

Analiza Matematyczna II

Rafał Włodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$$

Definicja 1.1.1. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$(x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n))$$

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$$

$$\sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Własności:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\langle ax, y \rangle = \langle x, ay \rangle = a \langle x, y \rangle, a \in \mathbb{R}$
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Definicja 1.1.2. Długość wektora $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Przykład 1.1.1. $\mathbb{R} : |x| = |x_1|$ - oś liczbowa $\mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$ - płaszczyzna

Twierdzenie 1.1.1. $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$

D-d. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Nierówność Cauchy'ego Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

D-d.

$$\begin{aligned} |x + y|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle + \langle y, x \rangle = \\ &= |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y \rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \iff \\ &|x + y| \leq |x| + |y| \quad \square \end{aligned}$$

1.2 Kąt między wektorami

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^2, \vec{x}_1 = (x_{11}, x_{12}), \vec{x}_2 = (x_{21}, x_{22})$$

$$\cos(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{\vec{x}_1 \odot \vec{x}_2}{|\vec{x}_1| |\vec{x}_2|}$$

Rozważmy funkcję:

$$d_n \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d_n(x, y) = |x - y|, \text{ dla } n = 2:$$

$$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \quad |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \quad \text{Własności:}$$

1. $d_n(x, y) \geq 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$ - nierówność trójkąta

1.3 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.3.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X , pewną funkcję $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga: aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów

D-d.

$$d(x, y) = \frac{1}{2} (d(x, y) + d(y, x)) \geq \frac{1}{2} d(x, x) = 0, \text{ zatem } d(x, y) \geq 0$$

Twierdzenie 1.3.1. Stwierdzenie. Niech (X, d) (Corollary) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leq \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), n \geq 2$$

Dla $n = 2$:

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_2) - \text{oczywiste}$$

Dla $n = 3$:

$$d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) - \text{nierówność trójkąta}$$

Krok indukcyjny:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_n, x_{n+1})$$

$$d(x_1, x_{n+1}) \leq d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leq_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \quad \square$$

1.4 Przestrzeń metryczna dyskretna

X - dowolny zbiór i metryka określona wzorem:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$$

Aksjomaty 1, 2, 3, 4 są oczywiste.

1.5 Metryka Euklidesowa

$$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$d_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

1.6 Przestrzeń Hilberta

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$$

$$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{i}, \dots\right)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leq \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \dots\right)$$

1.7 Metryka Manhattan

$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

2 Wykład II

2.1 Kula otwarta

Definicja 2.1.1. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej Y :

$$K(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$$

Gdzie:

- y_0 - środek
- r - promień
- Wnętrze okręgu w \mathbb{R}^2 - metryka Euklidesowa
- Wnętrze kuli w \mathbb{R}^3

Przykład 2.1.1. Rozważmy następujący przykład:

$K((x_0, y_0), r) :: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ zachodzący warunek
(wyobraź sobie rysunek poglądowy)

Definicja 2.1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, jeśli:

$$\forall x \in U \exists \varepsilon > 0 (K(x, \varepsilon) \subseteq U)$$

(Kula otwarta o środku w punkcie x i promieniu $\varepsilon > 0$)

Przykład 2.1.2. Przykłady:

(a, b) - jest otwarty

$[a, b]$ - nie jest otwarty

Definicja 2.1.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $D \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym $\iff X - D$ jest otwarty.

$[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (\infty, a) \cup (b, \infty)$ - zbiór otwarty

Definicja 2.1.4. $(X, d_1), (Y, d_2)$ - przestrzenie metryczne
 $F : X \rightarrow Y$

$\lim F(x) = b :: x \rightarrow a :: a \in X, b \in Y$

Przykład. Dla $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{R}$ - ciągi, dla obu \mathbb{R} - funkcje

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (0 < d_1(x, a) < \delta \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon)$$

Twierdzenie 2.1.1. Warunki (1), (2) są równoważne:

1. $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = b$

2. dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \geq 0}$ punktów przestrzeni metrycznej $X (x_n \neq a)$
jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ w metryce d_1 to $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = b$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall n > n_0) d_1(x_n, a) < \varepsilon$$

$$(|x_n - a| < \varepsilon), x_n, a \in (X, d_1) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, a) = 0$$

Przykład 2.1.3. $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$

$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_1(x_n, a) = 0$ w metryce d_1

Przykład 2.1.4. $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3)$ w metryce Eulidesowej $\mathbb{R}^3 \iff$

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g_3$

Idea:

$$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow g_1 \wedge b_n \rightarrow g_2 \wedge c_n \rightarrow g_3$$

Dla \mathbb{R}^k podane własności zachodzą analogicznie.

Definicja 2.1.5. Ciągłość funkcji. $(X, d_1), (Y, d_2), F : X \rightarrow Y$.

Funkcja F jest ciągła w punkcie a jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$$

$x \rightarrow a$ w $d_1 \implies F(x) \rightarrow F(a)$ w d_2

Przykład 2.1.5. Weźmy funkcje $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Pokażmy, że f nie jest ciągła w $(0, 0)$

$$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$$

$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ - nie dąży do 0 nie jest ciągła w $(0, 0)$.

Przykład 2.1.6. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x^2, y^2 \cdot z)$$

Zbadajmy ciąg $a = (x_0, y_0, z_0)$

$$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

$$(x_n, y_n, z_n) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

$$x_n \rightarrow x_0 \wedge y_n \rightarrow y_0 \wedge z_n \rightarrow z_0$$

$$f(x_n, y_n, z_n) = (x_n^2, y_n z_n)$$

Przykład 2.1.7.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla } x^2 + y^4 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

f jest ciągła w $(0, 0)$ $(\alpha t, \beta t) \rightarrow (0, 0)$

$$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha \beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$$

$$\frac{\alpha \beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \rightarrow \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

f nie jest ciągła $0 = f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$, czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, ale już

$$f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{2} \neq f(0, 0)$$

Przykład 2.1.8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = x + y$

$$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0) \iff (x_n \rightarrow x_0 \wedge y_n \rightarrow y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$$

Przykład 2.1.9. $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) = \lim_{x \rightarrow 0} (0) = 0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2})$$

Nie istnieje

$$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$(x''_n, y''_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$$

$$f(x'_n, y'_n) = \frac{1/n \cdot 1/n}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = 1/2$$

$$f(x_n'', y_n'') = \frac{-\frac{1}{n} \frac{1}{n}}{(1/n)^2 + (1/n)^2} = -1/2$$

Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

2.2 Granica podwójna

Definicja 2.2.1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$

2.3 Granice iterowane

Definicja 2.3.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$
 $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y))$

2.4 Różniczkowanie

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = a \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - a = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x) - ah}{h} \right| = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - ah|}{|h|} = 0$$

$$L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$$

$$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$$

$$L(ch) = c \cdot L(h) \text{ (} L \text{ jest odwzorowaniem liniowym)}$$

Definicja 2.4.1. (Pochodna funkcji) $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$

Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x

jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

takie że $h \in \mathbb{R}^n, 0_n = (0, 0, \dots, 0)$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)\|}{\|h\|} = 0_{\mathbb{R}}$$

3 Wykład 3

3.1 Pochodne cząstkowe

Definicja 3.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Przykład 3.1.1. Policzmy następującą pochodne cząstkowe dla funkcji:

$$f(x, y) = x \cdot y^2, f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$$

Definicja 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe: $f'(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ taka, że:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)}{|h|} = 0$$

Twierdzenie 3.1.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna. Niech: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m: a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2, \dots, n$. Wówczas macierz pochodnej wynosi:

$$M_{f'(x)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie wystarcza aby funkcja była różniczkowalna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cel. pokażmy że f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Kandydat na pochodną:

$$M_{f'(0,0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right]$$

Warunek różniczkowania: $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{\left| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$(??) \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{|h_1^2 h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Twierdzenie 3.1.2. Tw. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ istnieją w otoczeniu punktu x i są ciągłe w punkcie x . Wtedy f jest różniczkowalna w punkcie x .

Przykład 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} f(x) = \langle x, x \rangle$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \dots$$

$$M_{f'(x)} = [2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n] = 2x$$

$$M_{f'(x)}(h) = 2\langle x, h \rangle$$

Przykład 3.1.3. Z definicji $\frac{|f(x+h)-f(x)-M_{f'(x)}(h)|}{|h|} = \frac{\langle h, h \rangle}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|}$
 Jednak algebraicznie $f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h) = \langle x+h, x+h \rangle - \langle x, x \rangle - 2\langle x, h \rangle = \langle h, h \rangle$

Przykład 3.1.4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin(t), \cos(t))$

$$M_{f'(t)} = \begin{bmatrix} \sin(t)' \\ \cos(t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{bmatrix}$$

Definicja 3.1.3. Pochodne kierunkowe: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora \bar{a} nazywamy granicę:

$$(D_a f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t}$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= f(x_0 + at) \\ \varphi'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ah) - f(x_0)}{h} = (D_a f)(x_0) \end{aligned}$$

Przykład 3.1.5. $f(x, y) = \sin(x) \cdot y$

$$x_0 = (0, 0)$$

$$a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$D_a f(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Twierdzenie 3.1.3. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, to:

$$\begin{aligned} (D_a f)(x_0) &= f'(x_0)a^T \\ f'(x_0) &= \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right] \\ f'(x_0)a &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)a_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)a_n \end{aligned}$$

Definicja 3.1.4. Gradient funkcji $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \nabla_{x_0} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right) \\ (D_a f)(x_0) &= \langle \nabla_{x_0} f, a \rangle \end{aligned}$$

Przykład 3.1.6. Policzmy gradient dla: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\nabla_{(x_0, y_0)} f(x, y) = (2x_0, 2y_0)$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

D-d. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w x_0 .

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0) - f'(x_0)t(a)}{t} \right| = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(a) \right| \end{aligned}$$

3.2 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

3.3 Własności gradientu

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\nabla_{x_0}(\alpha f) = \alpha \nabla_{x_0}(f)$
2. $\nabla_{x_0}(f + g) = \nabla_{x_0}(f) + \nabla_{x_0}(g)$

Wniosek liniowość (dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\nabla_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla_{x_0}(f) + \beta \nabla_{x_0}(g)$$

3.4 Gradient iloczynu

$$\nabla_{x_0}(f \cdot g) = \nabla_{x_0}(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \nabla_{x_0}(g)$$

D-d. z liniowości gradientu.

Twierdzenie 3.4.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła w $x \in \mathbb{R}^n$.

D-d. (metryka w \mathbb{R}^n)

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \\ &= |f(x+h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h| \\ &\leq |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| + |f'(x)h| = \\ &= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} |h| = |f'(x)h| \end{aligned}$$

3.5 Minimum lokalne właściwe

Definicja 3.5.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że f ma w punkcie a minimum lokalne (właściwe) jeśli istnieje $r > 0$:

$$(\forall x \in K(a, r) - \{a\}) f(a) \leq_{(<)} f(x)$$

Gdzie $K(a, r)$ - kula towarta o środku w a i promieniu r .

Twierdzenie 3.5.1. (Warunek konieczny) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum lokalne to:

$$\nabla_{x_0} f = (0, 0, \dots, 0)$$

Inaczej: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

Przykład 3.5.1. Rozważmy następujące przykłady:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ - sprawdźmy warunek konieczny
 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$
 $(0, 0)$ - punkt podejrzany
 $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0, f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$
 Nie istnieje taka $K((0, 0), r)$, że f ma w tej kuli stały znak.
2. $f(x) = x^3, f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^3}, f(-\frac{1}{n}) \dots$
3. $f(x, y, z) = -x^2 - (y - 1)^2 - (z + 1)^2$
 Sprawdźmy warunek: $\nabla f = (-2x, -2(y - 1), -2(z + 1)) = (0, 0, 0)$
 Zobaczmy $f(0, 1, -1) = 0$
 $f(a, b + 1, c - 1) - f(0, 1, -1) = -a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0$ maksimum lokalne
 $f(a, b + 1, c - 1) < f(0, 1, -1)$ (liczby sześciennego opisanego na kuli)

Definicja 3.5.2. Niech $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y)$ oraz $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$. Wtedy pochodne cząstkowe pochodnych $f_x(x, y), f_y(x, y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{xx}(x, y)$
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{yy}(x, y)$
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = f_{xy}(x, y)$
4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = f_{yx}(x, y)$

Twierdzenie 3.5.2. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją w pewnym obszarze i obie są, w pewnym punkcie ciągłe, to w tym punkcie są równe

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} f(x, y) = x^3 y^2$$

$$\frac{d}{dy}(x^3 y^2) = x^3 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 2y) = 3x^2 2y$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 2y) = 6x 2y$$

$$D[x^3 \cdot y^2, (x, 2), (y, 1)] \text{ (wolframalpha)}$$

3.6 Różniczkowanie złożenia funkcji

Twierdzenie 3.6.1. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ $a \in \mathbb{R}^n, b = f(a) \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w punkcie a oraz g jest różniczkowalna w punkcie b . Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie a i zachodzi wzór:

$$(g \circ f)(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$$

Złożenie odwzorowań liniowych - mnożenie macierzy.

Przykład 3.6.1. $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g = f \circ u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

$$g(t) = (f \circ u)(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$$

Zobaczmy:

$$M_{u'(t)} = \begin{bmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \\ u'_3(t) \end{bmatrix} M_{f'(b)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{x=b}$$

Wykonajmy mnożenie macierzy:

$$M_{f'(b)} \cdot M_{u'(t)} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

FAKT. Uogólniona reguła łańcuchowa. ($x_i = u_i(t)$)

$$\frac{d}{dt} f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{du_i}{dt}$$

Przykład 3.6.2. Niech $u(t) = (t^2 - t, 2t, 4t), f(x, y, z) = xy + z, g = f \circ u, g(t) = (t^2 - t)2t + 4t$

$$\begin{aligned} g'(t) &= (t^2 - 1)'2t + (t^2 - t)(2t)' + (4t)' = (2t - 1)(2t) + 2(t^2 - t) + 4 = \\ &= 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4 \end{aligned}$$

Zobaczmy z reguły łańcuchowej:

$$g(t) = (f \circ u)(t)$$

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{du_3}{dt}$$

$$y \cdot (2t - 1) + 2x + 1 \cdot 4 = 2t(2t - 1) + 2(t^2 - t) + 4 = 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$$

W zastosowaniu algorytmu back propagation.