Analiza Matematyczna

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład pierwszy

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geqslant 1} 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Z założenia indukcyjnego mamy:
   $1 + 2 + ... + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi $\square$.

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geqslant 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1 + a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n>1} (1 + a)^n \geqslant 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1) \cdot a$
   $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \geqslant^{ind.} (1 + na)(1 + a)$
   $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geqslant 1 + (n + 1) \cdot a$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:
$a < b, a > b, a = b$.
Dodawanie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$
Mnożenie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$
Własności:

1. Przemienność $a + b = b + a$
2. Łączność $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Rozdizelność $(a + b)c = ac + bc$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym.
Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b.
np.: $c = \frac{a+b}{2}$

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M, że:

$$\forall_{x \in X} m \leqslant x \leqslant M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leqslant M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.
$(-\infty, 1)$: kres 1
$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczjącą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leqslant X$$

$(-1, +\infty)$: kres -1
$(2, +\infty)$: kres 2
Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geqslant k$. Współczynnik Newtona określam wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

- Symbol sumy $\sum$
- Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

2 Wykład drugi

tbd

3 Wykład trzeci

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \leqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n<M} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \geqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n>m} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
Idea dowodu:
$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$
A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A
Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres
czyli $sup(A)$ (??) $sup(A) = lim_{n\to\infty a_n}$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}\ a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$
Idea dowodu indukcyjnego:
1. $a_n \leqslant 2$, indukcja po n
2. $a_n \leqslant a_{n+1}$, indukcja po n. $a_n \leqslant a_{n+1} \implies a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$
3. $\sqrt{2+a_n} \leqslant \sqrt{2+a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$\forall_{n\geqslant 1} a_n \leqslant 2 \implies a_{n+1} \leqslant 2$
$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant_{z.ind} \sqrt{2+2} = 2$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
$lim_{n\to\infty} a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},\ lim_{n\to\infty} a_n = g = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$$
$$g = \sqrt{2+g}$$
$$g^2 - g - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 = 3^2$$
$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu
Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, ...n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{nk} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):
a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
$a_{2k} = (-1)^n = 1$, $k \in \mathbb{N}$
$(a_2, a_4, a_6, ...)$ - podciąg o wyrazach parzystych.
b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$
$(a_1, a_3, a_5, ...)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.
$S = \{1, -1\}$
c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$
$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.
$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.
$S = \{0, \infty\}$ d) $sin(\frac{n\pi}{3})$ - $plot(sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow$ wolframalpha

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $lim_{n\to\infty}a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $sup()$ - superior - kres górny
- $inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim inf(a_n) \leqslant \lim sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)
D-d. $\forall_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:
$\forall_{k\in\mathbb{N}} m_1 \leqslant m_k \leqslant a_{nk} \leqslant M_k \leqslant M_1$
M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
$g_1 = g_2 = g$
$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
$M_k \to g_1; m_k \to g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \to 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n_1} > x_n$
2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n>3} 2^n \leqslant n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
   Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \leqslant$
   $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... + \frac{1}{2^n}$
   $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
   Istnieje $lim_{n\to\infty} x_n = e = 2.7182...$
   $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow$ wolframalpha

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $lim_{n \implies \infty} a_n = \infty$. Wówczas:

$$lim_{n \implies \infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1+\frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $lim_{n\to\infty} a_n = g_1 \wedge lim_{n\to\infty} b_n = g_2 \implies lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $lim(1-\frac{1}{n})^{n/2} = lim\left((1-\frac{1}{n})^n\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $limit\left((1+\frac{1}{2^n})^{n+1}, n \to infty\right)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_N = a_1 + a + 2 + ... + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \ldots$.
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $apart(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow$ wolframalpha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = S_N$$
$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \text{ zatem:}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:}$$
$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = lim_{n\to\infty} S_N = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + ... + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, $\lim_{N\to\infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + ... \geqslant 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... \geqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$
$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)$
$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$
$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Załóżmy, że $2^N = k \implies N = log_2()$
$H_k \geqslant 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \to \infty$
Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $H_k \to \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny
$lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Warunek konieczny nie jest wystarczający.