南京信息工程大学　期末试卷

2018 －2019 学年 第 2 学期　线性代数　课程试卷（ B 卷）

本试卷共 3 页；考试时间 120 分钟；任课教师＿＿＿＿＿＿；出卷时间 2019 年 6 月

＿＿＿＿＿＿学院＿＿＿＿＿＿＿＿专业＿＿＿＿＿＿＿班

学号＿＿＿＿＿＿＿＿　姓名＿＿＿＿＿＿＿＿　得分＿＿＿＿＿

一、填空题（**每小题 3 分，共 15 分**）

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a\neq 0$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $|\boldsymbol{A}^*|=$＿＿＿＿＿＿.

2. $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{2019}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{2018}=$＿＿＿＿＿＿.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的 3 维列向量组，则向量 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3$ 的秩为＿＿＿＿＿＿.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&a\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，则 $a=$＿＿＿＿＿＿.

5. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的秩为 3，负惯性指数为 1，则 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的规范形为＿＿＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（**每小题 3 分，共 15 分**）

1. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是四阶矩阵，且有 $|\boldsymbol{A}|=4$，$|\boldsymbol{B}|=1$，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4$ 均为 4 维向量，$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4)$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$(　　　).

   (A) 5；　　(B) 10；　　(C) 40；　　(D) 20.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 4×6 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ (　　　).

   (A) 无解；　(B) 只有零解；　(C) 有非零解；　(D) 不一定有非零解.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，则(　　　).

   (A) $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表示；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 线性表示；

(C) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关；

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 为可逆矩阵，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，则

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)$ =(　　　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$;　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$;　　(C) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$;　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

5. n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定的充要条件是(　　　　).

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$;　　(B) $\boldsymbol{A}$ 所有特征值非负;

(C) $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素都大于零;　　(D) $\boldsymbol{A}^{-1}$ 正定.

三、计算题（**每小题 6 分，共 18 分**）

1. 设 $D=\begin{vmatrix}1&-2&3&5\\3&4&2&1\\1&-1&2&3\\1&2&1&1\end{vmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{24}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-2&4&0\end{pmatrix}$，求（1）$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$；（2）$|4\boldsymbol{A}|$.

3. 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})^{-1}$.

四、求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\4\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\\6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\-9\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\7\end{pmatrix}$ 的秩及一个极大无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.（**本题满分 10 分**）

五、设 $(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+x_4=2\\2x_1+x_2+3x_3-2x_4=4\\x_1-ax_2+x_3+x_4=0\end{cases}$ 的一个解向量，求该线性方程组的通解.（**本题满分 10 分**）

六、已知三阶实对称矩阵$\boldsymbol{A}$的三个特征值为$\lambda_1=0,\lambda_2=\lambda_3=2$，且对应于特征值0的特征向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(1,0,-1\right)^{\mathrm{T}}$，求矩阵$\boldsymbol{A}$.（**本题满分 10 分**）

七、已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=3x_2{}^2-2x_1x_2+8x_1x_3-2x_2x_3$，

（1）用正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$将此二次型化成标准形，并求出正交矩阵$\boldsymbol{Q}$；

（2）说明$f(x_1,x_2,x_3)=1$在几何上表示什么图形.（**本题满分 12 分**）

八、设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}$线性无关，且$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$. 试证明向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性无关.（**本题满分 10 分**）