南京信息工程大学试卷

$\underline{2019}-\underline{2020}$ 学年 第一学期 线性代数 期中试卷

本试卷共 $\underline{3}$ 页; 考试时间 $\underline{100}$ 分钟; 任课教师 ________; 出卷时间 $\underline{2019}$ 年 $\underline{11}$ 月

________________ 学院 ________________ 专业 ________ 班

学号____________ 姓名________________ 得分__________

一. 填空题(每题3分):

1. 设$a_i \neq 0(i=1,2,\cdots,n)$, $b_j \neq 0(j=1,2,\cdots,m)$, 则$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_m \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_m \end{pmatrix}$的秩$R(\boldsymbol{A})=$ _____;

2. 设$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$均为n阶可逆矩阵, 则$\left|(-7)\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & 0 \\ 0 & (\boldsymbol{B}^*)^T \end{pmatrix}\right|=$ __________;

3. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}^*$为$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$ ________________;

4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则$\boldsymbol{A}^3=$ ______________;

5. 若线性方程组$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_4+x_1=a_4 \end{cases}$有解, 则常数$a_1,a_2,a_3,a_4$应满足的条件为________________.

二. 选择题(每题3分):

1. 若非齐次线性方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$r$, 则(　　).

A. $r=m$时, 方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有解;

B. $r=n$时, 方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解;

C. $m=n$时, 方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有唯一解;

D. $r<n$时, 方程组$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$有无穷多解.

2. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$为$n$阶方阵, $\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵, 且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}$, 则$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{C}^2=$(　　).

A. $\boldsymbol{E}$;　　B. $2\boldsymbol{E}$;　　C. 0;　　D. $3\boldsymbol{E}$.

3. 设$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$为$n$阶方阵且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 则下列一定成立的是(　　).

A. $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$或$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;　　B. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$都不可逆;

C. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$中至少有一个不可逆;　　D. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

4. 设$\boldsymbol{A}^*$为n阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 则下列说法不正确的是(　　).

A. 若$|\boldsymbol{A}|\neq 0$, 则$|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$;　　B. 若$|\boldsymbol{A}|=10$, 则$|\boldsymbol{A}^*|=10^{n-1}$;

C. 若$R(\boldsymbol{A})=n-2$, 则$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{O}$;　　D. $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ (其中$\boldsymbol{E}$为n阶单位矩阵).

5. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则必有(　　).

A. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$;　　B. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$;　　C. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$;　　D. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2$.

三. **(10分)** 设$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\Lambda$, 求$\boldsymbol{A}^n$.

四. **(10分)** 求行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ x & 1-x & -1 & 0 \\ 0 & x & 1-x & -1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \end{vmatrix}.$$

五. **(10分)** 已知 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$, 其中$M_{ij}$为$a_{ij}$的余子式, A_{ij}为a_{ij}的代数余子式, 求下述表达式的值:

$$M_{14}+A_{24}+A_{34}+M_{44}.$$

六. **(10分)**设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix},$$

求矩阵$\boldsymbol{A}$的秩, 并求$\boldsymbol{A}$的一个最高阶非零子式.

七. **(10分)** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, 且$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$, 求矩阵$\boldsymbol{B}$.

八. **(10分)** 设有线性方程组

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda \end{cases}$$

问λ取何值时, 此方程组(1)有唯一解; (2)无解; (3)有无限多解? 并在有无限多解时求其通解.

九. **(10分)** 设$\boldsymbol{A}^*$为n阶方阵$\boldsymbol{A}$的伴随矩阵, 证明:

(1) 若$\left|\boldsymbol{A}\right|=0$, 则$\left|\boldsymbol{A}^*\right|=0$; (2) $\left|\boldsymbol{A}^*\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^{n-1}$.