试卷三 参考答案

一、填空

1. $R(A)=1$.

$$A=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_m \end{bmatrix} \xrightarrow[r_n-\frac{a_n}{a_1}r_m]{\substack{r_2-\frac{a_2}{a_1}r_1 \\ r_3-\frac{a_3}{a_1}r_1}} \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

则 $R(A)=1$.

2. $7^{2n}\cdot\frac{|B|^{n-1}}{|A|}$

$$\left|(-7)\cdot\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (B^*)^T \end{bmatrix}\right| = (-7)^{2n}\cdot\begin{vmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (B^*)^T \end{vmatrix}$$

$$= 7^{2n}\cdot|A^{-1}|\cdot|(B^*)^T|$$

$$= 7^{2n}\cdot|A|^{-1}\cdot|B^*| = 7^{2n}\cdot\frac{|B|^{n-1}}{|A|}$$

3. $-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

由于 $AA^*=A^*A=|A|E$，即 $\frac{A}{|A|}\cdot A^*=A^*\cdot\frac{A}{|A|}=E$

则 $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=-\frac{A}{10}$

4. $A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

方程组有解，即 $R(A)=R(\overline{A})$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4-r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & a_4+a_1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_4+a_1+a_2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_4+a_1+a_2+a_3 \end{array}\right]$$

结合 $R(A)=R(\overline{A})$

$\Longrightarrow a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

二. 选择.

1. A.

由于 $R(A)=r=m$.

显然 $R(A\vdots\vec{b})\geq R(A)=m$.

又 $(A\vdots\vec{b})$ 只有m行. 则 $R(A\vdots\vec{b})\leq m$.

因此. $R(A\vdots\vec{b})=m=R(A)$. $\Longrightarrow A_{m\times n}\vec{x}=\vec{b}$ 有解.

2. D.

由于A, B, C都是方阵. 且 $AB=B\cancel{C}A=CA=E$.

则 $B=A^{-1}$. $C=A^{-1}$. 即 $B=C$. 那么 $B^2=E$.

同理可知: $A=C$. 则 $A^2=E=C^2$.

因此. $A^2+B^2+C^2=3E$

3. C.

4. C.

因为 $R(A)=n-2$. 则A的最高阶非零子式的阶数为 $n-2$.

所以 A的所有 $n-1$ 阶子式都为0.

A^* 中的元素都是A的代数余子式. 也是A的 $n-1$ 阶子式.

因此 A^* 中元素都是0. 即 $A^*=O$.

5. B.

$A\longrightarrow B$ 显然只涉及行变换. 因此选B.

三.

解：由于 $AP=P\Lambda$，则 $A=P\Lambda P^{-1}$.

那么 $A^n=(P\Lambda P^{-1})=\underbrace{P\Lambda P^{-1}\cdot P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}}_{n组}=P\Lambda^n P^{-1}$

$$(P\,\vdots\,E)=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\1&4&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_1}\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\0&2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_1-r_2}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&2&-1\\0&2&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{cc:cc}1&0&2&-1\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

即 $P^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

因此 $A^n=P\Lambda^nP^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^n\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1^n&0\\0&2^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2^{n+1}\\1&2^{n+2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^n&-1+2^n\\2-2^{n+1}&-1+2^{n+1}\end{bmatrix}$$

四.

解：$D=\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\x&1-x&-1&0\\0&x&1-x&-1\\0&0&x&1-x\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+c_3]{\substack{c_2+c_1\\c_3+c_2}}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\x&1&0&0\\0&x&1&0\\0&0&x&1\end{vmatrix}=1.$

五. 解：$M_{14}+A_{24}+A_{34}+M_{44}$

$=-A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$.　（将D的第4列换为 $-1,1,1,1$）.

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\2&3&0&1\end{vmatrix}\xlongequal[r_4-2r_1]{r_3-r_1}\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&1&1\\0&1&0&2\\0&5&-2&3\end{vmatrix}\xlongequal[展开]{按第1列}1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&2\\5&-2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3+2r_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&0&2\\7&0&5\end{vmatrix}\xlongequal[展开]{按第二列}1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\7&5\end{vmatrix}=-1\times(5-14)=9.$$

六.

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1\\r_3-4r_1}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-\frac{10}{3}r_2}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\frac{8}{3}&8\\0&0&0&3&-9\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+\frac{9}{8}r_3}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\frac{8}{3}&8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$，则 $R(A)=3$.

因此A的最高阶非零子式的阶数为3.

参照A的行阶梯形矩阵，将A的第1,2,4行和第1,2,3列交点上的元素取出，排列成如下3阶行列式：

$$\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_3-4r_2]{r_1-2r_2}\begin{vmatrix}0&-3&-1\\1&1&1\\0&-10&-6\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第1列}}1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3&-1\\-10&-6\end{vmatrix}=-8\neq0.$$

则 $\begin{vmatrix}2&-1&1\\1&1&1\\4&-6&-2\end{vmatrix}$ 是A的一个最高阶非零子式.

七. 由于 $BA=A+2B$. 则 $BA-2B=A$. 即 $B(A-2E)=A$.

那么 $B=A\cdot(A-2E)^{-1}$. 因为 $A=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}$，则 $A-2E=\begin{bmatrix}-2&3&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$

先求 $(A-2E)^{-1}$.

$$[A-2E\,\vdots\,E]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&3&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-\frac{1}{2}r_1]{r_2+\frac{1}{2}r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&3&3&1&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1-6r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&-6&-2&-6&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2+\frac{3}{4}r_3]{r_1-3r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-2&0&0&1&-3&-3\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&-2&-1&-1&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_3\times(-\frac{1}{2})]{\substack{r_1\times(-\frac{1}{2})\\r_2\times2}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

那么 $(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 因此 $B=A\cdot(A-2E)^{-1}=\begin{bmatrix}0&3&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3\\-1&2&3\\1&1&0\end{bmatrix}$

八.

解：由于方程个数与未知数个数相等，因此可用克拉默法则.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_3]{c_1+c_2} \begin{vmatrix} 3+\lambda & 1 & 1 \\ 3+\lambda & 1+\lambda & 1 \\ 3+\lambda & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1+\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1} (3+\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (3+\lambda)\cdot\lambda^2$$

(1) 唯一解. 此时 $|A| \neq 0$，即 $(3+\lambda)\cdot\lambda^2 \neq 0 \implies \lambda \neq -3$ 且 $\lambda \neq 0$.

(2) 当 $\lambda = 0$ 时.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

则 $R(A) = 1 < R(\bar{A}) = 2$，此时方程组无解.

(3) 当 $\lambda = -3$ 时.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+\frac{1}{2}r_1]{r_2+\frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

则 $R(A) = R(\bar{A}) = 2 < 3$，此时方程组有无穷多解.

对应的方程组为：

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 3 \end{cases}$$

取 $x_3 = k$，则 $x_2 = k-2$. $x_1 = k-1$

因此通解为：$\begin{cases} x_1 = k-1 \\ x_2 = k-2 \\ x_3 = k \end{cases}$，$k$ 为任意常数.

九.

证明:

(1). 由于 $AA^*=|A|E$，由于 $|A|=0$，则 $AA^*=0\cdot E=0$. ①

假定 $|A^*|\neq 0$. 即 A^* 可逆，在①式两侧同时右乘 $(A^*)^{-1}$，

可得 $A=0$. 显然有 $A^*=0$. 与 $|A^*|\neq 0$ 矛盾.

因此假设不成立. 那么 $|A^*|=0$. 命题得证.

(2) ① ~~若~~当 A 可逆时，由 $A\cdot A^*=|A|E$. 两边取行列式，

可得 $|A|\cdot|A^*|=|A|^n$，因为 $|A|\neq 0$，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$

② 当 A 不可逆时，即 $|A|=0$. 根据(1)中结论，可知

$|A^*|=0$. 也满足等式 $|A^*|=|A|^{n-1}$.

综合①、②两种情形，可知 $|A^*|=|A|^{n-1}$. 命题得证.