

Analiza Matematyczna

Rafał Włodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład pierwszy

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geq 1} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Z założenia indukcyjnego mamy:
 $1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi \square .

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geq 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1 + a)^n \geq 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1 + a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n > 1} (1 + a)^n \geq 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
 $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \stackrel{ind.}{\geq} (1 + na)(1 + a)$
 $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1) \cdot a$
Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne \mathbb{Q} to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:

$$a < b, a > b, a = b.$$

Dodawanie \mathbb{Q}

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

Mnożenie \mathbb{Q}

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$$

Własności:

$$1. \text{ Przemienność } a + b = b + a$$

$$2. \text{ Łączność } a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$3. \text{ Rozdzielność } (a + b)c = ac + bc$$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b .

Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór \mathbb{Q} jest zbiorem gęstym.

Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b .

$$\text{np.: } c = \frac{a+b}{2}$$

Liczby rzeczywiste \mathbb{R}

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M , że:

$$\forall_{x \in X} m \leq x \leq M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leq M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.

$(-\infty, 1)$: kres 1

$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczającą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leq x$$

$(-1, +\infty)$: kres -1

$(2, +\infty)$: kres 2

Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$
- $|a - b| \leq |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leq |a - b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geq k$. Współczynnik Newtona określamy wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
 2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
 4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$
- Symbol sumy \sum
 - Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarz. Niech a_1, a_2, \dots, a_n oraz b_1, b_2, \dots, b_n będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

2 Wykład drugi

tbd

3 Wykład trzeci

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)

a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.

$$\forall n > n_0 \ a_n \leq a_{n+1} \text{ i } \forall n \in \mathbb{N} \ a_n < M \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.

$$\forall n > n_0 \ a_n \geq a_{n+1} \text{ i } \forall n \in \mathbb{N} \ a_n > m \implies \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Idea dowodu:

$$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$$

A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A

Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres

czyli $\sup(A)$ (??) $\sup(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

Idea dowodu indukcyjnego:

1. $a_n \leq 2$, indukcja po n

2. $a_n \leq a_{n+1}$, indukcja po n . $a_n \leq a_{n+1} \implies a_{n+1} \leq a_{n+2}$

3. $\sqrt{2 + a_n} \leq \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \ a_n \leq 2 &\implies a_{n+1} \leq 2 \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} &\leq_{z.ind} \sqrt{2 + 2} = 2 \end{aligned}$$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = g$$

$$g = \sqrt{2 + g}$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$

$$\Delta = 9 = 3^2$$

$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } \lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu

Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech n_1, n_2, \dots, n_k będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{n_k} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):

a) $a_n = (-1)^n, n \in \mathbb{N}$

$a_{2k} = (-1)^n = 1, k \in \mathbb{N}$

(a_2, a_4, a_6, \dots) - podciąg o wyrazach parzystych.

b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$

(a_1, a_3, a_5, \dots) - podciąg o wyrazach nieparzystych.

$$S = \{1, -1\}$$

c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$

$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.

$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.

$S = \{0, \infty\}$ d) $\sin(\frac{n\pi}{3})$ - $\text{plot}(\sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow \text{wolframalpha}$

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $\sup()$ - superior - kres górny
- $\inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n .
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n .
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$\lim \inf(a_n) \leq \lim \sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)

D-d. $\forall_{n \in \mathbb{N}} m \leq a_n \leq M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:

$$\forall_{k \in \mathbb{N}} m_1 \leq m_k \leq a_{n_k} \leq M_k \leq M_1$$

M_k malejący i ograniczony \implies zbieżny g_1

m_k rosnący i ograniczony \implies zbieżny g_2

$$g_1 = g_2 = g$$

$$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$$

$$M_k \rightarrow g_1; m_k \rightarrow g_2, \text{ ponieważ } \frac{M_1 - m_1}{2^k} \rightarrow 0$$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n, m > n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny \iff jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2.$$

$$1. \ x_n \text{ jest rosnący } x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n+1} > x_n$$

$$2. \ x_n \text{ jest ograniczony (pamiętając, że } \forall_{n > 3} 2^n \leq n! \text{ czyli } \frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}, \frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}) \dots$$

$$\text{Dla } n > 3 \ x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \leq$$

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$$

$$\text{Istnieje } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e = 2.7182\dots$$

$$\text{sum}(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow \text{wolframalpha}$$

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $\lim_n \implies \infty a_n = \infty$. Wówczas:

$$\lim_n \implies \infty (1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $\lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = \lim((1 - \frac{1}{n})^n)^{\frac{n}{2n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{n+1}, n \rightarrow \infty)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu a_1, a_2, \dots, a_n o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \dots$

Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $\text{apart}(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow \text{wolframalpha}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= S_N \\ S_1 &= \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3}, \text{ zatem:} \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} &= \\ = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} &= \\ = 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_N = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 \end{aligned}$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + \dots + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
 $H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \dots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} &\geq 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \dots &\geq 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \dots &\geq 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \dots &\geq 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2} \\ H_{2^{n+1}} &\geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1) \\ H_{2^{n+1}} &\geq 1 + \frac{n+1}{2} \\ H_{2^n} &\geq 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

Założmy, że $2^N = k \implies N = \log_2(k)$

$$H_k \geq 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \rightarrow \infty$$

Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $H_k \rightarrow \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$

Warunek konieczny nie jest wystarczający.