Analiza Matematyczna II

Rafal Wlodarczyk

INA 2 Sem. 2023

1 Wykład I

1.1 Iloczyn skalarny

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$

Definicja 1.1.1. Dla $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiujemy iloczyn skalarny:

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$(x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) y = (y_1, y_2, \ldots, y_n))$
$ax = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)$
$\sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$
Własności:

1. $\langle x, y\rangle =< y, x >$
2. $< ax, y >=< x, ay >= a < x, y >, a \in \mathbb{R}$
3. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

Definicja 1.1.2. Długość wektora $x \in \mathbb{R}^n$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Przykład 1.1.1. $\mathbb{R} : |x| = |x_1|$ - oś liczbowa $\mathbb{R}^2 : |x| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$ - płaszczyzna

Twierdzenie 1.1.1. $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x| \cdot |y|$
D-d. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$|\langle x, y, \rangle| = |\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_1^2}$
Nierówność Cauchy'ego Schwarza, a zatem dowód.

Wniosek $x, y \in \mathbb{R}^n$.

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

D-d.
$|x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle + \langle y, x\rangle = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leqslant |x|^2|y|^2 + 2|x||y| = (|x| + |y|)^2 = |x + y|^2 \leqslant (|x| + |y|)^2 \iff |x + y| \leqslant |x| + |y| \quad \square$

1.2 Kąt między wektorami

$\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2} \in \mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{x_1} = (x_{11}, x_{12})$, $\overrightarrow{x_2} = (x_{21}, x_{22})$

$$\cos(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}) = \frac{\overrightarrow{x_1} \odot \overrightarrow{x_2}}{|\overrightarrow{x_1}||\overrightarrow{x_2}|}$$

Rozważmy funkcję:
$d_n \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$d_n(x, y) = |x - y|$, dla $n = 2$:

$x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ $|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ Własności:

1. $d_n(x, y) \geqslant 0$
2. $d_n(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d_n(x, y) = d_n(y, x)$
4. $d_n(x, z) \leqslant d_n(x, y) + d_n(y, z)$ - nierówność trójkąta

1.3 Przestrzeń metryczna

Definicja 1.3.1. Przestrzenią metryczną nazywamy dowolny zbiór X, pewną funkcję $X \times X \to \mathbb{R}$, która spełnia następujące aksjomaty:

1. $d(x, y) \geqslant 0$
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$ dla $x, y \in X$
4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ dla każdych $x, y, z \in X$

Funkcję d nazywamy metryką, a wartość $d(x, y)$ odległością punktów.

Uwaga: aksjomat 1 wynika z pozostałych aksjomatów
D-d.
$d(x, y) = \frac{1}{2}\left(d(x, y) + d(y, x)\right) \geqslant \frac{1}{2} d(x, x) = 0$, zatem $d(x, y) \geqslant 0$

Twierdzenie 1.3.1. Stwierdzenie. Niech (X, d) (Corollary) będzie przestrzenią metryczną oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. Wówczas:

$$d(x_1, x_n) \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} d(x_j, x_{j+1}), n \geqslant 2$$

Dla $n = 2$:
$d(x_1, x_2) \leqslant d(x_1, x_2)$ - oczywiste
Dla $n = 3$:
$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ - nierówność trójkąta
Krok indukcyjny:
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_n, x_{n+1})$
$d(x_1, x_{n+1}) \leqslant d(x_1, x_n) + d(x_n, x_{n+1}) \leqslant_{ind} d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})$ $\square$

1.4 Przestrzeń metryczna dyskretna

X - dowolny zbiór i metryka określona wzorem:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dla } x = y \\ 1 \text{ dla } x \neq y \end{cases}$$

Aksjomaty $1, 2, 3, 4$ są oczywiste.

1.5 Metryka Euklidesowa

$d_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$d_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

1.6 Przestrzeń Hilberta

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant \infty, \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 < \infty$
$x = \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{i}, \ldots\right)$
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \leqslant \infty$
$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{i}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$
$y = \left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \ldots\right)$

1.7 Metryka Manhattan

$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

2 Wykład II

2.1 Kula otwarta

Definicja 2.1.1. Kula otwarta w przestrzeni metrycznej Y:

$$K(y_0, r) = \{y \in Y : d(y, y_0) < r\}$$

Gdzie:

- y_0 - środek
- r - promień
- Wnętrze okręgu w $\mathbb{R}^2$ - metryka Euklidesowa
- Wnętrze kuli w $\mathbb{R}^3$

Przykład 2.1.1. Rozważmy następujący przykład:
$K((x_0, y_0), r) :: \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$ zachodzący warunek
(wyobraż sobie rysunek poglądowy)

Definicja 2.1.2. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $U \subseteq X$ jest otwarty, jeśli:

$$\forall_{x \in U} \exists_{\varepsilon > 0} \, (K(x, \varepsilon) \subseteq U)$$

(Kula otwarta o środku w punkcie X i promieniu $\varepsilon > 0$)

Przykład 2.1.2. Przykłady:
(a, b) - jest otwarty
$[a, b)$ - nie jest otwarty

Definicja 2.1.3. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Zbiór $D \subseteq X$ jest zbiorem domkniętym $\iff$ $X - D$ jest otwarty.
$[a, b] \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R} - [a, b] = (\infty, a) \cup (b, \infty)$ - zbiór otwarty

Definicja 2.1.4. $(X, d_1), (Y, d_2)$ - przestrzenie metryczne
$F : X \to Y$
$\lim F(x) = b :: x \to a :: a \in X, b \in Y$
Przykład. Dla $X = \mathbb{N}, Y = \mathbb{R}$ - ciągi, dla obu $\mathbb{R}$ - funkcje

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x (0 < d_1(x, a) < \delta \implies d_2(F(x), b) < \varepsilon)$$

Twierdzenie 2.1.1. Warunki (1), (2) są równoważne:

1. $\lim_{x \to a} F(x) = b$
2. dla dowolnego ciągu $(x_n)_{n \geqslant 0}$ punktów przestrzeni metrycznej $X (x_n \neq a)$
   jeśli $\lim_{n \to a} x_n = a$ w metryce d_1 to $\lim_{n \to \infty} F(x_n) = b$

$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff (\forall \varepsilon)(\exists n_0)(\forall n > n_0) \; d_1(x_n, a) < \varepsilon$

$(|x_n - a| < \varepsilon), x_n, a \in (X, d_1) \implies \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, a) = 0$

Przykład 2.1.3. $x_n \in \mathbb{R}, a \in X$
$d_1(x_n, a) \in \mathbb{R}$
$\lim_{n \to \infty} x_n = a \iff \lim_{n \to \infty} d_1(x_n, a) = 0$ w metryce d_1

Przykład 2.1.4. $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$
$\lim_{n \to \infty} (a_n, b_n, c_n) = (g_1, g_2, g_3)$ w metryce Eulidesowej $\mathbb{R}^3 \iff$
$\lim_{n \to \infty} a_n = g_1 \wedge \lim_{n \to \infty} b_n = g_2 \wedge \lim_{n \to \infty} c_n = g_3$
Idea:
$\sqrt{(a_n - g_1)^2 + (b_n - g_2)^2 + (c_n - g_3)^2} \to 0 \iff a_n \to g_1 \wedge b_n \to g_2 \wedge c_n \to g_3$
Dla $\mathbb{R}^k$ podane własności zachodzą analogicznie.

Definicja 2.1.5. Ciągłość funkcji. $(X, d_1), (Y, d_2), F : X \to Y$.
Funkcja F jest ciągła w punkcie a jeśli:

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

$x \to a$ w $d_1 \implies F(x) \to F(a)$ w d_2

Przykład 2.1.5. Weźmy funkcje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ dla } x^2+y^2 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pokażmy, że f nie jest ciągła w $(0,0)$
$(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$
$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ - nie dąży do 0 nie jest ciągła w $(0,0)$.

Przykład 2.1.6. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$f(x,y,z) = (x^2, y^2 \cdot z)$
Zbadajmy ciąg $a = (x_0, y_0, z_0)$
$f(x_0, y_0, z_0) = (x_0^2, y_0^2 \cdot z)$
$(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0)$
$x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0 \wedge z_n \to z_0$
$f(x_n, y_n, z_n) = (x_n^2, y_n z_n)$

Przykład 2.1.7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ dla } x^2+y^4 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f jest ciągła w $(0,0)$ $(\alpha t, \beta t) \to (0,0)$
$f(\alpha t, \beta t) = \frac{\alpha\beta^2 t^3}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} =$
$\frac{\alpha\beta^2 t}{\alpha^2 + \beta^4 t^2} \to \frac{0}{\alpha^2} = 0 = f(0,0)$
$\lim_{t\to 0} f(t^2, t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$
f nie jest ciągła $0 = f(0,0) \neq \frac{1}{2}$, czyli nie tylko liniowa ale też dowolna

Kolejny przykład obalający dla zdef. funkcji $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) \to (0,0)$, ale już
$f\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{2} \neq f(0,0)$

Przykład 2.1.8. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = x + y$
$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = xy$

$(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \iff (x_n \to x_0 \wedge y_n \to y_0)$
$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x_0 + y_0 = f(x_0, y_0)$
$\lim_{n\to\infty} g(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = x_0 y_0 = g(x_0, y_0)$

Przykład 2.1.9. $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$ $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) =$
$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2})$
Nie istnieje
$(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$(x''_n, y''_n) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$
$f(x'_n, y'_n) = \frac{1/n1/n}{(1/n)^2+(1/n)^2} = 1/2$

$f(x''_n, y''_n) = \frac{-\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{(1/n)^2+(1/n)^2} = -1/2$
Ergo rozbieżny - granica podwójna nie istnieje.

2.2 Granica podwójna

Definicja 2.2.1. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)f(x,y)}$

2.3 Granice iterowane

Definicja 2.3.1. $\lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_n} f(x,y))$
$\lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_n} f(x,y))$

2.4 Różniczkowanie

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f'(x) = a \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = a$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - a = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h} = 0$
$\lim_{h\to 0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)-ah}{h}\right| = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h)-f(x)-ah|}{|h|} = 0$

$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(h) = ah, h \in \mathbb{R}$
$L(h_1 + h_2) = L(h_1) + L(h_2)$
$L(ch) = c \cdot L(h)$ (L jest odwzorowaniem liniowym)

Definicja 2.4.1. (Pochodna funkcji) $n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$
Mówimy że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x
jeśli istnieje odwzorowaniem liniowe $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
takie że $h \in \mathbb{R}^n 0_n = (0, 0, \dots, 0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(x+h)-f(x)-f'(x)(h)||}{||h||} = 0_{\mathbb{R}}$$

3 Wykład III

3.1 Pochodne cząstkowe

Definicja 3.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Przykład 3.1.1. Policzmy następującą pochodne cząstkowe dla funkcji:
$f(x, y) = x \cdot y^2, f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2$

$\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy$

Definicja 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w x jeśli istnieje odwzorowanie liniowe: $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ taka, że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)(h)}{|h|} = 0$$

Twierdzenie 3.1.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna. Niech: $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m), f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, m$: $a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2, \ldots, n$. Wówczas macierz pochodnej wynosi:

$$M_{f'(x)} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Uwaga. Istnienie wszystkich pochodnych cząstkowych nie wystarcza aby funkcja była różniczkowalna.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ dla } x^2 + y^2 > 0 \\ 0 \text{ dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Cel. pokażmy że f nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$
$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$
Kandydat na pochodną:

$$M_{f'(0,0)} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right]$$

Warunek różniczkowania: $h = (h_1, h_2)$

$$\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{\left| f(h_1, h_2) - f(0, 0) - [0, 0] \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

(??) $\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{|h_1^2 h_2|}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \frac{1}{n}}{\left((\frac{1}{n})^2 2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$

Twierdzenie 3.1.2. Tw. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n$. Zakładamy, że pochodne cząstkowe: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ istnieją w otoczeniu punktu x i są ciągłe w punkcie x. Wtedy f jest różniczkowalna w punkcie x.

Przykład 3.1.2. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(x) = \langle x, x \rangle$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2, \ldots$

$$M_{f'(x)} = [2x_1, 2x_2, \ldots, 2x_n] = 2x$$
$$M_{f'(x)}(h) = 2\langle x, h \rangle$$

Przykład 3.1.3. Z definicji $\frac{|f(x+h)-f(x)-M_{f'(x)}(h)|}{|h|} = \frac{\langle h,h\rangle}{|h|} = \frac{|h||h|}{|h|}$
Jednak algebraicznie $f(x+h) - f(x) - M_{f'(x)}(h) = \langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle - 2\langle x, h\rangle = \langle h, h\rangle$

Przykład 3.1.4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, f(t) = (\sin(t), \cos(t))$

$$M_{f'(t)} = \begin{bmatrix} sin(t)' \\ cos(t)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(t) \\ -sin(t) \end{bmatrix}$$

Definicja 3.1.3. Pochodne kierunkowe: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora $\overline{a}$ nazywamy granicę:

$$(D_a f)(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + at) - f(x_0)}{t}$$

$\varphi(t) = f(x_0 + at)$
$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah)-f(x_0)}{h} = (D_a f)(x_0)$

Przykład 3.1.5. $f(x, y) = sin(x) \cdot y$
$x_0 = (0, 0)$
$a = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$D_a f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\frac{\sqrt{2}}{2})}{t} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Twierdzenie 3.1.3. Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0 oraz $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, to:

$$(D_a f)(x_0) = f'(x_0)a^T$$

$$f'(x_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n)\right]$$

$$f'(x_0)a = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)a_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)a_n$$

Definicja 3.1.4. Gradient funkcji $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

$$(D_a f)(x_0) = \langle \nabla_{x_0} f, a\rangle$$

Przykład 3.1.6. Policzmy gradient dla: $f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$\nabla_(x_0, y_0) f(x, y) = (2x_0, 2y_0)$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

D-d. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w x_0.

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x+h) - f(x_0) - f'(x_0)h|}{|h|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{|a|} \left|\frac{f(x_0 + a) - f(x_0) - f'(x_0)t(ta)}{t}\right| =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{|a|} \left|\frac{f(x_0 + ta) - f(x_0)}{t} - f'(x_0)(a)\right|$$

3.2 Gradient

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla_{x_0} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)\right)$$

3.3 Własności gradientu

Niech $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\nabla_{x_0}(\alpha f) = \alpha \nabla_{x_0}(f)$
2. $\nabla_{x_0}(f + g) = \nabla x_0(f) + \nabla x_0(g)$

Wniosek liniowość (dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$):

$$\nabla_{x_0}(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla_{x_0}(f) + \beta \nabla_{x_0}(g)$$

3.4 Gradient iloczynu

$$\nabla_{x_0}(f \cdot g) = \nabla_{x_0}(f) \cdot g(x_0) + f(x_0) \nabla_{x_0}(g)$$

D-d. z liniowości gradientu.

Twierdzenie 3.4.1. Zakładamy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jest różniczkowalna w $x \in \mathbb{R}^n$. Wówczas f jest ciągła w $x \in \mathbb{R}^n$.

D-d. (metryka w $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}
&|f(x+h) - f(x)| = \\
&= |f(x+h) - f(x) - f'(x)h + f'(x)h| \\
&\leqslant |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| + |f'(x)h| = \\
&= \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)h|}{|h|}|h| = |f'(x)h|
\end{aligned}$$

3.5 Minimum lokalne właściwe

Definicja 3.5.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Mówimy, że f ma w punkcie a minimum lokalne (właściwe) jeśli istnieje $r > 0$:

$$(\forall x \in K(a,r) - \{a\})\, f(a) \leqslant_{(<)} f(x)$$

Gdzie $K(a,r)$ - kula towarta o środku w a i promieniu r.

Twierdzenie 3.5.1. (Warunek konieczny) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$. Jeżeli f ma w punkcie a ekstremum lokalne to:

$$\nabla_{x_0} f = (0, 0, \ldots, 0)$$

Inaczej: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$

Przykład 3.5.1. Rozważmy następujące przykłady:

1. $f(x,y) = x^2 - y^2$ - sprawdźmy warunek konieczny
   $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$
   $(0,0)$ - punkt podejrzany
   $f(\frac{1}{n}, 0) = \frac{1}{n^2} > 0$ $f(0, \frac{1}{n}) = -\frac{1}{n^2} < 0$
   Nie istnieje taka $K((0,0),r)$, że f ma w tej kuli stały znak.

2. $f(x) = x^3$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}$, $f\left(-\frac{1}{n}\right) \dots$

3. $f(x,y,z) = -x^2 - (y-1)^2 - (z+1)^2$
   Sprawdźmy warunek: $\nabla f = (-2x, -2(y-1), -2(z+1)) = (0,0,0)$
   Zobaczmy $f(0,1,-1) = 0$
   $f(a, b+1, c-1) - f(0,1,-1) = -a^2 - b^2 - c^2 = -(a^2+b^2+c^2) < 0$ maksimum lokalne
   $f(a, b+1, c-1) < f(0,1,-1)$ (liczby sześcianu opisane na kuli)

Definicja 3.5.2. Niech $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $x, y \in \mathbb{R}$. Zakładamy, że $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_x(x,y)$ oraz $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_y(x,y)$. Wtedy pochodne cząstkowe pochodnych $f_x(x,y), f_y(x,y)$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu:

1. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx}(x,y)$

2. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}(x,y)$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{xy}(x,y)$

4. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{yx}(x,y)$

Twierdzenie 3.5.2. Jeżeli pochodne cząstkowe istnieją w pewnym obszarze i obie są, w pewnym punkcie ciągłe, to w tym punkcie są równe

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$$

$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ $f(x,y) = x^3 y^2$

$$\frac{d}{dy}(x^3y^2) = x^3 2y$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 2y) = 3x^2 2y$$

$$\frac{d}{dx}(3x^2 2y) = 6x2y$$

$$D\left[x^3 \cdot y^2, (x,2), (y,1)\right] \text{ (wolframalpha)}$$

3.6 Różniczkowanie złożenia funkcji

Twierdzenie 3.6.1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ $a \in \mathbb{R}^n, b = f(a) \in \mathbb{R}^m$. Zakładamy, że f jest różniczkowalna w punkcie a oraz g jest różniczkowalna w punkcie b. Wtedy $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie a i zachodzi wzór:

$$(g \circ f)(a) = g'\left(f(a)\right) \circ f'(a)$$

Złożenie odwzorowań liniowych - mnożenie macierzy.

Przykład 3.6.1. $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, g = f \circ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$
$g(t) = (f \circ u)(t) = f(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$
Zobaczmy:

$$M_{u'(t)} = \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ u_3'(t) \end{bmatrix} \quad M_{f'(b)} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \tfrac{\partial f}{\partial x_2}, \tfrac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{x=b}$$

Wykonajmy mnożenie macierzy:

$$M_{f'(b)} \cdot M_{u'(b)} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{du_3}{dt}$$

FAKT. Uogólniona reguła łańcuchowa. $(x_i = u_i(t))$

$$\frac{d}{dt} f\left(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{du_i}{dt}$$

Przykład 3.6.2. Niech $u(t) = (t^2 - t, 2t, 4t), f(x, y, z) = xy + z, g = f \circ u, g(t) = (t^2 - t)2t + 4t$

$g'(t) = (t^2 - 1)'2t + (t^2 - t)(2t)' + (4t)' = (2t - 1)(2t) + 2(t^2 - t) + 4 =$
$= 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$
Zobaczmy z reguły łańcuchowej:

$$g(t) = (f \circ u)(t)$$
$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{du_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{du_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{du_3}{dt}$$

$y \cdot (2t - 1) + 2x + 1 \cdot 4 = 2t(2t - 1) + 2(t^2 - t) + 4 = 4t^2 - 2t + 2t^2 - 2t + 4 = 6t^2 - 4t + 4$

W zastosowaniu algorytmu back propagation.

4 Wykład IV

$f(x) = \sqrt{x^2 + \exp(x^2)} + \cos(x^2 + \exp(x^2))$
$\frac{df}{dx}$ ... można policzyć Graf, jakby liczył komputer:

$$(x) \to (\ )^2 \to a \to + \tag{1}$$
$$a \to exp(\ ) \to b \to + \to c \to \sqrt{\ } \to d \to + \to f \tag{2}$$
$$c \to cos(\ ) \to e \to + \tag{3}$$

Rozpiszmy $a = x^2, b = \exp(a), c = a + b, d = \sqrt{c}, e = \cos(c), f = d + e$
$\frac{\partial a}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial b}{\partial a} = \exp(a)$, $\frac{\partial c}{\partial a} = 1 = \frac{\partial c}{\partial b}$, $\frac{\partial d}{\partial c} = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, $\frac{\partial e}{\partial c} = -\sin(c)$, $\frac{\partial f}{\partial d} = 1\frac{\partial f}{\partial e}$,

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} + \frac{\partial c}{\partial b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial d}\frac{\partial d}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial c}$$
$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial a}$$

Przykład 4.0.1. Problem. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ przyzwoita - różniczkowalna co najmniej 2 razy, jakie jest maksimum lokalne.

1. $n = 1$ analiza 1.
2. $n = 2$
3. $n \geqslant 2$

Twierdzenie 4.0.1. Niech $f(x, y)$ ma w otoczeniu punktu (x_0, y_0) pierwsze i drugie pochodne cząstkowe ciągłe oraz $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$. Wtedy:

$$W(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$$

Z ciągłości $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$

1. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) minimum lokalne
2. Jeśli $W(x_0, y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, to f ma w punkcie (x_0, y_0) maksimum lokalne
3. Jeśli $W(x_0, y_0) < 0$ to f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0)
4. Jeśli $W(x_0, y_0) = 0$ kryterium nie działa
5. (??) $W(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) = 0$, -$f_{xy}^2(x_0, y_0) \leqslant 0$, sprzeczność (z det macierzy)

Jak to liczyć w wolframalpha

1. solve(grad(f(x,y), x,y)=0, (x,y)), (Hessian)
2. det(...)

Przykład 4.0.2. Rozważmy przykład

$$f(x, y) = (2x + y^2)e^x$$

Policzmy najpierw pierwsze pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 2e^x(2x + y^2)e^x$$

$$f_y(x, y) = 2ye^x$$

Rozwiążmy powyższe równianie:

$$y = 0, x = -1$$

Punkt podejrzany o ekstremum $P = (-1, 0)$
Policzmy drugie pochodne cząstkowe:

$$f_{xx} = e^x(4 + 2x + y^2)$$

$$f_{yy} = 2e^x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 2ye^x$$

Zobaczmy:

$$f_{xx}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{yy}(-1, 0) = 2e^{-1}$$

$$f_{xy}(-1, 0) = f_{yx}(-1, 0) = 0$$

Policzmy wyznacznik z powyższego twierdzenia:

$$W(-1, 0) = 4e^2 > 0, f_{xx} > 0$$

Wobec tego finalnie f ma w punkcie $(-1, 0)$ minimum lokalne.

Przykład 4.0.3. Zobaczmy następny przykład:

$$f(x, y) = x^3 + y^3$$

Policzmy następujące pochodne cząstkowe:

$$f_x(x, y) = 3x^2, f_y(x, y) = 3y^2, f_{xy} = 0, f_{xx}(x, y) = 6x, f_{yy}(x, y) = 6y$$

Wyznacznik macierzy:

$$\det(W(0, 0)) = 0$$

Kryterium nie działa. Nic nam nie powie.

FAKT. Wzór Taylora. Analiza I : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(b + x) = f(b) + \frac{1}{1!}f'(b)x + \frac{1}{2!}f'(b)x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(b)x^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(b + \theta x) = x^{(n+1)}$$

dla pewnego $\theta \in (0, 1)$

FAKT. Uogólnienie wzoru Taylora : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(t) = f(a + tx) = f(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, \ldots, a_n + tx_n)$$

Dla funkcji $\varphi(t)$ stosujemy wzór Taylora z $b = 0$ i $x = t$:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \frac{1}{1!}\varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(0 + \theta t)t^{n+1}$$

Zapiszmy $\varphi(0)$:

$$\varphi(0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$\varphi'(t)(a_1 + tx_1, a_2 + tx_2, \ldots, a_n + tx_n) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1+tx_1, \ldots, a_n+tx_n) =$$

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

Wprowadźmy $c(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + tx_1, \ldots, a_n + tx_n)$. Zachodzi:

$$c'(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}x_2 x_1 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}x_n x_1$$

Zatem patrząc na $\varphi''(t)$:

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}x_j x_i$$

Oznaczenie:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right)(f) = \frac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}x_n$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right\}^2 = \frac{\partial}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}x_1\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\frac{\partial}{\partial x_2}x_2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1}x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1 x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}x_2 x_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}x_1 x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2}x_2 x_2$$

4.1 Ogólny wzór Taylora

FAKT. Wzór Taylora. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
Zdefiniujmy $D_x = \left\{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}x_n\right\}$

$$f(a + x) = f(a) + D_x(f(a)) + \frac{1}{2!}D_x^2(f(a)) + \cdots + \frac{1}{n!}D_x^n(f(a)) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}(D_x)^{n+1}(f(a + \theta x))$$

Przykład 4.1.1. Weźmy sobie taką $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$
Wyznaczmy $D_x(f(a_1, a_2))$:

$$D_x(f(a_1,a_2)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}x_2\right) f(a_1,a_2) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1} f(a_1,a_2)x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} f(a_1,a_2)x_2 = 2a_1x_1 + 2a_2x_2$$

$$(D_x)^2(f(a_1,a_2)) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(a_1,a_2)x_1x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(a_1,a_2)x_1x_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(a_1,a_2)x_2x_1 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(a_1,a_2)x_2x_2 =$$

$$2x_1x_1 + 0x_1x_2 + 0x_2x_1 + 1x_2x_2 = 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$(a_1 + x_1)^2 + (a_2 + x_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + 2x_1^2 + 2x_2^2$$