

Algebra - Notatki z wykładu

Rafał Włodarczyk

INA 1 Sem.

1 Wykład Pierwszy

1.1 Symbole

Logika $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$

Zbiory $x \in A, A \cap B, A \cup B, A - B, A \setminus B, A^C, B^C, A \subseteq B, A \times B$

Funkcje $f : X \rightarrow Y, f : X \times Y \rightarrow A$ funkcja dwuargumentowa

Własność

Dla $\mathbb{N} \quad \forall x \forall n (x|n) \implies x = 1 \vee x = n$

Jest to definicja liczb pierwszych.

1.2 Definicje

Definicja 1.2.1. Niech X - Zbiór. Działaniem na X nazywamy każdą funkcję $f : X \cdot X \rightarrow X$

Przykład 1.2.1.

- $f(x, y) = x \cdot y$ Jest działaniem na \mathbb{R} - tak
- $f(x, y) = x - y$ Jest działaniem na \mathbb{N} ? - nie, ponieważ $\exists x, y f(x, y) \notin \mathbb{N}$

Oznaczenie $f(x, y) \iff x + y, x \cdot y, x \circ y$ - Działanie ogólne

Definicja 1.2.2. Niech X - Zbiór. Działanie \circ nazywamy łącznym, gdy: $\forall x, y, z \in X (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ Działanie \circ nazywamy przemennym, gdy: $\forall x, y \in X x \circ y = y \circ x$

Przykład 1.2.2.

- $+$ na \mathbb{R} jest łączne i przemienne
- $-$ na \mathbb{R} nie jest ani łączne, ani nieprzemienne

Definicja 1.2.3. Niech \circ - działanie na zbiorze X . Element $e \in X$ nazywamy elementem neutralnym (dla \circ), gdy: $\forall x \in X e \circ x = x \circ e = x$

Przykład 1.2.3.

- 0 jest elementem neutralnym dla $+$ na \mathbb{N}
- 1 jest elementem neutralnym dla \cdot na \mathbb{R}

FAKT. Niech \circ - działanie na zbiorze X . Jeżeli \circ ma element neutralny, to jest on jedyny.
D-d. Niech a, b oznaczać elementy neutralne. Działanie \circ na X :

- $a \circ b = b$
- $a \circ b = a$

Zatem: $a = b$ \square

Definicja 1.2.4. Niech \circ - działanie na zbiorze X . Element $a \in X$ nazywamy elementem odwrotnym (dla \circ), gdy: $\forall x \in X a \circ x = x \circ a = e$

Przykład 1.2.4.

- $-x$ jest elementem odwrotnym dla $+$ na \mathbb{R}
- $\frac{1}{x}$ jest elementem odwrotnym dla \cdot na \mathbb{R}
- x^2 nie ma elementu odwrotnego dla \cdot na \mathbb{R}
- x^2 ma element odwrotny dla \cdot na \mathbb{R}^+

FAKT. Niech \circ - działanie na $X, e \in X$ - element neutralny $x \in X$ - dowolny x . W działaniu łącznym liczba odwrotna może być co najwyżej jedna. Istnieje maksymalnie jeden element odwrotny do x .

D-d. Niech a, b ozn. el. odwrotne do x
 $(a \circ x) \circ b = a \circ (x \circ b)$ (z łączności)
 $e \circ b = a \circ e$
 $b = a$ \square

Definicja 1.2.5. Grupą nazywamy parę elementów (G, \circ) , gdzie G - zbiór. \circ działanie na G , takie że:

1. \circ jest działaniem na G
2. $\forall a, b, c \in G (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ - Łączność
3. $\exists e \in G \forall a \in G a \circ e = e \circ a = a$ - Element neutralny
4. $\forall a \in G \exists b \in G a \circ b = b \circ a = e$ - Element odwrotny

2 Wykład drugi

... tbd

3 Wykład trzeci

... tbd

4 Wykład czwarty - Pierścienie

Przykład 4.0.1. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - rozszerza grupę

Definicja 4.0.1. Pierścieniem nazywamy trójkę (P, \oplus, \odot) , gdzie P - zbiór, \oplus, \odot - działania na P , takie że:

1. (P, \oplus) - grupa przemienna (abelowa)
2. działanie na \odot jest łączne na P
3. $\forall_x \forall_{a,b} x \odot (a \oplus b) = (x \odot a) \oplus (x \odot b)$ oraz $(a \oplus b) \odot x = a \odot x \oplus b \odot x$

Przykład 4.0.2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ jest pierścieniem, ponieważ:

- $(\mathbb{Z}, +)$ - grupa przemienna
- \cdot jest łączne na \mathbb{Z}
- Rozdzielność mnożenia względem dodawania

Rozważmy inne przykłady:

- $(\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ - pierścienie
- $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ - nie jest pierścieniem
- $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ - (el. neu. $W(x) = 0$, el. odw. $-W(x)$) - zbiór wielomianów o współczynnikach \mathbb{R}

4.1 Oznaczenia

Działania na P oznaczamy $+, \cdot$, nazywamy dodawaniem i mnożeniem.

- Element neutralny $+$ oznaczamy 0 i nazywamy zerem.
- Element przeciwny (odwrotny) do a to $-a$, bo $(a + (-a)) = 0$
- Element neutralny \cdot (nie musi istnieć) oznaczamy 1 i nazywamy jedyneką
- Element odwrotny do a to a^{-1}

Analogicznie do $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Przykład 4.1.1.

- Pierścień bez 1 to np. $(2\mathbb{Z}, +, \cdot)$
- Istnieje pierścień z nieprzemiennym \cdot - mnożeniem (pierścień macierzy)

4.2 Własności

FAKT. Niech $(P, +, \cdot)$ - pierścień. Wtedy:

1. $\forall_{a \in P} a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$
D-d. $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) \stackrel{rd}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 \mid +(-(a \cdot 0))$
 $a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0$
 $0 = a \cdot 0 \quad \square$
2. $\forall_{a, b \in P} (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
D-d. $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) \mid + (a \cdot b)$
 $(-a) \cdot b + a \cdot b \stackrel{rd}{=} (-a + a) \cdot b = 0 \cdot b \stackrel{1}{=} 0$
 $(-a) \cdot b + a \cdot b = 0 \mid +(-(ab))$
 $(-a) \cdot b = -(ab)$
3. $\forall_{a, b \in P} (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
D-d. ćwiczenie
4. $\forall_{a, -a \in P} (-1) \cdot a = -a$
D-d. ćwiczenie

Definicja 4.2.1. Niech $(P, +, \cdot)$ - pierścień oraz niech $A \subseteq P$. Zbiór niepusty A nazywamy podpierścieniem, gdy:

1. $\forall_{a, b \in A} (a + b) \in A \wedge (-a) \in A$
2. $\forall_{a, b \in A} (a \cdot b) \in A$ (odwrotność mnożenia nie jest wymagana)

Przykład 4.2.1. Niech $P = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, $A = \mathbb{Z}$. \mathbb{Z} jest podpierścieniem, ponieważ:

1. $a, b \in \mathbb{Z} \implies a + b \in \mathbb{Z} \wedge (-a) \in \mathbb{Z}$
2. $a, b \in \mathbb{Z} \implies a \cdot b \in \mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}$ jest podpierścieniem $(P, +, \cdot)$

$((0, \infty), +, \cdot)$ nie jest podpierścieniem bo $7 \in (0, \infty)$, $-7 \notin (0, \infty)$

Oznaczenie $A \leq P$ oznaczamy, że A jest podpierścieniem P

Własności Jeśli $(P, +, \cdot)$ - pierścień oraz $A \leq P$ to $(A, +, \cdot)$ jest pierścieniem.

D-d. \leftarrow ćwiczenie. $(P, +, \cdot)$ posiada dwa podpierścienie $P \leq P$ i $\{0\} \leq P$

4.3 Produkt

Niech $(P, +, \cdot), (R, \oplus, \odot)$ - pierścienie

Na zbiorze $P \times R$ definiujemy działania:

1. $(p_1, r_1) +_b (p_2, r_2) = (p_1 + p_2, r_1 \oplus r_2)$
2. $(p_1, r_1) \cdot_b (p_2, r_2) = (p_1 \cdot p_2, r_1 \odot r_2)$

D-d. Sprawdzić listę własności z definicji pierścienia.

Przykład 4.3.1. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$(3, 5) + (7, 8) = (3 + 7, 5 + 8) = (10, 13)$$

Element neutralny $(0, 0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Element przeciwny $-(a, b) = (-a, -b)$

Definicja 4.3.1. Niech $n \in (\mathbb{N})^+$ $\mathbb{Z}_n = (\{0, 1, 2, \dots, n-1\}, +_n, \cdot_n)$.

FAKT. \mathbb{Z}_n jest pierścieniem skończonym.

D-d.

1. $(\{0, 1, \dots, n-1\}, +_n)$ - grupa przeciwna (\mathbb{C}_n)
2. Łączność - $(a \cdot_n (b \cdot_n c)) = (a \cdot b \cdot c) \bmod(n)$
3. Rozdzielność - $L = a \cdot_n (x +_n y) = (a(x + y)) \bmod(n)$
 $P = a \cdot_n x +_n a \cdot_n y = (ax + ay) \bmod(n)$
 $L = P$ z rozdzielności dodawania w $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Definicja 4.3.2. Niech $(P, +, \cdot), (R, \oplus, \odot)$ - pierścienie. Funkcję $f_{P \rightarrow R}$ nazywamy homomorfizmem, gdy:

1. $\forall_{a,b \in P} f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
2. $\forall_{a,b \in P} f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$

Przykład 4.3.2.

1. $(P, +, \cdot)$ oraz $f(a) = a : P \rightarrow P$ to f jest homomorfizmem.
2. $(P, +, \cdot)$ oraz $g(a) = - : P \rightarrow P$ to g jest homomorfizmem.

$$\text{D-d. } g(a + b) = 0 = 0 + 0 = g(a) + g(b) \wedge g(a \cdot b) = 0 \cdot 0 = g(a) \cdot g(b)$$

Przykład 4.3.3. $\varphi_n(k) = k \bmod(n) : (\mathbb{Z}) \rightarrow 0, 1, \dots, n-1$

φ_n jest homomorficzna dla pierścieni $(\mathbb{Z}, +, \cdot), ((\mathbb{Z})_n, +_n, \cdot_n)$, ponieważ:

1. $\varphi_n(a + b) = (a + b) \bmod(n)$
 $(a \bmod(n) + b \bmod(n)) \bmod(n) = \varphi_n(a) +_n \varphi_n(b)$
2. ćwiczenie (dla mnożenia)

FAKT. Niech $(P, +, \cdot), (R, \oplus, \odot)$ - pierścienie. Oraz $f_{P \rightarrow R}$ homomorfizm. Wtedy:

1. $f(0_P) = 0_R$

$$\begin{aligned} \text{D-d. } f(0_P) &= f(0_P + 0_P) = f(0_P) + f(0_P) \\ f(0_P) &= f(0_P) + f(0_P) \mid + (-f(0_P)) \\ 0_R &= f(0_P) \quad \square \end{aligned}$$

2. $f(-a) = -f(a)$

$$\begin{aligned} \text{D-d. } f(-a) + f(a) &=^{hom.} f((-a) + a) = f(0) = 0 \mid + (-f(a)) \\ f(-a) &= -f(a) \end{aligned}$$

3. $f(1_P) = 1_R$, o ile istnieje
4. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$, o ile istnieje

4.4 Zastosowanie

Reguła podzielności przez 3 Notacja. a, b, c - cyfry $0, \dots, 9$, $a|b$ - a dzieli b

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c$$

$$\overline{933} = 933$$

$$\text{Przypadek: } 3|\overline{abc} \iff 3|(a+b+c)$$

$$3|\overline{abcd} \iff \overline{abcd} \pmod{3} = 0$$

$$\varphi_3(\overline{abcd}) = 0$$

$$\varphi_3(1000a + 100b + 10c + d) \stackrel{hom}{=}$$

$$\varphi_3(1000a) + \varphi_3(100b) + \varphi_3(10c) + \varphi_3(d)$$

$$\varphi_3(10)^3 + \varphi_3(10)^2 + \varphi_3(10)^1 + \varphi_3(a) + \varphi_3(b) + \varphi_3(c) + \varphi_3(d) =$$

$$\varphi_3(a) + \varphi_3(b) + \varphi_3(c) + \varphi_3(d) = \varphi_3(a+b+c+d)$$

5 Wykład piąty

tbd...

6 Wykład szósty

6.1 Liczby naturalne

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Definicja 6.1.1. Zasada dobrego uporządkowania (WO) Dla dowolnego $\emptyset \neq X \in \mathbb{N}$:

$$(\exists a \in X \forall b \in X) a \leq b$$

Każdy niepusty podzbiór \mathbb{N} ma element najmniejszy.

$\mathbb{R}(0, 1)$ NIE spełnia WO

Definicja 6.1.2. Zasada Indukcji:

Dla dowolnego $A \in \mathbb{N}$ zachodzi:

$$[(0 \in A) \wedge ((\forall_K) K \in A \implies k+1 \in A)] \implies A = \mathbb{N}$$

Twierdzenie 6.1.1. Zasada indukcji wynika z zasady dobrego uporządkowania.

D-d. Nie wprost założmy że zasada indukcji nie jest prawdziwa. To znaczy, że poprzednik jest fałszywy a następnik prawdziwy.

$$0 \in A (\forall_K k \in A \implies k+1 \in A) \wedge A \neq \mathbb{N}$$

Wtedy niech $X = \mathbb{N} - A = A^c$

- $X \neq \emptyset, X \leq \mathbb{N}$

Z zasady WO $\exists_a \in X$, element najmniejszy w X

$a \neq 0$, bo $0 \in A, a \in X$

$a \in X$, to $a \notin A$

$$a-1 \in A \implies a = a-1+1 \in A$$

Dwa ostatnie punkty dają sprzeczność, zatem założenie nie wprost jest fałszywe, a twierdzenie prawdziwe.

Przykład 6.1.1. $\forall_n 1 + 3 + 5 + \dots + 2n + 1 = (n + 1)^2$

D-d. Niech $A = \{n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + \dots + 2n + 1 = (n + 1)^2\}$

Dla $n = 0, L = 2 \cdot 0 + 1 = (0 + 1)^2 = P$

Niech $k \in a \forall_{k > a}$, wtedy z założenia indukcyjnego:

$$1 + 3 + \dots + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

$$1 + 3 + \dots + 2k + 1 + 2(k + 1) + 1 = (k + 1)^2 + 2k + 3 = k^2 + 2k + 1 + 2k + 3 = (k + 2)^2$$

Wtedy z zasady indukcji matematycznej wynika że $A = \mathbb{N}$

Wobec tego $\forall n \in \mathbb{N} 1 + 3 + \dots + 2n + 1 = (n + 1)^2 \quad \square$

Twierdzenie 6.1.2. W liczbach naturalnych nie ma nieskończonego malejącego ciągu.

D-d. Zakładamy nie wprost, że istnieje ciąg l. naturalnych:

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tak, że $\forall_{k \in \mathbb{N}} a_k \in \mathbb{N}$

$$a_k > a_{k+1}$$

Niech $X = \{a_1, a_2, \dots\}$, Mamy

1. $X \leq N$
2. $X \neq 0$
3. X nie ma elementu najmniejszego, bo
niech $a \in X$ to $a = a_k, k \in \mathbb{N}$, ale wtedy
 $a_{k+1} < a_k = a$, zatem a nie jest najmniejszy.

1,2,3 są sprzeczne z zasadą dobrego uporządkowania. \square

Definicja 6.1.3. Niech $a, b \in \mathbb{N}$. Największym wspólnym dzielnikiem a i b nazywamy liczbę:

$$NWD(a, b) = \max\{k \in \mathbb{N} : k|a \wedge k|b\}$$

$$NWD(15, 12) = 3$$

Algorytm euklidesa, rozkład liczb na czynniki pierwsze.

Przykład 6.1.2. Algorytm Euklidesa:

Większą zapisujemy resztą z dzielenia przez mniejszą:

$$\text{Np. } (45, 12) \implies (12, 45 \bmod 12) = (12, 9) \implies (9, 12 \bmod 9) = (9, 3) \implies (3, 0)$$

W momencie kiedy dowolna z liczb to 0 algorytm się kończy.

Wynikiem jest druga liczba, w tym wypadku 3.

FAKT. Aby obliczyć $NWD(a, b)$, wykonujemy do momentu gdy $a = 0 \vee b = 0$:

$$(a, b) = ([\min(a, b)], [\max(a, b)] \% [\min(a, b)])$$

FAKT. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{N}$ algorytm Euklidesa, zaczynający od pary (a, b) zatrzymuje się.

D-d. Zakładamy nie wprost, że algorytm nie zatrzymuje się. Więc istnieje nieskończony ciąg par:

$$(a_0, b_1) \implies (a_1, b_1) \implies (a_2, b_2) \implies \dots$$

Wtedy $a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots$ jest nieskończonym malejącym ciągiem liczb naturalnych.

Jest to sprzeczne z twierdzeniem 6.1.2, które mówi że w \mathbb{N} nie ma nieskończonego malejącego ciągu. A zatem fakt jest prawdziwy \square .

Obserwacja. $a, b \in \mathbb{N}, r = a \bmod b$, to $a = b\omega + r$

D-d: Niech $k \in 1, \dots, n - 1$, wtedy należy dowieść, że:

$$\forall_m (m|a_k \wedge m|b_k) \iff m|a_{k+1} \wedge m|b_{k+1}$$

→: Niech $m|a_k, b_k$, wtedy:

$$m|b_k = a_k + 1$$

$b_{k+1} = a_k \pmod{b_k}$. Istnieje liczba naturalna w , taka że:

$$a_k = b_k \cdot w + b_{k+1}$$

←: Ćwiczenie.

Niech Z_0 - zbiór wspólnych dzielników liczb a_0, b_0

$$(*) Z_0 = Z_n - NWD(a, b) = \max(Z_0) = \max(Z_n) = NWD(a_n, 0) = a_n$$

7 Wykład VII

Algorytm Euklidesa:

$$NWD(a, b), a > b$$

$$(a, b), (b, a \pmod{b}) = (a_1, b_1) \dots (a_n, 0), a_n = NWD(a, b)$$

7.1 Równania Diofantyczne

Twierdzenie 7.1.1. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Równanie:

$$ax + by = c$$

ma rozwiązanie $x, y \in \mathbb{Z} \iff NWD(a, b)|c$

Przykład 7.1.1. Rozwiązanie RD za pomocą AE:

$$\begin{aligned} & 42x + 15y = 3 \\ \text{AE. } (42, 12) & \rightarrow (15, 42 \pmod{15}) \rightarrow (15, 12) \rightarrow (12, 3) \rightarrow (3, 0), 3 = NWD(42, 15) \\ & 15 \cdot \square + 12 \cdot \square = 3 \\ & 15 \cdot 1 + 15 \cdot -1 = 3, \text{ wiemy że:} \\ & 42 \pmod{15} = 12 \\ & 42 = 15 \cdot 2 + 12 \\ & 12 = 42 - 15 \cdot 2, \text{ zatem:} \\ & 15 \cdot 1 + (42 - 15 \cdot 2) \cdot (-1) = 3 \\ & 15 \cdot 1 - 42 + 15 \cdot 2 = 3 \\ & 15 \cdot 3 + (-1) \cdot 42 = 3 \\ & x = -1 \wedge y = 3 \end{aligned}$$

Idea polega na tym aby liczbę z końca algorytmu wyrazić za pomocą dwóch liczb.

D.d →: Zakładamy, że równanie $ax + by = c$ ma rozwiązanie.

$$\begin{aligned} & NWD(a, b)|a \wedge NWD(a, b)|b \\ & NWD(a, b)|ax \wedge NWD(a, b)|by \\ & NWD(a, b)|(ax + by = c) \quad \square \end{aligned}$$

D.d ←: Pokażemy, że równanie $ax + by = NWD(a, b)$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. Niech $(a, b) = (a_0, b_0) \implies (a_1, b_1) \implies \dots \implies (a_n, b_n) = (a_n, 0)$ to algorytm Euklidesa na parze a, b .

Indukcja względem n :

Dla: $n = 0$ $NWD(a, b) = a_0 = a$

$ax + by = NWD(a, b) = a, x = 1, y = 0$ równanie ma rozwiązanie

Dla: $n \rightarrow n + 1$. Zakładamy, że dla każdej pary AE zatrzymuje się po n krokach, dla każdej takiej pary równanie $ax + by = NWD(a, b)$ ma rozwiązanie.

Teza: Dla każdej pary (a, b) , dla której algorytm Euklidesa zatrzymuje się po $n + 1$ krokach, ... istnieje rozwiązanie równania.

D-d kroku ind. Niech (a, b) takie, że AE na (a, b) zatrzymuje się po $n + 1$ krokach:

$$(a_0, b_0) \Rightarrow (a_1, b_1) \Rightarrow \dots \Rightarrow (a_n, b_n) \Rightarrow (a_{n+1}, b_{n+1})$$

Zauważmy, że AE na parze (a_1, b_1) zatrzymuje się po n krokach. Z założenia indukcyjnego musi on mieć rozwiązanie, tj. $\exists x', y' \in \mathbb{Z} a_1 \cdot x' + b_1 \cdot y' = NWD(a_1, b_1)$.

Zauważmy, że $NWD(a_1, b_1) = NWD(a, b)$

$a_1 = b, b_1 = a \pmod{b} \Rightarrow a = b \cdot z + b_1, z \in \mathbb{Z}$, więc:

$$NWD(a, b) = NWD(a_1, b_1) = a_1 x' + b_1 y' = bx' + (a - b \cdot z)y' = ay' + (x' - zy')b$$

Skrajne strony tej równości $ay' + b(x' - zy') = NWD(a, b)$. Skoro $y', x', zy' \in \mathbb{Z}$, to istnieje rozwiązanie dla pary $n + 1$. Zatem na mocy zasady indukcji matematycznej twierdzenie jest prawdziwe dla każdego n .

Elementy odwracalne pierścienia: W pierścieniu nie każdy element musi być odwracalny.

Niech. $(P, +, \cdot)$ - pierścień z 1. $a \in P$ nazywamy odwracalnym, gdy $\exists b \in P ab = 1$

Np. w $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ - tylko 1, -1 są odwracalne.

Definicja 7.1.1. Niech $(P, +, \cdot)$ - pierścień. Zbiorem elementów odwracalnych oznaczamy przez P^* .

$$P^* = \{a \in P : \exists b \in P : a \cdot b = 1\}$$

Przykład 7.1.2. Rozważmy następujące pierścienie

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot) \mathbb{Z}^* = \{1, 2\}$
- $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6) \mathbb{Z}_6^* = \{1, 5\}$ Odwracalna a ma $NWD(a, 6) = 1$

Twierdzenie 7.1.2. Niech $(P, +, \cdot)$ - pierścień z 1. Wtedy (P^*, \cdot) jest grupą.

D-d.

1. (\cdot) - jest działaniem na P^* . Niech $a, p \in P^*$, wtedy istnieją $b, q \in P$, takie że: $a \cdot b = p \cdot q = 1$, wtedy: $(a \cdot p)(q \cdot b) = a \cdot (p \cdot q) \cdot b = a \cdot 1 \cdot b = 1$, więc $a \cdot p \in P^*$.
2. Działanie \cdot jest łączne na P^* , ponieważ jest łączne na P .
3. $1 \in P^*$, bo $1 \cdot 1 = 1$ - element neutralny.
4. Niech $a \in P^*$, więc z def. $\exists b \in P a \cdot b = 1$. Zauważmy, że: również $b \in P^*$, ponieważ $b \cdot a = 1 \square$.

Grupa Z_n^* . Pierścień $Z_n = (\{0, 1, \dots, n - 1\}, +_n, \cdot_n)$

FAKT. $a \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ jest odwracalny wtedy i tylko wtedy gdy $NWD(a, n) = 1$

D-d: \leftarrow

Niech $NWD(a, n) = 1$, to znaczy że równanie $ax + ny = 1$ ma rozwiązanie $x, y \in \mathbb{Z}$

Niech $b = x \pmod{n}$, mamy:

$$a \cdot_n b = a \cdot b \pmod{n} = ax \pmod{n} = (ax + ny) \pmod{n}$$

D-d: \rightarrow Niewprost

Niech $NWD(a, b) = k > 1$, zatem $k|a \wedge k|n$, więc:

$$\forall b \in \{0, 1, \dots, n-1\} k|ab$$

$$k(a \cdot b) \pmod n$$

$$k|(ab) \pmod n, \text{ zatem:}$$

$$a \cdot_n b \neq 1$$

Wniosek:

$$Z_n^* = \{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : NWD(k, n) = 1\}$$

$(\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : NWD(k, n) = 1\}, \cdot_n)$ jest grupą.

Przykład 7.1.3.

$$\mathbb{Z}_6^* = (\{1, 5\}, \cdot_6)$$

$$\mathbb{Z}_7^* = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \cdot_7)$$

Uwaga. Grupy \mathbb{Z}_n^* są przemienne.

$p \in P$ to $\mathbb{Z}_p^* = (\{1, 2, \dots, p-1\}, \cdot_p)$

8 Wykład VIII

$+, \cdot$ na \mathbb{N} - łączne, przemienne

$$a \leq b \implies a + x \leq b + x$$

8.1 Liczby Pierwsze

Definicja 8.1.1. Liczbę naturalną p nazywamy pierwszą, gdy $p \geq 2$ oraz:

$$\forall n n|p \implies (n = 1 \vee n = p)$$

Zbiór wszystkich liczb pierwszych zaznaczamy \mathbb{P}

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$$

FAKT. Każda liczba naturalna większa od 1 dzieli się przez pewną liczbę pierwszą.

D-d. (WO) Nie istnieje nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych.

Założmy nie wprost że istnieje liczba $n \in \mathbb{N} > 1$, taka że n nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą.

Wtedy:

1. n nie może być liczbą pierwszą, bo z założenia nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą.
2. zatem $\exists_{n_1, n_2 - \{0, 1\}} n = n_1 \cdot n_2$
3. zauważmy, że ani n_1 ani n_2 nie dzielą się przez żadną liczbę pierwszą. Bo gdyby tak było to $p|n_1 \implies p|n$
4. W szczególności $n_2 < n$.
5. Następnie podobnie dla n_2 , która nie jest liczbą pierwszą, więc $\exists_{n_3, n_4 - \{0, 1\}} n_2 = n_3 \cdot n_4$

6. Wtedy n_4 nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą, ale oprócz tego $n_4 < n_2$
7. Powtarzając ten krok otrzymamy nieskończenie malejący ciąg liczb naturalnych:
 n_1, n_2, n_4, \dots , co jest sprzeczne z WO.

Zatem założenie nie wprost jest fałszywe, a fakt prawdziwy.

Twierdzenie 8.1.1. Euklides. Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych. Zbiór \mathbb{P} ma nieskończenie wiele elementów.

D-d. Nie wprost, gdyby \mathbb{P} było skończone, to $\exists_{p_1, p_2, \dots, p_n} \mathbb{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, n \in \mathbb{N}$

Niech $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Zauważmy że wówczas $m \notin \mathbb{P}$, bo $m > 1$ i m nie dzieli się przez żadną liczbę pierwszą.

$$|\mathbb{P}| = \infty \square$$

FAKT. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje rozkład na czynniki pierwsze. Istnieją (niekoniecznie różne) liczby $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathbb{P}$, takie że:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$$

D-d. Z tw. Euklidesa $\exists_{p_1} p_1 \in \mathbb{P}$

$p_1 | n$, więc $\exists_{n_1 \in \mathbb{N}} n = p_1 \cdot n_1$, wtedy:

I. $n_1 \in \mathbb{P}, n = p_1 \cdot n_1$ jest szukany rozkładem

II. $n_1 \notin \mathbb{P} \exists_{p_2 \in \mathbb{P}} p_2 | n_1, n_1 = p_2 \cdot n_2 \dots$

Ten algorytm zatrzymuje się (inaczej $n, n_1, n_2, \dots, \infty$ ciąg \mathbb{N})

$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \quad \square$

Twierdzenie 8.1.2. Niech p - liczba naturalna. Wtedy p jest liczbą pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{x, y \in \mathbb{N}} p | xy \implies (p | x \vee p | y)$$

Przykład 8.1.1. Rozważmy następujące przykłady:

- Dla n pierwszego np $n = 3 \quad 3 | xy \implies (3 | x \vee 3 | y)$
- Ale dla n złożonego np $n = 6 \quad 6 | 4 \cdot 3$, ale $\neg 6 | 4 \wedge \neg 6 | 3$

FAKT. Zasadnicze twierdzenie arytmetyki.

1. Każda liczba naturalna $n > 1$ jest iloczynem liczb pierwszych.
2. Rozkład liczby n na czynniki pierwsze jest jednoznaczny. Każda liczba $n > 1$ ma jednoznaczny rozkład na czynniki pierwsze. Jeżeli $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ oraz $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l$ to $k = l$ oraz istnieje taka permutacja σ zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$, że $p_i = q_{\sigma(i)}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$.

D-d.

1. Każda liczba naturalna jest iloczynem liczb pierwszych. (Poprzedni fakt)
2. Załóżmy nie wprost, że rozkład nie jest jednoznaczny.

To znaczy istnieje jakaś liczba n która ma dwa "istotnie różne" rozkłady na czynniki pierwsze:
 $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$ oraz $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l$, zatem:

$$L = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_l = P$$

Jeśli dla pewnego i, j $p_i = q_j$ to możemy te je skrócić. BZO.

Po wykonaniu wszystkich takich skróceń, wiedząc że rozkłady są istotnie różne, otrzymamy iloczyny liczb, które są względnie pierwsze.

Zatem otrzymamy $\forall_{i,j} q_i \neq p_j$ Mamy:

$$p_1 | p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k \implies p_1 | q_1 \cdot (q_2 \cdot \dots \cdot q_l)$$

$$p_1 \in \mathbb{P} \text{ i } p_1 | q_1 \vee p_1 | (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_l)$$

Nie jest możliwe żeby $p_1 | q_1$ i te liczby nie były sobie równe, zatem $p_1 | (q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_l)$

zatem albo $p_1 | q_2 \vee p_1 | (q_3 \cdot \dots \cdot q_l) \dots p_1 | q_l \leftarrow$ sprzeczność, a zatem dowód.

Niech $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{P}$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

$$m = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n}$$

FAKT. Niech $k, m \in \mathbb{N}$ jw. wtedy: $m | k \iff \forall_{i=1, \dots, n} \beta_i \leq \alpha_i$

D-d. \leftarrow Zakładamy, że $\forall_{i=1, \dots, n} \beta_i \leq \alpha_i$, wtedy:

$$k = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}, \text{ skoro } \beta_i \leq \alpha_i, \text{ to:}$$

$$k = p_1^{\beta_1} \cdot p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\beta_n} \cdot p_n^{\alpha_n - \beta_n}, \text{ to:}$$

$$k = (p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_n^{\beta_n}) \cdot (p_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n - \beta_n})$$

$$k = m \cdot l, \alpha_n - \beta_n \geq 0 \implies l \in \mathbb{N}, \text{ więc } m | k.$$

D-d. \rightarrow Jako ćwiczenie.

- Wniosek I: Jeśli k, m jw. $NWD(k, m) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)}$

D-d. ćwiczenie.

- Wniosek II: $NWW(k, m) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)}$

D-d. jw. ćwiczenie

Przykład 8.1.2. $NWD(k, m) \cdot NWW(k, m) = k \cdot m$

D-d: $NWD(k, m) \cdot NWW(k, m) =$

$$p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\min(\alpha_n, \beta_n)} \cdot p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \dots \cdot p_n^{\max(\alpha_n, \beta_n)} =$$

Korzystając z zależności $\min(k, m) + \max(k, m) = k + m$, widzimy, że:

$$= p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n + \beta_n} = k \cdot m$$

9 Wykład IX

9.1 Liczby zespolone

Pojęcie liczby:

$$- \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

- $\exists_{x \in \mathbb{C}} W(x) = 0$ - Liczby zespolone są algebraicznie domknięte.

Definicja 9.1.1. Liczbą zespoloną nazywamy wyrażenie postaci:

$$a + bi, a, b \in \mathbb{R}$$

Przykład 9.1.1. Zobaczmy przykłady liczb zespolonych:

- $1 + 2i$
- $3 + (-2)i = 3 - 2i$
- $5 + 0i = 5$

Definicja 9.1.2. Liczba zespolona to wyrażenie postaci $z = a + bi$

- $Re(z) = a$ to część rzeczywista
- $Im(z) = b$ to część urojona
- i to jednostka urojona
- Zbiór wszystkich liczb zespolonych ozn. $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Działania na liczbach zespolonych wykonujemy jak na wyrażeniach algebraicznych, uwzględniając że $i \cdot i = i^2 = -1$.

Przykład 9.1.2. Przykłady działań na liczbach zespolonych.

- $(7 + 3i) + (5 + 2i) = (7 + 5) + (3i + 2i) = 12 + 5i$
- $(5 + 3i) - (2 - 7i) = (5 - 2) + (3i + 7i) = 3 + 10i$
- $(2 + i)(1 + 2i) = 2 + 4i + i + 2(i^2) = 2 + 4i + i - 2 = 0 + 5i = 5i$
- $(2 + 3i)(2 - 3i) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3i + 3i \cdot 2 - (3i)^2 = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13$ (skrót. mn. działa)
 Obserwacja: $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$
- $\frac{4+6i}{2} = 2 + 3i$
- $\frac{2+3i}{1+i} = \frac{(2+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-2i+3i+3}{2} = \frac{5+i}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$ (mn. sprzężenie)
- $\sqrt{-1} = i$, bo $i^2 = -1$
- $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$

Twierdzenie 9.1.1. Na zbiorze $\mathbb{C} = \{a + bi, a, b \in \mathbb{R}\}$ wprowadzamy działania:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Twierdzenie 9.1.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest ciałem:

D-d. \leftarrow ćw. - spr włas z def. ciała.

Obliczenia:

- $\frac{1}{1+i} = \frac{(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
- $(1 + i)z + 2 + i = 1 + 2i$
 $(1 + i)z = -1 + i$
 $z = \frac{-1+i}{1+i} = \dots$
- $\begin{cases} x + y = 1 \\ ix - y = 2 \end{cases} \implies (1 + i)x = 3 \implies x = \frac{3}{1+i}, y = \frac{1+2i}{1-i}$

9.2 Równanie kwadratowe

$$x^2 + 2x + 10 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 10 = -36, \sqrt{\Delta} = 6i$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -1 \pm 3i$$

9.3 Moduł i sprzężenie liczby zespolonej

Definicja 9.3.1. Niech $z = a + bi \in \mathbb{C}; a, b \in \mathbb{R}$:

- Sprzężeniem z nazywamy $\bar{z} = a - bi$
- Modułem z nazywamy $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Przykład 9.3.1. $z = 3 - 7i, \bar{z} = 3 + 7, |z| = \sqrt{(3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{3^2 + 7^2}$

1. Własność. Niech $z, s \in \mathbb{C}$, wtedy:

$$1.1) \bar{z} + \bar{s} = \overline{z + s}$$

$$1.2) \bar{z} \cdot \bar{s} = \overline{z \cdot s}$$

D-d. Niech $z = a + bi, s = c + di$:

$$1.1d) \bar{z} + \bar{s} = \overline{a + bi} + \overline{c + di} = \overline{a + c + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i$$

$$\bar{z} \cdot \bar{s} = \overline{a + bi} \cdot \overline{c + di} = \overline{(a + c) - (b + d)i}$$

$$\text{Uwaga: } \overline{z - s} = \bar{z} - \bar{s}$$

$$\text{Uwaga: } \overline{\frac{z}{s}} = \frac{\bar{z}}{\bar{s}}$$

$$\text{Uwaga: } \overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

$$\text{Uwaga: } r \in \mathbb{R}, \bar{r} = r$$

Wniosek $f(z) = \bar{z}$ oraz $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ jest izomorfizmem.

$$2. |z + s| \leq |z| + |s|$$

$$3. |z \cdot s| = |z| \cdot |s|$$

$$4. z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

D-d. Niech $z = a + bi$, wtedy:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |z|^2$$

Liczby rzeczywiste możemy uporządkować liniowo - oś liczbowa.

Jeżeli $a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c, a \leq a, a \leq b, b \leq a \implies a = b$ - porządek liniowy.

Twierdzenie 9.3.1. Nie istnieje liniowe uporządkowanie \mathbb{C} spełniające:

$$1. \forall_{a,b,x \in \mathbb{C}} : a \leq b \implies a + x \leq b + x$$

$$2. \forall_{a,b \in \mathbb{C}} \forall_{x \geq 0} : a \leq b \implies ax \leq bx$$

$$3. \forall_{a,b \in \mathbb{C}} \forall_{x < 0} : a \leq b \implies ax \geq bx$$

D-d.

1. Koniecznie $0 \leq 1$, bo inaczej (3) $1 \leq 0 \implies 0 = 1$ sprzeczność.

2. Koniecznie $-1 \leq 0$, bo inaczej (1) sprzeczność.

3. Jeśli $i \leq 0$ ($| \cdot i$) to $i \cdot i \geq 0 \implies -1 \geq 0$ sprzeczność.

4. Jeśli $i > 0$ ($| \cdot i$) to $i \cdot i > 0 \implies -1 > 0$ sprzeczność.

Następne zaj. płaszczyzna zespolona.