Wzór Stirlinga

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wzór Stirlinga

Twierdzenie 1.0.1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

(Inaczej $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)

Lemat 1.0.1. Dla ciągu zadanego wzorem:

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Zachodzi:

$$a_n \to C \in \mathbb{R}^+$$

Dowód 1.0.1. Rozważmy $b_n = \ln(a_n)$.
1. Pokażemy, że b_n jest malejący i ograniczony z dołu, zatem zbieżny do pewnej stałej rzeczywistej b. Wtedy $a_n = e^{b_n} \to e^b \in \mathbb{R}$.

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2}(2n+1)\cdot\ln\frac{n+1}{n} - 1$$

Wykorzystajmy rozwinięcie funkcji $\ln(x)$ w szereg Taylora w 1.
Dla $|t| < 1$:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots$$

$$-\ln(1-t) = t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} + \dots$$

$$\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right) = 2\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \dots\right)$$

Dla $t = \frac{1}{2n+1}$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \tag{1}$$

$$= 2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} = \tag{2}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2n+1} + 2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{2k+1} \tag{3}$$

$$b_n - b_{n+1} = 1 + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} \right) - 1 = \tag{1}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{2n+1} \right)^{2k} > 0 \tag{2}$$

Zobaczmy, że skoro $b_n > b_{n+1} \implies b_n$ jest malejący.
2. Pokażmy, że b_n jest ograniczony z dołu.

- $b_m - b_{m+1}$

$$b_m - b_{m+1} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2m+1)^2} \right)^k =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2m+1)^2}} = \frac{1}{(2m+1)^2 - 1} = \frac{1}{4m^2 + 4m} = \frac{1}{4m(m+1)}$$

- $b_1 - b_n$

$$b_1 - b_n = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \cdots + (b_{n-1} - b_n)$$
$$< \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{4m(m+1)} < \frac{1}{4} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \frac{1}{4}$$

Zauważmy następnie:

$$b_1 - b_n < \frac{1}{4} \tag{1}$$

$$b_n > b_1 - \frac{1}{4} = \ln \left(\frac{e}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4} \right) \tag{2}$$

Ostatecznie: b_n malejący, ograniczony z dołu, zatem zbieżny.
To implikuje:

$$a_n \to C \in \mathbb{R}^+ \quad \square$$

Lemat 1.0.2. (Wzór Wallisa)

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} =_{cw} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n}\,(n!)^4}{((2n)!)^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

Dowód 1.0.2. Wyjdźmy $(n \geqslant 2)$ od $\int \sin^n x dx$

$$\int \sin^n(x) = \int (-\cos x)' \cdot (\sin x)^{n-1} dx =$$

$$-\cos x \cdot (\sin x)^{n-1} + \int (-\cos^2 x)(n-1)(\sin x)^{n-2} dx =$$

$$-\cos x \cdot (\sin x)^{n-1} + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx - (n-1) \int (\sin x)^n dx =$$

$$n \int (\sin x)^n \, dx = -\cos x \, (\sin x)^{n-1} + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n-2} dx$$

Doprowadziliśmy do wzoru rekurencyjnego, mamy:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^0 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^1 dx = 1$$

Następnie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2 dx = \frac{2-1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^4 dx = \frac{4-1}{4} \cdot \frac{2-1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Wprowadźmy dwa ciągi:

$$s_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n} dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$c_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{2n+1} dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \cdot 1$$

Zatem:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{s_n} \cdot c_n$$

Pokażmy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{s_n} = 1$.
Stwórzmy nierówność dla $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$(\sin x)^{2n+2} < (\sin x)^{2n+1} < (\sin x)^{2n} \tag{1}$$

$$s_{n+1} < c_n < s_n \tag{2}$$

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} < \frac{c_n}{s_n} < 1 \tag{3}$$

$$\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} < \frac{c_n}{s_n} < 1 \tag{4}$$

Spójrzmy, że:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)-1}{2(n+1)} = 1 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1 \tag{2}$$

Zatem z twiedzenia o trzech ciągach:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{s_n} = 1$$

Definicja 1.0.1. Niech:

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{2n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

Cel: pokazać, że $a_n \to \sqrt{\pi}$

Dowód 1.0.3. Z lematu 1:

$$1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{c} \implies a_n \approx C \implies n! \approx C \cdot \sqrt{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Podstawmy to do wzoru Wallisa:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n} \cdot C^4 \cdot (2n)^2 \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{\left[C \cdot \sqrt{4n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^2 n\right]^2 (2n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^4 \cdot 2^{4n} \cdot 4n^2 \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}{C^2 \cdot 4n \cdot 2^{4n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{4n} (2n+1)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{C^2 \cdot n}{2n+1} = \frac{C^2}{2} \implies C = \sqrt{\pi} \quad \square$$

1.1 Pomoc drogowa

Szereg:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m(m+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n$$

$$s_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1}$$

$$\lim s_n = 1$$

Cos:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

1.2 Wnioski

Wzór Stirlinga:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Wzór Stirlinga dokładniej:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{f(n)}$$

$$\frac{1}{12n+1} < f(n) < \frac{1}{12n}$$