Algebra - Wykład VI

Rafal Wlodarczyk

CBD 1 Sem.

1 Macierz Odwrotna

Sprowadzamy macierz blokową $[A|I]$ od postaci $[I|B]$, Wtedy $A^{-1} = B$

$$[A|I] \rightarrow ... \rightarrow [I|A^{-1}]$$

Bezwyznacznikowe znajdowanie macierzy odwrotnej:

1. zamiana kolejności wierszy
2. pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę $k \in \mathbb{R}$ różną od zera
3. dodanie wielokrotności dowolnego wiersza do innego wiersza

Metoda ta nazywana jest metodą elementarną.

Przykład 1.0.1. Rozważmy następujący przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}; det(A) = 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6 \neq 0$$

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Odpowiedź:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Przykład 1.0.2. Rozważmy kolejny przykład:
Obliczenia:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}; det(A) = -2 + 0 + 6 - 3 - 0 - 2 = -1 \neq 0$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right]$$

Odpowiedź:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład 1.0.3. Policz sam > _ <

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; det(A)=1+0+1-1-0-0=1\neq 0$$

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Odpowiedź:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2 Równania macierzowe

Równanie złożone z macierzy, której niewiadomą jest macierz nazywamy równaniem macierzowym. Przykładami równań macierzowych mogą być:

$A \cdot X = B$

- A, B - dane macierzowe
- X - szukana macierz

Przykład 2.0.1. Rozważmy alternatywne rozwiązanie:
$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$
$X = A^{-1} = B$

—
$X \cdot A = B$

$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$
$X \cdot I = B \cdot A^{-1}$
$X = B \cdot A^{-1}$
—
$A \cdot X \cdot B = C$
$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
$I \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
$X \cdot B = A^{-1} \cdot C$
$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$X \cdot I = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Przykład 2.0.2. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[A_1|I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[A_2|I] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$$

Przykład 2.0.3. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a+4b \\ a+2d & 2c+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+4b=3 \\ c+2d=1 \\ 2c+4d=2 \end{cases} = \begin{cases} a+2b=0 \\ a+2b=\frac{3}{2} \\ c+2d=1 \\ c+2d=1 \end{cases} \quad 0 \neq \frac{3}{2} \text{ sprzeczność}$$

Odp. Równanie macierzowe nie ma rozwiązania.

Przykład 2.0.4. Rozwiązać równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 20\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}a+2b=10\\ 3a-b+c=20\end{cases} = \begin{cases}a=10-2b\\ 3(10-2b)-b+c=20\end{cases} = \begin{cases}a=10-b\\ 30-6b-b-c=20\end{cases} =$$

$$\begin{cases}a=10-b\\ -7b+c=-10\end{cases} = \begin{cases}a=10-b\\ c=7b-10\end{cases}$$

$$\text{Odpowiedź: } X = \begin{bmatrix}10-2b\\ b\\ 7b-10\end{bmatrix}$$

Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań.