Analiza Matematyczna II

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$

Definicja 1.1.1. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$
$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$
$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
Własności:

1. $\langle x, y\rangle =< y, x >$
2. $< ax, y >=< x, ay >= a < x, y >, a \in \mathbb{R}$
3. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

Definicja 1.1.2. Długość wektora $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Przykład 1.1.1. $\mathbb{R} : |x| = |x_1|$ - oś liczbowa $\mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$ - płaszczyzna

Twierdzenie 1.1.1. $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x| \cdot |y|$
D-d. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$|\langle x, y, \rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_1^2}$
Nierówność Cauchy'ego Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

D-d.
$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, x\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant |x|^2|y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \iff |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \square$

1.2 Kąt między wektorami

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (x_{11}, x_{12})$, $\overrightarrow{x_2} = (x_{21}, x_{22})$

$$\cos(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \frac{\overrightarrow{x_1} \odot \overrightarrow{x_2}}{|\overrightarrow{x_1}||\overrightarrow{x_2}|}$$

Rozważmy funkcję:
$d_n \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$d_n(x, y) = |x - y|$, dla $n = 2$:

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ Własności:

1. $d_n(x, y) \geqslant 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leqslant d_n(x, y) + d_n(y, z)$ - nierówność trójkąta

1.3 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.3.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X, pewną funkcję $X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga: aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów
D-d.
$d(x, y) = \frac{1}{2}\left(d(x, y) + d(y, x)\right) \geqslant \frac{1}{2} d(x, x) = 0$, zatem $d(x, y) \geqslant 0$

Twierdzenie 1.3.1. Stwierdzenie. Niech (X, d) (Corollary) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), n \geqslant 2$$

Dla $n = 2$:
$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_2)$ - oczywiste
Dla $n = 3$:
$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ - nierówność trójkąta
Krok indukcyjny:
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_n, x_{n+1})$
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leqslant_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$ $\square$

1.4 Przestrzeń metryczna dyskretna

X - dowolny zbiór i metryka określona wzorem:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x = y \\ 1 \text{ dla } x \neq y \end{cases}$$

Aksjomaty $1, 2, 3, 4$ są oczywiste.

1.5 Metryka Euklidesowa

$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$d_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

1.6 Przestrzeń Hilberta

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$
$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots\right)$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leqslant \infty$
$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$
$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots\right)$

1.7 Metryka Manhattan

$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

2 Wykład II

2.1 Kula otwarta

Definicja 2.1.1. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej Y:

$$K(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$$

Gdzie:

- y_0 - środek
- r - promień
- Wnętrze okręgu w $\mathbb{R}^2$ - metryka Euklidesowa
- Wnętrze kuli w $\mathbb{R}^3$

Przykład 2.1.1. Rozważmy następujący przykład:
$K((x_0, y_0), r) :: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ zachodzący warunek
(wyobraż sobie rysunek poglądowy)

Definicja 2.1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, jeśli:

$$\forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon > 0} \left(K(x, \varepsilon) \subseteq U\right)$$

(Kula otwarta o środku w punkcie X i promieniu $\varepsilon > 0$)

Przykład 2.1.2. Przykłady:
(a, b) - jest otwarty
$[a, b)$ - nie jest otwarty

Definicja 2.1.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $D \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym $\iff$ $X - D$ jest otwarty.
$[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (\infty, a) \cup (b, \infty)$ - zbiór otwarty

Definicja 2.1.4. $(X, d_1), (Y, d_2)$ - przestrzenie metryczne
$F : X \to Y$
$\lim F(x) = b :: x \to a :: a \in X, b \in Y$
Przykład. Dla $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{R}$ - ciągi, dla obu $\mathbb{R}$ - funkcje

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_x (0 < d_1(x, a) < \delta \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon)$$

Twierdzenie 2.1.1. Warunki (1), (2) są równoważne:

1. $\lim_{x \to a} F(x) = b$
2. dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \geqslant 0}$ punktów przestrzeni metrycznej $X (x_n \neq a)$
   jeśli $\lim_{n \to a} x_n = a$ w metryce d_1 to $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = b$

$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall n > n_0)\ d_1(x_n, a) < \varepsilon$

$(|x_n - a| < \varepsilon), x_n, a \in (X, d_1) \implies \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, a) = 0$

Przykład 2.1.3. $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$
$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$
$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, a) = 0$ w metryce d_1

Przykład 2.1.4. $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$
$\lim_{n \to \infty}(a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3)$ w metryce Eulidesowej $\mathbb{R}^3 \iff$
$\lim_{n \to \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \to \infty} c_n = g_3$
Idea:
$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \to 0 \iff a_n \to g_1 \wedge b_n \to g_2 \wedge c_n \to g_3$
Dla $\mathbb{R}^k$ podane włansości zachodzą analogicznie.

Definicja 2.1.5. Ciągłość funkcji. $(X, d_1), (Y, d_2), F : X \to Y$.
Funkcja F jest ciągła w punkcie a jeśli:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

$x \to a$ w $d_1 \implies F(x) \to F(a)$ w d_2

Przykład 2.1.5. Weźmy funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ dla } x^2+y^2 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pokażmy, że f nie jest ciągła w $(0,0)$
$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$
$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ - nie dąży do 0 nie jest ciągła w $(0,0)$.

Przykład 2.1.6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$f(x,y,z) = (x^2, y^2 \cdot z)$
Zbadajmy ciąg $a = (x_0, y_0, z_0)$
$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z)$
$(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)$
$x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0 \wedge z_n \to z_0$
$f(x_n, y_n, z_n) = (x_n^2, y_n z_n)$

Przykład 2.1.7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ dla } x^2+y^4 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f jest ciągła w $(0,0)$ $(\alpha t, \beta t) \to (0,0)$
$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$
$\frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \to \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0,0)$
$\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$
f nie jest ciągła $0 = f(0,0) \neq \frac{1}{2}$, czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, ale już
$f\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} \neq f(0,0)$

Przykład 2.1.8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x+y$
$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = xy$

$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \iff (x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$
$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$

Przykład 2.1.9. $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$ $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2})$
Nie istnieje
$(x_n', y_n') = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$(x_n'', y_n'') = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$f(x_n', y_n') = \frac{1/n 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = 1/2$

$f(x''_n, y''_n) = \frac{-\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(1/n)^2+(1/n)^2} = -1/2$
Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

2.2 Granica podwójna

Definicja 2.2.1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0) f(x,y)}$

2.3 Granice iterowane

Definicja 2.3.1. $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_n} f(x,y))$
$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_n} f(x,y))$

2.4 Różniczkowanie

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(x) = a \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} = 0$
$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h}\right| = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)-ah|}{|h|} = 0$

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$
$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$
$L(ch) = c \cdot L(h)$ (L jest odwzorowaniem liniowym)

Definicja 2.4.1. (Pochodna funkcji) $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$
Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x
jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
takie że $h \in \mathbb{R}^n 0_n = (0, 0, \ldots, 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)||}{||h||} = 0_{\mathbb{R}}$$