Analiza Matematyczna

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład pierwszy

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n+1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geqslant 1} 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Z założenia indukcyjnego mamy:
   $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi $\square$.

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geqslant 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1+a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n>1} (1+a)^n \geqslant 1 + na \implies (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \cdot a$
   $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant^{ind.} (1+na)(1+a)$
   $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1) \cdot a$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:
$a < b, a > b, a = b$.
Dodawanie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$
Mnożenie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$
Własności:

1. Przemienność $a + b = b + a$
2. Łączność $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Rozdzielność $(a + b)c = ac + bc$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym.
Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b.
np.: $c = \frac{a+b}{2}$

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M, że:

$$\forall_{x\in X} m \leqslant x \leqslant M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x\in X} \exists_M x \leqslant M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.
$(-\infty, 1)$: kres 1
$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczjącą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x\in X} \exists_m m \leqslant X$$

$(-1, +\infty)$: kres -1
$(2, +\infty)$: kres 2
Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geqslant k$. Współczynnik Newtona określam wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

- Symbol sumy $\sum$
- Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

2 Wykład drugi

Definicja 2.0.1. Ciąg liczbowy to funkcja z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. Stosujemy zapis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Przykłady:

- $a_n = c + (n-1)d$ - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$ - geometryczny
- $c_n = n!$

- $d_{n+1} = 2^{d_n}$ - rekurencyjny

Definicja 2.0.2. Ciąg monotoniczny.

1. a_n jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
2. a_n jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
3. a_n jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \leqslant a_{n+1}$
4. a_n jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \geqslant a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1. a_n jest rosnący od $n_0 \iff \forall_{n>n_0} a_n < a_{n+1}$

Definicja 2.0.3. Liczbą graniczną ciągu a_n nazywamy liczbę g, taką że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}|a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $lim_{n\to\infty}a_n = g$ lub $a_n \to g$.
$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$

3 Wykład trzeci

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \leqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n<M} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \geqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n>m} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
Idea dowodu:
$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \in \mathbb{R}$
A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A
Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres
czyli $sup(A)$ (??) $sup(A) = lim_{n\to\infty a_n}$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
Idea dowodu indukcyjnego:
1. $a_n \leqslant 2$, indukcja po n
2. $a_n \leqslant a_{n+1}$, indukcja po n. $a_n \leqslant a_{n+1} \implies a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$
3. $\sqrt{2 + a_n} \leqslant \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$\forall_{n\geqslant 1} a_n \leqslant 2 \implies a_{n+1} \leqslant 2$
$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \leqslant_{z.ind} \sqrt{2 + 2} = 2$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
$lim_{n\to\infty}a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n},\ lim_{n\to\infty}a_n = g = lim_{n\to\infty}a_{n+1} = g$$
$$g = \sqrt{2 + g}$$
$$g^2 - g - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 = 3^2$$
$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu
Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, ...n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{nk} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):
a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
$a_{2k} = (-1)^n = 1$, $k \in \mathbb{N}$
$(a_2, a_4, a_6, ...)$ - podciąg o wyrazach parzystych.
b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$
$(a_1, a_3, a_5, ...)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.
$S = \{1, -1\}$
c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$
$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.
$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.
$S = \{0, \infty\}$ d) $sin(\frac{n\pi}{3})$ - $plot(sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow$ wolframalpha

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $lim_{n\to\infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $sup()$ - superior - kres górny
- $inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim inf(a_n) \leqslant \lim sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)
D-d. $\forall_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:
$\forall_{k\in\mathbb{N}} m_1 \leqslant m_k \leqslant a_{nk} \leqslant M_k \leqslant M_1$
M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
$g_1 = g_2 = g$
$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
$M_k \to g_1; m_k \to g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \to 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n_1} > x_n$

2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n>3} 2^n \leqslant n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
   Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \leqslant$
   $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... + \frac{1}{2^n}$
   $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
   Istnieje $lim_{n\to\infty} x_n = e = 2.7182...$
   $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow$ wolframalpha

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $lim_{n \implies \infty} a_n = \infty$. Wówczas:

$$lim_{n \implies \infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $lim_{n\to\infty} a_n = g_1 \wedge lim_{n\to\infty} b_n = g_2 \implies lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = lim\left((1 - \frac{1}{n})^n\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $limit\left((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \to infty\right)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_N = a_1 + a + 2 + ... + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \ldots$.
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $apart(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow$ wolframalpha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = S_N$$
$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \text{ zatem:}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = lim_{n\to\infty} S_N = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + ... + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, $\lim_{N\to\infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + ... \geqslant 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... \geqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$
$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)$
$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$
$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Załóżmy, że $2^N = k \implies N = log_2()$
$H_k \geqslant 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \to \infty$
Na mocy twierdenia o dwóch ciągach $H_k \to \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny
$lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Warunek konieczny nie jest wystarczający.

4 Wykład czwarty

4.1 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 4.1.1. Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny $\iff$ jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{n+1} > 0, S_N$ - rosnący. Jeżeli S_N jest ograniczony to jest zbieżny.
Wniosek:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dla $n \geqslant 2$:
$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{N} \leqslant 2$

Twierdzenie 4.1.2. Kryterium porównawcze. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $a_n, b_n > 0$:

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} a_n \leqslant b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.1.3. Jeżeli $\sum_{n>n_0}^{\infty} \leqslant \sum_{n>n_0}^{\infty}$ i $\sum_{n>n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (a_n rozbieżny), to wówczas $\sum_{n>n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (b_n rozbieżny).

Wniosek: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\infty$ dla $p\leqslant 1$, bo $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$

Twierdzenie 4.1.4. Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że $a_n\geqslant 0$ i $a_{n+1}\leqslant a_n$.

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.1. Rozważmy poniższy przykład ciągu:
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8 \overset{tw.zag}{\Longrightarrow}$
$2\cdot a_2+4\cdot a_4+8\cdot a_8$

Przykład 4.1.2. Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}, p\in\mathbb{R}$ zbieżny $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty}2^n(\frac{1}{2^n})^p$ jest zbieżny.
$\sum_{n=1}^{\infty}2^n(\frac{1}{2^n})^p=\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{1}{2^{np}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{np-n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n(p-1)}}$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n(p-1)}}$ jest zbieżny dla $p>1$
Wniosek 1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p>1$ i rozbieżny dla $p\leqslant 1$

Definicja 4.1.1. Kryterium d'Alemberta: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n, a_n\geqslant 0$:

- Jeżeli $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1$, to $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest rozbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:
$lim_{n\to\infty}sup|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=q, q<1$
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}|<q$
$a_{n+1}<a_nq$
$a_n<a_0q^{n-1}$
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}a_0q^{n-1}$ - zbieżne

Przykład 4.1.3. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n=\frac{n!}{n^n}$:
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}}=\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1$
Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Przykład 4.1.4. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}$ jest rozbieżny. ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}=\infty$)

Przykład 4.1.5. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}\to 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Przykład 4.1.6. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$
$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{N}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{N+1}\to 1$
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\cdots=\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}=1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Simplify (wolframalpha):
$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\frac{n^n}{(n+1)^n}$

discreteplot($n^2,(n,1,20)$) (wolframalpha)

discreteplot($n^2,n,1,20$) (mathematica)

Definicja 4.1.2. Kryterium Cauchy'ego. $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n \geqslant 0$

1. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:
$\sqrt[n]{|a_n|} < q$, $0 < q < 1$ czyli $|a_n| < q^n$ więc $a_n < q^n$ zatem $\sum_{n=1}^{\infty} q^r$ zbieżny.

Przykład 4.1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, a_n = \frac{n^2}{2^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$ - zbieżny

Przykład 4.1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}, a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$ - rozbieżny

Przykład 4.1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$
kryterium Cauchy'ego nie działa: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \implies 1$
$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$, sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:
$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$
Ciąg jest rozbieżny.

Definicja 4.1.3. Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.
$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n n^2}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny (kryterium d'Alemberta)

FAKT. Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 4.1.5. Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny.}$$

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

Przykład 4.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:
$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.6. Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1. $a_n \geqslant 0$
2. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ...$
3. $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład 4.1.12. Pokażmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Abela: $a_n = \frac{1}{n} \geqslant 0 \wedge a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ... \wedge lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Szereg jest zatem zbieżny.

Przykład 4.1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$
Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

4.2 Funkcje

Analizujemy funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definicja 4.2.1. Dziedzina funkcji (domain): $dom(f)$ - zbiór wszystkich x dla których funkcja jest określona.

Definicja 4.2.2. Zbiór wartości (range): $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.3. Wykres funkcji (graph): $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.4. Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall_{x,y\in A} x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli $f : A \to B$ jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja $f^{-1} : rng(f) \to A$, taka że: $\forall_{x\in A} f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall_{y\in rng(f)} f(f^{-1}(y)) = y$.

Definicja 4.2.5. Funkcje monotoniczne $f : A \to B$:

1. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) < f(y))$ - rosnąca
2. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) > f(y))$ - malejąca
3. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \leqslant f(y))$ - niemalejąca (słabo rosnąca)
4. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \geqslant f(y))$ - nierosnąca (słabo malejąca)

Definicja 4.2.6. Złożenie funkcji $f : A \to B$, $g : B \to C$ wówczas:

$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Przykład 4.2.1. Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$f(x) = x^3 + 1, g(y) = sin(y)$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = sin(f(x)) = sin(x^3 + 1)$
Przykład drugi:
$g : \mathbb{R} \to [-1, 1], f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(sin(x)) = sin^3(x) + 1$