Matematyka Dyskretna

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Współczynniki Dwumianowe

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$
$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$n \in \mathbb{N}^+$: $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Definicja 1.1.1. Silnia. Niech $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$0! = 1$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Definicja 1.1.2. Silnia górna. Niech $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$x^{0} = 1$$
$$x^{n} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1), n \geqslant 1.$$

Definicja 1.1.3. Silnia dolna. Analogicznie

Definicja 1.1.4. Współczynnik dwumianowy (symbol Newtona). Niech $x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Definiujemy:

$$\tbinom{x}{k} = \tfrac{x^{k}}{k!}$$

Uwaga. Czasami wygodnie będzie rozszerzyć defonicję $\binom{x}{k}$ na $k \in \mathbb{Z}$ wtedy dla $k < 0$ przyjmujemy $\binom{x}{k} = 0$
Interpretacja kombinatoryczna: $k, n \in \mathbb{N}, n \geqslant k$:

$\binom{n}{k}$ - # podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego

Przykład 1.1.1. Rozważ następujące ćwiczenia:
Ćwiczenie 1. Pokaż, że podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego jest $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.
Ćwiczenie 2. Niech $k, n \in \mathbb{N}, n \geqslant k$. Wtedy $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Ćwiczenie 3. Reguła Pochłaniania. Niech $n \in \mathbb{N} k \in \mathbb{N}^+, n \geqslant k$. Wtedy: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

Twierdzenie 1.1.1. Dwumian Newtona. Niech $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Wtedy:

$$(x+y)^{n} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k} y^{n-k}$$

D-d. (indukcyjny) - ćwiczenie
D-d. (kombinatoryczny)
Dokonujemy mnożenia:

$$(x+y)(x+y)\dots(x+y) = x^n + \_x^{n-1}\cdot y + \dots + x\cdot y^{n-1} + y^n$$

Wystarczy zauważyć, że współczynnik przy $x^k \cdot y^{n-k}$ to liczba sposobów, na jakie spośród n czynników $(x+y)$ możemy wybrać k nawiasów jako te, z których wybieramy składniki x.

Wniosek 1:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ - liczba wszystkich podzbiorów zbioru } n \text{ - elementowego}$$

Wniosek 2:

$$0 = 0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$
$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$$

Zatem widzimy że:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ :(2 nie dzieli } k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ :(2 dzieli } k)$$

podzbiorów o mocy parzystej zbioru n-elementowego = # podzbiorów o mocy nieparzystej zbioru n-elementowego

Twierdzenie 1.1.2. Tożsamość Pascala. Niech $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^+, n > k$. Wtedy:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

D-d. (analityczny). Niech $x \in \mathbb{R}$.
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k =$
$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} =$
$= (x+1)^n = (x+1)^{n-1}\cdot(x+1) =$
$= (\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k)(x+1) =$
$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k =$
$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} x^k$
Zatem:
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$
Współczynniki przy odpowiadających sobie są równe, zatem dla $k \in \mathbb{N}^+, k < n$ mamy:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

D-d. (kombinatoryczny). Zliczmy na dwa sposoby # podzbiorów k-elementowych zbioru n-elementowego.

1. $\binom{n}{k}$ - z definicji
2. Wyróżniamy jeden element $*$ w zbiorze n-elementowym. Podzbiory k-elementowe dzielą się teraz na dwie klasy:
   Te, które nie zawierają $*$. Jest ich $\binom{n-1}{k}$ (gwiazdki nie ma)
   Te, które zawierają $*$. Jest ich $\binom{n-1}{k-1}$ (gwiazdkę wybieram)
   Zatem zachodzi twierdzenie.