

# Analiza Matematyczna II

Rafał Włodarczyk

INA 2 Sem. 2023

## 1 Wykład I

### 1.1 Iloczyn skalarny

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$$

**Definicja 1.1.1.** Dla  $x, y \in \mathbb{R}^n$  definiujemy iloczyn skalarny:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$(x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n))$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Własności:

1.  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2.  $\langle ax, y \rangle = \langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle, a \in \mathbb{R}$
3.  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

**Definicja 1.1.2.** Długość wektora  $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

**Przykład 1.1.1.**  $\mathbb{R} : |x| = |x_1|$  - oś liczbowa  $\mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$  - płaszczyzna

**Twierdzenie 1.1.1.**  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas  $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$

D-d.  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Nierówność Cauchy'ego Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

D-d.

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \iff \\ &|x + y| \leq |x| + |y| \quad \square \end{aligned}$$

## 1.2 Kąt między wektorami

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2, \vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}), \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$$

$$\cos(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\vec{x}_1 \odot \vec{x}_2}{|\vec{x}_1| |\vec{x}_2|}$$

Rozważmy funkcję:

$$d_n \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_n(x, y) = |x - y|, \text{ dla } n = 2:$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \quad |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{Własności:}$$

1.  $d_n(x, y) \geq 0$
2.  $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3.  $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4.  $d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$  - nierówność trójkąta

## 1.3 Przestrzeń metryczna

**Definicja 1.3.1.** Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór  $X$ , pewną funkcję  $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , która spełnia następujące aksjomaty:

1.  $d(x, y) \geq 0$
2.  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$  dla  $x, y \in X$
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  dla każdych  $x, y, z \in X$

Funkcję  $d$  nazywamy metryką, a wartość  $d(x, y)$  odległością punktów.

Uwaga: aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów

D-d.

$$d(x, y) = \frac{1}{2} (d(x, y) + d(y, x)) \geq \frac{1}{2} d(x, x) = 0, \text{ zatem } d(x, y) \geq 0$$

**Twierdzenie 1.3.1.** Stwierdzenie. Niech  $(X, d)$  (Corollary) będzie przestrzenią metryczną oraz  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ . Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), n \geq 2$$

Dla  $n = 2$ :

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2) - \text{oczywiste}$$

Dla  $n = 3$ :

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - \text{nierówność trójkąta}$$

Krok indukcyjny:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_n, x_{n+1})$$

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \quad \square$$

## 1.4 Przestrzeń metryczna dyskretna

$X$  - dowolny zbiór i metryka określona wzorem:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$$

Aksjomaty 1, 2, 3, 4 są oczywiste.

## 1.5 Metryka Euklidesowa

$$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$d_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

## 1.6 Przestrzeń Hilberta

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$$

$$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i}, \dots\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots\right)$$

## 1.7 Metryka Manhattan

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

# 2 Wykład II

## 2.1 Kula otwarta

**Definicja 2.1.1.** Kula otwarta w przestrzeni metrycznej  $Y$ :

$$K(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$$

Gdzie:

- $y_0$  - środek
- $r$  - promień
- Wnętrze okręgu w  $\mathbb{R}^2$  - metryka Euklidesowa
- Wnętrze kuli w  $\mathbb{R}^3$

**Przykład 2.1.1.** Rozważmy następujący przykład:

$K((x_0, y_0), r) :: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$  zachodzący warunek  
(wyobraź sobie rysunek poglądowy)

**Definicja 2.1.2.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Zbiór  $U \subseteq X$  jest otwarty, jeśli:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 (K(x, \varepsilon) \subseteq U)$$

(Kula otwarta o środku w punkcie  $x$  i promieniu  $\varepsilon > 0$ )

**Przykład 2.1.2.** Przykłady:

$(a, b)$  - jest otwarty

$[a, b]$  - nie jest otwarty

**Definicja 2.1.3.** Niech  $(X, d)$  będzie przestrzenią metryczną. Zbiór  $D \subseteq X$  jest zbiorem domkniętym  $\iff X - D$  jest otwarty.

$[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (\infty, a) \cup (b, \infty)$  - zbiór otwarty

**Definicja 2.1.4.**  $(X, d_1), (Y, d_2)$  - przestrzenie metryczne  
 $F : X \rightarrow Y$

$\lim F(x) = b :: x \rightarrow a :: a \in X, b \in Y$

Przykład. Dla  $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{R}$  - ciągi, dla obu  $\mathbb{R}$  - funkcje

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < d_1(x, a) < \delta \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon)$$

**Twierdzenie 2.1.1.** Warunki (1), (2) są równoważne:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$

2. dla dowolnego ciągu  $(x_n)_{n \geq 0}$  punktów przestrzeni metrycznej  $X (x_n \neq a)$   
jeśli  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  w metryce  $d_1$  to  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall n > n_0) d_1(x_n, a) < \varepsilon$$

$$(|x_n - a| < \varepsilon), x_n, a \in (X, d_1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, a) = 0$$

**Przykład 2.1.3.**  $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$

$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, a) = 0$  w metryce  $d_1$

**Przykład 2.1.4.**  $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3)$  w metryce Eulidesowej  $\mathbb{R}^3 \iff$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g_3$

Idea:

$$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow g_1 \wedge b_n \rightarrow g_2 \wedge c_n \rightarrow g_3$$

Dla  $\mathbb{R}^k$  podane własności zachodzą analogicznie.

**Definicja 2.1.5.** Ciągłość funkcji.  $(X, d_1), (Y, d_2), F : X \rightarrow Y$ .

Funkcja  $F$  jest ciągła w punkcie  $a$  jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$x \rightarrow a$  w  $d_1 \implies F(x) \rightarrow F(a)$  w  $d_2$

**Przykład 2.1.5.** Weźmy funkcje  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokażmy, że  $f$  nie jest ciągła w  $(0, 0)$

$$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$$

$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$  - nie dąży do 0 nie jest ciągła w  $(0, 0)$ .

**Przykład 2.1.6.**  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2 \cdot z)$$

Zbadajmy ciąg  $a = (x_0, y_0, z_0)$

$$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

$$(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

$$x_n \rightarrow x_0 \wedge y_n \rightarrow y_0 \wedge z_n \rightarrow z_0$$

$$f(x_n, y_n, z_n) = (x_n^2, y_n z_n)$$

**Przykład 2.1.7.**

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } x^2 + y^4 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$f$  jest ciągła w  $(0, 0)$   $(\alpha t, \beta t) \rightarrow (0, 0)$

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha \beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$$

$$\frac{\alpha \beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \rightarrow \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

$f$  nie jest ciągła  $0 = f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$ , czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji  $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$ , ale już

$$f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

**Przykład 2.1.8.**  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x, y) = x + y$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \iff (x_n \rightarrow x_0 \wedge y_n \rightarrow y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$$

**Przykład 2.1.9.**  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2})$$

Nie istnieje

$$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$(x''_n, y''_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = 1/2$$

$$f(x_n'', y_n'') = \frac{-\frac{1}{n} \frac{1}{n}}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = -1/2$$

Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

## 2.2 Granica podwójna

**Definicja 2.2.1.**  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$

## 2.3 Granice iterowane

**Definicja 2.3.1.**  $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$   
 $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y))$

## 2.4 Różniczkowanie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: f'(x) = a \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} \right| = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

$$L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$$

$$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$$

$$L(ch) = c \cdot L(h) \text{ (} L \text{ jest odwzorowaniem liniowym)}$$

**Definicja 2.4.1.** (Pochodna funkcji)  $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$

Mówimy że funkcja  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$

jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

takie że  $h \in \mathbb{R}^n, 0_n = (0, 0, \dots, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|} = 0_{\mathbb{R}}$$

## 3 Wykład III

### 3.1 Pochodne cząstkowe

**Definicja 3.1.1.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

**Przykład 3.1.1.** Policzmy następującą pochodne cząstkowe dla funkcji:

$$f(x, y) = x \cdot y^2, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$$

**Definicja 3.1.2.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$  jest różniczkowalna w  $x$  jeśli istnieje odwzorowanie liniowe:  $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  taka, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)}{|h|} = 0$$

**Twierdzenie 3.1.1.** Zakładamy, że  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna. Niech:  $f = (f_1, f_2, \dots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m: a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2, \dots, n$ . Wówczas macierz pochodnej wynosi:

$$M_{f'(x)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie wystarcza aby funkcja była różniczkowalna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cel. pokażmy że  $f$  nie jest różniczkowalna w  $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Kandydat na pochodną:

$$M_{f'(0,0)} = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right]$$

Warunek różniczkowania:  $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$(??) \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|h_1^2 h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

**Twierdzenie 3.1.2.** Tw.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ . Zakładamy, że pochodne cząstkowe:  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$  istnieją w otoczeniu punktu  $x$  i są ciągłe w punkcie  $x$ . Wtedy  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x$ .

**Przykład 3.1.2.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \langle x, x \rangle$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \dots$$

$$M_{f'(x)} = [2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n] = 2x$$

$$M_{f'(x)}(h) = 2\langle x, h \rangle$$

**Przykład 3.1.3.** Z definicji  $\frac{|f(x+h)-f(x)-M_{f'(x)}(h)|}{|h|} = \frac{\langle h, h \rangle}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|}$   
 Jednak algebraicznie  $f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h) = \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle - 2\langle x, h \rangle = \langle h, h \rangle$

**Przykład 3.1.4.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin(t), \cos(t))$

$$M_{f'(t)} = \begin{bmatrix} \sin(t)' \\ \cos(t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$

**Definicja 3.1.3.** Pochodne kierunkowe:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Pochodną kierunkową funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$  w kierunku wektora  $\bar{a}$  nazywamy granicę:

$$(D_a f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(x_0 + at) \\ \varphi'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0)}{h} = (D_a f)(x_0) \end{aligned}$$

**Przykład 3.1.5.**  $f(x, y) = \sin(x) \cdot y$

$$\begin{aligned} x_0 &= (0, 0) \\ a &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$D_a f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Twierdzenie 3.1.3.** Jeżeli  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $x_0$  oraz  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ , to:

$$\begin{aligned} (D_a f)(x_0) &= f'(x_0)a^T \\ f'(x_0) &= \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right] \\ f'(x_0)a &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)a_n \end{aligned}$$

**Definicja 3.1.4.** Gradient funkcji  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{x_0} f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \\ (D_a f)(x_0) &= \langle \nabla_{x_0} f, a \rangle \end{aligned}$$

**Przykład 3.1.6.** Policzmy gradient dla:  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

$$\begin{aligned} \nabla_{(x_0, y_0)} f(x, y) &= (2x_0, 2y_0) \\ \nabla f(x, y) &= (2x, 2y) \end{aligned}$$

D-d. Zakładamy, że  $f$  jest różniczkowalna w  $x_0$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0) - f'(x_0)t(a)}{t} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(a) \right| \end{aligned}$$



## 3.2 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_{x_0} f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

## 3.3 Własności gradientu

Niech  $\alpha \in \mathbb{R}$

1.  $\nabla_{x_0}(\alpha f) = \alpha \nabla_{x_0}(f)$
2.  $\nabla_{x_0}(f + g) = \nabla_{x_0}(f) + \nabla_{x_0}(g)$

Wniosek liniowość (dla  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ):

$$\nabla_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla_{x_0}(f) + \beta \nabla_{x_0}(g)$$

## 3.4 Gradient iloczynu

$$\nabla_{x_0}(f \cdot g) = \nabla_{x_0}(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \nabla_{x_0}(g)$$

D-d. z liniowości gradientu.

**Twierdzenie 3.4.1.** Zakładamy, że  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jest różniczkowalna w  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wówczas  $f$  jest ciągła w  $x \in \mathbb{R}^n$ .

D-d. (metryka w  $\mathbb{R}^n$ )

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \\ &= |f(x+h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h| \\ &\leq |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| + |f'(x)h| = \\ &= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} |h| = |f'(x)h| \end{aligned}$$

## 3.5 Minimum lokalne właściwe

**Definicja 3.5.1.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ . Mówimy, że  $f$  ma w punkcie  $a$  minimum lokalne (właściwe) jeśli istnieje  $r > 0$ :

$$(\forall x \in K(a, r) - \{a\}) f(a) \leq_{(<)} f(x)$$

Gdzie  $K(a, r)$  - kula otwarta o środku w  $a$  i promieniu  $r$ .

**Twierdzenie 3.5.1.** (Warunek konieczny)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$ . Jeżeli  $f$  ma w punkcie  $a$  ekstremum lokalne to:

$$\nabla_{x_0} f = (0, 0, \dots, 0)$$

Inaczej:  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

**Przykład 3.5.1.** Rozważmy następujące przykłady:

1.  $f(x, y) = x^2 - y^2$  - sprawdźmy warunek konieczny  
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$   
 $(0, 0)$  - punkt podejrzany  
 $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0, f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$   
 Nie istnieje taka  $K((0, 0), r)$ , że  $f$  ma w tej kuli stały znak.
2.  $f(x) = x^3, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}, f(-\frac{1}{n}) \dots$
3.  $f(x, y, z) = -x^2 - (y - 1)^2 - (z + 1)^2$   
 Sprawdźmy warunek:  $\nabla f = (-2x, -2(y - 1), -2(z + 1)) = (0, 0, 0)$   
 Zobaczmy  $f(0, 1, -1) = 0$   
 $f(a, b + 1, c - 1) - f(0, 1, -1) = -a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0$  maksimum lokalne  
 $f(a, b + 1, c - 1) < f(0, 1, -1)$  (liczby sześcianu opisane na kuli)

**Definicja 3.5.2.** Niech  $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}$ . Zakładamy, że  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$  oraz  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$ . Wtedy pochodne cząstkowe pochodnych  $f_x(x, y), f_y(x, y)$  nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu:

1.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}(x, y)$
2.  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}(x, y)$
3.  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{xy}(x, y)$
4.  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx}(x, y)$

**Twierdzenie 3.5.2.** Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją w pewnym obszarze i obie są, w pewnym punkcie ciągłe, to w tym punkcie są równe

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) = x^3 y^2$$

$$\frac{d}{dy}(x^3 y^2) = x^3 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 2y) = 3x^2 2y$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 2y) = 6x 2y$$

$$D[x^3 \cdot y^2, (x, 2), (y, 1)] \text{ (wolframalpha)}$$

### 3.6 Różniczkowanie złożenia funkcji

**Twierdzenie 3.6.1.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$   $a \in \mathbb{R}^n, b = f(a) \in \mathbb{R}^m$ . Zakładamy, że  $f$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  oraz  $g$  jest różniczkowalna w punkcie  $b$ . Wtedy  $g \circ f$  jest różniczkowalna w punkcie  $a$  i zachodzi wzór:

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Złożenie odwzorowań liniowych - mnożenie macierzy.

**Przykład 3.6.1.**  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g = f \circ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$g(t) = (f \circ u)(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

Zobaczmy:

$$M_{u'(t)} = \begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ u'_3(t) \end{bmatrix} \quad M_{f'(b)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{x=b}$$

Wykonajmy mnożenie macierzy:

$$M_{f'(b)} \cdot M_{u'(t)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

**FAKT.** Uogólniona reguła łańcuchowa. ( $x_i = u_i(t)$ )

$$\frac{d}{dt} f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{du_i}{dt}$$

**Przykład 3.6.2.** Niech  $u(t) = (t^2 - t, 2t, 4t), f(x, y, z) = xy + z, g = f \circ u, g(t) = (t^2 - t)2t + 4t$

$$\begin{aligned} g'(t) &= (t^2 - 1)'2t + (t^2 - t)(2t)' + (4t)' = (2t - 1)(2t) + 2(t^2 - t) + 4 = \\ &= 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4 \end{aligned}$$

Zobaczmy z reguły łańcuchowej:

$$g(t) = (f \circ u)(t)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

$$y \cdot (2t - 1) + 2x + 1 \cdot 4 = 2t(2t - 1) + 2(t^2 - t) + 4 = 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$$

W zastosowaniu algorytmu back propagation.

## 4 Wykład IV

$$f(x) = \sqrt{x^2 + \exp(x^2)} + \cos(x^2 + \exp(x^2))$$

$\frac{df}{dx}$  ... można policzyć Graf, jakby liczył komputer:

$$(x) \rightarrow ( )^2 \rightarrow a \rightarrow + \tag{1}$$

$$a \rightarrow \exp( ) \rightarrow b \rightarrow + \rightarrow c \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow d \rightarrow + \rightarrow f \tag{2}$$

$$c \rightarrow \cos( ) \rightarrow e \rightarrow + \tag{3}$$

Rozpiszmy  $a = x^2, b = \exp(a), c = a + b, d = \sqrt{c}, e = \cos(c), f = d + e$   
 $\frac{\partial a}{\partial x} = 2x, \frac{\partial b}{\partial a} = \exp(a), \frac{\partial c}{\partial a} = 1 = \frac{\partial c}{\partial b}, \frac{\partial d}{\partial c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}, \frac{\partial e}{\partial c} = -\sin(c), \frac{\partial f}{\partial d} = 1 \frac{\partial f}{\partial e},$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a}$$

**Przykład 4.0.1.** Problem.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  przyzwoita - różniczkowalna co najmniej 2 razy, jakie jest maksimum lokalne.

1.  $n = 1$  analiza 1.
2.  $n = 2$
3.  $n \geq 2$

**Twierdzenie 4.0.1.** Niech  $f(x, y)$  ma w otoczeniu punktu  $(x_0, y_0)$  pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągle oraz  $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$ . Wtedy:

$$W(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Z ciągłości  $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

1. Jeśli  $W(x_0, y_0) > 0$  i  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ , to  $f$  ma w punkcie  $(x_0, y_0)$  minimum lokalne
2. Jeśli  $W(x_0, y_0) > 0$  i  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , to  $f$  ma w punkcie  $(x_0, y_0)$  maksimum lokalne
3. Jeśli  $W(x_0, y_0) < 0$  to  $f$  nie ma ekstremum lokalnego w  $(x_0, y_0)$
4. Jeśli  $W(x_0, y_0) = 0$  kryterium nie działa
5. (??)  $W(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) = 0, -f_{xy}^2(x_0, y_0) \leq 0$ , sprzeczność (z det macierzy)

Jak to liczyć w wolframalpha

1. solve(grad(f(x,y), x,y)=0, (x,y)), (Hessian)
2. det(...)

**Przykład 4.0.2.** Rozważmy przykład

$$f(x, y) = (2x + y^2)e^x$$

Policzmy najpierw pierwsze pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 2e^x(2x + y^2)e^x$$

$$f_y(x, y) = 2ye^x$$

Rozwiążmy powyższe równanie:

$$y = 0, x = -1$$

Punkt podejrzany o ekstremum  $P = (-1, 0)$

Policzmy drugie pochodne cząstkowe:

$$f_{xx} = e^x(4 + 2x + y^2)$$

$$f_{yy} = 2e^x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2ye^x$$

Zobaczmy:

$$f_{xx}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{yy}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{xy}(-1, 0) = f_{yx}(-1, 0) = 0$$

Policzmy wyznacznik z powyższego twierdzenia:

$$W(-1, 0) = 4e^2 > 0, f_{xx} > 0$$

Wobec tego finalnie  $f$  ma w punkcie  $(-1, 0)$  minimum lokalne.

**Przykład 4.0.3.** Zobaczmy następny przykład:

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

Policzmy następujące pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 3x^2, f_y(x, y) = 3y^2, f_{xy} = 0, f_{xx}(x, y) = 6x, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Wyznacznik macierzy:

$$\det(W(0, 0)) = 0$$

Kryterium nie działa. Nic nam nie powie.

**FAKT.** Wzór Taylora. Analiza I :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(b+x) = f(b) + \frac{1}{1!}f'(b)x + \frac{1}{2!}f''(b)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(b+\theta x) = x^{(n+1)}$$

dla pewnego  $\theta \in (0, 1)$

**FAKT.** Uogólnienie wzoru Taylora :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\varphi(t) = f(a+tx) = f(a_1+tx_1, a_2+tx_2, \dots, a_n+tx_n)$$

Dla funkcji  $\varphi(t)$  stosujemy wzór Taylora z  $b = 0$  i  $x = t$ :

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0 + \theta t)t^{n+1}$$

Zapiszmy  $\varphi(0)$ :

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= f(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ \varphi'(t)(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, \dots, a_n + tx_n) &= \\ = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + tx_1, \dots, a_n + tx_n) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + tx_1, \dots, a_n + tx_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1 + tx_1, \dots, a_n + tx_n) &= \\ \varphi'(t) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n\end{aligned}$$

Wprowadźmy  $c(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + tx_1, \dots, a_n + tx_n)$ . Zachodzi:

$$c'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}x_nx_1$$

Zatem patrząc na  $\varphi''(t)$ :

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} x_j x_i$$

Oznaczenie:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right)(f) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n \\ \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right\}^2 &= \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}x_2x_2\end{aligned}$$

#### 4.1 Ogólny wzór Taylora

**FAKT.** Wzór Taylora.  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Zdefiniujmy  $D_x = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right\}$

$$f(a+x) = f(a) + D_x(f(a)) + \frac{1}{2!}D_x^2(f(a)) + \cdots + \frac{1}{n!}D_x^n(f(a)) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(D_x)^{n+1}(f(a+\theta x))$$

**Przykład 4.1.1.** Weźmy sobie taką  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$   
Wyznaczmy  $D_x(f(a_1, a_2))$ :

$$\begin{aligned} D_x(f(a_1, a_2)) &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 \right) f(a_1, a_2) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, a_2) x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, a_2) x_2 = 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 \\ (D_x)^2(f(a_1, a_2)) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(a_1, a_2) x_1 x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(a_1, a_2) x_1 x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(a_1, a_2) x_2 x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(a_1, a_2) x_2 x_2 = \\ &= 2x_1 x_1 + 0x_1 x_2 + 0x_2 x_1 + 2x_2 x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2 \\ (a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2 \end{aligned}$$

## 5 Wykład V

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ekstrema lokalne Weźmy  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \geq 2$  - cel. ekstrema lokalne

### 5.1 Forma Kwadratowa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i y_k$$

zmiennych  $y_1, y_2, \dots, y_n$  jest określona dodatnio (ujemnie) jeżeli przybiera wartości dodatnie (ujemne) dla wszystkich  $y_1, y_2, \dots, y_n \neq 0$ .

Przykład:

$n = 3$  (dziel 2, bo liczymy dwa razy)

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 + 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

- $a_{11} = 6, a_{22} = 5, a_{33} = 14$
- $a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2$
- $a_{13} = a_{31} = \frac{-8}{2} = -4$
- $a_{23} = a_{32} = -1$

Sprowadźmy do postaci kanonicznej i przyrównajmy do 0.

$$\begin{aligned} 0 &= (y_1 - y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2 = 0 \\ y_1 &= y_2 = y_3 \cdots = y_n = 0 \end{aligned}$$

**Twierdzenie 5.1.1.** Twierdzenie Sylwestera.

1. Warunek konieczny i dostateczny na to, aby forma (\*) była określona dodatnio (ujemnie) wyraża się ciągiem nierówności:

- $n = 2$ :  $\det(a_{11}) > (<)0$ ,  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} > (<)0$
- $n = 3$ :  $\det(a_{11}) > (<)0$ ,  $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} > (<)0$
- $n \dots$  itd (pojedynczy wyraz  $<$  i  $\det$  naprzemiennie dla ujemnych)

**Definicja 5.1.1.** Forma kwadratowa (\*).

1. jest nieokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się tylko dla  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$
2. półokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się nie tylko dla  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$

**Twierdzenie 5.1.2.**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Niech  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ma w otoczeniu (kuli otwartej) punktu  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe. Niech  $f_{x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, f_{x_2}(x_0) = 0, \dots$  (gradient jest zero). Oznaczamy  $a_{ik} = f_{x_i x_k}(x_0) = f_{x_1 x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$

1. Jeżeli forma kwadratowa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik} y_i y_k$$

jest dodatnio (ujemnie) określona, to  $f$  ma w punkcie  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  minimum (maksimum) lokalne.

2. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest nieokreślona to  $f$  nie ma w punkcie  $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  ekstremum.
3. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest półokreślona to kryterium nic nie powie

Ilustracja twierdzenia dla  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 = 0$$

$$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 = 0$$

$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$  znaleźliśmy punkt podejrzany.

$$a_{11} = 2, a_{22} = 2, a_{33} = 2, a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.  $\det(a_{11}) = 2 > 0$
2.  $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 4 > 0$
3.  $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 8 > 0$

**Definicja 5.1.2.** Otoczeniem punktu  $P \in \mathbb{R}^n$  nazywamy dowolny zbiór otwarty  $U$ , taka, że  $P \in U$



## 5.2 Jacobian funkcji

**Definicja 5.2.1.** Jacobian funkcji  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$M_{F'(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Jacobian:  $J_f(a) = \det(M_{F'(a)})$

**Twierdzenie 5.2.1.** (O funkcji odwrotnej) Zakładamy, że  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$ . Zakładamy, że  $F$  ma ciągle pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu  $a$ . Zakładamy, że  $J_F(a) \neq 0$ . Wówczas istnieje otoczenie  $U$  punktu  $a$  oraz  $V$  punktu  $F(a)$  oraz funkcja różniczkowalna  $\varphi : V \rightarrow U$ , taka że:

$$\forall_{x \in U} (\varphi \circ F)(x) = x$$

(Przy powyższych założeniach lokalnie funkcje daje się odwrócić)

**Przykład 5.2.1.** (Jeden wymiar)

Weźmy  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = x^2, a > 0$

$F'(a) = 2a, J_F(a) = 2a \neq 0$

$\varphi \circ F(x) = x$

$\varphi = \sqrt{x}$

$\varphi(F(x)) = \sqrt{F(x)}$

Powyższe twierdzenie stanowi uogólnienie dla  $n$  wymiarów.

Niech  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x_0, y_0) = 0$

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}. f(x, y) = x^2 + y^2 - 4, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 = 2$  równanie okręgu.

$y = \pm \sqrt{4 - x^2}$

$\varphi(t) = \sqrt{4 - x^2}$

Szukamy funkcji (istnieje  $\varepsilon > 0$ )  $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takiej, że:

1.  $\varphi(x_0) = y_0$

2.  $(\forall t \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) f(t, \varphi(t)) = 0$

**Twierdzenie 5.2.2.** (O funkcji uwikłanej) Jeśli pochodne cząstkowe funkcji  $f$  są ciągłe oraz  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$  to istnieje funkcja  $\varphi$ .

Liczmy:

$f(t, \varphi(t)) = 0$

$\varphi'(t) = ??$

$\frac{d}{dt}(f(t, \varphi(t))) = \frac{d}{dt}(0) = 0$

$\frac{\partial}{\partial x} \frac{d}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d}{dt}(\varphi(t)) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi'(t) = 0$

$\varphi'(t) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$

Przypomnienie

$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t)$

**Twierdzenie 5.2.3.**  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Niech  $f$  ma ciągle pochodne cząstkowe w punkcie  $(x_0, y_0)$ .  
Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ :

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$(z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0))$  - równanie płaszczyzny przechodzącej przez  $(x_0, y_0, z_0)$

## 6 Wykład VI

### 6.1 Mnożniki Lagrange'a

$f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Max/Min  $f(x_1, x_2)$  pod warunkiem  $g(x_1, x_2)$

Np. Znaleźć Max/Min  $x^2 + y^2$  pod warunkiem  $xy = 2$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$g(x, y) = xy - 2$$

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(xy) + 2\lambda$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y - \lambda x = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1. \det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \neq 0, \text{ nie spełnia } xy = 2$$

$$2. \det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$4 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda = \pm 2$$

$$3. \lambda = -2$$

$$2x + 2y = 0 \iff x = -y$$

Wtedy  $2 = (-y)y = -y^2 \leq 0$ , nie ma ekstremów

$$4. \lambda = 2$$

$$2x - 2y = 0 \iff x = y$$

$$x^2 = 2 \text{ dwa punkty podejrzane } (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$$

Sprawdzamy warunek dostateczny dla funkcji  $f(x, y) = x^2 + y^2$

Policzmy Hessian:

$$f_{xx}(x, y) = 2, f_{xx}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

$$W(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 > 0$$

W punktach  $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$  mamy minima lokalne.

Teoria ( $n = 2$ )

**Definicja 6.1.1.** Punkt  $a \in \mathbb{R}^n$  jest punktem regularnym zbioru  $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$  jest  $g(a) = 0$  oraz gradient funkcji  $g$  w punkcie  $a$  jest różny od 0.

**Twierdzenie 6.1.1.** Jeśli  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ma ekstremum lokalne w punkcie  $a \in \mathbb{R}^n$  pod warunkiem, że  $g(a) = 0$ , to istnieje  $\lambda$ , takie że  $\nabla(f - \lambda g)_{x=a} = 0$  o ile  $a$  jest punktem regularnym.

Przykład:

$$f(x, y) = xy$$

$$g(x, y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Phi(x, y, \lambda) = xy - \lambda(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \frac{\lambda x}{4} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - \lambda y = 0$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{4} & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$1. \det A \neq 0$$

$x = y = 0$ , nie ma rozwiązań

$$2. \det A = 0 (\lambda = 2 \vee \lambda = -2)$$

$$\lambda = 2 \implies \left( y = \frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \right)$$

$$(2, 1), (-2, -1)$$

$$3. \lambda = -2 \implies \left( y = -\frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0 \right)$$

$$(2, -1), (-2, 1)$$

Badamy max/min:

$$(a) f(2, 1) = 2 \text{ max lok}$$

$$(b) f(-2, -1) = 2 \text{ max lok}$$

$$(c) f(2, -1) = -2 \text{ min lok}$$

$$(d) f(-2, 1) = -2 \text{ min lok}$$

## 6.2 Całka Lebesgue'a

Przedziały  $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq b_n$ .  $\Pi = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  Przedział domknięty na  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicja 6.2.1.** Wnętrze przedziału oznaczamy:

$$\text{Int}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]) = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$$

**Definicja 6.2.2.** Niech  $\Pi, \Delta$  będą przedziałami. Mówimy, że  $\Pi, \Delta$  nie zachodzą na siebie i piszemy, że  $\Pi \perp \Delta$  jeśli:

$$\text{Int}\Pi \cap \text{Int}\Delta = \emptyset$$

**Definicja 6.2.3.** Rodzina przedziałów  $P$  jest rozbiciem przedziałów  $\Pi$  jeśli:

$$1. \bigcup P = \Pi$$

$$2. \forall P, Q \in P (P \neq Q \implies P \perp Q)$$

**Definicja 6.2.4.**  $\text{Vol}(\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$

**Przykład 6.2.1.** 1.  $\text{Vol}([a, b]) = b - a$

$$2. \text{Vol}([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(d - c)$$

$$3. \text{Vol}([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = (b - a)(c - d)(e - f)$$

**Twierdzenie 6.2.1.** Jeśli  $P$  jest rozbiem  $\Pi$  to:

$$\text{Vol}(\Pi) = \sum_{p \in P} \text{Vol}(p)$$

Własności:

1.  $\Pi \subset \Delta \implies \text{Vol}(\Pi) \leq \text{Vol}(\Delta)$
2.  $\Pi \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \dots \cup \Delta_n$  to  $\text{Vol}(\Pi) \leq \sum_{i=1}^n \text{Vol} \Delta_i$

**Definicja 6.2.5.** Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Ustalamy  $n$ ,  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $A$  - ograniczony.

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum \text{Vol}(\pi_i) \mid (\forall_i) (\pi_i \text{ jest produktem } \wedge A \subset \bigcup_{n \geq 0} \pi_n) \right\}$$

Oznaczamy  $|A| = \lambda^*(A)$

1.  $0 \leq |A| \leq \infty$
2.  $A \subseteq B \implies |A| \leq |B|$
3.  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$

**Twierdzenie 6.2.2.**  $\Pi$  jest przedziałem:

$$\lambda^*(\Pi) = \text{Vol}(\Pi)$$

**Definicja 6.2.6.** Zbiór  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  jest zbiorem miary 0, jeśli  $\lambda^*(A) = 0$ .

1.  $n = 2$ ,  $A = (a, b) \subset \mathbb{R}^2$   
 $\lambda^*(B) = (b - a)2\varepsilon$   
 $\lambda^*(A) = 0$
2.  $\square \in \mathbb{R}^3$  jest miary zero  
 $\lambda^*(Q) = \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$

**Definicja 6.2.7.** Zbiór  $A \subset \mathbb{R}^n$  jest mierzalny według Lebesgue'a jeśli:

$$\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n (\lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \cap A^C) = \lambda^*(Z))$$

**Definicja 6.2.8.**  $M_n$  - rodzina zbiorów mierzalnych. Miara Lebesgue'a na  $M_n$  nazywamy funkcję:

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

Funkcje proste  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , Niech  $B \subseteq A$ .

$$\mathbf{1} = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in B \\ 0 & \text{dla } x \in A - B \end{cases}$$

**Definicja 6.2.9.** Niech  $A \in M_n$ . Funkcję prostą o nośniku  $A$  nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}(x), a_i \in \mathbb{R}$$

Gdzie  $(B_i)_{i=1}^n$  jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, mierzalnych, zawartych w  $A$ .