1} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .  
Z założenia indukcyjnego mamy:  
 $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$   
Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi  $\square$ .

**Przykład 1.0.2.** Nierówność Bernoulli'ego. Niech  $a \geq 1$ , wówczas dla dowolnego  $n$  naturalnego zachodzi nierówność:  $(1 + a)^n \geq 1 + na$

1.  $n = 1$ ,  $L = (1 + a)^1 = 1 + a$ ,  $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$ ,  $L = P$ , własność zachodzi
2.  $\forall_{n > 1} (1 + a)^n \geq 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a$   
 $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \stackrel{ind.}{\geq} (1 + na)(1 + a)$   
 $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1) \cdot a$   
Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

**Definicja 1.0.2.** Liczby wymierne  $\mathbb{Q}$  to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:

$$a < b, a > b, a = b.$$

Dodawanie  $\mathbb{Q}$

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Mnożenie  $\mathbb{Q}$

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Własności:

$$1. \text{ Przemienność } a + b = b + a$$

$$2. \text{ Łączność } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3. \text{ Rozdzielność } (a + b)c = ac + bc$$

Uwaga. Jeżeli  $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$ . Mówimy wtedy, że  $c$  leży między liczbami  $a$  i  $b$ .

Z twierdzenia Pitagorasa  $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$ . D-d niewymierności  $\sqrt{2}$  jako ćwiczenie.

Własność - zbiór  $\mathbb{Q}$  jest zbiorem gęstym.

Niech  $a, b$  będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że  $a < b$ . Wówczas istnieje liczba  $c$  leżąca między liczbami  $a$  i  $b$ .

$$\text{np.: } c = \frac{a+b}{2}$$

Liczby rzeczywiste  $\mathbb{R}$

**Definicja 1.0.3.** Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby  $m, M$ , że:

$$\forall_{x \in X} m \leq x \leq M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

**Definicja 1.0.4.** Kres górny zbioru. Niech  $X$  będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leq M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór  $X$  z góry.

$(-\infty, 1)$ : kres 1

$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$ : kres 2

## 1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

**Definicja 1.1.1.** Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczającą zbiór  $X$  z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leq x$$

$(-1, +\infty)$ : kres  $-1$

$(2, +\infty)$ : kres 2

Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

## 1.2 Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

**Przykład 1.2.1.** Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leq |a - b|$

**Definicja 1.2.1.** Współczynnik Newtona. Zakładamy że  $n, k$  są liczbami naturalnymi, takimi że  $n \geq k$ . Współczynnik Newtona określam wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1.  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
  2.  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
  3.  $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
  4.  $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$
- Symbol sumy  $\sum$
  - Symbol iloczynu  $\Pi$

**Definicja 1.2.2.** Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech  $a_1, a_2, \dots, a_n$  oraz  $b_1, b_2, \dots, b_n$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

drugi

## 2 Wykład II

**Definicja 2.0.1.** Ciąg liczbowy to funkcja z  $\mathbb{N}$  w  $\mathbb{R}$ . Stosujemy zapis  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Przykłady:

- $a_n = c + (n - 1)d$  - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$  - geometryczny
- $c_n = n!$
- $d_{n+1} = 2^{d_n}$  - rekurencyjny

**Definicja 2.0.2.** Ciąg monotoniczny.

1.  $a_n$  jest rosnący  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n < a_{n+1}$
2.  $a_n$  jest malejący  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n > a_{n+1}$
3.  $a_n$  jest niemalejący  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq a_{n+1}$
4.  $a_n$  jest nierosnący  $\iff \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1.  $a_n$  jest rosnący od  $n_0$   $\iff \forall n > n_0 a_n < a_{n+1}$

**Definicja 2.0.3.** Liczbą graniczną ciągu  $a_n$  nazywamy liczbę  $g$ , taką że:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 |a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$  lub  $a_n \rightarrow g$ .

$$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

## 3 Wykład III

**Twierdzenie 3.0.1.** Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.

$$\forall n > n_0 a_n \leq a_{n+1} \text{ i } \forall n \in \mathbb{N} a_n < M \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.

$$\forall n > n_0 a_n \geq a_{n+1} \text{ i } \forall n \in \mathbb{N} a_n > m \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Idea dowodu:

$$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$$

A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A

Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres

czyli  $\sup(A)$  (??)  $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

**Przykład 3.0.1.** Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny:  $a_1 = \sqrt{2}$   $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Idea dowodu indukcyjnego:

1.  $a_n \leq 2$ , indukcja po  $n$
2.  $a_n \leq a_{n+1}$ , indukcja po  $n$ .  $a_n \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} \leq a_{n+2}$
3.  $\sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}}$  kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$$\forall_{n \geq 1} a_n \leq 2 \implies a_{n+1} \leq 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq_{z.ind} \sqrt{2 + 2} = 2$$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$$

$$g = \sqrt{2 + g}$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 = 3^2$$

$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } \lim a_n = g_1$$

**Definicja 3.0.1.** Podciąg ciągu

Niech  $a_n$  będzie dowolnym ciągiem. Niech  $n_1, n_2, \dots, n_k$  będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg  $a_{n_k} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$  Nazywamy podciągiem ciągu.

**Przykład 3.0.2.** Rozważmy następujące przykłady ( $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ):

a)  $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

$a_{2k} = (-1)^n = 1, k \in \mathbb{N}$

$(a_2, a_4, a_6, \dots)$  - podciąg o wyrazach parzystych.

b)  $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$

$(a_1, a_3, a_5, \dots)$  - podciąg o wyrazach nieparzystych.

$S = \{1, -1\}$

c)  $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$

$a_{2k-1} = 2k - 1$  - podciąg o wyr. nieparzystych.

$a_{2k} = \frac{1}{2k}$  - podciąg o wyr. parzystych.

$S = \{0, \infty\}$  d)  $\sin(\frac{n\pi}{3})$  -  $\text{plot}(\sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

**Definicja 3.0.2.** Liczba  $s$  jest punktem skupienia ciągu  $a_n \iff s$  jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie  $S$  - zbiór punktów skupienia.

Jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \implies a_n$  ma granicę niewłaściwą  $+\infty$

- $\sup()$  - superior - kres górny
- $\inf()$  - inferior - kres dolny

**Definicja 3.0.3.** Granica górna ciągu  $a_n$  to kres górny granic podciągu  $a_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

**Definicja 3.0.4.** Granica dolna ciągu  $a_n$  to kres dolny granic podciągu  $a_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\lim \inf(a_n) \leq \lim \sup(a_n)$ , równość dla granicy ciągu.

**Twierdzenie 3.0.2.** Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)

D-d.  $\forall_{n \in \mathbb{N}} m \leq a_n \leq M$  Dzielimy przedział  $[m_1, M_1]$  na dwa podprzedziały:  $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$ ,  $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$ . Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez  $[m_2, M_2]$ . Postępujemy tak dalej i mamy:

$\forall_{k \in \mathbb{N}} m_1 \leq m_k \leq a_{nk} \leq M_k \leq M_1$   
 $M_k$  malejący i ograniczony  $\implies$  zbieżny  $g_1$   
 $m_k$  rosnący i ograniczony  $\implies$  zbieżny  $g_2$   
 $g_1 = g_2 = g$   
 $M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$   
 $M_k \rightarrow g_1; m_k \rightarrow g_2$ , ponieważ  $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \rightarrow 0$

**Definicja 3.0.5.** Ciąg  $a_n$  nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:  
 $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n, m > n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**Twierdzenie 3.0.3.** Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny  $\iff$  jest ciągiem Cauchy'ego.

**Przykład 3.0.3.**  $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$   
 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$ .

1.  $x_n$  jest rosnący  $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n+1} > x_n$
2.  $x_n$  jest ograniczony (pamiętając, że  $\forall_{n > 3} 2^n \leq n!$  czyli  $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}, \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$ )...  
Dla  $n > 3$   $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq$   
 $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$   
 $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$   
Istnieje  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e = 2.7182\dots$   
 $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

**Twierdzenie 3.0.4.** Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

**Twierdzenie 3.0.5.** Niech  $a_n$  będzie dowolnym ciągiem takim, że:  $\lim_n \implies_{\infty} a_n = \infty$ .  
Wówczas:

$$\lim_n \implies_{\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

**Przykład 3.0.4.**  $\lim((1 + \frac{1}{2^n})^{2^n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

**Przykład 3.0.5.**  $\lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = \lim((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{n}{2n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka:  $\lim((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \rightarrow \text{infy})$

**Definicja 3.0.6.** Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Przykładowo dla  $e$   $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \dots$   
Jeżeli ciąg  $S_n$  jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_N < M$$

**Przykład 3.0.6.**  $\text{apart}(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow \text{wolframalpha}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= S_N \\ S_1 &= \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{zatem:} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \\ = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{finalnie:} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 \end{aligned}$$

**Przykład 3.0.7.**  $a + aq + \dots + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ , dla  $|q| < 1$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

**Przykład 3.0.8.**  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

**Przykład 3.0.9.** Szereg harmoniczny.  $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} = \infty$ , wolny wzrost do  $\infty$   
 $H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} &\geq 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \dots &\geq 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \dots &\geq 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2} \\ H_{2^{n+1}} &\geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1) \\ H_{2^{n+1}} &\geq 1 + \frac{n+1}{2} \\ H_{2^n} &\geq 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Założmy, że  $2^N = k \implies N = \log_2(k)$

$$H_k \geq 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \rightarrow \infty$$

Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach  $H_k \rightarrow \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

**Definicja 3.0.7.** Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . (dla  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ ).

Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$  jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Warunek konieczny nie jest wystarczający.

## 4 Wykład IV

### 4.1 Kryteria zbieżności szeregów

**Twierdzenie 4.1.1.** Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny  $\iff$  jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} > 0$ ,  $S_N$  - rosnący. Jeżeli  $S_N$  jest ograniczony to jest zbieżny.

Wniosek:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , dla  $n \geq 2$ :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2$$

**Twierdzenie 4.1.2.** Kryterium porównawcze.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  oraz  $a_n, b_n > 0$ :

Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} a_n \leq b_n$  i  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  jest zbieżny, to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.

**Twierdzenie 4.1.3.** Jeżeli  $\sum_{n > n_0}^{\infty} \leq \sum_{n > n_0}^{\infty}$  i  $\sum_{n > n_0}^{\infty} a_n = \infty$  ( $a_n$  rozbieżny), to wówczas  $\sum_{n > n_0}^{\infty} b_n = \infty$  ( $b_n$  rozbieżny).

Wniosek:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$  dla  $p \leq 1$ , bo  $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

**Twierdzenie 4.1.4.** Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że  $a_n \geq 0$  i  $a_{n+1} \leq a_n$ .

Wówczas  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$  jest zbieżny.

**Przykład 4.1.1.** Rozważmy poniższy przykład ciągu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \implies tw.zag$$

$$2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8$$

**Przykład 4.1.2.** Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R} \text{ zbieżny} &\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p \text{ jest zbieżny.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} &\text{ jest zbieżny dla } p > 1 \end{aligned}$$

Wniosek 1:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  jest zbieżny dla  $p > 1$  i rozbieżny dla  $p \leq 1$

**Definicja 4.1.1.** Kryterium d'Alemberta:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$ :

- Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
- Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.
- Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ , to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q, q < 1$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

$$a_{n+1} < a_n q$$

$$a_n < a_0 q^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} - \text{zbieżne}$$

**Przykład 4.1.3.** Przykład:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n!}{n^n}$ :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.



**Przykład 4.1.4.** Przykład:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$  jest rozbieżny. ( $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$ )

**Przykład 4.1.5.** Przykład:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$  Kryterium d’Alamberta nic nie powie.

**Przykład 4.1.6.** Przykład:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1$  Kryterium d’Alamberta nic nie powie.

Simplify (wolframalpha):

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

discreteplot( $n^2, (n, 1, 20)$ ) (wolframalpha)

discreteplot( $n^2, n, 1, 20$ ) (mathematica)

**Definicja 4.1.2.** Kryterium Cauchy’ego.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$

1. Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny.
2. Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , to  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest rozbieżny.
3. Jeżeli  $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$ , to kryterium Cauchy’ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:

$\sqrt[n]{|a_n|} < q, 0 < q < 1$  czyli  $|a_n| < q^n$  więc  $a_n < q^n$  zatem  $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$  zbieżny.

**Przykład 4.1.7.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, a_n = \frac{n^2}{2^n}$

z kryterium Cauchy’ego:  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$  - zbieżny

**Przykład 4.1.8.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}, a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$

z kryterium Cauchy’ego:  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$  - rozbieżny

**Przykład 4.1.9.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$

kryterium Cauchy’ego nie działa:  $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \Rightarrow 1$

$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$ , sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$

Ciąg jest rozbieżny.

**Definicja 4.1.3.** Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  jest zbieżny bezwzględnie jeśli:  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  jest zbieżny.

**Przykład 4.1.10.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$  jest zbieżny bezwzględnie.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n n^2}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$  jest zbieżny (kryterium d’Alemberta)

**FAKT.** Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

**Twierdzenie 4.1.5.** Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  jest zbieżny  $\implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zbieżny.

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

**Przykład 4.1.11.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:  
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

**Twierdzenie 4.1.6.** Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1.  $a_n \geq 0$
2.  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Wówczas:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n$  jest zbieżny

**Przykład 4.1.12.** Pokażmy, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  jest zbieżny. Z kryterium Abela:  
 $a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \wedge a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  Szereg jest zatem zbieżny.

**Przykład 4.1.13.**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$   
 Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

## 4.2 Funkcje

Analizujemy funkcje  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

**Definicja 4.2.1.** Dziedzina funkcji (domain):  $dom(f)$  - zbiór wszystkich  $x$  dla których funkcja jest określona.

**Definicja 4.2.2.** Zbiór wartości (range):  $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

**Definicja 4.2.3.** Wykres funkcji (graph):  $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

**Definicja 4.2.4.** Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli  $f : A \rightarrow B$  jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja  $f^{-1} : rng(f) \rightarrow A$ , taka że:  $\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$  oraz  $\forall y \in rng(f) \quad f(f^{-1}(y)) = y$ .

**Definicja 4.2.5.** Funkcje monotoniczne  $f : A \rightarrow B$ :

1.  $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) < f(y))$  - rosnąca
2.  $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) > f(y))$  - malejąca
3.  $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) \leq f(y))$  - niemalejąca (słabo rosnąca)
4.  $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) \geq f(y))$  - nierosnąca (słabo malejąca)

**Definicja 4.2.6.** Złożenie funkcji  $f : A \rightarrow B$ ,  $g : B \rightarrow C$  wówczas:

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

**Przykład 4.2.1.** Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = x^3 + 1, g(y) = \sin(y)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(x^3 + 1)$$

Przykład drugi:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^3(x) + 1$$

## 5 Wykład V

Funkcje elementarne.

1.  $f(x) = ax + b$  - funkcja liniowa
2.  $f(x) = ax^2 + bx + c$  - funkcja kwadratowa
3.  $W(x)$  - wielomian (wymierna)
4.  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  - funkcja wykładnicza  
 $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$ ;  $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5.  $f(x) = \log_a(x)$ ,  $a > 0$  - funkcja logarytmiczna, odwrotna do  $f(x) = a^x$   
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ ;  
 $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$   
Wzór na zamianę podstawy logarytmu:  
 $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
6.  $e$  - Liczba Eulera -  $e \approx 2.7172$   
 $\log_e(x) = \ln(x)$   
 $\log_a(x) = \ln(x) \cdot \log_a(e)$

### 5.1 Trygonometria

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$$

$$\sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$$

Szeregi liczby Eulera:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-t)^k}{k!} = e^{it}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\operatorname{sum}(1k!, (k, 0, 1000))]$

Zobaczmy wzór:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ e^{ix} \cdot e^{iy} &= e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} \stackrel{def}{=} \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) &= (\cos x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)i + (\sin x)(\cos y) + i^2 \sin x \sin y \\ &= ((\cos x) + (\cos y) - (\sin x)(\sin y)) + i((\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y)) \\ Re &= Re, Im = Im, \text{ a zatem d-d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Funkcje } tg(x), ctg(x), tg(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ plot(tan(x), (x, -20, 20)) \end{aligned}$$

## 5.2 Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

$\sin(x)$  w  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  jest bijekcją, dzięki czemu można zdefiniować funkcję odwrotną.

- $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\arctg(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\text{arcctg}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

## 5.3 Funkcje hiperboliczne

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Jedynka hiperboliczna:

$$\cosh^2 h - \sinh^2 h(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D-d: } \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} + 2e^x \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4} = \\ &= \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

Definicja  $tgh, ctgh$ :

- $tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $ctgh(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

## 5.4 Funkcje sigmoidalne

1. funkcja logistyczna  $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \sigma(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$   
Uogólniona:

$$f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^\alpha}, \alpha > 0$$

2. tangens hiperboliczny  $f(x) = tgh(x)$

3. arcus tangens hiperboliczny  $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

4. error function - funkcja błędu

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

## 5.5 Funkcje okresowe

Definicja  $A$  - dziedzina  $f$ :  $\exists_T$  takie, że  $\forall_{x \in A} f(x+T) = f(x)$

## 5.6 Funkcje egzotyczne

1.  $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$  - cz. całkowita  $x$ . Najw. całkowita nieprzekraczająca  $x$ .

2.  $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$  - podłoga liczby  $x$  (to samo co część całkowita)

3.  $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k \geq x\}$  - sufit liczby  $x$

$$4. \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$[5.5] = 5, [4.7] = 4, [-3.4] = -4$$

## 5.7 (Heine) Granica funkcji

Zakładamy, że istnieje  $\Delta > 0$  taka, że  $f$  jest określona na  $(a - \Delta, a) \cup (a, a + \Delta)$  (sąsiedztwie punktu  $a$ ).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{x_n \Rightarrow a, x_n \neq a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

**Przykład 5.7.1.** Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Weźmy  $x_n \rightarrow 0$ ;  $x_n \neq 0$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \cdot 0 = 0$

**Przykład 5.7.2.** Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1} = 2$$

**Przykład 5.7.3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$  - dowód z tw. o trzech funkcjach.

## 5.8 (Cauchy) Granica funkcji

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Symbolu  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  - używamy również na oznaczenie granicy niewłaściwej.

Przykłady:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \left[ \frac{1}{0^+} \right] = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  nie istnieje  $x'_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{-1}{n} \rightarrow 0$ , ale  $f(x'_n) \rightarrow \infty, f(x''_n) \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  nie istnieje  $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$ , ale  $f(x'_n) = 0, f(x''_n) = 1$

## 5.9 Granice Jednostronne

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n > a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n < a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - x|$  - *limit(abs(x<sup>2</sup> - x), x → 1, assumptions → rightarrow x > 1)* ← wolfram  
*Limit{Abs[x<sup>2</sup> - x], x → 1, assumptions → x > 1}* ← mathematica

## 5.10 Granica w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

**Przykład 5.10.1.** Zobaczmy granice w nieskończoności:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ , o ile  $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

**Przykład 5.10.2.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \begin{cases} x = -t \\ t \rightarrow \infty \end{cases} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$

## 5.11 Twierdzenie o arytmetyce granic

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

## 5.12 Twierdzenie o trzech funkcjach

Zakładamy, że  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  oraz  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g$ , wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g$$

**Przykład 5.12.1.**  $\lim (x \cdot \sin(\frac{1}{x})) = 0$   
 $0 \leq |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \cdot 1$

**Twierdzenie 5.12.1.** Definicja z granic ciągów  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , przenosi się na granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

### 5.13 Notacja duże O, notacja asymptotyczna

Mamy dwa ciągi  $a(n)$ ,  $b(n)$ . Mówimy że:

$$a(n) = O(b(n)) \iff \exists_C \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a(n)| \leq C |b(n)|$$

**Przykład 5.13.1.** Przykłady notacji big O:

- $a(n) = n^2 - \frac{1}{2}n = O(n^2)$
- $b(n) = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + n = O(n^2)$   
 $\forall_{n \geq 1} \frac{1}{2}n^2 + n \leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2, C = \frac{3}{2}$
- $c(n) = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$   
 $c(n) = O(n^2), c = |a_2| + |a_1| + |a_0|$

**Twierdzenie 5.13.1.**  $f(n) = O(g(n)) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \infty$

Zastosowania:

$n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$ , ponieważ:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^3} \right| = 1 < \infty$$

**Przykład 5.13.2.** Przykład ambitny:

Ustalmy  $k$  - stała:  $\binom{n}{k} = O(n^k)$  - dowód jako zadanie z (\*).

Kolejno:

$n^2 + n = O(n^2), n^2 + n = O(n^3)$  - na interesuje najmniejsze O

**Definicja 5.13.1.** Mówimy, że:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n))$$

**Przykład 5.13.3.**  $\frac{1}{2}n^2 + n = \Theta(n^2)$

**Twierdzenie 5.13.2.**  $\left( \lim \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = g \wedge 0 < g < \infty \right) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

Oraz kolejno (zaawansowane):

$$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n^k + \Theta(n^{k-1})$$

## 6 Wykład VI

**Przykład 6.0.1.** Policzmy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow \infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow \infty} t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow -\infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow -\infty} t$$

**Przykład 6.0.2.** Pokażmy, że  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{t})^t = e$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{t})^t, \text{ podstawienie } t = -s,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{s})^{-s} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

## 6.1 Asymptoty

**Definicja 6.1.1.** Prosta  $x = a$  jest asymptotą pionową lewostronną funkcji  $f$  w punkcie  $a$ , jeżeli zajdzie jeden z warunków:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną dla  $x \rightarrow a^+$ .

**Definicja 6.1.2.** Prosta jest asymptotą pionową jeżeli jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

**Przykład 6.1.1.** Asymptoty pionowe mogą wystąpić w punktach poza dziedziną funkcji:  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \implies$  prosta  $x = -1$  jest asymptotą pionową obustronną funkcji  $f(x)$ .

**Definicja 6.1.3.** Prosta  $y = ax + b$  jest asymptotą ukośną funkcji  $f$  w  $\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

**Twierdzenie 6.1.1.** Prosta  $y = ax + b$  jest asymptotą ukośną funkcji  $f$  w  $\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

Jeżeli te granice nie istnieją to funkcja nie posiada asymptoty ukośnej w  $\infty$ .

Idea dowodu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x) - (ax + b))}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) &\implies a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax)) \end{aligned}$$

**Twierdzenie 6.1.2.** Prosta  $y = ax + b$  jest asymptotą ukośną funkcji  $f$  w  $-\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

**Przykład 6.1.2.** Narysujmy wyres funkcji:  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ , pokażmy, że prosta  $y = x + 1$  jest asymptotą ukośną  $f(x)$  w  $\pm\infty$ .

$$a_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$a_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$



## 6.2 Ciągłość funkcji

**Definicja 6.2.1.** Ciągłość funkcji (Heinego). Zakładamy, że  $f$  jest określona na pewnym otoczeniu punktu  $a$ , tzn. na przedziale  $(a - \Delta, a + \Delta)$  dla pewnego ustalonego  $\Delta > 0$ . Mówimy, że  $f$  jest ciągła w punkcie  $a$  wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

**Przykład 6.2.1.** Zobaczmy jak w praktyce można zastosować te definicje:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)^2 = (\lim_{x \rightarrow 1} (x) + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

**Przykład 6.2.2.** Przykłady:

- $f(x) = x^2$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$  jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.
- $f(x) = \sin(1/x)$ ,  $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$  jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

**Twierdzenie 6.2.1.** Ciągłość prawostronna (Heinego). Zakładamy, że  $f$  jest określona na pewnym prawostronnym otoczeniu punktu  $a$ , tzn. na przedziale  $(a, a + \Delta)$  dla pewnego ustalonego  $\Delta > 0$ . Mówimy, że  $f$  jest prawostronnie ciągła w punkcie  $a$ , wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną dla  $x \rightarrow a^-, [a - \Delta, a]$

**Twierdzenie 6.2.2.** Funkcja jest ciągła w punkcie  $a$  jeżeli jest jednocześnie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

**Przykład 6.2.3.** Zbadaj ciągłość podanej funkcji w 0 w zależności od parametru  $a$ :

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 1, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Liczymy: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a$$

$$a = 1$$

**Definicja 6.2.2.** Ciągłość funkcji (Cauchy'ego). Funkcja  $f$  jest ciągła w punkcie  $a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

**Twierdzenie 6.2.3.** Jeżeli  $f, g$  są ciągłe w punkcie  $x_0 = a$ , to wówczas:

1.  $f(x) \pm g(x)$
2.  $f(x) \cdot g(x)$
3.  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , o ile  $g(a) \neq 0$

są ciągłe w punkcie  $x_0 = a$ .

Wniosek. Wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swojej dziedzinie. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzinie.

**Twierdzenie 6.2.4.** Złożenie funkcji ciągłych  $f, g$  jest funkcją ciągłą.

$$f \text{ ciągła} \wedge g \text{ ciągła} \implies f \circ g \text{ ciągła}$$

$$\text{Zobaczmy przykład: } \lim_{x \rightarrow a} \left( \cos \left( \frac{1}{x} \right) \right) = \cos \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \right) = \cos \left( \frac{1}{a} \right)$$

### 6.3 Mnożenie szeregów

$$\begin{aligned}(1 + 2x + x^2)(-1 + 3x + x^2 + x^3) &= (1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3)x^3 + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^4 + (1 \cdot 1)x^5 \\ (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2\end{aligned}$$

$$c_0 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}; \quad c_1 = \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k}; \quad c_2 = \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k}$$

**Twierdzenie 6.3.1.** Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów.

Zakładamy, że  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$ , wtedy  $c_0 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - \text{dyskretny spłot}$$

### 6.4 Funkcja exp(x)

**Definicja 6.4.1.** Niech  $x \in \mathbb{R}$ :

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$  jest poprawnie zdefiniowana.  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \rightarrow$  jest zbieżność bezwzględna  $x \in \mathbb{R}$ .

**Przykład 6.4.1.** Dyskretny spłot exp:

$$\exp(x) + \exp(y) = \exp(x + y)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$  dyskretny spłot szeregów  $a_n, b_n$   
zatem:

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + y)^n$$

**Przykład 6.4.2.**  $\forall x \in \mathbb{R} \exp(x) > 0$

1.  $x > 0 \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$ , ponieważ  $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1)$
2.  $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$   
 $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$

**Przykład 6.4.3.** Funkcja  $\exp(x)$  jest ciągła:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \exp(h) \\ &= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(x_0) \cdot 1\end{aligned}$$

## 7 Wykład VII

Konfa ...

## 8 Wykład VIII

### 8.1 Suma i iloczyn pochodnych

**Twierdzenie 8.1.1.** Pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

D-d.  $(f(x) + g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = * f'(x) + g'(x)$  (\* granica sumy jest sumą granic)

**Twierdzenie 8.1.2.** CHAIN RULE. Pochodna iloczynu funkcji wyraża się wzorem:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

D-d.  $(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x) + f(x)) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$  (g jest różniczkowalna  $\implies$  g ciągła)

Wniosek:  $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$  (Liniiowość pochodnej)

### 8.2 Odwołanie - odwzorowanie liniowe

$$A : X \rightarrow Y$$

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$A(c \cdot x) = c \cdot A(x)$$

### 8.3 Odwrotność pochodnej

Pokaż, że:  $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$  (lista zadań)

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

### 8.4 Pochodna ilorazu

**Twierdzenie 8.4.1.** Pochodna ilorazu dwóch funkcji  $f(x), g(x)$  wynosi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

D-d.  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

**Przykład 8.4.1.** Rozważmy poniższy wzór:

$$\forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

D-d. Wykorzystujemy wzór dwumianowy Newtona:

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h}, \text{ Załóżmy, że } n \geq 2:$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^0 x^n \binom{n}{0} + h^1 x^{n-1} \binom{n}{1} + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} =$$
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + h x^{n-1} n + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + (\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^{k-1} x^{n-k}) = n x^{n-1}$$

**Przykład 8.4.2.**  $\frac{d}{dx} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$

**Przykład 8.4.3.** Sinus, cosinus:

$\sin'(x) = \cos(x)$  tydzień temu

$\cos'(x) = -\sin(x)$  ćw

**Przykład 8.4.4.** Policzmy  $\tan'(x)$ :

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

**Przykład 8.4.5.** Policzmy  $\cot'(x)$ :

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{(\sin(x))^2}$$

## 8.5 Pochodne [e]

**Przykład 8.5.1.** Lemat techniczny:  $\forall_{n \in \mathbb{R}} |e^n - 1 - h| \leq \frac{|h|^2}{2} e^{|h|} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$

$$\begin{aligned} e^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \\ e^n - 1 - h &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2h^k}{(k+2)! \cdot 2} \\ |e^n - 1 - h| &\leq \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2|h|^k}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} < \\ \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} &= \frac{h^2}{2} e^{|h|} \end{aligned}$$

**Twierdzenie 8.5.1.**  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h} = 0 \iff \lim \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right|$$

$$0 < \frac{|e^h - 1 - h|}{|h|} < \frac{\frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}{|h|} = 0 \text{ Z twierdzenia o trzech ciągach mamy dowód.}$$

**Przykład 8.5.2.**  $(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

**Przykład 8.5.3.**  $(a^x)' = (e^{\ln(a) \cdot x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a) \cdot (x+h)} - e^{\ln(a) \cdot x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(a) \cdot x} \frac{e^{\ln(a)h} - e^1}{h} =$   
 $= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{e^{\ln(a)h} - 1}{\ln(a)h} \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

## 8.6 Pochodna funkcji odwrotnej

**Twierdzenie 8.6.1.** Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

$y = f(x)$ , różniczkowalna i rosnąca (lub malejąca) na  $[a, b]$ . Niech  $f(x_0) = y_0$ . Wówczas istnieje funkcja odwrotna  $x = f^{-1}(y)$  oraz zachodzi wzór:

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}}$$

D-d.

Weźmy:  $f(x_0 + k) = y_0 + h$

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]'_{y=y_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(x_0+k)) - f^{-1}(f(x_0))}{y_0+h-y_0} = \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x_0+k-x_0}{f(x_0+k)-f(x_0)} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}} \end{aligned}$$

**Przykład 8.6.1.**  $f(x) = e^x$ ,  $e^{x_0} = y_0$ ,  $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$[\ln(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{e^x} \frac{1}{x=x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0} \quad (\ln(y))' = \frac{1}{y}$$

**Przykład 8.6.2.**  $\log_a(y)' = \left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{y}$

**Przykład 8.6.3.** Sprawdzmy zrozumienie tw. o pochodnej funkcji odwrotnej:

$$f(x) = \sin(x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \sin(x)$$

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Następnie:

$$f(x) = \cos(x), x \in [0, \pi], y = \cos(x)$$

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Kolejno:

$$f(x) = \tan(x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], y = \tan(x)$$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

## 9 Wykład IX

**Definicja 9.0.1.** Maksimum Lokalne. Niech funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona na przedziale  $(a - \delta, a + \delta)$ . Jeśli:

$$\exists \delta_1 < \delta \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) f(x) \leq f(a)$$

to  $f$  ma w punkcie  $a$  maksimum lokalne.

Maksimum lokalne właściwe - jw. z  $\forall x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) f(x) < f(a)$

**Definicja 9.0.2.** Minimum lokalne. Niech funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  będzie określona na przedziale  $(a - \delta, a + \delta)$ . Jeśli:

$$\exists \delta_1 < \delta \forall x \in (a - \delta_1, a + \delta_1) f(x) \geq f(a)$$

to  $f$  ma w punkcie  $a$  minimum lokalne.

Minimum lokalne właściwe - jw. z  $\forall x \in (a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_1) f(x) > f(a)$

Maksima lokalne, maksima lokalne właściwe, minima lokalne i minima lokalne właściwe to ekstrema funkcji!

**Twierdzenie 9.0.1.** Jeśli  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $c$  to posiada w tym punkcie ekstremum to  $f'(c) = 0$ .

D-d (dla maksimum, dla min. analogicznie):

Niech  $h > 0$ :

$$f(c+h) \leq f(c), f(c-h) \leq f(c)$$

$$f(c+h) - f(c) \leq 0, f(c-h) - f(c) \leq 0$$

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

$$f^{+'}(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0$$

$$f^{-'}(c) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geq 0$$

$$f^{+'}(c) = f^{-'}(c) \iff f^{+'}(c) = f^{-'}(c) = 0 \equiv f'(c) = 0$$

Warunek  $f'(c) = 0$  ma ekstremum jest tylko warunkiem koniecznym!

**Twierdzenie 9.0.2.** Twierdzenie Rolle'a. Niech  $f$  będzie ciągła w przedziale domkniętym  $[a, b]$ , różniczkowalna wewnątrz  $(a, b)$ . Jeśli  $f(a) = f(b) = 0$ , to istnieje takie  $c$ , że  $a < c < b$  oraz  $f'(c) = 0$ .

D-d.

Jeśli  $f$  jest stała,  $f'(x) = 0$ . Wówczas dla wszystkich  $x \in (a, b)$  istnieje  $c \in (a, b) : f'(c) = 0$ .

Jeśli  $f$  nie jest stała, to istnieje dodatnia lub ujemna wartość funkcji  $f$ .

Niech istnieje wartość dodatnia  $M = \sup f(x)$ . Z twierdzenia Weierstraśa:

$$\exists c \in (a, b) f(x) : M > 0, a < c < b, f(a) = f(b) = 0$$

Zatem funkcja  $f$  osiąga kres górny w punkcie  $c$ . To jest maksimum lokalne w punkcie  $c$ .  $f'(c) = 0$  itd.

**Twierdzenie 9.0.3.**  $f$  - ciągła na  $[a, b]$  i różniczkowalna wewnątrz przedziału  $(a, b)$ . Wówczas istnieje  $0 < \theta < 1$ , takie że:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a + \theta(b-a))$$

D-d (pomysł):

Rozważ funkcję  $g(x) = f(a) - f(x) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  i zastosuj tw. Rolle'a.

$$g(a) = 0, g(b) = 0, \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0$$

$$c = a + \theta(b-a), \theta \in (0, 1)$$

$$g'(x) = \left( f(a) - f(x) + (x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right)' = -f'(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$g'(a + \theta(b-a)) = 0 \iff f'(a + \theta(b-a)) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \square$$

Wnioski:

1. Jeśli  $f'(x) = 0$  dla wszystkich  $x \in [a, b]$  to  $f$  jest stała na  $[a, b]$ .

D-d.

$$x_1 < x_2 \in [a, b], \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = 0$$

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1), f(x) \text{ jest stała na } [a, b]$$

2. Jeśli  $\forall_{a < x < b} f'(x) = g'(x) \implies f(x) = g(x) + \text{stała}$ .

D-d.

$$f'(x) = g'(x) \iff f'(x) - g'(x) = 0 \iff (f(x) - g(x))' = 0 \implies f(x) - g(x) = \text{stała} \iff f(x) = g(x) + \text{stała}.$$

**Twierdzenie 9.0.4.** Reguła de L'Hospitala

## 10 Wykład X

## 11 Wykład XI

### 11.1 Techniki całkowania

Podstawowe wzory

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}$$

$$2. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \text{ bo } (-\cos(x))' = \sin(x)$$

$$3. \int \cos(x)dx = \sin(x) + C$$

$$4. \int \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$$

**Twierdzenie 11.1.1.** Niech  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , wówczas:

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Dowód

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}f(ax+b)(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

Przykłady:

- $\int \cos(nx)dx = \frac{1}{n}\sin(nx) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \arctan(\frac{x}{a}) + C = a \cdot \arctan(\frac{x}{a}) + C$
- $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int (1 - \frac{1}{x+1})dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \ln(|x+1|) + C$

## 11.2 Całkowanie przez części

**Twierdzenie 11.2.1.** Twierdzenie o całkowaniu przez części.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dowód.

$$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx = f(x) \cdot g(x)$$

Przykłady:

- $\int x \sin(x)dx$ . Przyjmujemy  $f(x) = x, g'(x) = \sin(x)$  Mamy:  
 $x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))dx = -(x)\cos(x) + \int \cos(x)dx =$   
 $= x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$
- $\int x^2 \cos(x)dx$ . Przyjmujemy  $f(x) = x^2, g'(x) = \cos(x)$  Mamy:  
 $= x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \sin(x)dx = x^2 \cdot \sin(x) - 2 \int \sin(x)dx =$   
 $= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C$
- $\int x^2 \ln(x)dx$ . Przyjmujemy  $f(x) = \ln(x), g'(x) = x^2$  Mamy:  
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3}dx =$   
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
- $\int x^n \ln(x)dx$  - ćwiczenie.
- $\int \ln(x)dx = \ln(x)x - x + C$
- $\int x^2 e^x dx$ . Przyjmujemy  $f(x) = x^2, g'(x) = e^x$  Mamy:  
 $= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x =$ . Przyjmujemy  $f(x) = x, g'(x) = e^x$  Mamy:  
 $= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$ . Przyjmujemy  $f(x) = \sin(x), g'(x) = e^x$  Mamy:  
 $= \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \cos(x)e^x$ . Przyjmujemy  $f(x) = \cos(x), g'(x) = e^x$  Mamy:  
 $= \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$

### 11.3 Całkowanie przez podstawienie

**Twierdzenie 11.3.1.** Wiedząc, że:

$$\int g(t)dt = G(t) + C, G'(t) = g(t)$$

możemy obliczyć:

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

bo  $(G(w(x)))' = g(w(x))w'(x)$ .

**Przykład 11.3.1.**  $\int e^{x^2+x}(2x+1) = e^{x^2+x} + C$

**Przykład 11.3.2.**  $\int (3x+1)^n dx$ . Podstawiamy  $3x+1 = t, dx = \frac{1}{3}dt$ . Mamy:

$$\int t^n \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3} \int t^n dt = \frac{1}{3} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{n+1}}{n+1}$$
$$(t(x) = 3x+1, \frac{dt(x)}{dx} = 3)$$

**Przykład 11.3.3.**  $\int \sin^3(x)\cos(x)dx$ . Przyjmujemy  $t = \sin(x), \frac{dt}{dx} = \cos(x)$  Mamy:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

**Przykład 11.3.4.**  $\int e^{x^2} x dx$ . Przyjmujemy  $t = x^2, \frac{dt}{dx} = 2x$  Mamy:

$$\int e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C$$

**Przykład 11.3.5.**  $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$ . Przyjmujemy  $t = 1 + \sin(x) dt = \cos(x)$  Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|1 + \sin(x)|) + C$$

**Przykład 11.3.6.**  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$   $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$  Przyjmujemy  $t = f(x) \frac{dt}{dx} = f'(x)$  Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|f(x)|) + C$$

**Przykład 11.3.7.**  $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + C$

### 11.4 Paskudny algorytm całkowania funkcji wymiernych

$W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $P, Q$  - wielomiany, cel  $\int W(x) dx$

$W$  jest właściwą funkcją wymierną jeśli:  $\deg(P) < \deg(Q)$

Każdą funkcję wymierną można zapisać jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

**Przykład 11.4.1.**  $\int \frac{x^3}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}) dx = \int (x^2 + x + 1) dx + \int \frac{1}{x-1} dx =$   
 $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$

W dalszej części zakładamy, że:  $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ,  $\deg P < \deg Q$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na ułamki proste. (apart wolframalpha)

**Twierdzenie 11.4.1.** Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych:

1.  $\frac{A}{x-a}$
2.  $\frac{A}{(x-a)^k}, k = 2, 3, \dots$



3.  $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \Delta < 0$
4.  $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m = 2, 3, \dots$

**Przykład 11.4.2.**  $W(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

1.  $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(|x-a|) + C$
2.  $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} A + C, k = 2, 3, \dots$
3.  $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{(x+a)^2+b^2} dx =$   
 $\int \frac{\frac{M}{2} 2(x+a) - Ma + N}{(x+a)^2+b^2} =$   
 $\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + \int \frac{N-Ma}{(x+a)^2+b^2} dx =$   
 $\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} dx =$   
 $\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{(\frac{x+a}{b})^2+1} dx = \dots$   
 $\arctan \dots$
4.  $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx$  sprowadza się do całek:  
 $\int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt, \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$

**Przykład 11.4.3.**  $\int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$ . Przyjmujemy  $x = t^2 + 1$  Mamy:  
 $= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{2} \frac{x^{-m+1}}{-m+1} = \frac{1}{2} \frac{(t^2+1)^{-m+1}}{-m+1} + C$

**Przykład 11.4.4.** Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny:

$$I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt$$

$$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \frac{t}{(t^2+1)^m} + \frac{2m-1}{m} I_m$$

$$I_1 = \arctan(t)$$

## 12 Wykład XII

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt =$$

$$\int \frac{1}{2} dt + \int \frac{\cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a \cos t \sin t dt = \int a^2 \int \cos^2 t dt \dots$$

### 12.1 Przez części dla całek oznaczonych

$$\int f'(x)g(x)dx = |(f(x)g(x))|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

**Przykład 12.1.1.**  $\int_1^e \ln(x) dx$ , przyjmujemy:  $f'(x) = 1, g(x) = \ln(x) \rightarrow f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{x} = (x \ln(x))|_1^e - \int_1^e 1 dx = e \ln(e) - 1 \ln(1) - x|_1^e = e - (e-1) = 1$

### 12.2 Zamiana zmiennych w całkach oznaczonych

**Twierdzenie 12.2.1.** Twierdzenie o zamianie zmiennych w całkach oznaczonych.

$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow_{na} [a, b], t \in [\alpha, \beta], \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ , to:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

**Przykład 12.2.1.**  $\int_0^1 (3x+1)^{10} dx$ , przyjmujemy  $3x+1=t$ ,  $dx = \frac{1}{3}dt$ , mamy:  $\int_1^4 t^{10} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int_1^4 t^{10} = \frac{1}{3} \left| \frac{1}{11} \cdot t^{11} \right|_1^4 = \frac{1}{3} \frac{4^{11}}{11} - \frac{1}{3} \frac{1}{11}$

**Przykład 12.2.2.**  $\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ , przyjmujemy  $x = R \cdot \sin(t)$ ,  $\frac{dx}{dt} R \cdot \cos(t)$   
 $x = \sin(t)$ , to więc  $x \in [0, 1] \rightarrow t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$(\forall x \in [0, 1]) (\exists t \in [0, \frac{\pi}{2}]) \sin(t) = x, t = \arcsin(x)$ , mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos(t) dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot R \cdot \cos(t) dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \sqrt{\cos^2(t)} \cos(t) dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos(t) \cos(t) dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \cos^2(t) dt =$$

$$R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt =$$

$$R^2 \left( \frac{1}{2} t + \frac{\sin(2t)}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\frac{R^2 \pi}{4}$$

## 12.3 Zastosowania całek

### 12.4 Pole pod wykresem

**FAKT.** Pole pod wykresem. Dla funkcji  $f \geq 0$  określonej na  $[a, b]$  pole pod jej wykresem na przedziale  $[a, b]$  wynosi  $S = \int_a^b f(x)dx$

**Przykład 12.4.1.** Pole między wykresami  $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$  na przedziale  $[0, 1]$  wynosi:  
 $\int_0^1 \sqrt{x} - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx$

**Przykład 12.4.2.** Pole koła.  $x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow y^2 = R^2 - x^2$ . Weźmy  $x \in [0, R]$ , wtedy:  
 $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$ . Pole koła:  $S = 4 \cdot \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4 \frac{R^2 \pi}{4} = \pi R^2$

### 12.5 Długość łuku krzywej

**FAKT.** Długość łuku krzywej funkcji ciągłej  $f$  określonej na przedziale  $[a, b]$ :

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

**Przykład 12.5.1.** Policzmy długość krzywej  $f(x) = x^2$  na  $[0, 1]$ . Mamy:  $\int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx = F(1) - F(0) = \dots$

**FAKT.** Ogólna długość łuku krzywej  $(x(t), y(t))$  dla  $a \leq t \leq b$ :

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Dla funkcji  $(x, f(x))$  mamy  $(x', f'(x)) = (1, f'(x))$  uzyskując poprzedni wzór.

**Przykład 12.5.2.** Parametryzacja przy użyciu współrzędnych biegunowych:

Okrąg  $(R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$  - okrąg o promieniu  $r$

Zatem obwód okręgu wynosi:

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi} \sqrt{(R(-\sin(t)))^2 + (R \cdot \cos(t)^2)} dt = \\
& \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))} dt = \\
& \int_0^{2\pi} R dt = \\
& (Rt)|_0^{2\pi} = \\
& 2\pi R
\end{aligned}$$

## 12.6 Pola powierzchni i objętości brył obrotowych

**Przykład 12.6.1.** Obrót proporcjonalności prostej  $y = ax$  wokół OX tworzy stożek

**FAKT.** Objętość bryły obrotowej jest dana wzorem:

$$V = \pi \int_0^b f^2(x) dx$$

**Przykład 12.6.2.** Weźmy  $f(x) = x$ , zatem  $R = 1$  a tworząca  $l = \sqrt{2}$ . Objętość stożka:

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$$

Sprawdźmy, że  $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{\pi}{3}$

**FAKT.** Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej dane jest wzorem:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

## 12.7 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Rozważmy  $\forall_{x>a} f(t)$  jest ciągła na  $[a, x]$ , wtedy:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a), \text{ dla } F'(x) = f(x)$$

Pytanie - czy istnieje  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \int_a^\infty f(t) dt$ ?

**Przykład 12.7.1.** Pytania:

1. Oblicz  $\int_0^\infty f(t) dt$
2. Zbadaj zbieżność  $\int_0^\infty f(t) dt$

**Przykład 12.7.2.** Policzmy całkę:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(t) \Big|_0^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) - \arctan(0) =$$

$$\pi - 0 = \pi$$

**Przykład 12.7.3.** Policzmy całkę:

$$\int_1^\infty \frac{1}{t} dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(t) \Big|_1^x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) - \ln(1) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

**Przykład 12.7.4.** Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \cos(t) dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \cos(t) dt &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(t) \Big|_0^x &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) - \sin(0) &= \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x) &\text{ NIE ISTNIEJE, zatem całka jest rozbieżna} \end{aligned}$$

**Przykład 12.7.5.** Policzmy całkę:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}} dt \\ f(x) = \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}} \leq \frac{1}{1+t^2} = g(x) \\ \int_0^\infty g(t) dt < \infty \implies \int_0^\infty f(t) dt < \infty \end{aligned}$$

**Twierdzenie 12.7.1.** Kryterium porównawcze (1 część). Zakładamy że zachodzą następujące własności:

1.  $0 \leq g(t) \leq f(t)$  dla  $t \in [a, \infty]$
2.  $\int_a^\infty f(t) dt < \infty$  jest zbieżna

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t) dt < \infty \text{ jest zbieżna.}$$

Analogicznie  $(a = n_0) \wedge (\sum_{t=n_0}^\infty f(t) < \infty) \implies (\sum_{t=n_0}^\infty g(t) < \infty)$  - kryterium porównawcze zbieżności szeregów.

**Przykład 12.7.6.**  $f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 2 + \dots \geq \int_0^\infty f(t) dt$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(t) dt &\leq \sum_{k=0}^\infty f(k) \\ f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k) & \end{aligned}$$

Zatem:

$$\begin{aligned} f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + \dots &\leq \int_0^\infty f(t) dt \\ \sum_{k=1}^\infty f(k) &\leq \int_0^\infty f(t) dt \\ \sum_{k=1}^\infty f(k) &\leq \int_0^\infty f(t) dt \leq f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k) \end{aligned}$$

**Twierdzenie 12.7.2.** Kryterium porównawcze (2 część). Zakładamy, że zachodzą następujące własności:

1.  $0 \leq f(t) \leq g(t)$  dla  $t \in [a, \infty]$
2.  $\int_a^\infty f(t) dt$  jest rozbieżna.

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t) dt \text{ jest rozbieżna}$$

**Przykład 12.7.7.** Policzmy całkę:  $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}} dt$

Wiemy, że  $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \geq \frac{1}{t+t}$ . Sprawdźmy:

$$\int_1^\infty \frac{1}{2t} dt = \infty$$

Na mocy kryterium porównawczego również  $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}} = \infty$  rozbieżna.