Algebra - Notatki z wykladu

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem.

1 Wyklad Pierwszy

1.1 Symbole

Logika $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$

Zbiory $x \in A, A \cap B, A \cup B, A - B, A \backslash B, A^C, B^C, A \subseteq B, A \times B$

Funkcje $f : X \to Y, f : X \times Y \to A$ funkcja dwuargumentowa

Własność
Dla $\mathbb{N}$ $W(n) \forall_x (x|n) \implies x = 1 \vee x = n$
Jest to definicja liczb pierwszych.

1.2 Definicje

Definicja 1.2.1. Niech X - Zbiór. Działaniem na X nazywamy każdą funkcję $f : X \cdot X \to X$

Przykład 1.2.1. Rozważmy następujące przykłady:

- $f(x, y) = x \cdot y$ Jest działaniem na $\mathbb{R}$ - tak
- $f(x, y) = x - y$ Jest działaniem na $\mathbb{N}$? - nie, ponieważ $\exists_{x,y} f(x, y) \notin \mathbb{N}$

Oznaczenie $f(x, y) \iff x + y, x \cdot y, x \circ y$ - Działanie ogólne

Definicja 1.2.2. Niech X - Zbiór. Działanie $\circ$ nazywamy łącznym, gdy: $\forall_{x,y,z \in X} (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ Działanie $\circ$ nazywamy przemiennym, gdy: $\forall_{x,y \in X} x \circ y = y \circ x$

Przykład 1.2.2. .

- $+$ na $\mathbb{R}$ jest łączne i przemienne
- $-$ na $\mathbb{R}$ nie jest ani łączne, ani nieprzemienne

Definicja 1.2.3. Niech $\circ$ - działanie na zbiorze X. Element $e \in X$ nazywamy elementem neutralnym (dla $\circ$), gdy: $\forall_{x \in X} e \circ x = x \circ e = x$

Przykład 1.2.3. .

- 0 jest elementem neutralnym dla $+$ na $\mathbb{N}$
- 1 jest elementem neutralnym dla $\cdot$ na $\mathbb{R}$

FAKT. Niech $\circ$ - działanie na zbiorze X. Jeżeli $\circ$ ma element neutralny, to jest on jedyny.
D-d. Niech a, b oznaczają elementy neutralne. Działanie $\circ$ na X:

- $a \circ b = b$
- $a \circ b = a$

Zatem: $a = b$ $\square$

Definicja 1.2.4. Niech $\circ$ - działanie na zbiorze X. Element $a \in X$ nazywamy elementem odwrotnym (dla $\circ$), gdy: $\forall_{x \in X} a \circ x = x \circ a = e$

Przykład 1.2.4. .

- $-x$ jest elementem odwrotnym dla $+$ na $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{x}$ jest elementem odwrotnym dla $\cdot$ na $\mathbb{R}$
- x^2 nie ma elementu odwrotnego dla $\cdot$ na $\mathbb{R}$
- x^2 ma element odwrotny dla $\cdot$ na $\mathbb{R}^+$