Analiza Matematyczna II

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

Spis treści

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

Definicja 1.1.1. Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem wszystkich n-wymiarowych wektorów o rzeczywistych współrzędnych.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\}$$

Każdy wektor w $\mathbb{R}^n$ można zapisać jako uporządkowany zbiór n rzeczywistych liczb, gdzie:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

jest elementem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, a x_i są jego współrzędnymi.

Definicja 1.1.2. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny jako:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dla dowolnego skalaru $a \in \mathbb{R}$, mnożenie skalarne wektora x przez a jest zdefiniowane jako:

$$ax = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n).$$

Norma (długość) wektora x jest dana wzorem:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Iloczyn skalarny spełnia następujące własności (2. dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$):

1. Przemienność: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$.
2. Dysocjatywność względem mnożenia przez skalar: $\langle ax, y\rangle = \langle x, ay\rangle = a\langle x, y\rangle$
3. Rozdzielność względem dodawania wektorów: $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Przykład 1.1.1. Stwórzmy kilka prostych przestzeni:

- $\mathbb{R}$: Przestrzeń jednowymiarowa, zwana także osią liczbową. Każdy punkt $x \in \mathbb{R}$ jest liczbą rzeczywistą. Długość (moduł) liczby rzeczywistej x jest dana wzorem:

  $$|x| = |x_1|$$

  gdzie x_1 to współrzędna punktu na osi liczbowej.
- $\mathbb{R}^2$: Przestrzeń dwuwymiarowa, znana jako płaszczyzna kartezjańska. Każdy punkt $x \in \mathbb{R}^2$ jest parą liczb rzeczywistych. Długość (norma) wektora $x = (x_1, x_2)$ w tej przestrzeni jest dana wzorem:

  $$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

  gdzie x_1 i x_2 to współrzędne punktu na płaszczyźnie.

Twierdzenie 1.1.1. Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wówczas:

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

D-d. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Z definicji iloczynu skalarnego:

$$|\langle x, y\rangle| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

Otrzymaliśmy nierówność Cauchy'ego-Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek. Nierówność Trójkąta $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Dowód. $|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, x\rangle$ $= |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant |x|^2|y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x+y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \iff$ $|x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \square$

1.2 Kąt między wektorami

Niech $\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (x_{11}, x_{12})$, $\overrightarrow{x_2} = (x_{21}, x_{22})$.

$$\cos(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \frac{\overrightarrow{x_1} \odot \overrightarrow{x_2}}{\|\overrightarrow{x_1}\| \|\overrightarrow{x_2}\|}$$

1.3 Metryka

Rozważmy funkcję:

$$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

d_n jest metryką w $\mathbb{R}^n$ jeśli spełnia następujące aksjomaty:

1. $d_n(x, y) \geqslant 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leqslant d_n(x, y) + d_n(y, z)$ – nierówność trójkąta

Przykład 1.3.1. $d_n(x, y) = |x - y|$. Dla $n = 2$:

$$d_2(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

1.4 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.4.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X, pewną funkcję $X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga. Aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów.

$d(x, y) = \frac{1}{2}\left(d(x, y) + d(y, x)\right) \geqslant \frac{1}{2} d(x, x) = 0$, zatem $d(x, y) \geqslant 0$

Twierdzenie 1.4.1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), \quad n \geqslant 2$$

Dla $n = 2$:

$$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_2) \quad \text{- oczywiste}$$

Dla $n = 3$:

$$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \quad \text{- nierówność trójkąta}$$

Krok indukcyjny:

$$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_n, x_{n+1})$$

$$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leqslant_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \quad \square$$

1.5 Przestrzeń metryczna dyskretna

Niech X będzie dowolnym zbiorem, a metryka d jest określona wzorem:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y, \\ 1 & \text{dla } x \neq y. \end{cases}$$

Przestrzeń (X, d) jest przestrzenią metryczną ponieważ spełnia jej aksjomaty:

1. Dla wszystkich $x, y \in X$, $d(x, y) \geqslant 0$:

   - Jeśli $x = y$, to $d(x, y) = 0 \geqslant 0$.
   - Jeśli $x \neq y$, to $d(x, y) = 1 \geqslant 0$.

   Zatem w obu przypadkach $d(x, y) \geqslant 0$.

2. $d(x, y) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$:

   Jeśli $d(x, y) = 0$, to z definicji wiemy, że $x = y$.

   Z drugiej strony, jeśli $x = y$, to metryka może mieć tylko jedną wartość $d(x, y) = 0$.

3. Symetria: $d(x, y) = d(y, x)$:

   Ponieważ metryka dyskretna przyjmuje wartości 0 lub 1, to zarówno $d(x, y)$ jak i $d(y, x)$ są równe:
   - Jeśli $x = y$, to $d(x, y) = 0$ oraz $d(y, x) = 0$.
   - Jeśli $x \neq y$, to $d(x, y) = 1$ oraz $d(y, x) = 1$.

   Zatem w obu przypadkach $d(x, y) = d(y, x)$.

4. Nierówność trójkąta: $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla wszystkich $x, y, z \in X$:

   Rozważmy dowolne $x, y, z \in X$.
   - Jeśli $x = z$, to $d(x, z) = 0$, a $d(x, y) + d(y, z) \geqslant 0$. Nierówność trójkąta jest spełniona.

   - Jeśli $x \neq z$, to istnieją dwa przypadki:

     • Jeśli $x = y$ lub $y = z$, ale $x \neq z$, to $d(x, y) = 0$ lub $d(y, z) = 0$, ale $d(x, z) = 1$. Wtedy $d(x, y) + d(y, z) = 0 + 1 = 1 \geqslant 1 = d(x, z)$.

     • Jeśli $x \neq y$ i $y \neq z$, to $d(x, y) = 1$ i $d(y, z) = 1$. Wtedy $d(x, y) + d(y, z) = 1 + 1 = 2 \geqslant 1 = d(x, z)$.

   W każdym przypadku nierówność trójkąta jest zachowana, co kończy dowód.

1.6 Metryka Euklidesowa

Metryka Euklidesowa $d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest określona przez:

$$d_n(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

1.7 Przestrzeń Hilberta

Niech $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ oraz $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ będą wektorami w przestrzeni Hilberta, gdzie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty.$$

Przykłady wektorów:

$$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots\right), \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty,$$

co oznacza, że x należy do przestrzeni Hilberta.
Natomiast wektor

$$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots\right),$$

spełnia warunek

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty,$$

co oznacza, że y nie należy do przestrzeni Hilberta.

1.8 Metryka Manhattan

Metryka Manhattan między dwoma punktami (x_1, x_2) i (y_1, y_2) w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ jest określona jako:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Metryka ta mierzy sumę bezwzględnych różnic współrzędnych między punktami. Swoją nazwę zawdzięcza podobieństwu do liczenia odległości w miastach, gdzie trzeba poruszać się wzdłuż prostopadłych ulic i alei.

2 Wykład II

2.1 Kula otwarta

Definicja 2.1.1. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej Y:

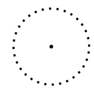
$$K(y_0, r) = \{y \in Y \mid d(y, y_0) < r\}$$

gdzie:

- y_0 - środek kuli,
- r - promień kuli,
- d - funkcja metryczna określająca odległość między punktami w przestrzeni Y.

Przykład 2.1.1. Rozważmy następujący przykład:
$K((x_0, y_0), r)$ to zbiór punktów (x, y) w przestrzeni $\mathbb{R}^2$, dla których zachodzi warunek:

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r.$$



(x_0, y_0)

Definicja 2.1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, jeśli dla każdego $x \in U$ istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$K(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(y, x) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

gdzie $K(x, \varepsilon)$ oznacza kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu $\varepsilon > 0$

Przykład 2.1.2. Przykłady:
(a, b) - jest otwarty
$[a, b)$ - nie jest otwarty

Definicja 2.1.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną.

$$\text{Zbiór } D \subseteq X \text{ jest zbiorem domkniętym} \iff X - D \text{ jest otwarty.}$$

Przykład: $[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ - zbiór otwarty.

Definicja 2.1.4. Niech (X, d_1) i (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi, a $F : X \to Y$ będzie funkcją. Granicą funkcji $F(x)$ oznaczymy:

$$\lim_{x \to a} F(x) = b.$$

gdzie $a \in X$ i $b \in Y$.
Warunki (1), (2) są równoważne:

1. $\lim_{x \to a} F(x) = b$
2. dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \geqslant 0}$ punktów przestrzeni metrycznej $X (x_n \neq a)$
   jeśli $\lim_{n \to a} x_n = a$ w metryce d_1 to $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = b$

$$\lim_{x \to a} F(x) = b \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(0 < d_1(x, a) < \delta) \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon$$

Uwaga. Analogicznie dla granicy ciągów:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\, d_1(x_n, a) < \varepsilon$$

Przykład 2.1.3. $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$
$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$
$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, a) = 0$ w metryce d_1

Przykład 2.1.4. $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$
$\lim_{n \to \infty} (a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3)$ w metryce Eulidesowej $\mathbb{R}^3 \iff$
$\lim_{n \to \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \to \infty} c_n = g_3$
Idea:
$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \to 0 \iff a_n \to g_1 \wedge b_n \to g_2 \wedge c_n \to g_3$
Dla $\mathbb{R}^k$ podane własności zachodzą analogicznie.

Definicja 2.1.5. Ciągłość funkcji. Niech (X, d_1), (Y, d_2) będą przestrzeniami metrycznymi, oraz niech $F : X \to Y$. Funkcja F jest ciągła w punkcie $a \in X$ jeśli zachodzi:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

Innymi słowy, jeśli $x_n \to a$ w metryce d_1, to $F(x_n) \to F(a)$ w metryce d_2.

Przykład 2.1.5. Jak pokazać, że funkcja nie jest ciągła. Weźmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pokażmy, że f nie jest ciągła w $(0,0)$. Rozważmy ciąg $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$. Obliczmy granicę $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$:

$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \frac{1}{2}$, co nie jest równe 0. Stąd funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

Przykład 2.1.6. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określoną przez

$$f(x,y,z) = (x^2, y^2 \cdot z)$$

Zbadajmy ciąg $a = (x_0, y_0, z_0)$, gdzie

$$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

Niech $(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)$. Oznacza to, że $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ oraz $z_n \to z_0$.

$$\lim_{(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x_n, y_n, z_n) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z_0)$$

Przykład 2.1.7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ dla } x^2 + y^4 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f jest ciągła w $(0,0)$ $(\alpha t, \beta t) \to (0,0)$
$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$
$\frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \to \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0,0)$
$\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$
f nie jest ciągła $0 = f(0,0) \neq \frac{1}{2}$, czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, ale już
$f\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} \neq f(0,0)$

Przykład 2.1.8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x + y$
$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = xy$

$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \iff (x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$
$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$

Przykład 2.1.9. $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$ $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2})$
Nie istnieje
$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$(x''_n, y''_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$f(x'_n, y'_n) = \frac{1/n 1/n}{(1/n)^2+(1/n)^2} = 1/2$
$f(x''_n, y''_n) = \frac{-\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(1/n)^2+(1/n)^2} = -1/2$
Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

2.2 Granica podwójna

Definicja 2.2.1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0) f(x,y)}$

2.3 Granice iterowane

Definicja 2.3.1. $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_n} f(x,y))$
$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_n} f(x,y))$

2.4 Różniczkowanie

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(x) = a \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} = 0$
$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h}\right| = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)-ah|}{|h|} = 0$

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$
$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$
$L(ch) = c \cdot L(h)$ (L jest odwzorowaniem liniowym)

Definicja 2.4.1. (Pochodna funkcji) $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$
Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x
jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
takie że $h \in \mathbb{R}^n 0_n = (0, 0, \ldots, 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)||}{||h||} = 0_{\mathbb{R}}$$

3 Wykład III

3.1 Pochodne cząstkowe

Definicja 3.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Przykład 3.1.1. Policzmy następującą pochodne cząstkowe dla funkcji:
$f(x, y) = x \cdot y^2, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$
$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$

Definicja 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe: $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taka, że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x) - f'(x)(h)}{|h|} = 0$$

Twierdzenie 3.1.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna. Niech: $f = (f_1, f_2, \dots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2, \dots, n$. Wówczas macierz pochodnej wynosi:

$$M_{f'(x)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie wystarcza aby funkcja była różniczkowalna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cel. pokażmy że f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$
Kandydat na pochodną:

$$M_{f'(0,0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right]$$

Warunek różniczkowania: $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{\left| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

(??) $\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{|h_1^2 h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}{\left((\frac{1}{n})^2 2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$

Twierdzenie 3.1.2. Tw. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ istnieją w otoczeniu punktu x i są ciągłe w punkcie x. Wtedy f jest różniczkowalna w punkcie x.

Przykład 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = \langle x, x\rangle$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$
$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \dots$

$$M_{f'(x)} = [2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n] = 2x$$
$$M_{f'(x)}(h) = 2\langle x, h\rangle$$

Przykład 3.1.3. Z definicji $\frac{|f(x+h)-f(x)-M_{f'(x)}(h)|}{|h|} = \frac{\langle h,h\rangle}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|}$
Jednak algebraicznie $f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h) = \langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle - 2\langle x, h\rangle = \langle h, h\rangle$

Przykład 3.1.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin(t), \cos(t))$

$$M_{f'(t)} = \begin{bmatrix} sin(t)' \\ cos(t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \end{bmatrix}$$

Definicja 3.1.3. Pochodne kierunkowe: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora $\overline{a}$ nazywamy granicę:

$$(D_a f)(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t}$$

$\varphi(t) = f(x_0 + at)$
$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{h} = (D_a f)(x_0)$

Przykład 3.1.5. $f(x, y) = sin(x) \cdot y$
$x_0 = (0, 0)$
$a = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$D_a f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\frac{\sqrt{2}}{2})}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Twierdzenie 3.1.3. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, to:

$$(D_a f)(x_0) = f'(x_0)a^T$$
$$f'(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n)\right]$$
$$f'(x_0)a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)a_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)a_n$$

Definicja 3.1.4. Gradient funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$
$$(D_a f)(x_0) = \langle \nabla_{x_0} f, a\rangle$$

Przykład 3.1.6. Policzmy gradient dla: $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$$\nabla_(x_0, y_0) f(x,y) = (2x_0, 2y_0)$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y)$$

D-d. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w x_0.

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + a) - f(x_0) - f'(x_0)t(ta)}{t} \right| =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{1}{|a|} \left| \frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(a) \right|$$

3.2 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

3.3 Własności gradientu

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\nabla_{x_0}(\alpha f) = \alpha \nabla_{x_0}(f)$
2. $\nabla_{x_0}(f + g) = \nabla x_0(f) + \nabla x_0(g)$

Wniosek liniowość (dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\nabla_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla_{x_0}(f) + \beta \nabla_{x_0}(g)$$

3.4 Gradient iloczynu

$$\nabla_{x_0}(f \cdot g) = \nabla_{x_0}(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \nabla_{x_0}(g)$$

D-d. z liniowości gradientu.

Twierdzenie 3.4.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła w $x \in \mathbb{R}^n$.

D-d. (metryka w $\mathbb{R}^n$)

$$|f(x+h) - f(x)| =$$

$$= |f(x+h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h|$$

$$\leqslant |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| + |f'(x)h| =$$

$$= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|} |h| = |f'(x)h|$$

3.5 Minimum lokalne właściwe

Definicja 3.5.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że f ma w punkcie a minimum lokalne (właściwe) jeśli istnieje $r > 0$:

$$(\forall x \in K(a, r) - \{a\})\, f(a) \leqslant_{(<)} f(x)$$

Gdzie $K(a, r)$ - kula towarta o środku w a i promieniu r.

Twierdzenie 3.5.1. (Warunek konieczny) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum lokalne to:

$$\nabla_{x_0} f = (0, 0, \ldots, 0)$$

Inaczej: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

Przykład 3.5.1. Rozważmy następujące przykłady:

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ - sprawdźmy warunek konieczny
   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$
   $(0, 0)$ - punkt podejrzany
   $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0$ $f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$
   Nie istnieje taka $K((0, 0), r)$, że f ma w tej kuli stały znak.

2. $f(x) = x^3$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, $f\left(-\frac{1}{n}\right) \ldots$

3. $f(x, y, z) = -x^2 - (y - 1)^2 - (z + 1)^2$
   Sprawdźmy warunek: $\nabla f = (-2x, -2(y - 1), -2(z + 1)) = (0, 0, 0)$
   Zobaczmy $f(0, 1, -1) = 0$
   $f(a, b+1, c-1) - f(0, 1, -1) = -a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) < 0$ maksimum lokalne
   $f(a, b + 1, c - 1) < f(0, 1, -1)$ (liczby sześcianu opisane na kuli)

Definicja 3.5.2. Niech $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x, y)$ oraz $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x, y)$. Wtedy pochodne cząstkowe pochodnych $f_x(x, y), f_y(x, y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}(x, y)$

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}(x, y)$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}(x, y)$

4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}(x, y)$

Twierdzenie 3.5.2. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją w pewnym obszarze i obie są, w pewnym punkcie ciągłe, to w tym punkcie są równe

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ $f(x,y) = x^3 y^2$

$$\frac{d}{dy}(x^3y^2) = x^3 2y$$
$$\frac{d}{dx}(x^3 2y) = 3x^2 2y$$
$$\frac{d}{dx}(3x^2 2y) = 6x2y$$

$$D\left[x^3 \cdot y^2, (x,2), (y,1)\right] \text{ (wolframalpha)}$$

3.6 Różniczkowanie złożenia funkcji

Twierdzenie 3.6.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ $a \in \mathbb{R}^n, b = f(a) \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w punkcie a oraz g jest różniczkowalna w punkcie b. Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie a i zachodzi wzór:

$$(g \circ f)(a) = g'\left(f(a)\right) \circ f'(a)$$

Złożenie odwzorowań liniowych - mnożenie macierzy.

Przykład 3.6.1. $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g = f \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$
$g(t) = (f \circ u)(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$
Zobaczmy:
$M_{u'(t)} = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix}$ $M_{f'(b)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{x=b}$
Wykonajmy mnożenie macierzy:

$$M_{f'(b)} \cdot M_{u'(b)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{du_3}{dt}$$

FAKT. Uogólniona reguła łańcuchowa. $(x_i = u_i(t))$

$$\frac{d}{dt} f\left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{du_i}{dt}$$

Przykład 3.6.2. Niech $u(t) = (t^2 - t, 2t, 4t), f(x,y,z) = xy + z, g = f \circ u, g(t) = (t^2 - t)2t + 4t$

$g'(t) = (t^2-1)'2t + (t^2-t)(2t)' + (4t)' = (2t-1)(2t) + 2(t^2-t) + 4 =$
$= 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$

Zobaczmy z reguły łańcuchowej:

$$g(t) = (f \circ u)(t)$$
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{du_3}{dt}$$

$$y \cdot (2t-1) + 2x + 1 \cdot 4 = 2t(2t-1) + 2(t^2 - t) + 4 = 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$$

W zastosowaniu algorytmu back propagation.

4 Wykład IV

$f(x) = \sqrt{x^2 + \exp(x^2)} + \cos(x^2 + \exp(x^2))$
$\frac{df}{dx}$ ... można policzyć Graf, jakby liczył komputer:

$$(x) \to (\ )^2 \to a \to + \tag{1}$$
$$a \to exp(\ ) \to b \to + \to c \to \sqrt{\ } \to d \to + \to f \tag{2}$$
$$c \to cos(\ ) \to e \to + \tag{3}$$

Rozpiszmy $a = x^2, b = \exp(a), c = a + b, d = \sqrt{c}, e = \cos(c), f = d + e$
$\frac{\partial a}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial b}{\partial a} = \exp(a)$, $\frac{\partial c}{\partial a} = 1 = \frac{\partial c}{\partial b}$, $\frac{\partial d}{\partial c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, $\frac{\partial e}{\partial c} = -\sin(c)$, $\frac{\partial f}{\partial d} = 1\frac{\partial f}{\partial e}$,

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial b}$$
$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial c}$$
$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a}$$

Przykład 4.0.1. Problem. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przyzwoita - różniczkowalna co najmniej 2 razy, jakie jest maksimum lokalne.

1. $n = 1$ analiza 1.
2. $n = 2$
3. $n \geqslant 2$

Twierdzenie 4.0.1. Niech $f(x, y)$ ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe oraz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Wtedy:

$$W(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Z ciągłości $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

1. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne
2. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne

3. Jeśli $W(x_0, y_0) < 0$ to f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0)
4. Jeśli $W(x_0, y_0) = 0$ kryterium nie działa
5. (??) $W(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) = 0$, -$f_{xy}^2(x_0, y_0) \leqslant 0$, sprzeczność (z det macierzy)

Jak to liczyć w wolframalpha

1. solve(grad(f(x,y), x,y)=0, (x,y)), (Hessian)
2. det(...)

Przykład 4.0.2. Rozważmy przykład

$$f(x, y) = (2x + y^2)e^x$$

Policzmy najpierw pierwsze pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 2e^x(2x + y^2)e^x$$

$$f_y(x, y) = 2ye^x$$

Rozwiążmy powyższe równianie:

$$y = 0, x = -1$$

Punkt podejrzany o ekstremum $P = (-1, 0)$
Policzmy drugie pochodne cząstkowe:

$$f_{xx} = e^x(4 + 2x + y^2)$$

$$f_{yy} = 2e^x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2ye^x$$

Zobaczmy:

$$f_{xx}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{yy}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{xy}(-1, 0) = f_{yx}(-1, 0) = 0$$

Policzmy wyznacznik z powyższego twierdzenia:

$$W(-1, 0) = 4e^2 > 0, f_{xx} > 0$$

Wobec tego finalnie f ma w punkcie $(-1, 0)$ minimum lokalne.

Przykład 4.0.3. Zobaczmy następny przykład:

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

Policzmy następujące pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 3x^2, f_y(x, y) = 3y^2, f_{xy} = 0, f_{xx}(x, y) = 6x, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Wyznacznik macierzy:

$$\det(W(0, 0)) = 0$$

Kryterium nie działa. Nic nam nie powie.

FAKT. Wzór Taylora. Analiza I : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(b+x) = f(b) + \frac{1}{1!}f'(b)x + \frac{1}{2!}f'(b)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(b+\theta x) = x^{(n+1)}$$

dla pewnego $\theta \in (0,1)$

FAKT. Uogólnienie wzoru Taylora : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t) = f(a + tx) = f(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, \ldots, a_n + tx_n)$$

Dla funkcji $\varphi(t)$ stosujemy wzór Taylora z $b = 0$ i $x = t$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0+\theta t)t^{n+1}$$

Zapiszmy $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\varphi'(t)(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, \ldots, a_n + tx_n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) =$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

Wprowadźmy $c(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + tx_1, \ldots, a_n + tx_n)$. Zachodzi:

$$c'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}x_nx_1$$

Zatem patrząc na $\varphi''(t)$:

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}x_jx_i$$

Oznaczenie:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right)(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right\}^2 = \frac{\partial}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}x_2x_1\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}x_2x_2$$

4.1 Ogólny wzór Taylora

FAKT. Wzór Taylora. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$
Zdefiniujmy $D_x = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right\}$

$$f(a+x) = f(a) + D_x(f(a)) + \frac{1}{2!}D_x^2(f(a)) + \cdots + \frac{1}{n!}D_x^n(f(a)) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(D_x)^{n+1}(f(a+\theta x))$$

Przykład 4.1.1. Weźmy sobie taką $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
Wyznaczmy $D_x(f(a_1, a_2))$:

$$D_x(f(a_1, a_2)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right) f(a_1, a_2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1, a_2)x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1, a_2)x_2 = 2a_1x_1 + 2a_2x_2$$

$$(D_x)^2(f(a_1, a_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(a_1, a_2)x_1x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(a_1, a_2)x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(a_1, a_2)x_2x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(a_1, a_2)x_2x_2 =$$

$$2x_1x_1 + 0x_1x_2 + 0x_2x_1 + 1x_2x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$(a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2$$

5 Wykład V

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ekstrema lokalne Weźmy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geqslant 2$ - cel. ekstrema lokalne

5.1 Forma Kwadratowa

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}y_iy_k$$

zmiennych $y_1, y_2, \dots, y_n$ jest określona dodatnio (ujemnie) jeżeli przybiera wartości dodatnie (ujemne) dla wszystkich $y_1, y_2, \dots, y_n \neq 0$.

Przykład:
$n = 3$ (dziel 2, bo liczymy dwa razy)

$$6y_1^2 + 5y_2^2 + 14y_3^2 + 4y_1y_2 + 8y_1y_3 - 2y_2y_3$$

- $a_{11} = 6, a_{22} = 5, a_{33} = 14$
- $a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2$
- $a_{13} = a_{31} = \frac{-8}{2} = -4$
- $a_{23} = a_{32} = -1$

Sprowadźmy do postaci kanonicznej i przyrównajmy do 0.

$$0 = (y_1 - y_3)^2 + 2(y_1 + y_2 + y^3)^2 + 3(y_2 - y_3)^2 = 0$$
$$y_1 = y_2 = y_3 \cdots = y_n = 0$$

Twierdzenie 5.1.1. Twierdzenie Sylvestera.

1. Warunek konieczny i dostateczny na to, aby forma (*) była określona dodatnio (ujemnie) wyraża się ciągiem nierówności:

   - $n = 2$: $\det(a_{11}) > (<)0, \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) > (>)0$
   - $n = 3$: $\det(a_{11}) > (<)0, \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\right) > (<)0$
   - n ... itd (pojedyńczy wyraz $<$ i det naprzemiennie dla ujemnych)

Definicja 5.1.1. Forma kwadratowa (*).

1. jest nieokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się tylko dla $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$

2. półokreślona, jeśli przybiera wartości różnych znaków i zeruje się nie tylko dla $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$

Twierdzenie 5.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Niech $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma w otoczeniu (kuli otwartej) punktu $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe. Niech $f_{x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0, f_{x_2}(x_0) = 0, \ldots$ (gradient jest zero). Oznaczamy $a_{ik} = f_{x_i x_k}(x_0) = f_{x_1 x_k}(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$

1. Jeżeli forma kwadratowa
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} y_i y_k$$
jest dodatnio (ujemnie) określona, to f ma w punkcie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ minimum (maksimum) lokalne.

2. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest nieokreślona to f nie ma w punkcie $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ ekstremum.

3. Jeżeli ww. forma kwadratowa jest półokreślona to kryterium nic nie powie

Ilustracja twierdzenia dla $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 = 0$
$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3) = 2x_2 = 0$
$f_{x_3}(x_1, x_2, x_3) = 2x_3 = 0$
$(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = (0, 0, 0)$ znaleźliśmy punkt podejrzany.
$a_{11} = 2, a_{22} = 2, a_{33} = 2, a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{31} = a_{13} = 0$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1. $\det(a_{11}) = 2 > 0$

2. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = 4 > 0$

3. $\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = 8 > 0$

Definicja 5.1.2. Otoczeniem punktu $P \in \mathbb{R}^n$ nazywamy dowolny zbiór otwarty U, taka, że $P \in U$

5.2 Jacobian funkcji

Definicja 5.2.1. Jacobian funkcji $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$M_{F'(a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Jacobian: $J_f(a) = \det(M_{F'(a)})$

Twierdzenie 5.2.1. (O funkcji odwrotnej) Zakładamy, że $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że F ma ciągłe pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu punktu a. Zakładamy, że $J_F(a) \neq 0$. Wówczas istnieje otoczenie U punktu a oraz V punktu $F(a)$ oraz funkcja rózniczkowalna $\varphi : V \to U$, taka że:

$$\forall_{x \in U} (\varphi \circ F)(x) = x$$

(Przy powyższych założeniach lokalnie funkcje daje się odwrócić)

Przykład 5.2.1. (Jeden wymiar)
Weźmy $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = x^2, a > 0$
$F'(a) = 2a, J_F(a) = 2a \neq 0$
$\varphi \circ F(x) = x$
$\varphi = \sqrt{x}$
$\varphi(F(x)) = \sqrt{F(x)}$
Powyższe twierdzenie stanowi uogólnienie dla n wymiarów.

Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_0, y_0) = 0$
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$x^2 + y^2 = 2$ równanie okręgu.
$y = \pm\sqrt{4 - x^2}$
$\varphi(t) = \sqrt{4 - x^2}$
Szukamy funkcji (istnieje $\varepsilon > 0$) $\varphi(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że:

1. $\varphi(x_0) = y_0$

2. $(\forall t \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))\, f(t, \varphi(t)) = 0$

Twierdzenie 5.2.2. (O funkcji uwikłanej) Jeśli pochodne cząstkowe funkcji f są ciągłe oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ to istnieje funkcja φ.

Liczmy:
$f(t, \varphi(t)) = 0$
$\varphi'(t) = ??$
$\frac{d}{dt}\left(f(t, \varphi(t))\right) = \frac{d}{dt}(0) = 0$
$\frac{\partial}{\partial x}\frac{d}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d}{dt}(\varphi(t)) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial x}1 + \frac{\partial f}{\partial y}\varphi'(t) = 0$
$\varphi'(t) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x}}$

Przypomnienie
$\frac{d}{dt}F(x(t), y(t)) = \frac{\partial F}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial F}{\partial y}y'(t)$

Twierdzenie 5.2.3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Niech f ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie (x_0, y_0). Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$(z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0))$ - równanie płaszczyzny przechodzącej przez (x_0, y_0, z_0)

6 Wykład VI

6.1 Mnożniki Lagrange'a

$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Max/Min $f(x_1, x_2)$ pod warunkiem $g(x_1, x_2)$
Np. Znaleźć Max/Min $x^2 + y^2$ pod warunkiem $xy = 2$
$f(x, y) = x^2 + y^2$
$g(x, y) = xy - 2$
$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) = x^2 + y^2 - \lambda(xy) + 2\lambda$
$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - \lambda y = 0$
$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2y - \lambda x = 0$
$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. $\det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} \neq 0$, nie spełnia $xy = 2$
2. $\det \begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ -\lambda & 2 \end{bmatrix} = 0$
   $4 - \lambda^2 = 0$
   $\lambda = \pm 2$
3. $\lambda = -2$
   $2x + 2y = 0 \iff x = -y$
   Wtedy $2 = (-y)y = -y^2 \leqslant 0$, nie ma ekstremów
4. $\lambda = 2$
   $2x - 2y = 0 \iff x = y$
   $x^2 = 2$ dwa punkty podejrzane $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$
   Sprawdzamy warunek dostateczny dla funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$

Policzmy Hessian:
$f_{xx}(x,y) = 2, f_{xx}(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$
$W(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 > 0$
W punktach $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ mamy minima lokalne.

Teoria $(n = 2)$

Definicja 6.1.1. Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ jest punktem regularnym zbioru $\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ jest $g(a) = 0$ oraz gradient funkcji g w punkcie a jest różny od 0.

Twierdzenie 6.1.1. Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ma ekstremum lokalne w punkcie $a \in \mathbb{R}^n$ pod warunkiem, że $g(a) = 0$, to istnieje λ, takie że $\nabla(f - \lambda g)_{x=a} = 0$ o ile a jest punktem regularnym.

Przykład:
$f(x,y) = xy$
$g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$
$\Phi(x,y,\lambda) = xy - \lambda(\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1)$
$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y - \frac{\lambda x}{4} = 0$
$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - \lambda y = 0$
$\begin{bmatrix} -\frac{\lambda}{4} & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. $\det A \neq 0$
   $x = y = 0$, nie ma rozwiązań
2. $\det A = 0 \, (\lambda = 2 \vee \lambda = -2)$
   $\lambda = 2 \implies \left(y = \frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0\right)$
   $(2,1), (-2,-1)$
3. $\lambda = -2 \implies \left(y = -\frac{1}{2}x \wedge \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0\right)$
   $(2,-1), (-2,1)$
   Badamy max/min:
   (a) $f(2,1) = 2$ max lok
   (b) $f(-2,-1) = 2$ max lok
   (c) $f(2,-1) = 2$ min lok
   (d) $f(-2,1) = -2$ min lok

6.2 Całka Lebesgue'a

Przedziały $a_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant b_2, \ldots, a_n \leqslant b_n$. $\Pi = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \cdots \times [a_n,b_n]$ Przedział domknięty na $\mathbb{R}^n$.

Definicja 6.2.1. Wnętrze przedziału oznaczamy:

$$\mathrm{Int}([a_1,b_1] \times \cdots \times [a_n,b_n]) = (a_1,b_1) \times \cdots \times (a_n,b_n)$$

Definicja 6.2.2. Niech Π, Δ będą przedziałami. Mówimy, że Π, Δ nie zachodzą na siebie i piszemy, że $\Pi \perp \Delta$ jeśli:

$$\mathrm{Int}\Pi \cap \mathrm{Int}\Delta = \emptyset$$

Definicja 6.2.3. Rodzina przedziałów P jest rozbiciem przedziałów Π jeśli:

1. $\bigcup P = \Pi$
2. $\forall P, Q \in P \, (P \neq Q = \implies P \perp Q)$

Definicja 6.2.4. $\mathrm{Vol}\left(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n}(b_1 - a_1)$

Przykład 6.2.1.

1. $\mathrm{Vol}([a, b]) = b - a$
2. $\mathrm{Vol}([a, b] \times [c, d]) = (b - a)(c - d)$
3. $\mathrm{Vol}([a, b] \times [c, d] \times [e, f]) = (b - a)(c - d)(e - f)$

Twierdzenie 6.2.1. Jeśli P jest rozbiciem Π to:

$$\mathrm{Vol}(\Pi) = \sum_{p \in P} \mathrm{Vol}(p)$$

Własności:

1. $\Pi \subset \Delta \implies \mathrm{Vol}(\Pi) \leqslant \mathrm{Vol}(\Delta)$
2. $\Pi \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_n$ to $\mathrm{Vol}(\Pi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Vol}\Delta_i$

Definicja 6.2.5. Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Ustalamy n, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A - ograniczony.

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum \mathrm{Vol}(\pi_i) \, (\forall_i) \, (\pi_i \text{ jest produktem} \wedge A \subset \bigcup_{n \geqslant 0} \pi_n) \right\}$$

Oznaczamy $|A| = \lambda^*(A)$

1. $0 \leqslant |A| \leqslant \infty$
2. $A \subseteq B \implies |A| \leqslant |B|$
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$

Twierdzenie 6.2.2. Π jest przedziałem:

$$\lambda^*(\Pi) = \mathrm{Vol}(\Pi)$$

Definicja 6.2.6. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem miary 0, jeśli $\lambda^*(A) = 0$.

1. $n = 2$, $A = (a, b) \subset \mathbb{R}^2$
   $\lambda^*(B) = (b - a)2\varepsilon$
   $\lambda^*(A) = 0$
2. $\square \in \mathbb{R}^3$ jest miary zero
   $\lambda^*(\mathbb{Q}) = \lambda^*(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\}) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \{P_n\} = \sum_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0$

Definicja 6.2.7. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest mierzalny wedug Lebesgue'a jeśli:

$$\forall Z \subseteq \mathbb{R}^n \left(\lambda^*(Z \cap A) + \lambda^*(Z \cap A^C) = \lambda^*(Z)\right)$$

Definicja 6.2.8. M_n - rodzina zbiorów mierzalnych. Miarą Lebesgue'a na M_n nazywamy funkcję:

$$\lambda(A) = \lambda^*(A)$$

Funkcje proste $A \subseteq \mathbb{R}^n$, Niech $B \subseteq A$.

$$\mathbf{1} = \begin{cases} 1 \text{ dla } x \in B \\ 0 \text{ dla } x \in A - B \end{cases}$$

Definicja 6.2.9. Niech $A \in M_n$. Funkcję prostą o nośniku A nazywamy funkcję postaci:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \mathbf{1}_{A,B}(x), a_i \in \mathbb{R}$$

Gdzie $(B_i)_{i=1}^n$ jest rodziną zbiorów parami rozłącznych, mierzalnych, zawartych w A.

7 Wykład VII

Definicja 7.0.1. f prosta $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A,B_i}$.

$$\int_A f = \sum i = 1^n a_i \lambda(B_i)$$

7.1 Przykład całki Lebesgue'a

Przykład: $A \subset \mathbb{R}^m, m = 1$
$f(x) = 1 \cdot\ \mathbf{1}_{A,B_1}(x)\ + 2 \cdot \mathbf{1}_{A,B_2}(x)\ + 4 \cdot \mathbf{1}_{A,B_3}(x)$

$$\int_A f = 1\lambda(B_1) + 2\lambda(B_2) + 4\lambda(B_3)$$

$D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, x \in [0,1] - \mathbb{Q} \end{cases}$ $\quad A = [0,1], B_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1], B_2 = [0,1] - \mathbb{Q}$
$D(x) = 1 \cdot \mathbf{1}_{A,B_1}(x) + 0 \cdot \mathbf{1}_{A,B}$

$$\int_{[0,1]} 1\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0\lambda(B_2) = 0$$

Całkowalna w sensie Lebesgue'a, nie istnieje cała Riemanna.
Corollary: $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. $\{x \in \mathbb{R}^n f(x) \neq g(x)\}$ jest miary zero. Wówczas g jest całkowalna: $\int_{\mathbb{R}^m} g = \int_{\mathbb{R}^m} f$

$$\int g = \int f$$

7.2 Całki wielokrotne

Całkowanie po wielu zmiennych można wykonać po kolei.

$$\int_0^1 \int_0^1 xydxdy = \tag{1}$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 xydx \right) dy = \tag{2}$$
$$= \int_0^1 \left(\left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \right) dy = \tag{3}$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{y}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{4} y^2 \right]_0^1 = \tag{4}$$
$$= \frac{1}{4} \tag{5}$$

7.3 Twierdzenie Fubiniego

Twierdzenie 7.3.1. Zakładamy, że funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ jest nieujemna lub całkowalna. Niech $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$ definiujemy:

$$f_x(y) = f(x, y)$$

Wtedy:

- dla prawie wszystkich x funkcje f_x są całkowalne
- $\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f \right)$

Przykład: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$
$\int \cdots \int_{(n+m) R^n \times R^m} f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) dx_1, dx_2 \ldots, dy_1, dy_2, \ldots, dy_n =$
$= \int \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int \int_{\mathbb{R}^m} f(x_1, \ldots, y_n) dy_1, dy_2, \ldots, dy_n \right) dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$

7.4 Suma wielokrotna

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = A$$

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \right)$$

Twierdzenie 7.4.1. Inna wersja twierdzenia Fubiniego.
Niech $A \subset \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ A, B - mierzalne, $f : A \times B \to \mathbb{R}$ - nieujemna lub całkowalna.
Dla $x \in A$ definiujemy:

$$f_x(y) = f(x, y)$$

Wtedy:

- dla prawie wszystkich x funkcje f_x są całkowalne

- $\int\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A \left(\int_B f_x(y)\right) dydx$

Funkcja dwóch zmiennych jest całkowalna jeżeli istnieje oszacowanie:

$$|f(x,y)| \leqslant g(x,y)$$

Prowadzący nt. powyższego "Lepiej żeby to po prostu nie było napisane"

Przykład 7.4.1.

$$\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}\int_{[0,1]}(2x+2y+2z)dxdydz$$

Rozbijmy to na całki iterowane:

$$\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^1(2x+2y+2z)dx\right)dy\right)dz = \tag{1}$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^1\left[x^2+(2y+2z)x\right]_0^1\right)dydz = \tag{2}$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^1 1+2y+2zdy\right)dz = \tag{3}$$

$$= \int_0^1\left[(1+2z)y+y^2\right]_0^1 dz = \tag{4}$$

$$= \int_0^1(2+2z)dz = \left[2z+z^2\right]_0^1 = 3 \tag{5}$$

Integrate[2x+2y+2z,(x,0,1),(y,0,1),(z,0,1)]

vol$([a,b]\times[c,d]\times[e,f]) = \lambda_3(\dots) = \int\int\int_P 1dxdydz$
$\int\cdots\int_{[0,1]^n}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)dx_1dx_2\dots dx_n = n\frac{1}{3}$
$= \sum_{i=1}^{\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^2}(x_i^2)dx_1dx_2\dots dx_n = n\frac{1}{3}$
$\int_0^1 x_1^2dx_1 = \left[\frac{x_1^2}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$
$(\frac{b_n^3}{3}-\frac{a_n^3}{3})(b_{n-1}-a_{n-1})(b_{n-2}-a_{n-1})\dots(b_1-a_1)$

7.5 Pole koła

$K = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant r^2\}$
$y = \pm\sqrt{r^2-x^2}$
$-r \leqslant x \leqslant r$
$-\sqrt{r^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{r^2-x^2}$

$$\int\int 1dxdy = \lambda(k) = \pi r^2 dx_n = \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}1dy\right)dx =$$

$$= \int_{-r}^{r}2\sqrt{r^2-x^2}dx = 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx = 2\frac{pi}{2}r^2 = \pi r^2$$

Integrate($sqrt(r^2-x^2)$,$(x,-r,r)$)

$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} = 2\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$
Podstawmy $x = rt, dx = rdt$, zatem: $= 2r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}dt = r^2 \frac{\pi}{2}$

Przykład 7.5.1. Policzmy następującą całkę:
$\int\int_{\Delta}(x + y)dxdy, x = 0, y = 0, x + y = 1$
$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 - x$
zatem:

$$A = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x + y)dy\right) dx = \frac{1}{3}$$

Obliczenia:

$$\int_0^1 \left(x(1 - x) + \frac{(1 - x)^2}{2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x^2 + \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2} - x)dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{1}{2}x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$A = \int_0^1 \int_0^{1-y}(x + y)dxdy$

8 Wykład VIII

8.1 Twierdzenie o zamianie zmiennych

Twierdzenie 8.1.1. O zamianie zmiennych : $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest $1 - 1$ i $\mathbb{C}^1$ (różniczkowalna i ciągłe pochodne cząstkowe) $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n))$.
Rozważamy macierz Jacobiego:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\det\left(\mathbf{J}_{\varphi(x)}\right) \neq 0$ Niech $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ ciągła.

$$\int_{\varphi(D)}^n \int f(y)dy_1dy_2 \ldots dy_n = \int_D^n \int f(x) \cdot \left|\det \mathbf{J}_{\varphi(x)}\right| dx_1dx_2 \ldots dx_n$$

8.2 Współrzędne biegunowe

Przykład 8.2.1. Współrzędne biegunowe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$
$r \in [0, \infty), \alpha \in [0, 2\pi]$
$\varphi(r, \alpha) = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha))$
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha)} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & r(-\sin(\alpha)) \\ \sin(\alpha) & r\cos(\alpha) \end{bmatrix} |\det(\mathbf{J}_{\alpha(r,\alpha)})| = |r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha| = |r| = r$$

$$\int_{\varphi D}\int f(x,y)dxdy = \int_D\int f(r,\alpha)rdrd\alpha$$

Przykład 8.2.2. Pole koła o promieniu R

$$\int\int_{x^2+y^2\leqslant R^2} 1dxdy =$$

Podstawmy $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$, r: mamy:

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} rd\alpha\right)dr = \int_0^R 2\pi rdr = \left|\frac{2\pi r^2}{2}\right|_0^R = \pi R^2$$

$$\int\int_{r^2\leqslant R^2} rdrd\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^R rdrd\alpha = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\alpha = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\alpha = \pi R^2$$

Przykład 8.2.3.

$$\int_{\varphi(D)}\int f(x,y)dxdy = \int_D\int f(r,\alpha)rdrd\alpha$$

$$\int\int_{x^2+y^2\leqslant R^2} xydxdy = \int_{r\in[0,R]}\int_{\alpha[0,2\pi]} r\cos(\alpha)r\sin(\alpha)rdrd\alpha$$

Przykład 8.2.4. D, B - jakiś przedział, $\int_D f(y)dy$. Podstawmy $y = \varphi(x), y \in D, x \in B$

$$\int_D f(y)dy = \int_B f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

$\int_a^b (x^+1)^2 dx$ (zob. $x^2+1 = y$, $B = [(a^2+1),(b^2+1)]$, $D = [a,b]$)

Przykład 8.2.5. Objętość elipsoidy obrotowej.

$$E : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

$$\mathrm{Vol}(E) = \int\int\int_E dxdydz$$

$$\varphi(x_1,y_1,z_1) = (x_1a, y_1b, z_1c)$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(x_1,y_1,z_1)} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx_1}(x_1,a) & \frac{d}{dy_1}(x_1,a) & \frac{d}{dz_1}(x_1,a) \\ \frac{d}{dx_1}(y_1,b) & \frac{d}{dy_1}(y_1,b) & \frac{d}{dz_1}(y_1,b) \\ \frac{d}{dx_1}(z_1,c) & \frac{d}{dy_1}(z_1,c) & \frac{d}{dz_1}(z_1,c) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{\varphi(x_1,y_1,z_1)} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

$$\int\int\int_E dxdydz = \int\int\int abcdx_1dy_1dz_2 = abc\int\int\int dx_1dy_1dz_1 = abc\mathrm{Vol}\left(K(0,0,0),1\right)$$

Oszukujemy $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, zatem:

$$\mathrm{Vol} = \frac{4}{3}abc\pi$$

Przykład 8.2.6. Error function.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \mathbb{R}^+ \in [0,\infty)$$

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \tag{1}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}^+ e^{-y^2}} dy\right) = \tag{2}$$

$$= \int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \tag{3}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+}\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}e^{-y^2}dx\right)dy = \tag{4}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2}\left(\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}dx\right)dy = \tag{5}$$

$$= \int\int_{r\in[0,\infty]} e^{-r^2}rd\alpha dr \tag{6}$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}rdr = \tag{7}$$

$$\left|\frac{\pi}{2}\frac{-e^{-r^2}}{2}\right|_0^\infty = \frac{\pi}{4} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Następnie:

$$\int_0^\infty\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2}rd\alpha dr = \tag{1}$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\alpha = \tag{2}$$

$$= \int_0^\infty e^{-r^2}\cdot r\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \tag{4}$$

$$= \sqrt{\pi} \tag{5}$$

8.3 Współrzędne walcowe

Przykład 8.3.1. Współrzędne walcowe $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x = r\cos(\alpha)$, $y = r\sin(\alpha)$, $z = z$
$r\in[0,\infty)$, $\alpha\in[0,2\pi]$, $z\in\mathbb{R}$
$\varphi(r,\alpha,z) = (r\cos(\alpha), r\sin(\alpha), z)$
$\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha,z)} = \begin{bmatrix}\cos(\alpha) & r(-\sin(\alpha)) & 0\\ \sin(\alpha) & r\cos(\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
$|\det(\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha,z)})| = |1\left(r\cos^2\alpha + r\sin^2\alpha\right)| = |r| = r$
$\int\int\int_K f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_K f(r,\alpha,z)rdrd\alpha dz$

Przykład 8.3.2. Objętość walca (o promieniu R i wysokości H):

$$\mathrm{Vol}(W) = \int\int\int_W dxdydz = \int\int\int_W rdrd\alpha dz =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R\int_0^H rdrd\alpha dz = \left(\int_0^{2\pi}\right)\left(\int_0^R rdr\right)\left(\int_0^H 1dz\right) = \pi R^2 H$$

Przykład 8.3.3. Wielokrotnie zastosujmy twierdzenie Fubiniego:

$$\int\int\int_{x\in A, y\in B, z\in C} f(x)g(x)h(z)dxdydz = \left(\int_A f(x)dx\right)\left(\int_B g(y)dy\right)\left(\int_C h(z)dz\right)$$

Przykład 8.3.4. Weźmy punkt $P(x, y, z)$. Θ - kąt z osią OZ.
$\cos\Theta = \frac{z}{r} \implies z = r\cos\Theta$, $\sin\Theta = \frac{\text{rzut}}{r} \implies \text{rzut} = r\sin\Theta$
$\cos\alpha = \frac{x}{r\sin\Theta}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r\sin\Theta}$
$z = r\cos\Theta, x = r\sin\Theta, y = r\sin\Theta\sin\alpha,\ \alpha\in(0, 2\pi), \Theta\in(0,\pi)$
Są to współrzędne sferyczne.

Twierdzenie 8.3.1. (prawdopodobnie) Współrzędne sferyczne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\sin\Theta\cos\alpha$,
$y = r\sin\Theta\sin\alpha,\ z = r\cos\Theta$
$r\in[0,\infty),\ \alpha\in[0,2\pi],\ \Theta\in[0,\pi]$
$\varphi(r,\alpha,\Theta) = (r\sin\Theta\cos\alpha, r\sin\Theta\sin\alpha, r\cos\Theta)$
$\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha,\Theta)} = \begin{bmatrix} \sin\Theta\cos\alpha & r\cos\Theta\cos\alpha & -r\sin\Theta\sin\alpha \\ \sin\Theta\sin\alpha & r\cos\Theta\sin\alpha & r\sin\Theta\cos\alpha \\ \cos\Theta & -r\sin\Theta & 0 \end{bmatrix}$
$|\det(\mathbf{J}_{\varphi(r,\alpha,\Theta)})| = |r^2\sin^2\Theta\cos\Theta\cos^2\alpha + r^2\sin^2\Theta\cos\Theta\sin^2\alpha + r^2\sin^2\Theta\sin^2\alpha\sin^2\Theta +$
$r^2\cos^2\Theta\sin^2\Theta\cos^2\alpha + r^2\cos^2\Theta\sin^2\Theta\sin^2\alpha + r^2\cos^2\Theta\cos^2\Theta| = r^2\sin\Theta$
$\int\int\int_K f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_K f(r,\alpha,\Theta)r^2\sin\Theta drd\alpha d\Theta$

9 Wykład IX

9.1 Współrzędne sferyczne

$z = r\cos(\Theta), \Theta\in[0,\pi]$
$y = r\sin(\Theta)\sin(\alpha), \alpha\in[0,2\pi)$
$x = r\sin(\Theta)\cos(\alpha) r\in[0,\infty)$

$$\varphi(r,\alpha,\Theta) = (r\sin(\Theta)cos(\alpha), r\sin(\Theta)\sin(\alpha), r\cos(\Theta))$$

Jakobian $J_\alpha = (r,\alpha,\Theta) = r^2\sin(\Theta)$ Zapisane współrzędne:

$$\frac{d}{dr}(r\sin(\Theta)\cos(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r\sin(\Theta)\cos(\alpha)), \frac{d}{d\Theta}(r\sin(\Theta)\cos(\alpha))$$

$$\frac{d}{dr}(r\sin(\Theta)\sin(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r\sin(\Theta)\sin(\alpha)), \frac{d}{d\Theta}(r\sin(\Theta)\sin(\alpha))$$

$$\frac{d}{dr}(r\cos(\alpha)), \frac{d}{d\alpha}(r\cos(\Theta)), \frac{d}{d\Theta}(r\cos(\Theta))$$

$$\int\int\int_{\varphi(D)} f(x,y,z)dxdydz = \int\int\int_{D(r,\alpha,\Theta)} f(r\sin\Theta\cos\alpha, r\sin\Theta\sin\alpha, r\cos\Theta)r^2\sin\Theta drd\alpha d\Theta$$

Objętość kuli $K_3((0,0,0),R)$ o promieniu R.

$$\int\int\int 1dxdydz = \tag{1}$$

$$\int\int\int_{r\in[0,R]} r^2\sin\Theta drd\alpha d\theta = \tag{2}$$

$$\int\left(\int\left(\int r^2\sin\Theta dr\right)d\alpha\right)d\Theta = \tag{3}$$

$$\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left(\frac{R^3}{3}\sin\Theta\right)d\alpha\right)d\Theta = \tag{4}$$

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{2\pi R^3}{3}\sin\Theta\right)d\Theta = \tag{5}$$

$$\frac{2\pi R^3}{3}(-\cos\Theta)|_0^{\pi} = \tag{6}$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \tag{7}$$

Objętość n-wymiarowej kuli $K_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2\}$
Miara Lebesgue'a $\lambda(K_1) = 2r, \lambda(K_2) = \pi r^2, \lambda(K_3) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\lambda(K_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

Gdzie $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} t^{a-1}e^{-t}dt, \Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \Gamma(a+1) = a!$

9.2 Funkcja Beta

Niech $a, b > 0$:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(ab)}$$

Policzmy:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \tag{1}$$

$$\text{Podstawmy } t = s^2, dt = 2sds, \text{ mamy:} \tag{2}$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-s^2}ds = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi} \tag{3}$$

Pokażmy, że faktycznie:

$$\lambda(K_n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} r^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$$

D-d. Indukcja po n:

1. $n = 1$: $\lambda(K_1) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} r}{\Gamma(\frac{3}{2})} = 2r$ super
2. $n_0 = n$. Popatrzmy na K_{n+1}:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 \leqslant r^2 \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant r^2 - x_{n+1}^2 = \left(\sqrt{r^2 - x_{n+1}^2}\right) \tag{2}$$

Wyznaczmy $\lambda(K_{n+1})$:

$$\lambda(K_{n+1}) = \int_{-r}^{r} \left(\int \cdots \int_{Kx_1,x_2,\ldots,x_n} dx_1 dx_2 \ldots dx_n \right) dx_{n+1} \tag{1}$$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \left(\sqrt{r^2 - x_{n+1}^2}\right)^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \tag{2}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_{-r}^{r} (r^2 - x_{n+1}^2)^{\frac{n}{2}} dx_{n+1} \tag{3}$$

$$\text{Podstawmy } x_{n+1} = rt, dx_{n+1} = rdt, \text{ mamy:} \tag{4}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} r^{n+1} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\frac{n}{2}} dt \tag{5}$$

$$= \frac{2r^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{n}{2}} dt \tag{6}$$

$$\text{Podstawmy } t^2 = y, dy = 2tdt \tag{7}$$

$$= \frac{2r^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_0^1 (1-y)^{\frac{n}{2}-1+1} y^{-\frac{1}{2}} dy \tag{8}$$

$$= \frac{2r^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} B\left(\frac{n}{2}+1, \frac{1}{2}\right) \tag{9}$$

$$= \frac{2r^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}+1+\frac{1}{2})} \tag{10}$$

$$= \frac{r^{n+1}\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} \tag{11}$$

$$= \frac{r^{n+1}\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)} \quad \square \tag{12}$$

9.3 Symplesks

$$S_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant a, x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0\}$$

$$\lambda S_n = \frac{a^n}{n!}$$

D-d. indukcyjny:

1. $n = 1$, $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $\lambda(S_1) = a$
2. $\lambda(S_n) = \frac{a^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
\lambda(S_{n+1}) &= &(1)\\
&= \int\int dx_1 dx_2 \dots dx_{n+1} &(2)\\
&= \int_0^a \frac{(a - x_{n+1})^n}{n!} dx_{n+1} &(3)\\
&= \frac{(-1)(a - x_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!}|_0^a &(4)\\
&= \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} &(5)
\end{aligned}$$

Definicja 9.3.1. Splot funkcji. Dla odpowiednich funkcji $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiujemy splot:

$$(f * g)(x) = \int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(x - t)dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

Dla $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), t = (t_1, t_2, \dots, t_n), x - t = (x_1 - t_1, x_2 - t_2, \dots, x_n - t_n)$

9.4 Wstęp do równań różniczkowych

Przykład równania różniczkowego:

$$m'(t) = (-1)k \cdot m(t)$$

Rozwiązanie - każda funkcja postaci:

$$m(t) = Ce^{-kt}$$

Zobaczmy:

$$m'(t) = C(-k)e^{-kt} = (-k)m(t)$$

9.5 Krzywe całkowe równania różniczkowego

Wykres :cry:

9.6 Równania różniczkowe z warunkiem początkowym

$$\begin{cases} m'(t) = (-k)m(t) \\ m(t_0) = m_0 \end{cases}$$

Rozwiązanie: $m(t) = m_0 e^{-k(t-t_0)}$

10 Wykład X

10.1 Równanie różniczkowe

Definicja 10.1.1. (Równanie różniczkowe) Zwyczanje pierwszego rzędu:

$$y' = f(t, y)$$

Ogólne:

$$F(t, y, y') = 0$$

Definicja 10.1.2. $y(t)$ jest rozwiązaniem rr. $y' = f(t, y)$ na przedziale (a, b) jeśli: $y'(t)$ istnieje na przedziale (a, b):

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

Definicja 10.1.3. Wykres rozwiązania rr. to jego krzywa całkowa.

Przykład 10.1.1. Rozwiążmy RR:

1. $y(t) = \frac{1}{1+t}$ jest rozwiązaniem rr. $y' + 2ty^2 = 0$ na $\mathbb{R}$

$$y'(t) = ((1+t^2)^{-1})' = (-1)2t(1+t^2)^{-2} = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \tag{1}$$

$$2ty^2(t) = \frac{2t}{(1+t^2)^2} \tag{2}$$

$$y'(t) + 2ty^2(t) = 0 \tag{3}$$

Jak widać rozwiązanie działa.

2. $y(t) = \ln(t)$ jest rozwiązaniem rr. $y' = e^{-y}$ na $(0, \infty)$.

$$y'(t) = \frac{1}{t} \tag{1}$$

$$e^{-\ln(t)} = \frac{1}{e^{\ln(t)}} = \frac{1}{t} \tag{2}$$

10.2 Równanie różniczkowe z warunkiem

Definicja 10.2.1. Równanie różniczkowe wraz z warunkiem $y(t_0) = y_0$ nazywamy zagadnieniem początkowym. Mówimy, że $y(t)$ jest rozwiązaniem zagadnienia początkowego, jeżeli jest rozwiązaniem równania różniczkowego $y'(t) = f(t, y)$ na pewnym przedziale zawierającym punkt t_0 i spełnia warunek $y(t_0) = y_0$:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Definicja 10.2.2. RR, które można zapisać w postaci:

$$y'(t) = g(t)h(y)$$

nazywamy rr. o zmiennych rozdzielonych.
Zakładamy, że funkcje $g(t), h(y)$ są ciągłe oraz $h(y) \neq 0$ dla każdego y. Wówczas całka rr. o rozdzielonych zmiennych dana jest wzorem:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C$$

$(y'(t) = \frac{dy}{dt})$
D-d.

$$\frac{dy}{dt} = g(t)h(y) \tag{1}$$
$$\frac{1}{h(y)}dy = g(t)dt \tag{2}$$
$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)dt + C \quad \square \tag{3}$$

Jeżeli $h(y) = 0$ dla pewnego y_0 to funkcja stała $y(t) = y_0$ jest jednym z rozwiązań rr. $y'(t) = g(t)h(y)$. $y' = 0, h(y(t)) = h(y_0) = 0 \quad \square$

Przykład 10.2.1.

$$(1 + e^y)yy' = e^t$$

$$y' = e^t \frac{1}{(1 + e^y)y} \tag{1}$$
$$(1 + e^y)y\frac{dy}{dt} = e^t \tag{2}$$
$$(1 + e^2)ydy = e^t dt \tag{3}$$
$$\int (1 + e^y)ydy = \int e^t dt + C \tag{4}$$
$$\int (y + ye^y)dy = \int e^t dt + C \tag{5}$$
$$\frac{y^2}{2} + \int ye^y dt = e^t + C \tag{6}$$
$$\frac{y^2}{2} + e^y(y - 1) = e^t + C \tag{7}$$

Metodami elementarnymi rozwikłanie tej funkcji jest niemożliwe. Wyjdzie prawdopodobnie specjalna funkcja d'Alemberta. Wobec tego, w tym przypadku nie trzeba tego rozwikływać do funkcji $y(t)$

Twierdzenie 10.2.1. Zakładamy, że funkcje $g(t), h(y)$ są ciągłe odpowiednio na przedziałach $(a, b), (c, d)$ oraz $h(y) \neq 0$. dla każdego $y \in (c, d)$. Niech $t_0 \in (a, b), y_0 \in (c, d)$. Wówczas zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y' = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ma dokładnie jedno rozwiązanie.

10.3 Równiaine różniczkowe jednorodne

Definicja 10.3.1. RR, które można zapisać w postaci:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

nazywamy rr. jednorodnym.

Przykład 10.3.1. $y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$
Przykład:

$$tyy' = y^2 - t^2 \tag{1}$$
$$y' = \frac{x}{y} - \frac{1}{\frac{y}{t}} \tag{2}$$
$$f(u) = u - \frac{1}{u} \tag{3}$$

10.4 Równanie różniczkowe o rozdzielonych zmiennych

FAKT. Jeżeli $f(u) = u$, to rr. jednorodne przyjmuje następującą postać:

$$y' = \frac{y}{t}$$

jest to rr. o rozdzielonych zmiennych, którego rozwiązanie dane jest wzorem:

$$y(t) = Ct$$

D-d.

$$y' = \frac{y}{t} \tag{1}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{t} \tag{2}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dt}{t} \tag{3}$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} + C \tag{4}$$
$$\ln(|y|) = \ln(|t|) + C \tag{5}$$
$$|y| = e^{\ln|t|+C} \tag{6}$$
$$|y| = |t|e^C, e^C \in \mathbb{R}^+ \tag{7}$$
$$y = e^C t \vee y = (-e^C)t \tag{8}$$
$$y(t) = C_1 t, C_1 \in \mathbb{R} - \{0\} \tag{9}$$

10.5 Równanie różniczkowe przez zamianę zmiennych

Twierdzenie 10.5.1. RR. jednorodne przez zamianę zmiennych $y = ut$:

$$y(t) = u(t)t$$

Sprowadzamy do równania różniczkowego o zmiennych rozdzielonych:

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right) \tag{1}$$
$$y = ut \tag{2}$$
$$y' = u't + u(t)' = u't + u \tag{3}$$
$$u't + u = f(u) \tag{4}$$
$$u't = f(u) - u \tag{5}$$
$$\frac{du}{dt}t = f(u) - u \tag{6}$$
$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dt}{t} \tag{7}$$
$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dt}{t} \tag{8}$$

Przykład 10.5.1.

$$ty' = t + y \tag{1}$$
$$y' = 1 + \frac{y}{t} \tag{2}$$
$$f(\frac{y}{t}) = 1 + \frac{y}{t} \tag{3}$$
$$\text{podstawmy } y = ut, y' = u't + u \cdot 1 \tag{4}$$
$$ty' = u't + u \tag{5}$$
$$t + y = t + ut \tag{6}$$
$$u't^2 + ut = t + ut \tag{7}$$
$$u't^2 = t \tag{8}$$
$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t} \tag{9}$$
$$du = \frac{1}{t}dt \tag{10}$$
$$\int du = \int \frac{dt}{t} \tag{11}$$
$$u(t) = \ln|t| + C \tag{12}$$

Kolejno: $x(t) = t\,(\ln|t| + C)$

Twierdzenie 10.5.2. Zakładamy, że funkcja $g(u)$ jest ciągła na (a, b) oraz dla każdego $u \in (a, b)$, $g(u) \neq u$. Wówczas zagadnienie początkowe:

$$\begin{cases} y' = g\left(\frac{y}{t}\right) y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

$a < \frac{y_0}{t_0} < b$ ma dokładnie jedno rozwiązanie.

10.6 Równanie róniczkowe liniowe

Definicja 10.6.1. RR, które można zapisać w postaci:

$$y' + p(t)y = q(t)$$

Nazywamy równaniem liniowym pierwszego rzędu. Jeżeli $q(t) \neq 0$ to równanie różniczkowe jest równaniem różniczkowym liniowym niejednorodnym. Jeżeli $q(t) = 0$: $y' + p(t) = 0$ jest równaniem różniczkowym liniowym jednorodnym.

Przykład 10.6.1.

$$y' + p(t)y(t) = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = -p(t)y(t) \tag{2}$$

$$\frac{dy}{y} = -p(t)dt \tag{3}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -p(t)dt \tag{4}$$

$$\ln|y| = \int -p(t)dt + C \tag{5}$$

$$|y| = e^{\int -p(t)dt} e^{c} \tag{6}$$

$$y = \pm e^{C} e^{\int -p(t)dt} \tag{7}$$

$$y(t) = c_1 e^{\int -p(t)dt} \tag{8}$$

Przykład 10.6.2. $y' + ty = 0 \implies y(t) = c_1 e^{\int -tdt} = c_1 e^{-\frac{t^2}{2}}$

11 Wykład XI

Definicja 11.0.1. (Całka krzywoliniowa nieskierowana) Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\gamma[a,b] \to \mathbb{R}^n$, γ ma ciągłą pochodną. Wtedy:

$$\int_\gamma f dt = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||dt$$

Przykład 11.0.1. Rozważmy przykłady krzywych gamma:

1. $\gamma(t) = (t, t^2), t \in [0,1]$
2. Okrąg o środku w punkcie (x_0, y_0) i promieniu r. $\gamma(t) = (x_0 + r\cos(t), y_0 + r\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$
3. Odcinek łączący punkty $P(x_1, y_1, z_1), Q(x_2, y_2, z_2)$ $\gamma(t) = (1-t) \cdot P + t \cdot Q$ $(tQ = (tx_2, ty_2, tz_2))$

Przykład 11.0.2. Policzmy następujące Całki:

1. $f = 1, \gamma(t) = (r\cos(t), r\sin(t)), t \in [0, 2\pi], \gamma'(t) = ((r\cos(t))', (r\sin(t))') = (-\sin(t)r)$

$$\int_\gamma 1dl = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t)r)^2 + (\cos(t)r)^2}dt$$

2. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (t, t^2), f(x,y) = 3x + \sqrt{y}, \gamma'(t) = (1, 2t), |\gamma'(t)| = \sqrt{1+4t^2}$

$$\int_\gamma f dl = \int_0^1 (3t + \sqrt{t})\sqrt{1+4t^2}dt$$

3. $\gamma[0,4] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) = (t,0) \text{ dla } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ \gamma_2(t) = (1,t-1) \text{ dla } 1 < t < 2 \\ \gamma_3(t) = (3-t,1) \text{ dla } 2 \leqslant t < 3 \\ \gamma_4(t) = (0,4-t) \text{ dla } 3 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}$$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$

$$\int_\gamma dl = \int_{\gamma_1} x^2 d + \int_{\gamma_2} x^2 dl + \int_{\gamma_3} x^2 dl + \int_{\gamma_4} x^2 dl$$

$\gamma_1'(t) = (1,0), |\gamma_1'(t)| = \sqrt{1^2+0^2} = 1, \gamma_2'(t) = (0,1), |\gamma_2'(t)| = 1, |\gamma_3'(t) = (-1,0), |\gamma_3'(t)| =$ 1...

Definicja 11.0.2. (Pole wektorowe) $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$F(x,y) = (x,y)$$

$$G(x,y) = (-y,x)$$

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$$

$$F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Definicja 11.0.3. (Całka krzywoliniowa skierowana)

$$\int_\gamma \vec{F} \circ \vec{dl} = \int_\gamma (F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + \dots + F_n dx_n) = \int_a^b \left(\vec{F}(\gamma(t)) \circ \gamma'(t)\right) dt$$

gdzie $\circ$ to iloczyn skalarny.

Przykład 11.0.3. Przykład: $\vec{F}(x,y) = (x,y), \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi], \gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$

$$\int_\gamma \vec{F} \circ \vec{dl} = \int_0^{2\pi} (\cos(t), \sin(t)) \circ (-\sin(t), \cos(t)) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos(t)(\sin(t))) + \sin(t)\cos(t) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Dla $\vec{G}$

$$\int_\gamma \vec{G} \circ \vec{dl} = \int_0^{2\pi} (-\sin(t), \cos(t)) \circ (-\sin(t), \cos(t)) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

Obszar jednospójny nie ma dziury w środku - Prowadzący.

Twierdzenie 11.0.1. (Twierdzenie Greena) Jeśli B jest obszarem jednospójnym, ograniczonym krzywą gładką $\vec{F} = (F_1, F_2)$ - pole wektorowe, które ma ciągłą pochodną na pewnym otoczeniu B. ∂B - brzeg zorientowany dodatnio:

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{dl} = \int \int_B \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dx dy$$

Przykład 11.0.4. Zastosujmy Tw. Greena. $F(x,y) = \left((1-x^2)y, x(1+y^2)\right), (F_1(x,y), F_2(x,y))$, B - koło $x^2+y^2 \leqslant R^2$ zorientowane dodatnio:

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{dl} = \int\int_{x^2+y^2 \leqslant R^2} \left(-\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_2}{\partial x}\right) dxdy =$$

$$\int\int_{x^2+y^2 \leqslant R^2} (-(1-x^2)+(1+y^2))dxdy = \int\int_{x^2+y^2 \leqslant R^2} (x^2+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 dr d\alpha = \int_0^{2\pi} \frac{R^4}{4} d\alpha = \frac{\pi}{2} R^4$$

Definicja 11.0.4. (Całka powierzchniowa skierowana) σ - mały element powierzchni

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{d\sigma} =_{def} \text{całka podwójna}$$

Twierdzenie 11.0.2. (Twierdzenie Gaussa) (zamiana całki powierzchniowej skierowanej na całkę potrójną)

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{d\sigma} = \int\int\int_B (\nabla \circ \vec{F}) dxdydz$$

Przykład 11.0.5. $B : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2, OB : x^2+y^2+z^2 = R^2$

$$\int_{\partial B} \vec{F} \circ \vec{d\sigma} = \int\int\int_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} \frac{\partial}{\partial x}(x) \frac{\partial}{\partial y}(y) \frac{\partial}{\partial z}(x) dxdydz = \int\int\int_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} 3dxdydz =$$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = 4\pi R^3$$