

Analiza Matematyczna

Rafał Włodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład I

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geq 1} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Z założenia indukcyjnego mamy:
 $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi \square .

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geq 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1 + a)^n \geq 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1 + a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n > 1} (1 + a)^n \geq 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
 $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \stackrel{ind.}{\geq} (1 + na)(1 + a)$
 $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne \mathbb{Q} to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:

$$a < b, a > b, a = b.$$

Dodawanie \mathbb{Q}

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Mnożenie \mathbb{Q}

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Własności:

$$1. \text{ Przemienność } a + b = b + a$$

$$2. \text{ Łączność } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3. \text{ Rozdzielność } (a + b)c = ac + bc$$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór \mathbb{Q} jest zbiorem gęstym.

Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b .

$$\text{np.: } c = \frac{a+b}{2}$$

Liczby rzeczywiste \mathbb{R}

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M , że:

$$\forall_{x \in X} m \leq x \leq M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leq M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.

$(-\infty, 1)$: kres 1

$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczającą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leq x$$

$(-1, +\infty)$: kres -1

$(2, +\infty)$: kres 2

Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leq |a - b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geq k$. Współczynnik Newtona określamy wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
 4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$
- Symbol sumy \sum
 - Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech a_1, a_2, \dots, a_n oraz b_1, b_2, \dots, b_n będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

drugi

2 Wykład II

Definicja 2.0.1. Ciąg liczbowy to funkcja z \mathbb{N} w \mathbb{R} . Stosujemy zapis a_1, a_2, \dots, a_n . Przykłady:

- $a_n = c + (n - 1)d$ - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$ - geometryczny
- $c_n = n!$
- $d_{n+1} = 2^{d_n}$ - rekurencyjny

Definicja 2.0.2. Ciąg monotoniczny.

1. a_n jest rosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
2. a_n jest malejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
3. a_n jest niemalejący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq a_{n+1}$
4. a_n jest nierosnący $\iff \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n \geq a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1. a_n jest rosnący od n_0 $\iff \forall_{n > n_0} a_n < a_{n+1}$

Definicja 2.0.3. Liczbą graniczną ciągu a_n nazywamy liczbę g , taką że:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$.

$$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$$

3 Wykład III

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.

$$\forall_{n > n_0} a_n \leq a_{n+1} \text{ i } \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n < M \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.

$$\forall_{n > n_0} a_n \geq a_{n+1} \text{ i } \forall_{n \in \mathbb{N}} a_n > m \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Idea dowodu:

$$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$$

A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A

Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres

czyli $\sup(A)$ (??) $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Idea dowodu indukcyjnego:

1. $a_n \leq 2$, indukcja po n
2. $a_n \leq a_{n+1}$, indukcja po n . $a_n \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} \leq a_{n+2}$
3. $\sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$$\forall_{n \geq 1} a_n \leq 2 \implies a_{n+1} \leq 2$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leq_{z.ind} \sqrt{2 + 2} = 2$$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$$

$$g = \sqrt{2 + g}$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 = 3^2$$

$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } \lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu

Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech n_1, n_2, \dots, n_k będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{n_k} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):

a) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

$a_{2k} = (-1)^n = 1, k \in \mathbb{N}$

(a_2, a_4, a_6, \dots) - podciąg o wyrazach parzystych.

b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$

(a_1, a_3, a_5, \dots) - podciąg o wyrazach nieparzystych.

$S = \{1, -1\}$

c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$

$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.

$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.

$S = \{0, \infty\}$ d) $\sin(\frac{n\pi}{3})$ - $\text{plot}(\sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $\sup()$ - superior - kres górny
- $\inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$\lim \inf(a_n) \leq \lim \sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)

D-d. $\forall_{n \in \mathbb{N}} m \leq a_n \leq M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:

$\forall_{k \in \mathbb{N}} m_1 \leq m_k \leq a_{nk} \leq M_k \leq M_1$
 M_k malejący i ograniczony \implies zbieżny g_1
 m_k rosnący i ograniczony \implies zbieżny g_2
 $g_1 = g_2 = g$
 $M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
 $M_k \rightarrow g_1; m_k \rightarrow g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \rightarrow 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
 $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n, m > n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny \iff jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$
 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n+1} > x_n$
2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n > 3} 2^n \leq n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}, \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq$
 $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$
 $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
Istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e = 2.7182\dots$
 $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $\lim_n \implies_{\infty} a_n = \infty$.
Wówczas:

$$\lim_n \implies_{\infty} (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2^n})^{2^n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $\lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = \lim((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{n}{2n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $\lim((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \rightarrow \text{infy})$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu a_1, a_2, \dots, a_n o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \dots$
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $\text{apart}(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow \text{wolframalpha}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= S_N \\ S_1 &= \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{zatem:} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \\ = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{finalnie:} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 \end{aligned}$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + \dots + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
 $H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} &\geq 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \dots &\geq 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \dots &\geq 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2} \\ H_{2^{n+1}} &\geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1) \\ H_{2^{n+1}} &\geq 1 + \frac{n+1}{2} \\ H_{2^n} &\geq 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Założmy, że $2^N = k \implies N = \log_2(k)$

$$H_k \geq 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \rightarrow \infty$$

Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $H_k \rightarrow \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Warunek konieczny nie jest wystarczający.

4 Wykład IV

4.1 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 4.1.1. Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny \iff jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{N+1} > 0$, S_N - rosnący. Jeżeli S_N jest ograniczony to jest zbieżny.

Wniosek:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dla $n \geq 2$:

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2$$

Twierdzenie 4.1.2. Kryterium porównawcze. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $a_n, b_n > 0$:

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} a_n \leq b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.1.3. Jeżeli $\sum_{n > n_0}^{\infty} \leq \sum_{n > n_0}^{\infty}$ i $\sum_{n > n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (a_n rozbieżny), to wówczas $\sum_{n > n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (b_n rozbieżny).

Wniosek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ dla $p \leq 1$, bo $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.4. Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że $a_n \geq 0$ i $a_{n+1} \leq a_n$.

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.1. Rozważmy poniższy przykład ciągu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \implies tw.zag$$

$$2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8$$

Przykład 4.1.2. Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$ zbieżny $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p$ jest zbieżny.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$ jest zbieżny dla $p > 1$

Wniosek 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leq 1$

Definicja 4.1.1. Kryterium d'Alemberta: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0$:

- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = q, q < 1$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$$

$$a_{n+1} < a_n q$$

$$a_n < a_0 q^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1} - \text{zbieżne}$$

Przykład 4.1.3. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{n!}{n^n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Przykład 4.1.4. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ jest rozbieżny. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$)

Przykład 4.1.5. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Przykład 4.1.6. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Simplify (wolframalpha):

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

discreteplot($n^2, (n, 1, 20)$) (wolframalpha)

discreteplot($n^2, n, 1, 20$) (mathematica)

Definicja 4.1.2. Kryterium Cauchy'ego. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq 0$

1. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} \geq 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:

$\sqrt[n]{|a_n|} < q$, $0 < q < 1$ czyli $|a_n| < q^n$ więc $a_n < q^n$ zatem $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ zbieżny.

Przykład 4.1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$, $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2} = \frac{1}{2} < 1$ - zbieżny

Przykład 4.1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}$, $a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$

z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$ - rozbieżny

Przykład 4.1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$

kryterium Cauchy'ego nie działa: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \Rightarrow 1$

$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$, sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$

Ciąg jest rozbieżny.

Definicja 4.1.3. Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.

$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n n^2}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny (kryterium d'Alemberta)

FAKT. Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 4.1.5. Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny.}$$

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

Przykład 4.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:
 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.6. Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1. $a_n \geq 0$
2. $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład 4.1.12. Pokażmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Abela:
 $a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \wedge a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ Szereg jest zatem zbieżny.

Przykład 4.1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$
 Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

4.2 Funkcje

Analizujemy funkcje $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Definicja 4.2.1. Dziedzina funkcji (domain): $dom(f)$ - zbiór wszystkich x dla których funkcja jest określona.

Definicja 4.2.2. Zbiór wartości (range): $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.3. Wykres funkcji (graph): $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.4. Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli $f : A \rightarrow B$ jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja $f^{-1} : rng(f) \rightarrow A$, taka że: $\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall y \in rng(f) \quad f(f^{-1}(y)) = y$.

Definicja 4.2.5. Funkcje monotoniczne $f : A \rightarrow B$:

1. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) < f(y))$ - rosnąca
2. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) > f(y))$ - malejąca
3. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) \leq f(y))$ - niemalejąca (słabo rosnąca)
4. $\forall x, y \in A \quad (x < y \implies f(x) \geq f(y))$ - nierosnąca (słabo malejąca)

Definicja 4.2.6. Złożenie funkcji $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ wówczas:

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \rightarrow C \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \end{aligned}$$

Przykład 4.2.1. Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$f(x) = x^3 + 1, g(y) = \sin(y)$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(x^3 + 1)$$

Przykład drugi:

$$g : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^3(x) + 1$$

5 Wykład V

Funkcje elementarne.

1. $f(x) = ax + b$ - funkcja liniowa
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ - funkcja kwadratowa
3. $W(x)$ - wielomian (wymierna)
4. $f(x) = a^x$, $a > 0$ - funkcja wykładnicza
 $a^b \cdot a^c = a^{b+c}$; $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5. $f(x) = \log_a(x)$, $a > 0$ - funkcja logarytmiczna, odwrotna do $f(x) = a^x$
 $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$;
 $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$
Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
 $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$
6. e - Liczba Eulera - $e \approx 2.7172$
 $\log_e(x) = \ln(x)$
 $\log_a(x) = \ln(x) \cdot \log_a(e)$

5.1 Trygonometria

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ \cos t &= \operatorname{Re}(e^{it}) \\ \sin t &= \operatorname{Im}(e^{it}) \end{aligned}$$

Szeregi liczby Eulera:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-t)^k}{k!} = e^{it}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [\operatorname{sum}(1k!, (k, 0, 1000))]$

Zobaczmy wzór:

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ e^{ix} \cdot e^{iy} &= e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} \stackrel{def}{=} \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) &= (\cos x)(\cos y) + (\cos x)(\sin y)i + (\sin x)(\cos y) + i^2 \sin x \sin y \\ &= ((\cos x) + (\cos y) - (\sin x)(\sin y)) + i((\cos x)(\sin y) + (\sin x)(\cos y)) \\ Re &= Re, Im = Im, \text{ a zatem d-d.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Funkcje } tg(x), ctg(x), tg(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \\ plot(tan(x), (x, -20, 20)) \end{aligned}$$

5.2 Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

$\sin(x)$ w $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest bijekcją, dzięki czemu można zdefiniować funkcję odwrotną.

- $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\arctg(x) : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $\text{arcctg}(x) : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$

5.3 Funkcje hiperboliczne

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Jedynka hiperboliczna:

$$\cosh^2 h - \sinh^2 h(x) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{D-d: } \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} + 2e^x \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4} = \\ &= \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1 \end{aligned}$$

Definicja $tgh, ctgh$:

- $tgh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
- $ctgh(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$

5.4 Funkcje sigmoidalne

1. funkcja logistyczna $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \sigma(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$
Uogólniona:

$$f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^\alpha}, \alpha > 0$$

2. tangens hiperboliczny $f(x) = tgh(x)$

3. arcus tangens hiperboliczny $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

4. error function - funkcja błędu

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

5.5 Funkcje okresowe

Definicja A - dziedzina f : \exists_T takie, że $\forall_{x \in A} f(x+T) = f(x)$

5.6 Funkcje egzotyczne

1. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - cz. całkowita x . Najw. całkowita nieprzekraczająca x .

2. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - podłoga liczby x (to samo co część całkowita)

3. $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k \leq x\}$ - sufit liczby x

$$4. \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$[5.5] = 5, [4.7] = 4, [-3.4] = -4$$

5.7 (Heine) Granica funkcji

Zakładamy, że istnieje $\Delta > 0$ taka, że f jest określona na $(a - \Delta, a) \cup (a, a + \Delta)$ (sąsiedztwie punktu a).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{x_n \Rightarrow a, x_n \neq a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.7.1. Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Weźmy $x_n \rightarrow 0$; $x_n \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \cdot 0 = 0$

Przykład 5.7.2. Policzmy granicę następującej funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{1} = 2$$

Przykład 5.7.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ - dowód z tw. o trzech funkcjach.

5.8 (Cauchy) Granica funkcji

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A} 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Symbolu $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ - używamy również na oznaczenie granicy niewłaściwej.

Przykłady:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+} \right] = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{-1}{n} \rightarrow 0$, ale $f(x'_n) \rightarrow \infty, f(x''_n) \rightarrow -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0, x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0$, ale $f(x'_n) = 0, f(x''_n) = 1$

5.9 Granice Jednostronne

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n > a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow a, x_n \neq a, x_n < a} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} |x^2 - x|$ - *limit(abs(x² - x), x → 1, assumptions → rightarrow x > 1)* ← wolfram
Limit{Abs[x² - x], x → 1, assumptions → x > 1} ← mathematica

5.10 Granica w nieskończoności

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g \iff \forall_{x_n \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.10.1. Zobaczmy granice w nieskończoności:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, o ile $a > 1$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$

Przykład 5.10.2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \begin{cases} x = -t \\ t \rightarrow \infty \end{cases} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5.11 Twierdzenie o arytmetyce granic

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

5.12 Twierdzenie o trzech funkcjach

Zakładamy, że $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = g$, wtedy:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g$$

Przykład 5.12.1. $\lim (x \cdot \sin(\frac{1}{x})) = 0$
 $0 \leq |x \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| \cdot 1$

Twierdzenie 5.12.1. Definicja z granic ciągów $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, przenosi się na granice funkcji:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$$

5.13 Notacja duże O, notacja asymptotyczna

Mamy dwa ciągi $a(n)$, $b(n)$. Mówimy że:

$$a(n) = O(b(n)) \iff \exists_C \exists_{n_0} \forall_{n > n_0} |a(n)| \leq C |b(n)|$$

Przykład 5.13.1. Przykłady notacji big O:

- $a(n) = n^2 - \frac{1}{2}n = O(n^2)$
- $b(n) = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + n = O(n^2)$
 $\forall_{n \geq 1} \frac{1}{2}n^2 + n \leq \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2, C = \frac{3}{2}$
- $c(n) = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$
 $c(n) = O(n^2), c = |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Twierdzenie 5.13.1. $f(n) = O(g(n)) \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| < \infty$

Zastosowania:

$n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$, ponieważ:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^3} \right| = 1 < \infty$$

Przykład 5.13.2. Przykład ambitny:

Ustalmy k - stała: $\binom{n}{k} = O(n^k)$ - dowód jako zadanie z (*).

Kolejno:

$n^2 + n = O(n^2), n^2 + n = O(n^3)$ - na interesuje najmniejsze O

Definicja 5.13.1. Mówimy, że:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \wedge g(n) = O(f(n))$$

Przykład 5.13.3. $\frac{1}{2}n^2 + n = \Theta(n^2)$

Twierdzenie 5.13.2. $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{f(n)}{g(n)} \right| = g \wedge 0 < g < \infty \right) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

Oraz kolejno (zaawansowane):

$$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n^k + \Theta(n^{k-1})$$

6 Wykład VI

Przykład 6.0.1. Policzmy granicę:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow \infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow \infty} t$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}, \text{ podstawiając } \frac{1}{x} = t, t \rightarrow -\infty \text{ zatem } \lim_{t \rightarrow -\infty} t$$

Przykład 6.0.2. Pokażmy, że $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}}, \text{ podstawienie } x = \frac{1}{t}, \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t, \text{ podstawienie } t = -s,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{s}\right)^{-s} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

6.1 Asymptoty

Definicja 6.1.1. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f w punkcie a , jeżeli zajdzie jeden z warunków:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną dla $x \rightarrow a^+$.

Definicja 6.1.2. Prosta jest asymptotą pionową jeżeli jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

Przykład 6.1.1. Asymptoty pionowe mogą wystąpić w punktach poza dziedziną funkcji: $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \implies$ prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x)$.

Definicja 6.1.3. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Twierdzenie 6.1.1. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

Jeżeli te granice nie istnieją to funkcja nie posiada asymptoty ukośnej w ∞ .

Idea dowodu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f(x) - (ax + b))}{x} = \frac{0}{\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) &\implies a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax)) \end{aligned}$$

Twierdzenie 6.1.2. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax \end{aligned}$$

Przykład 6.1.2. Narysujmy wyres funkcji: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, pokażmy, że prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną $f(x)$ w $\pm\infty$.

$$a_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$a_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x-1} = 1$$

$$b_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

$$b_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$$

6.2 Ciągłość funkcji

Definicja 6.2.1. Ciągłość funkcji (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a , tzn. na przedziale $(a - \Delta, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Przykład 6.2.1. Zobaczmy jak w praktyce można zastosować te definicje:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)^2 = (\lim_{x \rightarrow 1} (x) + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

Przykład 6.2.2. Przykłady:

- $f(x) = x^2$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.
- $f(x) = \sin(1/x)$, $\text{dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 6.2.1. Ciągłość prawostronna (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a , tzn. na przedziale $(a, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest prawostronnie ciągła w punkcie a , wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

Analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną dla $x \rightarrow a^-, [a - \Delta, a]$

Twierdzenie 6.2.2. Funkcja jest ciągła w punkcie a jeżeli jest jednocześnie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

Przykład 6.2.3. Zbadaj ciągłość podanej funkcji w 0 w zależności od parametru a :

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{dla } x \geq 0 \\ x^2 + 1, & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Liczmy: } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + a) = a$$

$$a = 1$$

Definicja 6.2.2. Ciągłość funkcji (Cauchy'ego). Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 6.2.3. Jeżeli f, g są ciągłe w punkcie $x_0 = a$, to wówczas:

1. $f(x) \pm g(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$, o ile $g(a) \neq 0$

są ciągłe w punkcie $x_0 = a$.

Wniosek. Wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swojej dziedzinie. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzinie.

Twierdzenie 6.2.4. Złożenie funkcji ciągłych f, g jest funkcją ciągłą.

$$f \text{ ciągła} \wedge g \text{ ciągła} \implies f \circ g \text{ ciągła}$$

$$\text{Zobaczmy przykład: } \lim_{x \rightarrow a} \left(\cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \cos \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} \right) = \cos \left(\frac{1}{a} \right)$$

6.3 Mnożenie szeregów

$$\begin{aligned}(1 + 2x + x^2)(-1 + 3x + x^2 + x^3) &= (1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3)x^3 + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^4 + (1 \cdot 1)x^5 \\ (a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \\ &= c_0 + c_1x + c_2x^2\end{aligned}$$

$$c_0 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}; \quad c_1 = \sum_{k=0}^1 a_k b_{1-k}; \quad c_2 = \sum_{k=0}^2 a_k b_{2-k}$$

Twierdzenie 6.3.1. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów.

Zakładamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, wtedy $c_0 = \sum_{k=0}^0 a_k b_{0-k}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} - \text{dyskretny spłot}$$

6.4 Funkcja exp(x)

Definicja 6.4.1. Niech $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$ jest poprawnie zdefiniowana. $a_n = \frac{x^n}{n!}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 \rightarrow$ jest zbieżność bezwzględna $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 6.4.1. Dyskretny spłot exp:

$$\exp(x) + \exp(y) = \exp(x + y)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k}$ dyskretny spłot szeregów a_n, b_n
zatem:

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + y)^n$$

Przykład 6.4.2. $\forall x \in \mathbb{R} \exp(x) > 0$

1. $x > 0 \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$, ponieważ $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1)$
2. $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$
 $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$

Przykład 6.4.3. Funkcja $\exp(x)$ jest ciągła:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x_0) \exp(h) \\ &= \exp(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \exp(h) = \exp(x_0) \cdot 1\end{aligned}$$

7 Wykład VII

Konfa ...

8 Wykład VIII

8.1 Suma i iloczyn pochodnych

Twierdzenie 8.1.1. Pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

D-d. $(f(x) + g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = * f'(x) + g'(x)$ (* granica sumy jest sumą granic)

Twierdzenie 8.1.2. CHAIN RULE. Pochodna iloczynu funkcji wyraża się wzorem:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

D-d. $(f(x) \cdot g(x))' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x) + f(x)) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (g jest różniczkowalna \implies g ciągła)

Wniosek: $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$ (Liniiowość pochodnej)

8.2 Odwołanie - odwzorowanie liniowe

$$A : X \rightarrow Y$$

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$$

$$A(c \cdot x) = c \cdot A(x)$$

8.3 Odwrotność pochodnej

Pokaż, że: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ (lista zadań)

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$$

8.4 Pochodna ilorazu

Twierdzenie 8.4.1. Pochodna ilorazu dwóch funkcji $f(x), g(x)$ wynosi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

D-d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Przykład 8.4.1. Rozważmy poniższy wzór:

$$\forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

D-d. Wykorzystujemy wzór dwumianowy Newtona:

$$(x^n)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h}, \text{ Załóżmy, że } n \geq 2:$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^0 x^n \binom{n}{0} + h^1 x^{n-1} \binom{n}{1} + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + h x^{n-1} n + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} n x^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^n \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) = n x^{n-1}$$

Przykład 8.4.2. $\frac{d}{dx} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}$

Przykład 8.4.3. Sinus, cosinus:

$\sin'(x) = \cos(x)$ tydzień temu

$\cos'(x) = -\sin(x)$ ćw

Przykład 8.4.4. Policzmy $\tan'(x)$:

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Przykład 8.4.5. Policzmy $\cot'(x)$:

$$\cot'(x) = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x))^2} = \frac{-1}{(\sin(x))^2}$$

8.5 Pochodne [e]

Przykład 8.5.1. Lemat techniczny: $\forall_{n \in \mathbb{R}} |e^n - 1 - h| \leq \frac{|h|^2}{2} e^{|h|} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$

$$\begin{aligned} e^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} \\ e^n - 1 - h &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2h^k}{(k+2)! \cdot 2} \\ |e^n - 1 - h| &\leq \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2|h|^k}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} < \\ &\frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} = \frac{h^2}{2} e^{|h|} \end{aligned}$$

Twierdzenie 8.5.1. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \iff \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1 - h}{h} = 0 \iff \lim \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right|$$

$$0 < \frac{|e^h - 1 - h|}{|h|} < \frac{\frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}{|h|} = 0 \text{ Z twierdzenia o trzech ciągach mamy dowód.}$$

Przykład 8.5.2. $(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

Przykład 8.5.3. $(a^x)' = (e^{\ln(a) \cdot x})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a) \cdot (x+h)} - e^{\ln(a) \cdot x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{\ln(a) \cdot x} \frac{e^{\ln(a)h} - e^1}{h} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{e^{\ln(a)h} - 1}{\ln(a)h} \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

8.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 8.6.1. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej

$y = f(x)$, różniczkowalna i rosnąca (lub malejąca) na $[a, b]$. Niech $f(x_0) = y_0$. Wówczas istnieje funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$ oraz zachodzi wzór:

$$[f^{-1}(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}}$$

D-d.

Weźmy: $f(x_0 + k) = y_0 + h$

$$\begin{aligned} [f^{-1}(x)]'_{y=y_0} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(f(x_0+k)) - f^{-1}(f(x_0))}{y_0+h-y_0} = \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{x_0+k-x_0}{f(x_0+k)-f(x_0)} &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{[f(x)]'_{x=x_0}} \end{aligned}$$

Przykład 8.6.1. $f(x) = e^x$, $e^{x_0} = y_0$, $f^{-1}(y) = \ln(y)$

$$[\ln(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{e^x} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0} \quad (\ln(y))' = \frac{1}{y}$$

Przykład 8.6.2. $\log_a(y)' = \left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right)' = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.3. Sprawdzimy zrozumienie tw. o pochodnej funkcji odwrotnej:

$$f(x) = \sin(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y = \sin(x)$$

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Następnie:

$$f(x) = \cos(x), x \in [0, \pi], y = \cos(x)$$

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Kolejno:

$$f(x) = \tan(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], y = \tan(x)$$

$$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \cos^2(x) = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$$

9 Wykład IX

10 Wykład X

10.1 Techniki całkowania

Podstawowe wzory

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}$
2. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, bo $(-\cos(x))' = \sin(x)$
3. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
4. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$

Twierdzenie 10.1.1. Niech $\int f(x) dx = F(x) + C$, wówczas:

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

Dowód

$$\left(\frac{1}{a} F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a} f(ax+b)(ax+b)' = \frac{1}{a} f(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$$

Przykłady:

- $\int \cos(nx) dx = \frac{1}{n} \sin(nx) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \arctan(\frac{x}{a}) + C = a \cdot \arctan(\frac{x}{a}) + C$
- $\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int (1 - \frac{1}{x+1}) dx = \int 1 dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(|x+1|) + C$

10.2 Całkowanie przez części

Twierdzenie 10.2.1. Twierdzenie o całkowaniu przez części.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dowód.

$$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx = f(x) \cdot g(x)$$

Przykłady:

- $\int x \sin(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = \sin(x)$ Mamy:
 $x(-\cos(x)) - \int 1(-\cos(x))dx = -(x)\cos(x) + \int \cos(x)dx =$
 $= x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$
- $\int x^2 \cos(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2, g'(x) = \cos(x)$ Mamy:
 $= x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \sin(x)dx = x^2 \cdot \sin(x) - 2 \int \sin(x)dx =$
 $= x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C$
- $\int x^2 \ln(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = \ln(x), g'(x) = x^2$ Mamy:
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{3} dx =$
 $= \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^2}{3} = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
- $\int x^n \ln(x)dx$ - ćwiczenie.
- $\int \ln(x)dx = \ln(x)x - x + C$
- $\int x^2 e^x dx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2, g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x =$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$. Przyjmujemy $f(x) = \sin(x), g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= \sin(x)e^x - \int \cos(x)e^x dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \cos(x)e^x$. Przyjmujemy $f(x) = \cos(x), g'(x) = e^x$ Mamy:
 $= \cos(x)e^x + \int \sin(x)e^x dx$
- $\int \sin(x)e^x dx = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} e^x + C$

10.3 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie 10.3.1. Wiedząc, że:

$$\int g(t)dt = G(t) + C, G'(t) = g(t)$$

możemy obliczyć:

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

bo $(G(w(x)))' = g(w(x))w'(x)$.

Przykład 10.3.1. $\int e^{x^2+x}(2x+1) = e^{x^2+x} + C$

Przykład 10.3.2. $\int (3x+1)^n dx$. Podstawiamy $3x+1 = t, dx = \frac{1}{3}dt$. Mamy:

$$\int t^n \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \int t^n dt = \frac{1}{3} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{n+1}}{n+1}$$

$$(t(x) = 3x+1, \frac{dt(x)}{dx} = 3)$$

Przykład 10.3.3. $\int \sin^3(x) \cos(x) dx$. Przyjmujemy $t = \sin(x), \frac{dt}{dx} = \cos(x)$ Mamy:

$$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

Przykład 10.3.4. $\int e^{x^2} x dx$. Przyjmujemy $t = x^2, \frac{dt}{dx} = 2x$ Mamy:

$$\int e^{\frac{t}{2}} dt = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Przykład 10.3.5. $\int \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$. Przyjmujemy $t = 1 + \sin(x) dt = \cos(x)$ Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|1 + \sin(x)|) + C$$

Przykład 10.3.6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ Przyjmujemy $t = f(x) \frac{dt}{dx} = f'(x)$

Mamy:

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(|f(x)|) + C$$

Przykład 10.3.7. $\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + C$

10.4 Paskudny algorytm całkowania funkcji wymiernych

$W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q - wielomiany, cel $\int W(x) dx$

W jest właściwą funkcją wymierną jeśli: $\deg(P) < \deg(Q)$

Każdą funkcję wymierną można zapisać jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Przykład 10.4.1. $\int \frac{x^3}{x-1} dx = \int (x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}) dx = \int (x^2 + x + 1) dx + \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln(|x-1|) + C$

W dalszej części zakładamy, że: $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg P < \deg Q$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na ułamki proste. (apart wolframalpha)

Twierdzenie 10.4.1. Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, k = 2, 3, \dots$
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \Delta < 0$
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}, m = 2, 3, \dots$

Przykład 10.4.2. $W(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(|x-a|) + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} A + C, k = 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned}
3. \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx+N}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&\int \frac{\frac{M}{2}2(x+a)-Ma+N}{(x+a)^2+b^2} = \\
&\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + \int \frac{N-Ma}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} dx = \\
&\frac{M}{2} \ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{(\frac{x+a}{b})^2+1} dx = \dots \\
&\arctan \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx &\text{ sprowadza się do całek:} \\
&\int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt, \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt
\end{aligned}$$

Przykład 10.4.3. $\int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$. Przyjmujemy $x = t^2 + 1$ Mamy:

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{2} \frac{x^{-m+1}}{-m+1} = \frac{1}{2} \frac{(t^2+1)^{-m+1}}{-m+1} + C$$

Przykład 10.4.4. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny:

$$\begin{aligned}
I_m &= \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt \\
I_{m+1} &= \frac{1}{2m} \frac{t}{(t^2+1)^m} + \frac{2m-1}{m} I_m \\
I_1 &= \arctan(t)
\end{aligned}$$