Analiza Matematyczna

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład pierwszy

tbd

2 Wykład drugi

tbd

3 Wykład trzeci

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \leqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n<M} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \geqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n>m} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
Idea dowodu:
$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots, a_n, \dots\} \in \mathbb{R}$
A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A
Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres
czyli $sup(A)$ (??) $sup(A) = lim_{n\to\infty a_n}$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}$ $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
Idea dowodu indukcyjnego:
1. $a_n \leqslant 2$, indukcja po n
2. $a_n \leqslant a_{n+1}$, indukcja po n. $a_n \leqslant a_{n+1} \implies a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$
3. $\sqrt{2+a_n} \leqslant \sqrt{2+a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$\forall_{n\geqslant 1} a_n \leqslant 2 \implies a_{n+1} \leqslant 2$
$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant_{z.ind} \sqrt{2+2} = 2$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
$lim_{n\to\infty} a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},\ lim_{n\to\infty} a_n = g = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$$
$$g = \sqrt{2+g}$$

$$g^2 - g - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 = 3^2$$
$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu
Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, ...n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{nk} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):
a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
$a_{2k} = (-1)^n = 1$, $k \in \mathbb{N}$
$(a_2, a_4, a_6, ...)$ - podciąg o wyrazach parzystych.
b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$
$(a_1, a_3, a_5, ...)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.
$S = \{1, -1\}$
c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$
$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.
$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.
$S = \{0, \infty\}$ d) $sin(\frac{n\pi}{3})$ - $plot(sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow$ wolframalpha

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $lim_{n\to\infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $sup()$ - superior - kres górny
- $inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim inf(a_n) \leqslant \lim sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)
D-d. $\forall_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:
$\forall_{k\in\mathbb{N}} m_1 \leqslant m_k \leqslant a_{nk} \leqslant M_k \leqslant M_1$
M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
$g_1 = g_2 = g$
$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
$M_k \to g_1; m_k \to g_2$, ponieważ $\frac{M_1 - m_1}{2^k} \to 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy:
$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2.$

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n_1} > x_n$
2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n>3} 2^n \leqslant n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
   Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \leqslant$
   $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... + \frac{1}{2^n}$
   $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
   Istnieje $lim_{n\to\infty} x_n = e = 2.7182...$
   $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow$ wolframalpha

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $lim_{n \implies \infty} a_n = \infty$. Wówczas:

$$lim_{n \implies \infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $lim_{n\to\infty} a_n = g_1 \wedge lim_{n\to\infty} b_n = g_2 \implies lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = lim\left((1 - \frac{1}{n})^n\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $limit\left((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \to infty\right)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_N = a_1 + a + 2 + ... + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \ldots.$
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $apart(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow$ wolframalpha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = S_N$$
$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \text{ zatem:}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = lim_{n\to\infty} S_N = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + ... + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, $\lim_{N\to\infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + ... \geqslant 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... \geqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$
$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)$
$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$
$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Załóżmy, że $2^N = k \implies N = log_2()$
$H_k \geqslant 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \to \infty$
Na mocy twierdenia o dwóch ciągach $H_k \to \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny
$lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Warunek konieczny nie jest wystarczający.