Analiza Matematyczna

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład pierwszy

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n + 1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geqslant 1} 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Z założenia indukcyjnego mamy:
   $1 + 2 + ... + n + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n + 1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi $\square$.

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geqslant 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1 + a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n>1} (1 + a)^n \geqslant 1 + na \implies (1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1) \cdot a$
   $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n \cdot (1 + a) \geqslant^{ind.} (1 + na)(1 + a)$
   $(1 + a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geqslant 1 + (n + 1) \cdot a$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:
$a < b, a > b, a = b$.
Dodawanie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$
Mnożenie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$
Własności:

1. Przemienność $a + b = b + a$
2. Łączność $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Rozdzielność $(a + b)c = ac + bc$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym.
Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b.
np.: $c = \frac{a+b}{2}$

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M, że:

$$\forall_{x \in X} m \leqslant x \leqslant M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x \in X} \exists_M x \leqslant M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.
$(-\infty, 1)$: kres 1
$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczjącą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x \in X} \exists_m m \leqslant X$$

$(-1, +\infty)$: kres -1
$(2, +\infty)$: kres 2
Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geqslant k$. Współczynnik Newtona określam wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

- Symbol sumy $\sum$
- Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

2 Wykład drugi

Definicja 2.0.1. Ciąg liczbowy to funkcja z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. Stosujemy zapis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Przykłady:

- $a_n = c + (n-1)d$ - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$ - geometryczny
- $c_n = n!$

- $d_{n+1} = 2^{d_n}$ - rekurencyjny

Definicja 2.0.2. Ciąg monotoniczny.

1. a_n jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
2. a_n jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
3. a_n jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \leqslant a_{n+1}$
4. a_n jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \geqslant a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1. a_n jest rosnący od $n_0 \iff \forall_{n>n_0} a_n < a_{n+1}$

Definicja 2.0.3. Liczbą graniczną ciągu a_n nazywamy liczbę g, taką że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}|a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $lim_{n\to\infty}a_n = g$ lub $a_n \to g$.
$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$

3 Wykład trzeci

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \leqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n<M} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \geqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n>m} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
Idea dowodu:
$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$
A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A
Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres
czyli $sup(A)$ (??) $sup(A) = lim_{n\to\infty a_n}$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
Idea dowodu indukcyjnego:
1. $a_n \leqslant 2$, indukcja po n
2. $a_n \leqslant a_{n+1}$, indukcja po n. $a_n \leqslant a_{n+1} \implies a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$
3. $\sqrt{2 + a_n} \leqslant \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$\forall_{n\geqslant 1} a_n \leqslant 2 \implies a_{n+1} \leqslant 2$
$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leqslant_{z.ind} \sqrt{2+2} = 2$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
$lim_{n\to\infty}a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ lim_{n\to\infty}a_n = g = lim_{n\to\infty}a_{n+1} = g$$
$$g = \sqrt{2 + g}$$
$$g^2 - g - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 = 3^2$$
$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu
Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, ...n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{nk} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):
a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
$a_{2k} = (-1)^n = 1$, $k \in \mathbb{N}$
$(a_2, a_4, a_6, ...)$ - podciąg o wyrazach parzystych.
b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$
$(a_1, a_3, a_5, ...)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.
$S = \{1, -1\}$
c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$
$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.
$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.
$S = \{0, \infty\}$ d) $sin(\frac{n\pi}{3})$ - $plot(sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow$ wolframalpha

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $lim_{n\to\infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $sup()$ - superior - kres górny
- $inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim inf(a_n) \leqslant \lim sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)
D-d. $\forall_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:
$\forall_{k\in\mathbb{N}} m_1 \leqslant m_k \leqslant a_{nk} \leqslant M_k \leqslant M_1$
M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
$g_1 = g_2 = g$
$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
$M_k \to g_1; m_k \to g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \to 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n_1} > x_n$

2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n>3} 2^n \leqslant n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
   Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \leqslant$
   $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... + \frac{1}{2^n}$
   $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
   Istnieje $lim_{n\to\infty} x_n = e = 2.7182...$
   $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow$ wolframalpha

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \tfrac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $lim_{n \implies \infty} a_n = \infty$. Wówczas:

$$lim_{n \implies \infty}(1 + \tfrac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \tfrac{1}{a_n})^{a_n} = \tfrac{1}{e}$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $lim_{n\to\infty} a_n = g_1 \wedge lim_{n\to\infty} b_n = g_2 \implies lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = lim\left((1 - \frac{1}{n})^n\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $limit\left((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \to infty\right)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_N = a_1 + a + 2 + ... + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \ldots$.
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $apart(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow$ wolframalpha

$$\tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{n(n+1)} = S_N$$
$$S_1 = \tfrac{1}{2}, S_2 = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3}, \text{ zatem:}$$
$$\tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \tfrac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \tfrac{1}{1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} + ... + \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \tfrac{1}{n+1}, \text{ finalnie:}$$
$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = lim_{n\to\infty} S_N = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + ... + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, $\lim_{N\to\infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + ... \geqslant 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... \geqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$
$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)$
$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$
$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Załóżmy, że $2^N = k \implies N = log_2()$
$H_k \geqslant 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \to \infty$
Na mocy twierdzenia o dwóch ciągach $H_k \to \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny
$lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Warunek konieczny nie jest wystarczający.

4 Wykład czwarty

4.1 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 4.1.1. Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny $\iff$ jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{n+1} > 0, S_N$ - rosnący. Jeżeli S_N jest ograniczony to jest zbieżny.
Wniosek:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dla $n \geqslant 2$:
$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{N} \leqslant 2$

Twierdzenie 4.1.2. Kryterium porównawcze. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $a_n, b_n > 0$:

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} a_n \leqslant b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.1.3. Jeżeli $\sum_{n>n_0}^{\infty} \leqslant \sum_{n>n_0}^{\infty}$ i $\sum_{n>n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (a_n rozbieżny), to wówczas $\sum_{n>n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (b_n rozbieżny).

Wniosek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ dla $p \leqslant 1$, bo $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.4. Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że $a_n \geqslant 0$ i $a_{n+1} \leqslant a_n$.

$$\text{Wówczas } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny } \iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ jest zbieżny.}$$

Przykład 4.1.1. Rozważmy poniższy przykład ciągu:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \implies^{tw.zag}$
$2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8$

Przykład 4.1.2. Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$ zbieżny $\iff \sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n})^p$ jest zbieżny.
$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n})^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$ jest zbieżny dla $p > 1$
Wniosek 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leqslant 1$

Definicja 4.1.1. Kryterium d'Alemberta: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$:

- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:
$lim_{n\to\infty} sup|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q, q < 1$
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$
$a_{n+1} < a_n q$
$a_n < a_0 q^{n-1}$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1}$ - zbieżne

Przykład 4.1.3. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{n!}{n^n}$:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$
Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Przykład 4.1.4. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ jest rozbieżny. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$)

Przykład 4.1.5. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Przykład 4.1.6. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Simplify (wolframalpha):
$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$

discreteplot($n^2, (n, 1, 20)$) (wolframalpha)

discreteplot($n^2, n, 1, 20$) (mathematica)

Definicja 4.1.2. Kryterium Cauchy'ego. $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n \geqslant 0$

1. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:
$\sqrt[n]{|a_n|} < q$, $0 < q < 1$ czyli $|a_n| < q^n$ więc $a_n < q^n$ zatem $\sum_{n=1}^{\infty} q^r$ zbieżny.

Przykład 4.1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, a_n = \frac{n^2}{2^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$ - zbieżny

Przykład 4.1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}, a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$ - rozbieżny

Przykład 4.1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$
kryterium Cauchy'ego nie działa: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \implies 1$
$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$, sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:
$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$
Ciąg jest rozbieżny.

Definicja 4.1.3. Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.
$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n n^2}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny (kryterium d'Alemberta)

FAKT. Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 4.1.5. Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny.}$$

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

Przykład 4.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:
$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.6. Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1. $a_n \geqslant 0$
2. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ...$
3. $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład 4.1.12. Pokażmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Abela: $a_n = \frac{1}{n} \geqslant 0 \wedge a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ... \wedge lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Szereg jest zatem zbieżny.

Przykład 4.1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$
Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

4.2 Funkcje

Analizujemy funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definicja 4.2.1. Dziedzina funkcji (domain): $dom(f)$ - zbiór wszystkich x dla których funkcja jest określona.

Definicja 4.2.2. Zbiór wartości (range): $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.3. Wykres funkcji (graph): $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.4. Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall_{x,y\in A} x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli $f : A \to B$ jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja
$f^{-1} : rng(f) \to A$, taka że: $\forall_{x\in A} f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall_{y\in rng(f)} f(f^{-1}(y)) = y$.

Definicja 4.2.5. Funkcje monotoniczne $f : A \to B$:

1. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) < f(y))$ - rosnąca
2. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) > f(y))$ - malejąca
3. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \leqslant f(y))$ - niemalejąca (słabo rosnąca)
4. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \geqslant f(y))$ - nierosnąca (słabo malejąca)

Definicja 4.2.6. Złożenie funkcji $f : A \to B$, $g : B \to C$ wówczas:

$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Przykład 4.2.1. Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$f(x) = x^3 + 1, g(y) = sin(y)$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = sin(f(x)) = sin(x^3 + 1)$
Przykład drugi:
$g : \mathbb{R} \to [-1, 1], f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(sin(x)) = sin^3(x) + 1$

5 Wykład piąty

Funkcje elementarne.

1. $f(x) = ax + b$ - funkcja liniowa
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ - funkcja kwadratowa
3. $W(x)$ - wielomian (wymierna)
4. $f(x) = a^x$, $a > 0$ - funkcja wykładnicza
   $a^b \cdot a^c = a^{b+c};'' (a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5. $f(x) = log_a(x)$, $a > 0$ - funkcja logarytmiczna, odwrotna do $f(x) = a^x$
   $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y);$
   $log_a(x^y) = ylog_(x)$
   Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
   $log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
6. e - Liczba Eulera - $e \approx 2.7172$
   $log_e(x) = ln(x)$
   $log_a(x) = ln(x) \cdot log_a(e)$

5.1 Trygonometria

$$e^{it} = cost + isint$$
$$cost = Re(e^{it})$$
$$sint = Im(e^{it})$$

Szeregi liczby Eulera:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-t)^k}{k!} = e^{it}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[sum(1k!, (k, 0, 1000))]$

Zobaczmy wzór:
$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} =_{def} = cos(x + y) + isin(x + y)$
$(cosx + isinx)(cosy + isiny) = (cosx)(cosy) + (cosx)(sinx)i + (sinx)(cosy) + i^2 sinxsiny$
$((cosx) + (cosy) - (sinx)(siny)) + i((cosx)(siny) + (sinx)(cosy))$
$Re = Re, Im = Im$, a zatem d-d.

Funkcje $tg(x)$, $ctg(x)$, $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}, ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
$plot(tan(x), (x, -20, 20))$

5.2 Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

$sin(x)$ w $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest bijekcją, dzięki czemu można zdefiniować funkcję odwrotną.

- $arcsin(x) : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- $arctg(x) : \mathbb{R} \to (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $arcctg(x) : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

5.3 Funkcje hiperboliczne

$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Jedynka hiperboliczna:

$$cos^2h - sin^2h(x) = 1$$

D-d: $cosh^2x - sinh^2x = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 =$
$\frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} + 2e^x \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4} =$
$\frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1$

Definicja $tgh, ctgh$:

- $tgh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$
- $ctgh(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$

5.4 Funkcje sigmoidalne

1. funkcja logistyczna $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $\sigma(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$
   Uogólniona:
   $$f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^\alpha}, \alpha > 0$$
2. tangens hiperboliczny $f(x) = tgh(x)$
3. arcus tangens hiperboliczny $f(x) = arctg(x)$
4. error function - funkcja błędu

$\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot tgh(\frac{x}{2})$

5.5 Funkcje okresowe

Definicja A - dziedzina f: $\exists_T$ takie, że $\forall_{x \in A} f(x+T) = f(x)$

5.6 Funkcje egzotyczne

1. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - cz. całkowita x. Najw. całkowita nieprzekraczająca x.
2. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - podłoga liczby x (to samo co część całkowita)
3. $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - sufit liczby x
4. $sgn(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

$[5.5] = 5$, $[4.7] = 4$, $[-3.4] = -4$

5.7 (Heine) Granica funkcji

Zakładamy, że istnieje $\Delta > 0$ taka, że f jest określona na $(a - \Delta, a) \cup (a, a + \Delta)$ (sąsiedztwie punktu a).

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \iff \forall_{x_n} \implies {}_{a, x_n \neq a} lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.7.1. Policzmy granicę następującej funkcji:
$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$
Weźmy $x_n \to 0; x_n \neq 0$: $\lim_{n\to\infty} x_n^2 = lim_{n\to\infty} \cdot lim_{n\to\infty} = 0 \cdot 0 = 0$

Przykład 5.7.2. Policzmy granicę następującej funkcji:
$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{1} = 2$

Przykład 5.7.3. $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ - dowód z tw. o trzech funkcjach.

5.8 (Cauchy) Granica funkcji

$$\lim_{x\to a} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x\in A}\ 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Symbolu $\lim_{x\to a} f(x)$ - używamy również na oznaczenie granicy niewłaściwej.

Przykłady:

- $\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$
- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje $x_n' = \frac{1}{n} \to 0, x_n'' = \frac{-1}{n} \to 0$, ale $f(x_n') \to \infty, f(x_n'') \to -\infty$
- $\lim_{x\to 0} sin(\frac{1}{x})$ nie istnieje $x_n' = \frac{1}{2\pi n} \to 0, x_n'' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$, ale $f(x_n') = 0, f(x_n'') = 1$

5.9 Granice Jednostronne

Granica prawostronna:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = g \iff \forall_{x_n\to a, x_n\neq a, x_n > a} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = g \iff \forall_{x_n\to a, x_n\neq a, x_n < a} \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

$\lim_{x\to 1^+} |x^2 - x|$ - $limit(abs(x^2 - x), x \to 1, assumptions \to rightarrowx > 1) \leftarrow$ wolfram
$Limit\{Abs[x^2 - x], x \to 1, assumptions \to x > 1\} \leftarrow$ mathematica

5.10 Granica w nieskończoności

$x_n \to \infty \lim_{n\to\infty} f(x_n)$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = g \iff \forall_{n\to\infty} f(x_n) = g$

Przykład 5.10.1. Zobaczmy granice w nieskończoności:

- $\lim_{x\to\infty} e^x = e^\infty = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$, o ile $a > 1$
- $\lim_{x\to\infty} ln(x) = \infty$

Przykład 5.10.2. $\lim_{x\to-\infty} e^x = \begin{cases} x = -t \\ t \to \infty \end{cases} = \lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5.11 Twierdzenie o arytmetyce granic

1. $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
2. $\lim_{x\to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

5.12 Twierdzenie o trzech funkcjach

Zakładamy, że $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ oraz $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = g$, wtedy:

$$\lim_{x\to a} g(x) = g$$

Przykład 5.12.1. $\lim \left(x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$
$0 \leqslant |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leqslant |x| \cdot 1$

Twierdzenie 5.12.1. Definicja z granic ciągów $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, przenosi się na granice funkcji:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} |f(x)| = 0$$

5.13 Notacja duże O, notacja asymptotyczna

Mamy dwa ciągi $a(n)$, $b(n)$. Mówimy że:

$$a(n) = O\left(b\left(n\right)\right) \iff \exists_C \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |a(n)| \leqslant C\,|b(n)|$$

Przykład 5.13.1. Przykłady notacji big O:

- $a(n) = n^2 - \frac{1}{2}n = O(n^2)$
- $b(n) = \left(\frac{1}{2}\right) n^2 + n = O(n^2)$
  $\forall_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}n^2 + n \leqslant \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2, C = \frac{3}{2}$
- $c(n) = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$
  $c(n) = O(n^2), c = |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Twierdzenie 5.13.1. $f(n) = O(g(n)) \iff \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$

Zastosowania:
$n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$, ponieważ:
$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n^3-n^2+1}{n^3}\right| = 1 < \infty$

Przykład 5.13.2. Przykład ambitny:
Ustalmy k - stała: $\binom{n}{k} = O(n^k)$ - dowód jako zadanie z (*).

Kolejno:
$n^2 + n = O(n^2), n^2 + n = O(n^3)$ - na interesuje najmniejsze O

Definicja 5.13.1. Mówimy, że:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \land g(n) = O(f(n))$$

Przykład 5.13.3. $\frac{1}{2}n^2 + n = \Theta(n^2)$

Twierdzenie 5.13.2. $\left(\lim \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = g \land 0 < g < \infty\right) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

Oraz kolejno (zaawansowane):
$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$
$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n^k + \Theta(n^{k-1})$

6 Wykład szósty

Przykład 6.0.1. Policzmy granicę:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, podstawiając $\frac{1}{x} = t, t \to \infty$ zatem $\lim_{t\to\infty} t$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, podstawiając $\frac{1}{x} = t, t \to -\infty$ zatem $\lim_{t\to -\infty} t$

Przykład 6.0.2. Pokażmy, że $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
Granica prawostronna:
$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, podstawienie $x = \frac{1}{t}$, $\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e$
Granica lewostronna:
$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, podstawienie $x = \frac{1}{t}$, $\lim_{t\to -\infty}(1+\frac{1}{t})^t$, podstawienie $t = -s$,
$\lim_{s\to\infty}(1-\frac{1}{s})^{-s} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

6.1 Asymptoty

Definicja 6.1.1. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f w punkcie a, jeżeli zajdzie jeden z warunków:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną dla $x \to a^+$.

Definicja 6.1.2. Prosta jest asymptotą pionową jeżeli jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

Przykład 6.1.1. Asymptoty pionowe mogą wystąpić w punktach poza dziedziną funkcji: $f(x) = \frac{1}{x+1}, \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \implies$ prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x)$.

Definicja 6.1.3. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Twierdzenie 6.1.1. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$$

Jeżeli te granice nie istnieją to funkcja nie posiada asymptoty ukośnej w ∞.

Idea dowodu:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{(f(x)-(ax+b))}{x} = \frac{0}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}) \implies a = \lim_{f\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax))$$

Twierdzenie 6.1.2. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax$$

Przykład 6.1.2. Narysujmy wyres funkcji: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, pokażmy, że prosta $y = x+1$ jest asymptotą ukośną $f(x)$ w $\pm\infty$.
$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x-1} = 1$
$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x-1} = 1$
$b_+ = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$
$b_- = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$

6.2 Ciągłość funkcji

Definicja 6.2.1. Ciągłość funkcji (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a, tzn. na przedziale $(a - \Delta, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = lim_{x\to a} f(x)$$

Przykład 6.2.1. Zobaczmy jak w praktyce można zastosować te definicje:
$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x) = f(a)$
$\lim_{x\to 1}(x + 1)^2 = (\lim_{x\to 1}(x) + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$

Przykład 6.2.2. Przykłady:

- $f(x) = x^2$, $dom(f) = \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.
- $f(x) = sin(1/x)$, $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 6.2.1. Ciągłość prawostronna (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a, tzn. na przedziale $(a, a+\Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest prawostronnie ciągła w punkcie a, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

Analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną dla $x \to a^-$, $[a-\Delta, a]$

Twierdzenie 6.2.2. Funkcja jest ciągła w punkcie a jeżeli jest jednocześnie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

Przykład 6.2.3. Zbadaj ciągłość podanej funkcji w 0 w zależności od parametru a:
$f(x) = \begin{cases} x+a, \text{dla } x \geqslant 0 \\ x^2+1, \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Liczymy: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(x^2+1) = 1$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x+a) = a$
$a = 1$

Definicja 6.2.2. Ciągłość funkcji (Cauchy'ego). Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \iff$

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_x |x-a| < \delta \implies |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 6.2.3. Jeżeli f, g są ciągłe w punkcie $x_0 = a$, to wówczas:

1. $f(x) \pm g(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$, o ile $g(a) \neq 0$

są ciągłe w punkcie $x_0 = a$.

Wniosek. Wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swojej dziedzine. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzine.

Twierdzenie 6.2.4. Złożenie funkcji ciągłych f, g jest funkcją ciągłą.

$$f \text{ ciągła} \wedge g \text{ ciągła} \implies f \circ g \text{ ciągła}$$

Zobaczmy przykład: $\lim_{x\to a}\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = cos\left(\lim_{x\to a}\frac{1}{x}\right) = cos\left(\frac{1}{a}\right)$

6.3 Mnożenie szeregów

$(1+2x+x^2)(-1+3x+x^2+x^3) = (1+2\cdot 1+1\cdot 3)x^3 + (1\cdot 1+2\cdot 1)x^4 + (1\cdot 1)x^5$
$(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) = a_0b_01+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+...$
$= c_0\cdot 1 + c_1\cdot x + c_2\cdot x^2$

$c_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k}$; $c_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k b_{1-k}$; $c_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k b_{2-k}$

Twierdzenie 6.3.1. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów.
Zakładamy, że $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty}|b_n| < \infty$, wtedy$c_0 \sum_{k=0}^{0} a_k b_{0-k}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0} n a_k b_{n-k} \text{ - dyskretny splot}$$

6.4 Funkcja exp(x)

Definicja 6.4.1. Niech $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$ jest poprawnie zdefiniowna. $a_n = \frac{x^n}{n!}, \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} |\frac{x}{n+1}| = 0 \rightarrow$ jest zbieżność bezwzględna $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 6.4.1. Dyskretny splot exp:
$\exp(x) + \exp(y) = \exp(x + y)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ dyskretny splot szeregów a_n, b_n
zatem:

$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^k y^{n-k} = = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!}(x + y)^n$

Przykład 6.4.2. $\forall_{x\in\mathbb{R}} exp(x) > 0$

1. $x > 0$ $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$, poniweaż $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1)$
2. $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$
   $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$

Przykład 6.4.3. Funkcja $\exp(x)$ jest ciągła:
$\lim_{x\to x_0} = \lim_{h\to 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} \exp(x_0) \exp(h)$
$= \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \exp(h) = \exp(x_0) \cdot 1$

7 Wykład VII

Konfa ...

8 Wykład VIII

8.1 Suma i iloczyn pochodnych

Twierdzenie 8.1.1. Pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

D-d. $(f(x)+g(x))' = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =^* f'(x) + g'(x)$ ($*$ granica sumy jest sumą granic)

Twierdzenie 8.1.2. CHAIN RULE. Pochodna iloczynu funkcji wyraża się wzorem:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

D-d. $(f(x)\cdot g(x))' = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)+f(x))\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x + h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (g jest różniczkowalna $\implies$ g ciągła)

Wniosek: $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$ (Liniowość pochodnej)

8.2 Odwołanie - odwzorowanie liniowe

$A : X \to Y$
$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$
$A(c \cdot x) = c \cdot A(x)$

8.3 Odwrotność pochodnej

Pokaż, że: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ (lista zadań)
$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$

8.4 Pochodna ilorazu

Twierdzenie 8.4.1. Pochodna ilorazu dwóch funkcji $f(x), g(x)$ wynosi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

D-d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Przykład 8.4.1. Rozważmy poniższy wzór:

$$\forall_{n \in \mathbb{N} - \{0\}} (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

D-d. Wykorzystujemy wzór dwumianowy Newtona:
$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h}$, Załóżmy, że $n \geqslant 2$:
$\lim_{h \to 0} \frac{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^0 x^n \binom{n}{0} + h^1 x^{n-1} \binom{n}{1} + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} =$
$\lim_{h \to 0} \frac{x^n + h x^{n-1} n + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} n x^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}\right) = n x^{n-1}$

Przykład 8.4.2. $\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$

Przykład 8.4.3. Sinus, cosinus:
$sin'(x) = cos(x)$ tydzień temu
$cos'(x) = -sin(x)$ ćw

Przykład 8.4.4. Policzmy $tan'(x)$:
$tan'(x) = (\frac{sinx}{cosx})' = \frac{sin'(x)cos(x) - sin(x)cos'(x)}{cos(x)^2} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{(cos(x))^2}$

Przykład 8.4.5. Policzmy $cot'(x)$:
$cot'(x) = (\frac{cosx}{sinx})' = \frac{-sin^2(x) - cos^2(x)}{(sin(x))^2} = \frac{-1}{(sin(x))^2}$

8.5 Pochodne [e]

Przykład 8.5.1. Lemat techniczny: $\forall_{n \in \mathbb{R}} |e^n - 1 - h| \leqslant \frac{|h^2|}{2} e^{|h|} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$
$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$

$e^n - 1 - h = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2h^k}{(k+2)! \cdot 2}$
$|e^n - 1 - h| \leqslant \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2|h|^k}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k \cdot 2}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} <$
$\frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$

Twierdzenie 8.5.1. $\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \iff \lim_{h \to 0} \left(\frac{e^h - 1}{h} - 1 \right) = 0$
$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h} = 0 \iff \lim \left| \frac{e^h - 1 - h}{h} \right|$
$0 < \frac{|e^h - 1 - h|}{|h|} < \frac{\frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}{h} = 0$ Z twierdzenia o trzech ciągach mamy dowód.

Przykład 8.5.2. $(e^x)' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

Przykład 8.5.3. $(a^x)' = (e^{ln(a) \cdot x})' = \lim_{h \to 0} \frac{e^{\ln(a) \cdot (x+h)} - e^{\ln(a) \cdot x}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{\ln(a) \cdot x} \frac{e^{\ln(a)h} - e^1}{h} =$
$= \lim_{h \to 0} a^x \frac{e^{\ln(a)h} - 1}{\ln(a)h} ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

8.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 8.6.1. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej
$y = f(x)$, różniczkowalna i rosnąca (lub majlejąca) na $[a, b]$. Niech $f(x_0) = y_0$. Wówczas istnieje funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$ oraz zachodzi wzór:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=y_0} = \frac{1}{[f(x)]'}_{x=x_0}$$

D-d.
Weźmy: $f(x_0 + k) = y_0 + h$
$\left[f^{-1}(x)\right]_{y=y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0+k)) - f^{-1}(f(x_0))}{y_0 + h - y_0} =$
$\lim_{k \to 0} \frac{x_0 + k - x_0}{f(x_0+k) - f(x_0)} = \lim_{k \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k) - f(x_0)}{k}} = \frac{1}{\frac{1}{f'(x_0)}} = \frac{1}{[f(x)]'}_{x=x_0}$

Przykład 8.6.1. $f(x) = e^x$, $e^{x_0} = y_0, f^{-1}(y) = ln(y)$
$[ln(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{e^x}'_{x=x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$ $(ln(y))' = \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.2. $\log_a(y)' = \left(\frac{ln(y)}{ln(a)}\right)' = \frac{1}{ln(a)} \cdot \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.3. Sprawdźmy zrozumienie tw. o pochodnej funkcji odwrotnej:
$f(x) = sin(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}], y = sin(x)$
$(arcsin(y))' = \frac{1}{(sin(x))'} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$
Następnie:
$f(x) = cos(x), x \in [0, \pi], y = cos(x)$
$(arccos(y))' = \frac{1}{(cos(x))'} = \frac{1}{-sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$
Kolejno:
$f(x) = tan(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}], y = tan(x)$
$(arctan(y))' = \frac{1}{(tan(x))'} = cos^2(x) = \frac{1}{1 + tan^2(x)} = \frac{1}{1 + y^2}$

9 Wykład XI