Fizyka I

Rafał Włodarczyk

Informatyka Algorytmiczna 2 Semestr 2024

1 Wszechświat

- Wiek Wszechświata określany jest na 13.787 ± 0.020 miliardów lat [według Lambda-CDM concordance model, 2021] (inaczej ok. $4.3 \cdot 10^{17}$s)
- Odwrotność wieku Wszechświata stanowi stała Hubble'a:

$$\frac{1}{T_{\text{universe}}} = 74.2 \pm 3.6 \frac{\frac{km}{s}}{Mpc}$$

  Gdzie pc - parsek, czyli odległość, dla której kąt paralaksy (równy połowie kąta całkowitej rocznej zmiany) położenia Ziemi widzianej prostopadle do płaszczyzny orbity wynosi 1 sekundę łuku.

- Rozmiary charakterystycznych obiektów:
  1. Ziemia: $R_{\text{Earth}} = 6.5 \cdot 10^6 m$, $D_{\text{Earth - Sun}} = 1\text{AU} \approx 150$ mln km
  2. Słońce: $R_{\text{Sun}} = 4 \cdot 10^{12} m$
  3. Układ Słoneczny: $R_{\text{SolarSystem}} = 1921.56$ AU [Sedna]
  4. Droga Mleczna: $R_{\text{MilkyWay}} \approx 4 \cdot 10^4 \cdot 10^{16} = 4 \cdot 10^{20} m$
  5. Klaster Galaktyk: $R_{\text{ClusterOfGalaxies}} \approx 10^{23} m$
  6. Superklaster Galaktyk $R_{\text{SuperclusterOfGalaxies}} \approx 300$ mln ly ($1ly \approx 10^{16} m$ - rok świetlny)

1.1 Skala jednorodności

$>$ doprecyzować

1.2 Zasada kosmologiczna

Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Żaden punkt nie jest wyróżniony, rozkład materii jest izotropowy - podobny w każdym kierunku, w którym spogląda obserwator.

2 Pojęcia podstawowe

2.1 Absolutna przestrzeń oraz czas

(Postulat Mechaniki Klasycznej) Istnieje przestrzeń - arena wszystkich zdarzeń oraz niezależny, absolutny czas. Każdy obserwator mierzy ten sam czas, niezależnie od prędkości, z którą się porusza.

2.2 Stan układu

(Postulat Mechaniki Klasycznej) Stan układu to zbiór wewnętrznych zmiennych niezależnych opisujących układ. W mechanice klasycznej jest to położenie $\vec{x}$ oraz pęd $\vec{p}$.

3 Zasady Dynamiki Newtona

Pierwsza zasada dynamiki Newtona

(Istnieje układ inercjalny) Jeżeli wypadkowa sił działających na ciało jest równa zeru, to ciało pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

$$\sum \vec{F} = 0 \implies \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \tag{1}$$

Druga zasada dynamiki Newtona

Jeżeli wypadkowa sił działających na ciało nie jest równa zeru, to przyspieszenie ciała jest wprost proporcjonalne do tej siły i odwrotnie proporcjonalne do masy ciała.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \tag{2}$$

gdzie $\vec{F}$ to wypadkowa siła, m to masa ciała, a $\vec{a}$ to przyspieszenie.

Trzecia zasada dynamiki Newtona

Jeżeli ciało A działa na ciało B siłą $\vec{F}_{AB}$, to ciało B działa na ciało A siłą $\vec{F}_{BA}$ równą co do wartości i przeciwnie skierowaną.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \tag{3}$$

4 Równanie ruchu

4.1 W przypadku stałej siły

Zacznijmy od drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

gdzie $\vec{a}$ to przyspieszenie, a m to masa ciała. Przyspieszenie jest drugą pochodną wektora położenia $\vec{r}(t)$ względem czasu, czyli:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Podstawiając to do równania Newtona, otrzymujemy:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Rozwiązując to równanie dla $\vec{r}(t)$, możemy skorzystać z metody rozdzielania zmiennych. Ponieważ $\vec{F}$ jest stałe, możemy rozpatrywać ruch wzdłuż każdej osi współrzędnych osobno. Załóżmy, że $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$. Wtedy równania różniczkowe dla każdej składowej będą wyglądały następująco:

$$F_x = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$F_y = m\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$F_z = m\frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

Rozwiążemy każde z tych równań po kolei. Na przykład dla składowej x:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F_x}{m}$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałym współczynniku. Rozwiązaniem tego równania jest:

$$x(t) = \frac{F_x}{2m}t^2 + v_{0x}t + x_0$$

gdzie v_{0x} to początkowa prędkość wzdłuż osi x, a x_0 to początkowe położenie. Podobnie, rozwiązania dla $y(t)$ i $z(t)$ będą miały postać:

$$y(t) = \frac{F_y}{2m}t^2 + v_{0y}t + y_0$$

$$z(t) = \frac{F_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0$$

Łącząc te wyniki, wektor położenia $\vec{r}(t)$ w trzech wymiarach wynosi:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{F_x}{2m}t^2 + v_{0x}t + x_0, \frac{F_y}{2m}t^2 + v_{0y}t + y_0, \frac{F_z}{2m}t^2 + v_{0z}t + z_0\right)$$

Zatem wektor położenia $\vec{r}(t)$ jako funkcja czasu dla ciała poruszającego się pod wpływem stałej siły $\vec{F}$ wynosi:

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(a_xt^2 + v_{0x}t + x_0, a_yt^2 + v_{0y}t + y_0, a_zt^2 + v_{0z}t + z_0\right)}$$

4.2 W przypadku siły zależnej od prędkości

Aby sformułować oraz rozwiązać równanie ruchu w 3 wymiarach dla siły $\vec{F}$ proporcjonalnej do prędkości $\vec{v}$, zaczniemy od drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Zakładamy, że siła jest proporcjonalna do prędkości, czyli:

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

gdzie k jest stałą proporcjonalności (współczynnikiem tłumienia), a $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ to prędkość. Równanie ruchu staje się więc:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -k\vec{v}$$

Możemy to zapisać jako:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{k}{m}\vec{v}$$

To równanie różniczkowe jest liniowe i jednorodne. Rozwiążemy je metodą rozdzielania zmiennych.

$$\frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\int \frac{d\vec{v}}{\vec{v}} = -\frac{k}{m}\int dt$$

$$\ln|\vec{v}| = -\frac{k}{m}t + C$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

gdzie $\vec{v}_0$ to wektor początkowej prędkości. Teraz, aby znaleźć wektor położenia $\vec{r}(t)$, musimy zintegrować prędkość:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt$$

Ponieważ $\vec{v}_0$ jest stałe, możemy całkować każdy składnik osobno:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \int e^{-\frac{k}{m}t}dt$$

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 \left(-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \vec{r}_0$$

gdzie $\vec{r}_0$ to wektor początkowego położenia.

$$\boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}_0 - \frac{m}{k}\vec{v}_0 e^{-\frac{k}{m}t}}$$

5 Ruch drgający

5.1 Oscylator Harmoniczny

Oscylator harmoniczny – układ drgający wykonujący ruch harmoniczny. W układzie takim występuje siła sprężysta $F(x)$ proporcjonalna do przemieszczenia x tego układu od jego położenia równowagi:

$$F(x) = -kx$$

5.2 Położenie od czasu w ruchu harmonicznym

Zapiszmy powyższe równanie jako:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Podstawmy:

$$x(t) = e^{\alpha t}$$

$$m\frac{dx}{dt} = \alpha e^{\alpha t}$$

Obliczmy pierwszą i drugą pochodną tego wyrażenia:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \alpha^2 e^{\alpha t}$$

Podstawiamy teraz te pochodne do równania różniczkowego:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} = -\frac{k}{m} e^{\alpha t}$$

Ponieważ $e^{\alpha t} \neq 0$ dla dowolnej wartości α, możemy podzielić obie strony równania przez $e^{\alpha t}$:

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\alpha^2 = -\frac{k}{m}$$

A więc:

$$\alpha = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

To oznacza, że mamy dwa rozwiązania dla α:

$$\alpha_1 = i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego jest kombinacją liniową dwóch podstawowych rozwiązań:

$$x(t) = C_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + C_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}$$

Aby uzyskać rzeczywiste rozwiązanie, stosujemy tożsamości Eulera:

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{oraz} \quad e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$$

Podstawiając $\theta = \sqrt{\frac{k}{m}}t$:

$$e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad \text{oraz} \quad e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} = \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Zatem ogólne rozwiązanie można zapisać jako:

$$x(t) = C_1 \left(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\right) + C_2(\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - i\sin\left(\sqrt{k}t)\right)$$

Porządkując:

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + i(C_1 - C_2)\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

Aby rozwiązanie było rzeczywiste, współczynniki przy częściach urojonych muszą być zerowe. Zatem przyjmujemy nowe stałe:

$$A = C_1 + C_2 \quad \text{oraz} \quad B = i(C_1 - C_2)$$

W końcu, rzeczywiste ogólne rozwiązanie ruchu harmonicznego to:

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

W przypadku bardziej ogólnego ruchu harmonicznego prostego, możemy zapisać:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)}$$

gdzie C jest amplitudą, a φ fazą początkową, które można wyznaczyć z warunków początkowych.

5.3 Drgania tłumione

Drgania tłumione można opisać za pomocą następującego równania ruchu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - kx$$

Gdzie b jest współczynnikiem tłumienia. Metodą analogiczną do poprzedniego równania:

$$\boxed{x(t) = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)}$$

5.4 Drgania wymuszone

Drgania wymuszone można opisać za pomocą następującego równania ruchu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)$$

(Nie rozważając stanu przejściowego) Po pewnym czasie układ ustabilizuje się z częstotliwością własną:

$$\boxed{x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right)}$$

6 Zasada Zachowania Energii

$\boxed{\text{Całkowita energia w układzie izolowanego pozostaje stała}}$

6.1 W Mechanice Klasycznej

Całkowita energia (suma energii potencjalnej i kinetycznej) w ukłądzie zamkniętym pozostaje stała, jeżeli działające w układzie siły są zachowawcze.

6.2 Siły Zachowawcze

Siły, których praca zależy tylko od początkowego i końcowego położenia ciała, bez względu na drogę, którą to ciało przebyło.

- Siła grawitacji (Pole grawitacyjne jest polem zachowawczym)
- Siła sprężystości
- Siła Lorentza

6.3 Siły Niezachowawcze

Siły, których praca zależy od drogi, którą przebyło ciało.

- Siła tarcia
- Siła oporu ośrodka

7 Zasada zachowania pędu

$\boxed{\text{Pęd wszystkich elementów układu izolowanego pozostaje stały}}$

7.1 Zderzenia idealnie sprężyste

Zderzenie, w którym zostaje zachowany pęd oraz energia mechaniczna. Ilość obiektów w stanie początkowym i końcowym jest taka sama,

7.2 Zderzenia idealnie niesprężyste

Zderzenie, w którym zostaje zachowany pęd, ale nie zostaje zachowana energia mechaniczna.

8 Zasada zachowania momentu pędu

Moment pędu układu cząstek wokół punktu, w ustalonym inercjalnym układzie odniesienia, jest zachowany, jeśli wypadkowy moment sił zewnętrznych względem tego punktu jest równy zero.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = 0}$$

Przykłady wykorzystania zasady zachowania momentu pędu:

1. (Obieg planet wokół słońca) Planety mają stały moment pędu względem Słońca, co wynika z braku zewnętrznych momentów sił działających w znaczący sposób na układ.
2. (Łyżwy) Gdy łyżwiarz zmniejsza moment bezwładności (np. przyciągając ramiona do ciała), prędkość kątowa rośnie, aby moment pędu pozostał stały. Podobny efekt można osiągnąć kręcąc się na krześle, kierując ręce i nogi na zmianę, do siebie oraz od siebie.
3. (Koła zamachowe) W niektórych maszynach koła zamachowe przechowują moment pędu, który pomaga utrzymać stabilność pracy maszyny.

9 Bryła Sztywna

Ciało fizyczne złożone ze zbioru punktów, które nie przemieszczają się względem siebie.

9.1 Moment bezwładności

Moment bezwładności bryły sztywnej jest wielkością, która określa moment obrotowy potrzebny do uzyskania pożądanego przyspieszenia kątowego wokół osi obrotu, podobnie jak masa określa siłę potrzebną do uzyskania pożądanego przyspieszenia.

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

9.2 Moment pędu w ruchu obrotowym

Moment pędu w ruchu obrotowym to wektorowa wielkość fizyczna opisująca stan ruchu obrotowego ciała względem określonej osi. Jest on analogiczny do pędu w ruchu prostoliniowym, ale dotyczy obrotu. Moment pędu jest oznaczany symbolem $\vec{L}$ i definiowany jako iloczyn wektorowy wektora położenia $\vec{r}$ i wektora pędu $\vec{p}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Dla ciała o masie m poruszającego się z prędkością $\vec{v}$, pęd $\vec{p}$ jest równy $m\vec{v}$, więc:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

W przypadku ruchu obrotowego ciała sztywnego moment pędu można także wyrazić w zależności od momentu bezwładności I i prędkości kątowej $\vec{\omega}$:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

9.3 Równanie ruchu obrotowego - dla małych drgań

Wychodząc z momentu pędu:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$$

Różniczkując moment pędu względem czasu, otrzymujemy:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}\right)$$

Używając reguły iloczynu, dostajemy:

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}$$

Pierwszy człon po prawej stronie zanika, ponieważ wektor prędkości $\dot{\vec{r}}$ jest równoległy do samego siebie:

$$\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$$

Pozostaje więc:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Załóżmy, że ciało porusza się w osi z, po okręgu o promieniu R i kąt α mierzy się od pionu. Wtedy położenie $\vec{r}$ w układzie biegunowym można zapisać jako:

$$\vec{r} = R(\sin(\alpha)\hat{\imath} + \cos(\alpha)\hat{\jmath})$$

Przy czym $\vec{g}$ skierowane jest w dół, więc:

$$\vec{g} = -g\hat{\jmath}$$

Moment siły wtedy jest równy:

$$\vec{M} = R(\sin(\alpha)\hat{\imath} + \cos(\alpha)\hat{\jmath}) \times m(-g\hat{\jmath})$$

Ponieważ $\hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = 0$ i $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, mamy:

$$\vec{M} = R\sin(\alpha)\hat{\imath} \times (-mg\hat{\jmath}) = -mgR\sin(\alpha)\hat{k}$$

Moment bezwładności dla ruchu obrotowego I_0 wokół osi przez środek obrotu wynosi:

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M_z$$

gdzie M_z to składowa momentu siły w kierunku osi obrotu z.

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR\sin(\alpha)$$

Dla małych drgań ($\alpha < \frac{\pi}{6}$, $\sin(\alpha) \approx \alpha$), przybliżenie $\sin(\alpha) \approx \alpha$ jest uzasadnione. Mamy:

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgR\alpha$$

Rozwiązaniem tego równania różniczkowego jest:

$$\boxed{\alpha(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

10 Ruch w mechanice klasycznej

10.1 Zasada względności Galileusza

Prawa mechaniki są takie same w <u>inercjalnym</u> układzie odniesienia.

10.2 Transfrmacje Galileusza

Załóżmy, że mamy dwa układy odniesienia: S i S'. Układ S' porusza się względem układu S z prędkością v wzdłuż osi OX. Transformacje Galileusza między $S(x, y, z, t), S'(x', y', z', t')$ możemy opisać jako:

- $x' = x - vt$
- $y' = y$
- $z' = z$
- $t' = t$

Założenie, że czas jest absolutny jest nieprawdziwe. Założenie, że przestrzeń jest absolutna również jest nieprawdziwe.

10.3 Zasada względności Einsteina

1. Prawa mechaniki są takie same w inercjalnym układzie odniesienia.
2. Prędkość światła jest niezmiennicza $c = inv.$ (invariant)

10.4 Transformacje Lorentza

Załóżmy, że mamy dwa układy odniesienia: K i K'. Dla każdego z nich postaje sferyczna fala świetlna:

$$K : x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = (ct)^2 \tag{4}$$

$$K' : (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = (R')^2 = (ct')^2 \tag{5}$$

Niech układ K' porusza się względem układu K z prędkością v wzdłuż osi OX, wtedy $y = y', z = z'$ Spróbujmy wyprowadzić zależności między układami:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}t' \\ t = a_{21}x' + a_{22}t' \end{cases}$$

Skoro promień świetlny jest linią prostą (idealnie prostą w próżni), to ta relacja musi być relacją liniową. Jej współczynniki wynoszą:

$$\gamma = a_{11} = a_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$a_{12} = \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$a_{21} = \frac{\frac{u}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Zatem transformacje Lorentza możemy zapisać jako:

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + ut') \\ t = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}) \end{cases}$$

11 Efekty Szczególnej Teorii Względności

11.1 Dylatacja czasu

Rozważmy dwa wydarzenia, które zachodzą w tym samym miejscu w układzie spoczynkowym S. Czas między nimi dla obserwatora w S to Δt. Chcemy znaleźć czas między tymi samymi wydarzeniami dla obserwatora poruszającego się z prędkością v w układzie S'. Z transformacji Lorentza dla czasu, gdy $\Delta x = 0$:

$$t' = \gamma t$$

Różnica czasów $\Delta t'$ w układzie S' jest więc:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t$$

Podstawiając wartość γ:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

11.2 Skrócenie długości

Rozważmy pręt poruszający się wzdłuż osi x w układzie spoczynkowym S, gdzie jego długość wynosi L. Chcemy znaleźć długość L' tego samego pręta w układzie S', poruszającym się z prędkością v względem S. Z transformacji Lorentza dla przestrzeni:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

Długość pręta w układzie S' jest zdefiniowana jako odległość między dwoma końcami pręta, stąd:

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)$$
$$L' = \gamma[(x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)]$$

Załóżmy, że pręt porusza się wzdłuż osi x i jest w spoczynku w układzie S, więc $x_2 - x_1 = L$. Czas trwania pomiaru długości pręta w obu układach to $\Delta t = t_2 - t_1$. Zatem:

$$L' = \gamma[L - v\Delta t]$$

Podstawiając $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$:

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

11.3 Relatywistyczne składanie prędkości

Rozważmy układ S i poruszający się względem niego z prędkością v, względem osi OX, układ S'. Zgodnie z transformacją Lorentza:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}$$

Zapiszmy:

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ oraz } dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Następnie:

$$u_{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v \cdot u_x}{c^2}}$$

12 Czasoprzestrzeń

12.1 Interwał czasoprzestrzenny

Interwał czasoprzestrzenny między dwoma punktami w czasoprzestrzeni można zdefiniować jako różnicę pomiędzy kwadratem czasoprzestrzennych współrzędnych tych punktów.

$$\tau^2 = (x)^2 - (ct)^2$$

12.2 Stożek świetlny

12.3 Niezmienniczość interwału

13 Diagram czasoprzestrzenny

13.1 Ilustracja dylatacji czasu

13.2 Ilustracja skrócenia długości

14 Wprowadzenie do mechaniki kwantowej

14.1 Widmo liniowe atomu wodoru

14.2 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

14.3 Efekt fotoleketryczny

15 Hipoteza Plancka

16 Model Bohra

17 Hipoteza de Broglie'a

18 Dualizm korpuskularno falowy promieniowania oraz materii

19 Funkcja falowa

19.1 Równanie Schrödingera

20 Pomoc matematyczna

20.1 Iloczyn skalarny

Niech $\vec{v}, \vec{w}$ - wektory. Iloczyn skalarny:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v \cdot w \cdot \cos(\alpha)$$

20.2 Iloczyn wektorowy

Niech $\vec{v}, \vec{w}$ - wektory. Iloczyn wektorowy:

$$\vec{v} \times \vec{w} = v \cdot w \cdot \sin(\alpha)$$