Analiza Matematyczna II

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$

Definicja 1.1.1. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$
$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$
$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
Własności:

1. $\langle x, y\rangle =< y, x >$
2. $< ax, y >=< x, ay >= a < x, y >, a \in \mathbb{R}$
3. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

Definicja 1.1.2. Długość wektora $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Przykład 1.1.1. $\mathbb{R} : |x| = |x_1|$ - oś liczbowa $\mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$ - płaszczyzna

Twierdzenie 1.1.1. $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x| \cdot |y|$
D-d. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$|\langle x, y, \rangle| = |\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_1^2}$
Nierówność Cauchy'ego Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

D-d.
$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, x\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant |x|^2|y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \iff |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \square$

1.2 Kąt między wektorami

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (x_{11}, x_{12})$, $\overrightarrow{x_2} = (x_{21}, x_{22})$

$$\cos(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \frac{\overrightarrow{x_1} \odot \overrightarrow{x_2}}{|\overrightarrow{x_1}||\overrightarrow{x_2}|}$$

Rozważmy funkcję:
$d_n \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$d_n(x, y) = |x - y|$, dla $n = 2$:

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ Własności:

1. $d_n(x, y) \geqslant 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leqslant d_n(x, y) + d_n(y, z)$ - nierówność trójkąta

1.3 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.3.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X, pewną funkcję $X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga: aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów
D-d.
$d(x, y) = \frac{1}{2}\left(d(x, y) + d(y, x)\right) \geqslant \frac{1}{2} d(x, x) = 0$, zatem $d(x, y) \geqslant 0$

Twierdzenie 1.3.1. Stwierdzenie. Niech (X, d) (Corollary) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), n \geqslant 2$$

Dla $n = 2$:
$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_2)$ - oczywiste
Dla $n = 3$:
$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ - nierówność trójkąta
Krok indukcyjny:
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_n, x_{n+1})$
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leqslant_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$ $\square$

1.4 Przestrzeń metryczna dyskretna

X - dowolny zbiór i metryka określona wzorem:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x = y \\ 1 \text{ dla } x \neq y \end{cases}$$

Aksjomaty $1, 2, 3, 4$ są oczywiste.

1.5 Metryka Euklidesowa

$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$d_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

1.6 Przestrzeń Hilberta

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$
$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots\right)$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leqslant \infty$
$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$
$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots\right)$

1.7 Metryka Manhattan

$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$