Analiza Matematyczna

Rafal Wlodarczyk

INA 1 Sem. 2023

1 Wykład I

Liczby naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Definicja 1.0.1. Zasada indukcji matematycznej. Niech będzie dana własność liczb naturalnych, która czyni zadość warunkom:

1. Liczba 1 posiada tę własność.
2. Jeżeli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n+1$.

Zasada indukcji matematycznej mówi, że przy tych założeniach każda liczba naturalna posiada tę własność.

Przykład 1.0.1. $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

1. $n = 1$ $L = 1$ $P = \frac{1(1+1)}{2}$
2. $\forall_{n \geqslant 1} 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \implies 1 + 2 + \cdots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Z założenia indukcyjnego mamy:
   $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(\frac{n}{2} + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej teza zachodzi $\square$.

Przykład 1.0.2. Nierówność Bernoulli'ego. Niech $a \geqslant 1$, wówczas dla dowolnego n naturalnego zachodzi nierówność: $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

1. $n = 1$, $L = (1+a)^1 = 1 + a$, $P = 1 + 1 \cdot a = 1 + a$, $L = P$, własność zachodzi
2. $\forall_{n>1} (1+a)^n \geqslant 1 + na \implies (1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1) \cdot a$
   $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geqslant^{ind.} (1+na)(1+a)$
   $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + a + na + na^2 = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1) \cdot a$
   Na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa.

Liczby Całkowite $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}$

Definicja 1.0.2. Liczby wymierne $\mathbb{Q}$ to liczby postaci:

$$\frac{p}{q}, \text{ gdzie } p, q \in \mathbb{Z} \text{ oraz } q \neq 0$$

Zbiór liczb wymiernych jest liniowo uporządkowany, to znaczy każde dwie liczby wymierne można połączyć jednym ze znaków:
$a < b, a > b, a = b$.
Dodawanie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1q_2+p_2q_1}{q_1q_2}$
Mnożenie $\mathbb{Q}$
$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1p_2}{q_1q_2}$
Własności:

1. Przemienność $a + b = b + a$
2. Łączność $a + (b + c) = (a + b) + c$
3. Rozdzielność $(a + b)c = ac + bc$

Uwaga. Jeżeli $(a < c \wedge c < b) \iff a < c < b$. Mówimy wtedy, że c leży między liczbami a i b.
Z twierdzenia Pitagorasa $1^2 + 1^2 = x^2 \implies x = \sqrt{2}$. D-d niewymierności $\sqrt{2}$ jako ćwiczenie.

Własność - zbiór $\mathbb{Q}$ jest zbiorem gęstym.
Niech a, b będą dowolnymi liczbami wymiernymi, takimi że $a < b$. Wówczas istnieje liczba c leżąca między liczbami a i b.
np.: $c = \frac{a+b}{2}$

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R}$

Definicja 1.0.3. Mówimy, że zbiór jest ograniczony jeżeli istnieją takie dwie liczby m, M, że:

$$\forall_{x\in X} m \leqslant x \leqslant M, X \in [m, M]$$

Uwaga analogicznie ograniczoność z dołu i góry osobno.

Definicja 1.0.4. Kres górny zbioru. Niech X będzie zbiorem ograniczonym z góry.

$$\forall_{x\in X} \exists_M x \leqslant M$$

Kresem górnym zbioru nazywamy najmniejszą liczbę ograniczającą zbiór X z góry.
$(-\infty, 1)$: kres 1
$(-\infty, 1) \cup (1, 2]$: kres 2

1.1 Aksjomat Zupełności

Każdy ograniczony z góry podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny.

Definicja 1.1.1. Kres dolny zbioru nazywamy największą liczbą ograniczjącą zbiór X z dołu.

$$\forall_{x\in X} \exists_m m \leqslant X$$

$(-1, +\infty)$: kres -1
$(2, +\infty)$: kres 2
Kres górny zbioru i kres dolny zbioru to pojęcia dualne.

1.2 Wartość bezwzględna

$|a| = \begin{cases} a, a \geqslant 0 \\ -a, a < 0 \end{cases}$

Przykład 1.2.1. Własności:

- $|a| = |-a|$
- $|ab| = |a| \cdot |b|$
- $|a+b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a-b| \leqslant |a| + |b|$
- $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

Definicja 1.2.1. Współczynnik Newtona. Zakładamy że n, k są liczbami naturalnymi, takimi że $n \geqslant k$. Współczynnik Newtona określam wzorem:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Własności:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
4. $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

- Symbol sumy $\sum$
- Symbol iloczynu Π

Definicja 1.2.2. Nierówność Cauchy'ego - Schwarza. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

lub równoważnie:

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n b_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2$$

drugi

2 Wykład II

Definicja 2.0.1. Ciąg liczbowy to funkcja z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{R}$. Stosujemy zapis $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Przykłady:

- $a_n = c + (n-1)d$ - arytmetyczny
- $b_n = cq^{n-1}$ - geometryczny
- $c_n = n!$
- $d_{n+1} = 2^{d_n}$ - rekurencyjny

Definicja 2.0.2. Ciąg monotoniczny.

1. a_n jest rosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n < a_{n+1}$
2. a_n jest malejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a_n > a_{n+1}$
3. a_n jest niemalejący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \leqslant a_{n+1}$
4. a_n jest nierosnący $\iff \forall_{n\in\mathbb{N}} a \geqslant a_{n+1}$

Analogicznie definiujemy ciąg monotoniczny od pewnego miejsca:

1. a_n jest rosnący od $n_0 \iff \forall_{n>n_0} a_n < a_{n+1}$

Definicja 2.0.3. Liczbą graniczną ciągu a_n nazywamy liczbę g, taką że:

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0}\forall_{n>n_0}|a_n - g| < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $lim_{n\to\infty}a_n = g$ lub $a_n \to g$.
$|a_n - g| < \varepsilon \iff -\varepsilon < a_n - g < \varepsilon \iff g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$

3 Wykład III

Twierdzenie 3.0.1. Twierdzenie (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
a) Ciąg rosnący i ograniczony z góry jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \leqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n < M} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
b) Ciąg malejący i ograniczony z dołu jest zbieżny.
$\forall_{n>n_0} a_n \geqslant a_{n+1}$ i $\forall_{n\in\mathbb{N} a_n > m} \implies \exists \lim_{n\to\infty} a_n$
Idea dowodu:
$A = \{a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \in \mathbb{R}$
A - ograniczony, istnieje kres górny zbioru A
Każdy ograniczony podzbiór liczb rzeczywistych ma kres
czyli $sup(A)$ (??) $sup(A) = lim_{n\to\infty a_n}$

Przykład 3.0.1. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny: $a_1 = \sqrt{2}\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$
Idea dowodu indukcyjnego:
1. $a_n \leqslant 2$, indukcja po n
2. $a_n \leqslant a_{n+1}$, indukcja po n. $a_n \leqslant a_{n+1} \implies a_{n+1} \leqslant a_{n+2}$
3. $\sqrt{2 + a_n} \leqslant \sqrt{2 + a_{n+1}}$ kwadrat stronami rozwiązuje krok indukcyjny

$\forall_{n\geqslant 1} a_n \leqslant 2 \implies a_{n+1} \leqslant 2$
$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \leqslant_{z.ind} \sqrt{2+2} = 2$

Na mocy twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym istnieje:
$lim_{n\to\infty} a_n = g$

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n},\ lim_{n\to\infty} a_n = g = lim_{n\to\infty} a_{n+1} = g$$
$$g = \sqrt{2+g}$$
$$g^2 - g - 2 = 0$$
$$\Delta = 9 = 3^2$$
$$g_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \text{ lub } g_2 = \frac{1-3}{2} = -1, \text{ które nie zachodzi, zatem } lim a_n = g_1$$

Definicja 3.0.1. Podciąg ciągu
Niech a_n będzie dowolnym ciągiem. Niech $n_1, n_2, ...n_k$ będzie pewnym rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Wówczas ciąg $a_{nk} = (a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, ...)$ Nazywamy podciągiem ciągu.

Przykład 3.0.2. Rozważmy następujące przykłady ($\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$):
a) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$
$a_{2k} = (-1)^n = 1$, $k \in \mathbb{N}$
$(a_2, a_4, a_6, ...)$ - podciąg o wyrazach parzystych.
b) $a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1, n \in \mathbb{N}$
$(a_1, a_3, a_5, ...)$ - podciąg o wyrazach nieparzystych.
$S = \{1, -1\}$
c) $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots)$
$a_{2k-1} = 2k - 1$ - podciąg o wyr. nieparzystych.
$a_{2k} = \frac{1}{2k}$ - podciąg o wyr. parzystych.
$S = \{0, \infty\}$ d) $sin(\frac{n\pi}{3})$ - $plot(sin(\frac{n\pi}{3}), (n, 1, 17)) \leftarrow$ wolframalpha

Definicja 3.0.2. Liczba s jest punktem skupienia ciągu $a_n \iff s$ jest granicą właściwą lub niewłaściwą pewnego podciągu. Oznaczenie S - zbiór punktów skupienia.

Jeśli $lim_{n\to\infty} a_n = \infty \implies a_n$ ma granicę niewłaściwą $+\infty$

- $sup()$ - superior - kres górny
- $inf()$ - inferior - kres dolny

Definicja 3.0.3. Granica górna ciągu a_n to kres górny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} sup(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

Definicja 3.0.4. Granica dolna ciągu a_n to kres dolny granic podciągu a_n.
$\lim_{n\to\infty} inf(a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n$

$\lim inf(a_n) \leqslant \lim sup(a_n)$, równość dla granicy ciągu.

Twierdzenie 3.0.2. Twierdzenie (Bolzano - Weierstrassa). Każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny. (English Wikipedia)
D-d. $\forall_{n\in\mathbb{N}} m \leqslant a_n \leqslant M$ Dzielimy przedział $[m_1, M_1]$ na dwa podprzedziały: $[m_1, \frac{m_1+M_1}{2}]$, $[\frac{m_1+M_1}{2}, M_1]$. Przynajmniej w jednym z przedziałów jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu. Oznaczmy tę połówkę przez $[m_2, M_2]$. Postępujemy tak dalej i mamy:

$\forall_{k\in\mathbb{N}} m_1 \leqslant m_k \leqslant a_{nk} \leqslant M_k \leqslant M_1$
M_k malejący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_1
m_k rosnący i ograniczony $\implies$ zbieżny g_2
$g_1 = g_2 = g$
$M_k - m_k = \frac{M_1 - m_1}{2}$
$M_k \to g_1; m_k \to g_2$, ponieważ $\frac{M_1-m_1}{2^k} \to 0$

Definicja 3.0.5. Ciąg a_n nazywamy ciągiem Cauchy'ego, wtedy i tylko wtedy, gdy: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0} \forall_{n,m>n_0} |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Twierdzenie 3.0.3. Ciąg liczb rzeczywistych jest zbieżny $\iff$ jest ciągiem Cauchy'ego.

Przykład 3.0.3. $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$
$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 2 + 1/2$.

1. x_n jest rosnący $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \iff x_{n_1} > x_n$

2. x_n jest ograniczony (pamiętając, że $\forall_{n>3} 2^n \leqslant n!$ czyli $\frac{1}{4!} < \frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{5!} < \frac{1}{2^5}$)...
   Dla $n > 3$ $x_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \leqslant$
   $2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + ... + \frac{1}{2^n}$
   $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^3}$
   Istnieje $lim_{n\to\infty} x_n = e = 2.7182...$
   $sum(1/k!, (k, 0, 300)) \leftarrow$ wolframalpha

Twierdzenie 3.0.4. Liczba eulera wyraża się wzorem:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$$

Twierdzenie 3.0.5. Niech a_n będzie dowolnym ciągiem takim, że: $lim_{n \implies \infty} a_n = \infty$. Wówczas:

$$lim_{n \implies \infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e, (1 - \frac{1}{a_n})^{a_n} = \frac{1}{e}$$

Przykład 3.0.4. $\lim((1 + \frac{1}{2n})^{2n})^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

Własność: $lim_{n\to\infty} a_n = g_1 \wedge lim_{n\to\infty} b_n = g_2 \implies lim_{n\to\infty}(a_n^{b_n}) = g_1^{g_2}$

Przykład 3.0.5. $lim(1 - \frac{1}{n})^{n/2} = lim\left((1 - \frac{1}{n})^n\right)^{\frac{\frac{n}{2}}{n}} = (\frac{1}{e})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Wskazówka: $limit\left((1 + \frac{1}{2^n})^{n+1}, n \to infty\right)$

Definicja 3.0.6. Szereg o wyrazach nieujemnych. Dla dowolnego ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ o wyrazach nieujemnych, tworzymy ciąg sum częściowych:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, S_N = a_1 + a + 2 + ... + a_N$$

Przykładowo dla e $S_0 = \frac{1}{0!}, S_1 = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} \ldots$.
Jeżeli ciąg S_n jest zbieżny to piszemy, że:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_N$$

(granica to suma szeregu)

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant S_N < M$$

Przykład 3.0.6. $apart(1/(n \cdot (n+1)), n) \leftarrow$ wolframalpha

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = S_N$$
$$S_1 = \frac{1}{2}, S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3}, \text{ zatem:}$$
$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}, \text{ finalnie:}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = lim_{n\to\infty} S_N = lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n+1}) = 1$$

Przykład 3.0.7. $a + aq + ... + aq^n = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, dla $|q| < 1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q}$$

Przykład 3.0.8. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

Przykład 3.0.9. Szereg harmoniczny. $H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, $\lim_{N\to\infty} = \infty$, wolny wzrost do ∞
$H_{2^{n+1}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + \frac{1}{2^3+3} + \cdots + \frac{1}{2^3+2^3} + \frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^n+2^n}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} \geqslant 2 \cdot \frac{1}{2+2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... \geqslant 4 \cdot \frac{1}{2^2+2^2} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^3+1} + \frac{1}{2^3+2} + ... \geqslant 8 \cdot \frac{1}{2^3+2^3} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + ... \geqslant 2^n \cdot \frac{1}{2^n+2^n} = \frac{1}{2}$
$H_{2^{n+1}} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot n = 1 + \frac{1}{2}(n+1)$
$H_{2^{n+1}} \geqslant 1 + \frac{n+1}{2}$
$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$

Załóżmy, że $2^N = k \implies N = log_2()$
$H_k \geqslant 1 + \frac{\log_2(k)}{2} \to \infty$
Na mocy twierdenia o dwóch ciągach $H_k \to \infty$

Następny wykład - kryteria zbieżności szeregów: kryterium kondensacyjne.

Definicja 3.0.7. Warunek konieczny zbieżności szeregów. Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $lim_{n\to\infty} a_n = 0$. (dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$).

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ jest rozbieżny, bo nie jest spełniony warunek konieczny
$lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$
Warunek konieczny nie jest wystarczający.

4 Wykład IV

4.1 Kryteria zbieżności szeregów

Twierdzenie 4.1.1. Szereg o wyrazach dodatnich jest zbieżny $\iff$ jest ograniczony.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n > 0, \text{ czy } S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$S_{N+1} - S_N = a_{n+1} > 0, S_N$ - rosnący. Jeżeli S_N jest ograniczony to jest zbieżny.
Wniosek:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, dla $n \geqslant 2$:
$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant 1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 2 - \frac{1}{N} \leqslant 2$

Twierdzenie 4.1.2. Kryterium porównawcze. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oraz $a_n, b_n > 0$:

Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} a_n \leqslant b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Twierdzenie 4.1.3. Jeżeli $\sum_{n>n_0}^{\infty} \leqslant \sum_{n>n_0}^{\infty}$ i $\sum_{n>n_0}^{\infty} a_n = \infty$ (a_n rozbieżny), to wówczas $\sum_{n>n_0}^{\infty} b_n = \infty$ (b_n rozbieżny).

Wniosek: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \infty$ dla $p \leqslant 1$, bo $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.4. Twierdzenie o zagęszczaniu. Zakładamy, że $a_n \geqslant 0$ i $a_{n+1} \leqslant a_n$.
Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.1. Rozważmy poniższy przykład ciągu:
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \implies^{tw.zag}$
$2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + 8 \cdot a_8$

Przykład 4.1.2. Zastosowanie Tw. o zagęszczaniu.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, p \in \mathbb{R}$ zbieżny $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n})^p$ jest zbieżny.
$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\frac{1}{2^n})^p = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^{np}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{np-n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(p-1)}}$ jest zbieżny dla $p > 1$
Wniosek 1: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny dla $p \leqslant 1$

Definicja 4.1.1. Kryterium d'Alemberta: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geqslant 0$:

- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
- Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n > n_0} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga zbieżności.

Idea d-d:
$lim_{n\to\infty} sup|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = q, q < 1$
$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q$
$a_{n+1} < a_n q$
$a_n < a_0 q^{n-1}$
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^{n-1}$ - zbieżne

Przykład 4.1.3. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n = \frac{n!}{n^n}$:
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$
$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1$
Z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Przykład 4.1.4. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ jest rozbieżny. ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n} = \infty$)

Przykład 4.1.5. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Przykład 4.1.6. Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{N+1} \to 1$
$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cdots = \frac{n^2+n}{n^2+3n+2} = 1$ Kryterium d'Alamberta nic nie powie.

Simplify (wolframalpha):
$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n}$

discreteplot$(n^2, (n, 1, 20))$ (wolframalpha)

discreteplot$(n^2, n, 1, 20)$ (mathematica)

Definicja 4.1.2. Kryterium Cauchy'ego. $\sum_{n=1}^{\infty}, a_n \geqslant 0$

1. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \leqslant q < 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
2. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny.
3. Jeżeli $\exists_{n_0} \forall_{n>n_0} \sqrt[n]{a_n} = 1$, to kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga zbieżności.

Idea:
$\sqrt[n]{|a_n|} < q$, $0 < q < 1$ czyli $|a_n| < q^n$ więc $a_n < q^n$ zatem $\sum_{n=1}^{\infty} q^r$ zbieżny.

Przykład 4.1.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}, a_n = \frac{n^2}{2^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$ - zbieżny

Przykład 4.1.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{2^n+5^n}, a_n = \frac{7^n}{2^n+5^n}$
z kryterium Cauchy'ego: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{7}{\sqrt[n]{2^n+5^n}} = \frac{7}{5} > 1$ - rozbieżny

Przykład 4.1.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n}$
kryterium Cauchy'ego nie działa: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{5}{\sqrt[n]{5^n+3^n}} \implies 1$
$a_n = \frac{5^n}{5^n+3^n}$, sprawdźmy warunek konieczny zbieżności:
$lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n+3^n} = 1 \neq 0$
Ciąg jest rozbieżny.

Definicja 4.1.3. Zbieżność bezwzględna. Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dowolnych. Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład 4.1.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n}$ jest zbieżny bezwzględnie.
$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n n^2}{2^n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} < \infty$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ jest zbieżny (kryterium d'Alemberta)

FAKT. Badanie zbieżności bezwzględnej szeregu sprowadza się do badania zbieżności szeregu o wyrazach nieujemnych.

Twierdzenie 4.1.5. Zbieżność bezwzględna implikuje zwykłą zbieżność.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ jest zbieżny} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zbieżny.}$$

Uwaga: twierdzenie w drugą stronę nie działa.

Przykład 4.1.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nie jest zbieżny bezwzględnie, bo:
$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$

Twierdzenie 4.1.6. Kryterium Abela (Dirichleta). Niech zachodzą następujące warunki:

1. $a_n \geqslant 0$
2. $a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ...$
3. $lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Wówczas:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n \text{ jest zbieżny}$$

Przykład 4.1.12. Pokażmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny. Z kryterium Abela:
$a_n = \frac{1}{n} \geqslant 0 \wedge a_1 \geqslant a_2 \geqslant ... \geqslant a_n \geqslant ... \wedge lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Szereg jest zatem zbieżny.

Przykład 4.1.13. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)(-1)^n a_n = -1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$
Dalej z kryterium Abela...

Ciągi to funkcje $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

4.2 Funkcje

Analizujemy funkcje $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Definicja 4.2.1. Dziedzina funkcji (domain): $dom(f)$ - zbiór wszystkich x dla których funkcja jest określona.

Definicja 4.2.2. Zbiór wartości (range): $rng(f) = \{f(x) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.3. Wykres funkcji (graph): $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$

Definicja 4.2.4. Funkcja różnowartościowa (one-to-one function):

$$\forall_{x,y\in A} x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

Uwaga. Jeśli $f : A \to B$ jest różnowartościowa, to istnieje dokładnie jedna funkcja
$f^{-1} : rng(f) \to A$, taka że: $\forall_{x\in A} f^{-1}(f(x)) = x$ oraz $\forall_{y\in rng(f)} f(f^{-1}(y)) = y$.

Definicja 4.2.5. Funkcje monotoniczne $f : A \to B$:

1. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) < f(y))$ - rosnąca
2. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) > f(y))$ - malejąca
3. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \leqslant f(y))$ - niemalejąca (słabo rosnąca)
4. $\forall x, y \in A(x < y \implies f(x) \geqslant f(y))$ - nierosnąca (słabo malejąca)

Definicja 4.2.6. Złożenie funkcji $f : A \to B$, $g : B \to C$ wówczas:

$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Przykład 4.2.1. Rozważmy następujące funkcje i ich złożenia:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$
$f(x) = x^3 + 1, g(y) = sin(y)$
$g \circ f(x) = g(f(x)) = sin(f(x)) = sin(x^3 + 1)$
Przykład drugi:
$g : \mathbb{R} \to [-1, 1], f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(sin(x)) = sin^3(x) + 1$

5 Wykład V

Funkcje elementarne.

1. $f(x) = ax + b$ - funkcja liniowa
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ - funkcja kwadratowa
3. $W(x)$ - wielomian (wymierna)
4. $f(x) = a^x$, $a > 0$ - funkcja wykładnicza
   $a^b \cdot a^c = a^{b+c};'' (a^b)^c = a^{b \cdot c}$
5. $f(x) = log_a(x)$, $a > 0$ - funkcja logarytmiczna, odwrotna do $f(x) = a^x$
   $log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y);$
   $log_a(x^y) = ylog_(x)$
   Wzór na zamianę podstawy logarytmu:
   $log_a(x) = \frac{log_b(x)}{log_b(a)}$
6. e - Liczba Eulera - $e \approx 2.7172$
   $log_e(x) = ln(x)$
   $log_a(x) = ln(x) \cdot log_a(e)$

5.1 Trygonometria

$$e^{it} = cost + isint$$
$$cost = Re(e^{it})$$
$$sint = Im(e^{it})$$

Szeregi liczby Eulera:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i-t)^k}{k!} = e^{it}$
- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}[sum(1k!, (k, 0, 1000))]$

Zobaczmy wzór:
$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
$e^{ix} \cdot e^{iy} = e^{ix+iy} = e^{i(x+y)} =_{def} = cos(x+y) + isin(x+y)$
$(cosx + isinx)(cosy + isiny) = (cosx)(cosy) + (cosx)(sinx)i + (sinx)(cosy) + i^2 sinxsiny$
$((cosx) + (cosy) - (sinx)(siny)) + i((cosx)(siny) + (sinx)(cosy))$
$Re = Re, Im = Im$, a zatem d-d.

Funkcje $tg(x)$, $ctg(x)$, $tg(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}, ctg(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$
$plot(tan(x), (x, -20, 20))$

5.2 Funkcje odwrotne do trygonometrycznych

$sin(x)$ w $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jest bijekcją, dzięki czemu można zdefiniować funkcję odwrotną.

- $arcsin(x) : [-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $arccos(x) : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- $arctg(x) : \mathbb{R} \to (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $arcctg(x) : \mathbb{R} \to (0, \pi)$

5.3 Funkcje hiperboliczne

$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Jedynka hiperboliczna:

$$cos^2h - sin^2h(x) = 1$$

D-d: $cosh^2x - sinh^2x = (\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - (\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2 =$
$\frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} + 2e^x \cdot e^{-x}}{4} - \frac{e^x \cdot e^x + e^{-x} \cdot e^{-x} - 2e^x \cdot e^{-x}}{4} =$
$\frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1$

Definicja $tgh, ctgh$:

- $tgh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$
- $ctgh(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$

5.4 Funkcje sigmoidalne

1. funkcja logistyczna $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$, $\sigma(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$
   Uogólniona:

$$f(x) = \frac{1}{(1+e^x)^\alpha}, \alpha > 0$$

2. tangens hiperboliczny $f(x) = tgh(x)$

3. arcus tangens hiperboliczny $f(x) = arctg(x)$
4. error function - funkcja błędu

$\sigma(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot tgh(\frac{x}{2})$

5.5 Funkcje okresowe

Definicja A - dziedzina f: $\exists_T$ takie, że $\forall_{x \in A} f(x+T) = f(x)$

5.6 Funkcje egzotyczne

1. $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - cz. całkowita x. Najw. całkowita nieprzekraczająca x.
2. $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - podłoga liczby x (to samo co część całkowita)
3. $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}, k \leqslant x\}$ - sufit liczby x
4. $sgn(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$

$[5.5] = 5$, $[4.7] = 4$, $[-3.4] = -4$

5.7 (Heine) Granica funkcji

Zakładamy, że istnieje $\Delta > 0$ taka, że f jest określona na $(a-\Delta, a) \cup (a, a+\Delta)$ (sąsiedztwie punktu a).

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \iff \forall_{x_n \implies a, x_n \neq a} lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Przykład 5.7.1. Policzmy granicę następującej funkcji:
$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$
Weźmy $x_n \to 0; x_n \neq 0$: $\lim_{n \to \infty} x_n^2 = lim_{n \to \infty} \cdot lim_{n \to \infty} = 0 \cdot 0 = 0$

Przykład 5.7.2. Policzmy granicę następującej funkcji:
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{1} = 2$

Przykład 5.7.3. $\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$ - dowód z tw. o trzech funkcjach.

5.8 (Cauchy) Granica funkcji

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \iff \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{x \in A}\ 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - g| < \varepsilon$$

Symbolu $\lim_{x \to a} f(x)$ - używamy również na oznaczenie granicy niewłaściwej.

Przykłady:

- $\lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{n} \to 0, x''_n = \frac{-1}{n} \to 0$, ale $f(x'_n) \to \infty, f(x''_n) \to -\infty$
- $\lim_{x \to 0} sin(\frac{1}{x})$ nie istnieje $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0, x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \to 0$, ale $f(x'_n) = 0, f(x''_n) = 1$

5.9 Granice Jednostronne

Granica prawostronna:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = g \iff \forall_{x_n \to a, x_n \neq a, x_n > a} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Granica lewostronna:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = g \iff \forall_{x_n \to a, x_n \neq a, x_n < a} \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

$\lim_{x \to 1^+} |x^2 - x|$ - $limit(abs(x^2 - x), x \to 1, assumptions \to rightarrowx > 1) \leftarrow$ wolfram
$Limit\{Abs[x^2 - x], x \to 1, assumptions \to x > 1\} \leftarrow$ mathematica

5.10 Granica w nieskończoności

$x_n \to \infty \lim_{n \to \infty} f(x_n)$
$\lim_{x \to \infty} f(x) = g \iff \forall_{n \to \infty} f(x_n) = g$

Przykład 5.10.1. Zobaczmy granice w nieskończoności:

- $\lim_{x \to \infty} e^x = e^\infty = \infty$
- $\lim_{x \to \infty} a^x = \infty$, o ile $a > 1$
- $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$

Przykład 5.10.2. $\lim_{x \to -\infty} e^x = \begin{cases} x = -t \\ t \to \infty \end{cases} = \lim_{t \to \infty} e^{-t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^t} = 0$

5.11 Twierdzenie o arytmetyce granic

1. $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
2. $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

5.12 Twierdzenie o trzech funkcjach

Zakładamy, że $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ oraz $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = g$, wtedy:

$$\lim_{x \to a} g(x) = g$$

Przykład 5.12.1. $\lim \left(x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$
$0 \leqslant |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leqslant |x| \cdot 1$

Twierdzenie 5.12.1. Definicja z granic ciągów $\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \iff \lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, przenosi się na granice funkcji:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$$

5.13 Notacja duże O, notacja asymptotyczna

Mamy dwa ciągi $a(n)$, $b(n)$. Mówimy że:

$$a(n) = O\left(b\left(n\right)\right) \iff \exists_C \exists_{n_0} \forall_{n>n_0} |a(n)| \leqslant C\,|b(n)|$$

Przykład 5.13.1. Przykłady notacji big O:

- $a(n) = n^2 - \frac{1}{2}n = O(n^2)$
- $b(n) = \left(\frac{1}{2}\right)n^2 + n = O(n^2)$
  $\forall_{n\geqslant 1} \frac{1}{2}n^2 + n \leqslant \frac{1}{2}n^2 + n^2 = \frac{3}{2}n^2, C = \frac{3}{2}$
- $c(n) = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0$, $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$
  $c(n) = O(n^2), c = |a_2| + |a_1| + |a_0|$

Twierdzenie 5.13.1. $f(n) = O(g(n)) \iff \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| < \infty$

Zastosowania:
$n^3 - n^2 + 1 = O(n^3)$, ponieważ:
$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{n^3-n^2+1}{n^3}\right| = 1 < \infty$

Przykład 5.13.2. Przykład ambitny:
Ustalmy k - stała: $\binom{n}{k} = O(n^k)$ - dowód jako zadanie z (*).

Kolejno:
$n^2 + n = O(n^2), n^2 + n = O(n^3)$ - na interesuje najmniejsze O

Definicja 5.13.1. Mówimy, że:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \iff f(n) = O(g(n)) \land g(n) = O(f(n))$$

Przykład 5.13.3. $\frac{1}{2}n^2 + n = \Theta(n^2)$

Twierdzenie 5.13.2. $\left(\lim \left|\frac{f(n)}{g(n)}\right| = g \land 0 < g < \infty\right) \implies f(n) = \Theta(g(n))$

Oraz kolejno (zaawansowane):
$\binom{n}{k} = \Theta(n^k)$
$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n^k + \Theta(n^{k-1})$

6 Wykład VI

Przykład 6.0.1. Policzmy granicę:

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, podstawiając $\frac{1}{x} = t, t \to \infty$ zatem $\lim_{t\to\infty} t$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, podstawiając $\frac{1}{x} = t, t \to -\infty$ zatem $\lim_{t\to-\infty} t$

Przykład 6.0.2. Pokażmy, że $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
Granica prawostronna:
$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, podstawienie $x = \frac{1}{t}$, $\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e$
Granica lewostronna:
$\lim_{x\to 0-}(1+x)^{\frac{1}{x}}$, podstawienie $x = \frac{1}{t}$, $\lim_{t\to-\infty}(1+\frac{1}{t})^t$, podstawienie $t = -s$,
$\lim_{s\to\infty}(1-\frac{1}{s})^{-s} = \frac{1}{e^{-1}} = e$

6.1 Asymptoty

Definicja 6.1.1. Prosta $x = a$ jest asymptotą pionową lewostronną funkcji f w punkcie a, jeżeli zajdzie jeden z warunków:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \text{ lub } \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$$

Analogicznie definiujemy asymptotę pionową prawostronną dla $x \to a^+$.

Definicja 6.1.2. Prosta jest asymptotą pionową jeżeli jest jednocześnie asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.

Przykład 6.1.1. Asymptoty pionowe mogą wystąpić w punktach poza dziedziną funkcji: $f(x) = \frac{1}{x+1}, \lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty, \lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \implies$ prosta $x = -1$ jest asymptotą pionową obustronną funkcji $f(x)$.

Definicja 6.1.3. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Twierdzenie 6.1.1. Prosta $y = ax+b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax$$

Jeżeli te granice nie istnieją to funkcja nie posiada asymptoty ukośnej w ∞.

Idea dowodu:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{(f(x)-(ax+b))}{x} = \frac{0}{\infty} = 0$$
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}) \implies a = \lim_{f\to\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - (ax))$$

Twierdzenie 6.1.2. Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) - ax$$

Przykład 6.1.2. Narysujmy wyres funkcji: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, pokażmy, że prosta $y = x+1$ jest asymptotą ukośną $f(x)$ w $\pm\infty$.
$a_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x-1} = 1$
$a_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{x-1} = 1$
$b_+ = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$
$b_- = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = 1$

6.2 Ciągłość funkcji

Definicja 6.2.1. Ciągłość funkcji (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym otoczeniu punktu a, tzn. na przedziale $(a - \Delta, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = lim_{x \to a} f(x)$$

Przykład 6.2.1. Zobaczmy jak w praktyce można zastosować te definicje:
$\lim_{x \to a} f(x) = f(\lim_{x \to a} x) = f(a)$
$\lim_{x \to 1}(x+1)^2 = (\lim_{x \to 1}(x) + 1)^2 = (1+1)^2 = 2^2 = 4$

Przykład 6.2.2. Przykłady:

- $f(x) = x^2$, $dom(f) = \mathbb{R}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.
- $f(x) = sin(1/x)$, $dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny.

Twierdzenie 6.2.1. Ciągłość prawostronna (Heinego). Zakładamy, że f jest określona na pewnym prawostronnym otoczeniu punktu a, tzn. na przedziale $(a, a + \Delta)$ dla pewnego ustalonego $\Delta > 0$. Mówimy, że f jest prawostronnie ciągła w punkcie a, wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Analogicznie definiujemy ciągłość lewostronną dla $x \to a^-, [a - \Delta, a]$

Twierdzenie 6.2.2. Funkcja jest ciągła w punkcie a jeżeli jest jednocześnie ciągła prawostronnie i lewostronnie.

Przykład 6.2.3. Zbadaj ciągłość podanej funkcji w 0 w zależności od parametru a:
$f(x) = \begin{cases} x + a, \text{dla } x \geqslant 0 \\ x^2 + 1, \text{dla } x < 0 \end{cases}$

Liczymy: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}(x^2 + 1) = 1$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}(x + a) = a$
$a = 1$

Definicja 6.2.2. Ciągłość funkcji (Cauchy'ego). Funkcja f jest ciągła w punkcie $a \iff$

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_x |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Twierdzenie 6.2.3. Jeżeli f, g są ciągłe w punkcie $x_0 = a$, to wówczas:

1. $f(x) \pm g(x)$
2. $f(x) \cdot g(x)$
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$, o ile $g(a) \neq 0$

są ciągłe w punkcie $x_0 = a$.

Wniosek. Wielomiany i funkcje wymierne są ciągłe w swojej dziedzine. Funkcje trygonometryczne są ciągłe w swojej dziedzine.

Twierdzenie 6.2.4. Złożenie funkcji ciągłych f, g jest funkcją ciągłą.

$$f \text{ ciągła} \wedge g \text{ ciągła} \implies f \circ g \text{ ciągła}$$

Zobaczmy przykład: $\lim_{x \to a}\left(cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = cos\left(\lim_{x \to a} \frac{1}{x}\right) = cos\left(\frac{1}{a}\right)$

6.3 Mnożenie szeregów

$(1 + 2x + x^2)(-1 + 3x + x^2 + x^3) = (1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3)x^3 + (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1)x^4 + (1 \cdot 1)x^5$
$(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3) = a_0b_01+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+...$
$= c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$

$c_0 = \sum_{k=0}^{0} a_kb_{0-k}$; $c_1 = \sum_{k=0}^{1} a_kb_{1-k}$; $c_2 = \sum_{k=0}^{2} a_kb_{2-k}$

Twierdzenie 6.3.1. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów.
Zakładamy, że $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < \infty$, wtedy$c_0 \sum_{k=0}^{0} a_kb_{0-k}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \text{ gdzie } c_n = \sum_{k=0} na_kb_{n-k} \text{ - dyskretny splot}$$

6.4 Funkcja exp(x)

Definicja 6.4.1. Niech $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$\exp(x)$ jest poprawnie zdefiniowna. $a_n = \frac{x^n}{n!}, \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{(n)!}{x^n} = \lim_{n\to\infty} |\frac{x}{n+1}| = 0 \to$ jest zbieżność bezwzględna $x \in \mathbb{R}$.

Przykład 6.4.1. Dyskretny splot exp:
$\exp(x) + \exp(y) = \exp(x + y)$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$

$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$ dyskretny splot szeregów a_n, b_n
zatem:

$$c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} x^ky^{n-k} == \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^ky^{n-k} = \frac{1}{n!}(x + y)^n$$

Przykład 6.4.2. $\forall_{x\in\mathbb{R}} exp(x) > 0$

1. $x > 0$ $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 0$, poniweaż $(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1)$
2. $\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x + (-x)) = \exp(0) = 1$
   $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} > 0$

Przykład 6.4.3. Funkcja $\exp(x)$ jest ciągła:
$\lim_{x\to x_0} = \lim_{h\to 0} \exp(x_0 + h) = \lim_{h\to 0} \exp(x_0) \exp(h)$
$= \exp(x_0) \lim_{h\to 0} \exp(h) = \exp(x_0) \cdot 1$

7 Wykład VII

Konfa ...

8 Wykład VIII

8.1 Suma i iloczyn pochodnych

Twierdzenie 8.1.1. Pochodna sumy jest sumą pochodnych:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

D-d. $(f(x)+g(x))' = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{g(x+h)-g(x)}{h} =^{*} f'(x) + g'(x)$ ($*$ granica sumy jest sumą granic)

Twierdzenie 8.1.2. CHAIN RULE. Pochodna iloczynu funkcji wyraża się wzorem:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

D-d. $(f(x)\cdot g(x))' = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x)+f(x))\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (g jest różniczkowalna $\implies$ g ciągła)

Wniosek: $(c \cdot f(x))' = (c)' \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = 0 \cdot f(x) + c \cdot f'(x) = c \cdot f'(x)$ (Liniowość pochodnej)

8.2 Odwołanie - odwzorowanie liniowe

$A : X \to Y$
$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$
$A(c \cdot x) = c \cdot A(x)$

8.3 Odwrotność pochodnej

Pokaż, że: $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2}$ (lista zadań)
$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h}$

8.4 Pochodna ilorazu

Twierdzenie 8.4.1. Pochodna ilorazu dwóch funkcji $f(x), g(x)$ wynosi:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

D-d. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{-g'(x)}{g(x)^2}\right) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Przykład 8.4.1. Rozważmy poniższy wzór:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}-\{0\}} (x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

D-d. Wykorzystujemy wzór dwumianowy Newtona:
$(x^n)' = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right)-x^n}{h}$, Załóżmy, że $n \geqslant 2$:
$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right)-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^0x^n\binom{n}{0}+h^1x^{n-1}\binom{n}{1}+\left(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right)-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^n+hx^{n-1}n+\left(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right)-x^n}{h} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + \left(\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}h^k x^{n-k}\right) = nx^{n-1}$

Przykład 8.4.2. $\frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n\right) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1}$

Przykład 8.4.3. Sinus, cosinus:
$sin'(x) = cos(x)$ tydzień temu
$cos'(x) = -sin(x)$ ćw

Przykład 8.4.4. Policzmy $tan'(x)$:
$tan'(x) = (\frac{sinx}{cosx})' = \frac{sin'(x)cos(x) - sin(x)cos'(x)}{cos(x)^2} = \frac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{(cos(x))^2}$

Przykład 8.4.5. Policzmy $cot'(x)$:
$cot'(x) = (\frac{cosx}{sinx})' = \frac{-sin^2(x)-cos^2(x)}{(sin(x))^2} = \frac{-1}{(sin(x))^2}$

8.5 Pochodne [e]

Przykład 8.5.1. Lemat techniczny: $\forall_{n\in\mathbb{R}} |e^n - 1 - h| \leqslant \frac{|h^2|}{2} e^{|h|} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$
$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = 1 + h + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!}$
$e^n - 1 - h = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2h^k}{(k+2)! \cdot 2}$
$|e^n - 1 - h| \leqslant \frac{|h|^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2|h|^k}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k \cdot 2}{(k+2)!} = \frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} \cdot \frac{2}{(k+1)(k+2)} <$
$\frac{h^2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!} = \frac{h^2}{2} e^{|h|}$

Twierdzenie 8.5.1. $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \iff \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^h-1}{h} - 1\right) = 0$
$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h} = 0 \iff \lim \left|\frac{e^h-1-h}{h}\right|$
$0 < \frac{|e^h - 1 - h|}{|h|} < \frac{\frac{|h|^2}{2} e^{|h|}}{h} = 0$ Z twierdzenia o trzech ciągach mamy dowód.

Przykład 8.5.2. $(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

Przykład 8.5.3. $(a^x)' = (e^{ln(a)\cdot x})' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{\ln(a)\cdot(x+h)} - e^{\ln(a)\cdot x}}{h} = \lim_{h\to 0} e^{\ln(a)\cdot x} \frac{e^{\ln(a)h} - e^1}{h} =$
$= \lim_{h\to 0} a^x \frac{e^{\ln(a)h} - 1}{\ln(a)h} \ln(a) = a^x \cdot \ln(a)$

8.6 Pochodna funkcji odwrotnej

Twierdzenie 8.6.1. Twierdzenie o pochodnej funkcji odwrotnej
$y = f(x)$, różniczkowalna i rosnąca (lub majlejąca) na $[a, b]$. Niech $f(x_0) = y_0$. Wówczas istnieje funkcja odwrotna $x = f^{-1}(y)$ oraz zachodzi wzór:

$$\left[f^{-1}(y)\right]'_{y=y_0} = \frac{1}{[f(x)]'}_{x=x_0}$$

D-d.
Weźmy: $f(x_0 + k) = y_0 + h$
$\left[f^{-1}(x)\right]_{y=y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(f(x_0+k)) - f^{-1}(f(x_0))}{y_0 + h - y_0} =$
$\lim_{k\to 0} \frac{x_0 + k - x_0}{f(x_0+k) - f(x_0)} = \lim_{k\to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0+k)-f(x_0)}{k}} = \frac{1}{\frac{1}{f'(x_0)}} = \frac{1}{[f(x)]'}_{x=x_0}$

Przykład 8.6.1. $f(x) = e^x$, $e^{x_0} = y_0, f^{-1}(y) = ln(y)$
$[ln(y)]'_{y=y_0} = \frac{1}{e^x}'_{x=x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} = \frac{1}{y_0}$ $(ln(y))' = \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.2. $\log_a(y)' = \left(\frac{ln(y)}{ln(a)}\right)' = \frac{1}{ln(a)} \cdot \frac{1}{y}$

Przykład 8.6.3. Sprawdźmy zrozumienie tw. o pochodnej funkcji odwrotnej:
$f(x) = sin(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}], y = sin(x)$
$(arcsin(y))' = \frac{1}{(sin(x))'} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
Następnie:
$f(x) = cos(x), x \in [0, \pi], y = cos(x)$
$(arccos(y))' = \frac{1}{(cos(x))'} = \frac{1}{-sin(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$
Kolejno:
$f(x) = tan(x), x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{pi}{2}], y = tan(x)$
$(arctan(y))' = \frac{1}{(tan(x))'} = cos^2(x) = \frac{1}{1+tan^2(x)} = \frac{1}{1+y^2}$

9 Wykład IX

Definicja 9.0.1. Maksimum Lokalne. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona na przedziale $(a - \delta, a + \delta)$. Jeśli:

$$\exists_{\delta_1 < \delta} \forall_{x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)} f(x) \leqslant f(a)$$

to f ma w punkcie a maksimum lokalne.

Maksimum lokalne właściwe - jw. z $\forall_{x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)}\ f(x) < f(a)$

Definicja 9.0.2. Minimum lokalne. Niech funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona na przedziale $(a - \delta, a + \delta)$. Jeśli:

$$\exists_{\delta_1 < \delta} \forall_{x \in (a - \delta_1, a + \delta_1)} f(x) \geqslant f(a)$$

to f ma w punkcie a minimum lokalne.

Minimum lokalne właściwe - jw. z $\forall_{x \in (a-\delta_1, a) \cup (a, a+\delta_1)}\ f(x) > f(a)$

Maksima lokalne, maksima lokalne właściwe, minima lokalne i minima lokalne właściwe to ekstrema funkcji!

Twierdzenie 9.0.1. Jeśli f jest różniczkowalna w punkcie c io posiada w tym punkcie ekstremum to $f'(c) = 0$.
D-d (dla maksimum, dla min. analogicznie):
Niech $h > 0$:
$f(c + h) \leqslant f(c), f(c - h) \leqslant f(c)$
$f(c + h) - f(c) \leqslant 0, f(c - h) - f(c) \leqslant 0$
$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0, \frac{f(c+h)-f(c)}{-h} \geqslant 0$
$f +' (c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$
$f -' (c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c-h)-f(c)}{-h} \geqslant 0$
$f +' (c) = f -' (c) \iff f +' (c) = f -' (c) = 0 \equiv f'(c) = 0$

Warunek $f'(c) = 0$ ma ekstremum jest tylko warunkiem koniecznym!

Twierdzenie 9.0.2. Twierdzenie Rolle'a. Niech f będzie ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, różniczkowalan wewnątrz (a, b). Jeśli $f(a) = f(b) = 0$, to istnieje takie c, że $a < c < b$ oraz $f'(c) = 0$.
D-d.
Jeśli f jest stała, $f'(x) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in (a, b)$ istnieje $c \in (a, b) : f'(c) = 0$.
Jeśli f nie jest stała, to istnieje dodatnia lub ujemna wartość funkcji f.
Niech istnieje wartość dodatnia $M = sup f(x)$. Z twierdzenia Weierstraßa:

$$\exists c \in (a, b) f(x) : M > 0, a < c < b, f(a) = f(b) = 0$$

Zatem funkcja f osiąga kres górny w punkcie c. To jest maksimum lokalne w punkcie c. $f'(c) = 0$ itd.

Twierdzenie 9.0.3. f - ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalan wewnątrz przedziału (a, b). Wówczas istnieje $0 < \theta < 1$, takie że:

$$\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a + \theta(b - a))$$

D-d (pomysł):
Rozważ fukcję $g(x) = f(a) - f(x) + (x - a)\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ i zastosuj tw. Rolle'a.
$g(a) = 0, g(b) = 0, \exists_{c\in(a,b)} : g'(c) = 0$
$c = a + \theta(b - a), \theta \in (0, 1)$
$g'(x) = \Big(f(a) - f(x) + (x - a)\tfrac{f(b)-f(a)}{b-a})\Big)' = -f'(x) + \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
$g'(a + \theta(b - a)) = 0 \iff f'(a + \theta(b - a)) = \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $\square$

Wnioski:

1. Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ to f jest stała na $[a, b]$.
   D-d.
   $x_1 < x_2 \in [a, b], \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(x_1 + \theta(x_2 - x_1)) = 0$
   $f(x_2) - f(x_1) = 0 \iff f(x_2) = f(x_1), f(x)$ jest stała na $[a, b]$
2. Jeśli $\forall_{a<x<b} f'(x) = g'(x) \implies f(x) = g(x)+$ stała.
   D-d.
   $f'(x) = g'(x) \iff f'(x) - g'(x) = 0 \iff (f(x) - g(x))' = 0 \implies f(x) - g(x) =$ stała $\iff f(x) = g(x)+$ stała.

Twierdzenie 9.0.4. Reguła de L'Hospitala. Zakładamy, że funkcje f i g są ciągłe na przedziale $[a, b]$. Ponadto $f(a) = g(a) = 0$. Wówczas:

$$\lim_{x\to a^+} \tfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \tfrac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ o ile granica istnieje.}$$

Przykład 9.0.1. Rozważmy podane przykłady: $\lim_{x\to 2} \tfrac{x-1}{x+1} = \tfrac{2-1}{2+1}$
$\lim_{x\to 2^+} \tfrac{x^2-4}{x-2} = \left[\tfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 2^+} \tfrac{2x}{1} = 4$

D-d. (szkic) $\lim_{x\to a^+} \tfrac{f(x)}{g(x)}$.
Podstawmy $x = a + h, h \to 0^+$. Mamy:
$\lim_{h\to 0^+} \tfrac{f(a+h)}{g(a+h)} =$
$= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} =$
$= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}} =$
$= \lim_{h\to 0^+} \tfrac{f'(a+\theta_1 h)}{g'(a+\theta_2 h)}$

9.1 Pochodna funkcji złożonej

Twierdzenie 9.1.1. Zakładamy, że g i f są rózniczkowalne oraz g' jest ciągła. Wówczas:

$$g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Przykład 9.1.1. Na przykład:

1. $\left(\left(x^2+1\right)^1 00\right)' = 100(x^2+1)^{100-1} \cdot (x^2+1)' = 100 \cdot (x^2+1)^9 9 \cdot 2x$
2. $\left(sin(x^2)\right)' = cos(x^2) \cdot (x^2) \cdot 2x$
3. $\left(sin^2(x)\right)' = 2(sin(x))^{2-1} \cdot sin(x)' = 2sin(x) \cdot cos(x)$
4. $(x^n)' = nx^{n-1}$
5. $(x^a)' = ax^{a-1}$
6. $x^a = (e^{ln(x)})^a = e^{ln(x) \cdot a}$
7. $(x^a)' = \left(e^{ln(x) \cdot a}\right)' = e^{ln(x) \cdot a} \cdot \left(ln(x) \cdot a\right)' = x^n \cdot \frac{1}{x} \cdot a = x^{a-1} \cdot a$

FAKT. Uwaga. Regułę de L'Hospitala stosuje się również dla $x \to a^-$ lub dla $x \to a^+$. Przy odpowiednich założeniach zachodzą wzory:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład 9.1.2. Rozważmy przykłady:

- $\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \frac{ln(1)}{0} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(ln(x+1)')}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$
- $\lim_{x\to 0} \frac{sin^2(x)}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(sin^2(x))'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2sin(x)cos(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} cos(x) = 1$

FAKT. Uwaga. De L'Hospital działa również dla $a = \pm\infty$. Jeśli $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$, to:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} = \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

FAKT. Regułę de L'Hospiatala można stosować również dla wyrażeń nieoznacoznych postaci $\frac{\infty}{\infty}$. Jeśli $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, to:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Przykład 9.1.3. Przykład:

- Ustalmy $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Wówczas:
  $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^x} =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{(e^k)'}{(e^x)'} =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{kx^{k-1}}{e^x} =$
  ... =
  $\lim_{x\to\infty} \frac{k!}{e^x} = 0$

- Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Wówczas $n^k \in O(2^n)$
  $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{2^x} =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{x^k}{e^{ln(2)x}} =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{k \cdot x^{k-1}}{ln(2)e^{ln(2)x}} =$
  $... =$
  $\lim_{x\to\infty} \frac{k!}{ln(2)^k \cdot e^{ln(2)x}} = 0$

Przykład 9.1.4. $\lim_{x\to 0^+}(ln(x) \cdot x) =$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{\frac{1}{x}} =$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{(ln(x))'}{(\frac{1}{x})'} =$
$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-1\frac{1}{x^2}} = 0$

10 Wykład X

1. $ln(f(x))' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$

2. $x^x = e^{ln(x) \cdot x}$
   $(x^x)' = e^{ln(x)\cdot x} \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \ln(x)\right) = x^x \cdot (1 + \ln(x))$

3. $a^x = e^{ln(a) \cdot x}$
   $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$

4. $(f(x)^{g(x)})' = \left(e^{ln(f(x))-g(x)}\right)' = e^{\ln(f(x))-g(x)} \cdot (\ln f(x) \cdot g(x))' =$
   $f(x)^{g(x)}(\ln(f(x))' \cdot g(x) + g'(x) \cdot \ln(f(x))) =$
   $f(x)^{g(x)} \cdot \left(\frac{f'(x)\cdot g(x)}{f(x)} + g'(x) \cdot \ln(f(x))\right)$

10.1 Funkcje Hiperboliczne

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\sinh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = cosh(x)$
$\cosh'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = sinh(x)$

10.2 Interpretacja geometryczna znaku pochodnej

Jeśli $\forall_{x\in(a,b)} f'(x) > 0$, to f-rosnąca w (a, b). Analogicznie dla $f'(x) < 0$ to f-malejąca.

10.3 Pochodne wyższych rzędów

$f', f'', f''', f^{iv}, ..., f^{(1)}$
$\frac{dx}{dy}, \frac{d^2y}{dx^2}, ... \frac{d^ny}{dx^n}$

Przykład 10.3.1. Przykłady:

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $(x^n)'' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$ ...

3. $(x^n)^(k) = n(n-1)...(n-k+1) \cdot x^{n-k}$

10.4 Wzór Taylora

Twierdzenie 10.4.1. Twierdzenie Lagrange'a - przypomnienie.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(a+\theta(b-a))$$
$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} \cdot f'(a+\theta(b-a))$$

Załóżmy, że f jest n-krotnie różniczkowalna na $[a,b]$. Wtedy istnieje $0 < \theta < 1$, że:

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!}f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n$$

Twierdzenie 10.4.2. Wzór Maclaurina.
$b = x, a = 0$
$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + R_n$, gdzie $R_n = \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)$

1. $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdot \cos(\theta x)$ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right)$

2. $f(x) = e^x$ $f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f(\theta x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} \cdot e^{\theta x}$

Twierdzenie 10.4.3. Jeśli pochodna rzędu parzystego jest niezerowa to jest ekstremum, jeśli nieparzytego rzędu tylko punktem przegięcia.

Przykład 10.4.1. Zobaczmy funkcje:
$f(x) = x^3, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 6$
$f(x) = x^4, f'(0) = 0, f''(0) = 0, f'''(0) = 0, f^{(iv)}(0) = 4!$

1. $f'(c) = ...f^{(2k-1)}(c) = 0 \wedge f^{2k} > 0$, to f ma min. lok. w c

2. $f'(c) = ...f^{(2k-1)}(c) = 0 \wedge f^{2k} < 0$, to f ma maks. lok. w c

3. $f'(c) = ...f^{(2k-1)}(c) \neq 0 \wedge f^{2k} = 0$, to f nie ma ekstremum w c

10.5 Wypukłość funkcji

f wypukła na $[a,b] \iff \forall_{\alpha,\beta\in[a,b]:\alpha<\beta}\forall_{t\in[0,1]} \left(f(t\alpha + (1-t)\beta) \leqslant tf(\alpha) + (1-t)f(\beta)\right)$
Funkcja wypukła - tempo wzrostu funkcji rośnie

Twierdzenie 10.5.1. Zakładamy, że f jest różniczkowalna na (a,b). Wtedy f wypukła na $(a,b) \iff f'$ jest rosnąca. Wnioski:

1. $f''(x) > 0$ na $(a,b) \to f'$ rosnąca f wypukła

2. $f''(x) < 0$ na $(a,b) \to f'$ malejąca f wklęsła

3. $f''(x_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym istnienia punktu przegięcia w punkcie x_0

Przykład 10.5.1. Badanie wypukłości:
$f(x) = (1+x^2)e^x, f''(x) = e^x(x^2+4x+3) = 0 \to x_1 = -3, x_2 = -1$

10.6 Nierówność Jensena

Twierdzenie 10.6.1. Niech f-wypukła na $[a, b]$, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=0}^{n} a_i = 1$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [0, 1]$. Wtedy:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Dla $n = 2$ jest to po prostu definicja wypukłości.

10.7 Problem opymalizacyjny

Znajdź $MAX(x_1 \cdot x_2 \cdot x_n)$ przy zał, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = const.$ i $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$
$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n = \left(\frac{const.}{n}\right)^n$
$MAX(x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n) = \left(\frac{const.}{n}\right)^n$

10.8 Funkcje Sigmoidalne

Definicja 10.8.1. (nieformalna). Funkcje, których wykres jest w kształcie charakterystycznej litery S.

- Funkcja logistyczna - $\sigma(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \mathbb{R} \to [0, 1]$

Definicja 10.8.2. (formalna). Funkcja ograniczona, różniczkowalna na $\mathbb{R}$ o dodatniej pochodnej i tylko z jednym punktem przegięcia.

Punkt przegięcia - punkt, gdzie funkcja zmienia się z wypukłej na wklęsłą lub z wklęsłej na wypukłą:

- $\tan(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $\arctan(x)$...

10.9 Error function

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

11 Wykład XI

11.1 Techniki całkowania

Podstawowe wzory

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in \mathbb{N}$
2. $\int sin(x) dx = -cos(x) + C$, bo $(-cos(x))' = sin(x)$
3. $\int cos(x) dx = sin(x) + C$
4. $\int \frac{1}{x} = \ln(|x|) + C$

Twierdzenie 11.1.1. Niech $\int f(x)dx = F(x) + C$, wówczas:

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

Dowód
$\left(\frac{1}{a}F(ax+b)+C\right)' = \frac{1}{a}f(ax+b)(ax+b)' = \frac{1}{a}f(ax+b)\cdot a = f(ax+b)$

Przykłady:

- $\int cos(nx)dx = \frac{1}{n}sin(nx) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{\frac{1}{a}}\arctan(\frac{x}{a}) + C = a\cdot\arctan(\frac{x}{a}) + C$
- $\int \frac{x}{x+1}dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}dx = \int(1-\frac{1}{x+1})dx = \int 1dx - \int \frac{1}{x+1}dx = x - \ln(|x+1|) + C$

11.2 Całkowanie przez części

Twierdzenie 11.2.1. Twierdzenie o całkowaniu przez części.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Dowód.
$\int f(x)g'(x)dx + \int f'(x)g(x)dx = \int f(x)g'(x) + f'(x)g(x)dx = \int (f(x)g(x))'dx = f(x)\cdot g(x)$

Przykłady:

- $\int xsin(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = sin(x)$ Mamy:
  $x(-cos(x)) - \int 1(-cos(x))dx = -(x)cos(x) + \int cos(x)dx =$
  $= x\cdot cos(x) + sin(x) + C$
- $\int x^2cos(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2g'(x) = cos(x)$ Mamy:
  $= x^2\cdot sin(x) - \int 2xsin(x)dx = x^2\cdot sin(x) - 2\int sin(x)dx =$
  $= x^2\sin(x) + 2xcos(x) - 2sin(x) + C$
- $\int x^2\ln(x)dx$. Przyjmujemy $f(x) = ln(x), g'(x) = x^2$ Mamy:
  $= ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{1}{x}\cdot\frac{x^3}{3}dx =$
  $= ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \int\frac{x^2}{3} = \ln(x)\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C$
- $\int x^n\ln(x)dx$ - ćwiczenie.
- $\int\ln(x)dx = \ln(x)x - x + C$
- $\int x^2e^xdx$. Przyjmujemy $f(x) = x^2, g'(x) = e^x$ Mamy:
  $= x^2e^x - \int 2xe^xdx = x^2e^x - 2\int xe^x =$. Przyjmujemy $f(x) = x, g'(x) = e^x$ Mamy:
  $= x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^xdx = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2-2x+2) + C$
- $\int sin(x)e^xdx = \frac{sin(x)-cos(x)}{2}e^x + C$. Przyjmujemy $f(x) = sin(x)g'(x) = e^x$ Mamy:
  $= sin(x)e^x - \int cos(x)e^xdx = sin(x)e^x - cos(x)e^x - \int sin(x)e^xdx$
- $\int cos(x)e^x$. Przyjmujemy $f(x) = cos(x), g'(x) = e^x$ Mamy:
  $= cos(x)e^x + \int sin(x)e^xdx$
- $\int sin(x)e^xdx = \frac{sin(x)-cos(x)}{2}e^x + C$

11.3 Całkowanie przez podstawienie

Twierdzenie 11.3.1. Wiedząc, że:

$$\int g(t)dt = G(t) + C,\, G'(t) = g(t)$$

możemy obliczyć:

$$\int g(w(x))w'(x)dx = G(w(x)) + C$$

bo $(G(w(x)))' = g(w(x))w'(x)$.

Przykład 11.3.1. $\int e^{x^2+x}(2x+1) = e^{x^2+x} + C$

Przykład 11.3.2. $\int (3x+1)^n dx$. Podstawiamy $3x+1 = t, dx = \frac{1}{3}dt$. Mamy:
$\int t^n \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int t^n dt = \frac{1}{3}\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{n+1}}{n+1}$
$(t(x) = 3x+1, \frac{dt(x)}{dx} = 3)$

Przykład 11.3.3. $\int sin^3(x)cos(x)dx$. Przyjmujemy $t = sin(x)$, $\frac{dt}{dx} = cos(x)$ Mamy:
$\int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{sin^4(x)}{4} + C$

Przykład 11.3.4. $\int e^{x^2}xdx$. Przyjmujemy $t = x^2$, $\frac{dt}{dx} = 2x$ Mamy:
$\int e^t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

Przykład 11.3.5. $\int \frac{cos(x)}{1+sin(x)}dx$. Przyjmujemy $t = 1 + sin(x)dt = cos(x)$ Mamy:
$\int \frac{1}{t}dt = ln(|t|) + C = ln(|1+sin(x)|) + C$

Przykład 11.3.6. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln(|f(x)|) + C$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ Przyjmujemy $t = f(x)\frac{dt}{dx} = f'(x)$
Mamy:
$\int \frac{1}{t}dt = ln(|t|) + C = ln(|f(x)|) + C$

Przykład 11.3.7. $\int tan(x)dx = \int \frac{sin(x)}{cos(x)}dx = -\int \frac{cos'(x)}{cos(x)}dx = ln(|cos(x)|) + C$

11.4 Paskudny algorytm całkowania funkcji wymiernych

$W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q - wielomiany, cel $\int W(x)dx$
W jest właściwą funkcją wymierną jeśli: $\deg(P) < \deg(Q)$
Każdą funkcję wymierną można zapisać jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Przykład 11.4.1. $\int \frac{x^3}{x-1}dx = \int (x^2+x+1+\frac{1}{x-1})dx = \int (x^2+x+1)dx + \int frac1x - 1dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + ln(|x-1|) + C$

W dalszej części zakłdamy, że: $W(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $\deg P < \deg Q$
Funkcje wymierną właściwą rozkładamy na ułamki proste. (apart wolframalpha)

Twierdzenie 11.4.1. Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych:

1. $\frac{A}{x-a}$
2. $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2, 3, ...$

3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\Delta < 0$

4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m = 2, 3, ...$

Przykład 11.4.2. $W(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{(x^2+1)^2}$

1. $\int \frac{A}{x-a} dx = Aln(|x-a|) + C$

2. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} A + C,\ k = 2, 3, ...$

3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Mx+N}{(x+a)^2+b^2} dx =$
   $\int \frac{\frac{M}{2}2(x+a)-Ma+N}{(x+a)^2+b^2} =$
   $\frac{M}{2} ln(|(x+a)^2+b^2|) + \int \frac{N-Ma}{(x+a)^2+b^2} dx =$
   $\frac{M}{2} ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \int \frac{1}{(x+a)^2+b^2} dx =$
   $\frac{M}{2} ln(|(x+a)^2+b^2|) + (N-Ma) \frac{1}{b^2} \int \frac{1}{(\frac{x+a}{b})^2+1} dx = ...$
   $\arctan ...$

4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx$ sprowadza się do całek:
   $\int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt, \int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$

Przykład 11.4.3. $\int \frac{t}{(t^2+1)^m} dt$. Przyjmujemy $x = t^2 + 1$ Mamy:
$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^m} = \frac{1}{2} \frac{x^{-m+1}}{-m+1} = \frac{1}{2} \frac{(t^2+1)^{-m+1}}{-m+1} + C$

Przykład 11.4.4. Rozważmy następujący ciąg rekurencyjny:
$I_m = \int \frac{1}{(t^2+1)^m} dt$
$I_{m+1} = \frac{1}{2m} \frac{t}{(t^2+1)^m} + \frac{2m-1}{m} I_m$
$I_1 = \arctan(t)$

12 Wykład XII

$\int cos^2 t dt = \int \frac{1+cos(2t)}{2} dt =$
$\int \frac{1}{2} dt + \int \frac{cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2} t + \frac{sin(2t)}{4} + C$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int acostacostdt = \int a^2 \int cos^2 dt...$

12.1 Przez części dla całek oznaczonych

$\int f'(x) g(x) dx = |(f(x)g(x))|_b^a - \int_a^b f(x) g'(x) dx$

Przykład 12.1.1. $\int_1^e \ln(x) dx$, przyjmujemy: $f'(x) = 1, g(x) = \ln(x) \rightarrow f(x) = x, g'(x) = \frac{1}{x} = (x \ln(x))|_1^e - \int_1^e 1 dx = e \ln(e) - 1 \ln(1) - x|_1^e = e - (e-1) = 1$

12.2 Zamiana zmiennych w całkach oznaczonych

Twierdzenie 12.2.1. Twierdzenie o zamianie zmiennych w całach oznaczonych.
$\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow_{na} [a, b], t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$, to:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Przykład 12.2.1. $\int_0^1 (3x+1)^{10}dx$, przyjmujemy $3x+1=t, dx=\frac{1}{3}dt$, mamy: $\int_1^4 t^{10}\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int_1^4 t^{10} = \frac{1}{3}|\frac{1}{11}\cdot t^1 1|_1^4 = \frac{1}{3}\frac{4^{11}}{11} - \frac{1}{3}\frac{1}{11}$

Przykład 12.2.2. $\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx$, przyjmujemy $x = R\cdot sin(t)$, $\frac{dx}{dt}R\cdot cos(t)$
$x = sin(t)$, to więc $x \in [0,1] \to t \in [0, \frac{\pi}{2}]$
$(\forall x \in [0,1]) \left(\exists t \in [0, \frac{\pi}{2}]\right) sin(t) = x, t = arcsin(x)$, mamy:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\cdot R\cdot \cos(t)dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sqrt{1-sin^2 t}\cdot R\cdot cos(t)dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\sqrt{cos^2(t)}cos(t)dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 cos(t)cos(t)dt =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 cos^2(t)dt =$
$R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2(t)dt =$
$R^2(\frac{1}{2}t + \frac{sin(2t)}{4})|_0^{\frac{\pi}{2}} =$
$\frac{R^2\pi}{4}$

12.3 Zastosowania całek

12.4 Pole pod wykresem

FAKT. Pole pod wykresem. Dla funkcji $f \geqslant 0$ określonej na $[a,b]$ pole pod jej wykresem na przedziale $[a,b]$ wynosi $S = \int_a^b f(x)dx$

Przykład 12.4.1. Pole między wykresami $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt{x}$ na przedziale $[0,1]$ wynosi: $\int_0^1 \sqrt{x} - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$

Przykład 12.4.2. Pole koła. $x^2+y^2 = R^2 \to y^2 = R^2 - x^2$. Weźmy $x \in [0,R]$, wtedy: $y(x) = \sqrt{R^2-x^2}$. Pole koła: $S = 4\cdot\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}dx = 4\frac{R^2\pi}{4} = \pi R^2$

12.5 Długość łuku krzywej

FAKT. Długość łuku krzywej funkcji ciągłej f określonej na przedziale $[a,b]$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Przykład 12.5.1. Policzmy długość krzywej $f(x) = x^2$ na $[0,1]$. Mamy: $\int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}dx = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}dx = F(1) - F(0) = ...$

FAKT. Ogólna długość łuku krzywej $(x(t), y(t))$ dla $a \leqslant t \leqslant b$:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Dla funkcji $(x, f(x))$ mamy $(x', f'(x)) = (1, f'(x))$ uzyskując poprzedni wzór.

Przykład 12.5.2. Parametryzacja przy użyciu współrzędnych biegunowych:
Okrąg $(R\cdot\cos(t), R\cdot\sin(t)), t \in [0, 2\pi]$ - okrąg o promieniu r
Zatem obwód okręgu wynosi:

$\int_0^{2\pi} \sqrt{(R(-sin(t)))^2 + (R \cdot cos(t)^2)}dt =$
$\int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(sin^2(t) + cos^2(t))}dt =$
$\int_0^{2\pi} Rdt =$
$(Rt)|_0^{2\pi} =$
$2\pi R$

12.6 Pola powierzchni i objętości brył obrotowych

Przykład 12.6.1. Obrót proporcjonalności prostej $y = ax$ wokół OX tworzy stożek

FAKT. Objętość bryły obrotowej jest dana wzorem:

$$V = \pi \int_0^b f^2(x)dx$$

Przykład 12.6.2. Weźmy $f(x) = x$, zatem $R = 1$ a tworząca $l = \sqrt{2}$. Objętość stożka:
$V = \pi \int_0^1 x^2dx = \pi\frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{\pi}{3}$
Sprawdźmy, że $V = \frac{\pi R^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 1}{3} = \frac{\pi}{3}$

FAKT. Pole powierzchni bocznej bryły obrotowej dane jest wzorem:

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

12.7 Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju

Rozważmy $\forall_{x>a} f(t)$ jest ciągła na $[a, x]$, wtedy:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \text{ dla } F'(x) = f(x)$$

Pytanie - czy istnieje $\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^\infty f(t)dt$?

Przykład 12.7.1. Pytania:

1. Oblicz $\int_0^\infty f(t)dt$
2. Zbadaj zbieżność $\int_0^\infty f(t)dt$

Przykład 12.7.2. Policzmy całkę:
$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}dt =$
$\lim_{x\to\infty} arctan(t)|_0^x =$
$\lim_{x\to\infty} arctan(x) - arctan(0) =$
$\pi - 0 = \pi$

Przykład 12.7.3. Policzmy całkę:
$\int_1^\infty \frac{1}{t}dt =$
$\lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt =$
$\lim_{x\to\infty} \ln(t)|_1^x =$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) - \ln(1) =$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

Przykład 12.7.4. Policzmy całkę:
$\int_0^\infty cos(t)dt =$
$lim_{x\to\infty} \int_0^x cos(t)dt =$
$\lim_{x\to\infty} sin(t)|_0^x =$
$\lim_{x\to\infty} sin(x) - sin(0)$
$\lim_{x\to\infty} sin(x)$ NIE ISTNIEJE, zatem całka jest rozbieżna

Przykład 12.7.5. Policzmy całkę:
$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}}dt$
$f(x) = \frac{1}{1+t^2+\sqrt[5]{t^2+1}} \leqslant \frac{1}{1+t^2} = g(x)$
$\int_0^\infty g(t)dt < \infty \implies \int_0^\infty f(t)dt < \infty$

Twierdzenie 12.7.1. Kryterium porównawcze (1 część). Zakładamy że zachodzą następujące własności:

1. $0 \leqslant g(t) \leqslant f(t)$ dla $t \in [a, \infty]$
2. $\int_a^\infty f(t)dt < \infty$ jest zbieżna

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t)dt < \infty \text{ jest zbieżna.}$$

Analogicznie $(a = n_0) \wedge \left(\sum_{t=n_0}^\infty f(t) < \infty\right) \implies \left(\sum_{t=n_0}^\infty g(t) < \infty\right)$ - kryterium porównawcze zbieżności szeregów.

Przykład 12.7.6. $f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 2 + ... \geqslant \int_0^\infty f(t)dt$
$\int_0^\infty f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^\infty f(k)$
$f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k)$
Zatem:
$f(1)\cdot 1 + f(2)\cdot 1 + ... \leqslant \int_0^\infty f(t)dt$
$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leqslant \int_0^\infty f(t)dt$
$\sum_{k=1}^\infty f(k) \leqslant \int_0^\infty f(t)dt \leqslant f(0) + \sum_{k=1}^\infty f(k)$

Twierdzenie 12.7.2. Kryterium porównawcze (2 część). Zakładamy, że zachodzą następujące własności:

1. $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ dlamin $t \in [a, \infty]$
2. $\int_a^\infty f(t)dt$ jest rozbieżna.

Wówczas:

$$\int_a^\infty g(t) \text{ jest rozbieżna}$$

Przykład 12.7.7. Policzmy całkę: $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}}dt$
Wiemy, że $\frac{1}{t+\sqrt{t}} \geqslant \frac{1}{t+t}$. Sprawdźmy:
$\int_1^\infty \frac{1}{2t}dt = \infty$
Na mocy kryterium porównawczego również $\int_1^\infty \frac{1}{t+\sqrt{t}} = \infty$ rozbieżna.