Logika i struktury formalne

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Rachunek zdań - logika bez kwantyfikatorów

$$(p \wedge q) \implies (r \vee \neg q)$$

1.1 Konstrukcja języka rachunku zdań

- Mamy ustaloną rodzinę <u>zmiennych zdaniowych</u>.
  $P = \{p, q, r, s\}$ lub $P = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$
- Mamy ustaloną rodzinę <u>spójników logicznych</u>.
  $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
- Mamy (,) - nawiasy
- Mamy symbole $\top, \bot$ - prawda, fałsz
- Konstrukcja języka $\mathcal{L}(\mathcal{P})$

1. Zmienne zdaniowe oraz symbole $\top, \bot$ są zdaniami (języka predykatów $\mathcal{L}(\mathcal{P})$)
2. Jeśli φ, ψ są zdaniami, to również napisy $\neg\varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \implies \psi), (\varphi \iff \psi)$ są zdaniami.
3. Wyrażenie φ nazywamy zdaniem jeśli w skończonej liczbie kroków może być skonstruowane za pomocą reguł (1) i (2)

Przykład 1.1.1. Niech $P = p, q, r$. Przykłady zdań w $\mathcal{L}(\mathcal{P})$:

- $p; q; r; \top; \bot$
- $(p \wedge \top), (p \vee q), (p \implies \top)$
- $(r \wedge (p \vee q)), ((p \vee q) \vee (p \implies \top))$

Przykład 1.1.2. Rozważmy następujące działanie: $x = (10 \cdot 8)/(7 \cdot 3)$. Skąpilowane C zwraca 3.

Definicja 1.1.1. Jeśli φ jest z $\mathcal{L}(\mathcal{P})$, to wtedy φ ma parzystą liczbę nawiasów.

Dowód. Niech X oznacza kolekcje napisów o parzystej liczbie nawiasów.

1. zmienne zdaniowe - 0 nawiasów, $\top, \bot$
2. załóżmy, że φ, ψ są w X. Wtedy
   $(\varphi \wedge \psi), ...(\varphi \iff \psi)$ są w X.

$\square$

1.2 Zadanie

Naucz się alfabetu greckiego.
SYNTAKTYKA - badanie wyrażeń.
SEMANTYKA - badanie wartości.

1.3 Wartości logiczne

- Wartości logiczne: $0, 1$ - fałsz, prawda
- Funktory logiczne: $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
- Tablice prawdy:

X	Y	$\neg X$	$X \wedge Y$	$X \vee Y$	$X \implies Y$
0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1

Definicja 1.3.1. Waluacją nazywamy dowolne przyporządowanie π, które zmiennym zdaniowym przyporządkowuje wartości $0, 1$.

Przykład 1.3.1. Rozważmy następujący przykład waluacji π:

$$P = \{p_0, p_1, p_2, ...\}$$
$$\pi = \{0, 0, 0, ...\}$$
$$p = \{0, 1, 0, 1, ...\}$$

$val(\pi : \text{waluacja}, \varphi : \text{zdanie})$
LOGICAL $0 \vee 1$

Przykład 1.3.2. Dla $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{P})$:

- $val(\pi, p_i) = \pi(p_i)$
- $val(\pi, \top) = 1$
- $val(\pi, \bot) = 0$
- $val(\pi, (\varphi \wedge \psi)) = val(\pi, \varphi) \wedge val(\pi, \psi)$
- $val(\pi, \neg\varphi) = \neg val(\pi, \varphi)$

Definicja 1.3.2. φ jest tautologią, jeśli dla dowolnej waluacji π mamy $val(\pi, \varphi) = 1$.

$(\models \varphi)$ - Zapis