

南京信息工程大学 试卷

2018—2019 学年 第一学期 线性代数 课程期末试卷(A 卷)

本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟； 出卷时间 2018 年 12 月； 各专业 适用

题号	一	二	三		四	五	六	七	八	总分
			1	2						
分值	15	15	8	8	10	10	10	12	12	
得分										
阅卷教师签名										

统分教师签字：_____ 核分教师签字：_____

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分。请将答案填在题中的横线上）

(1) 若 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$ ，则 $x =$ _____.

(2) 若 $A^2 + 3A + 3E = O$ ，则 $(A + E)^{-1} =$ _____.

(3) 已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ ， $A_{ij}(i, j = 1, 2, 3, 4)$ 为 D 的代数余子式，则

$3A_{31} + 4A_{32} - A_{33} + 7A_{34} =$ _____.

(4) 设 A 为 4 阶方阵， A^* 为 A 的伴随矩阵，且 $R(A) = 3$ ，则 $A^*x = 0$ 的基础解系向量的个数为_____.

(5) 已知三阶方阵 A 的特征值为 $\lambda, 2, 4$ ，且 $|2A| = 128$ ，则 $\lambda =$ _____.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分。请将所选项前的字母填在题后的括号内）

(1) 一个 n 维向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s > 1)$ 线性相关的充要条件的是()

- (A) 含有零向量； (B) 有两个向量的对应分量成比例；

(C) 有一个向量是其余向量的线性组合; (D) 每一个向量都是其余向量的线性组合.

$$(2) \text{ 设 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{pmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 则必有 () }$$

(A) $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$; (B) $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$; (C) $\mathbf{B} = \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\mathbf{A}$; (D) $\mathbf{B} = \mathbf{P}_2\mathbf{P}_1\mathbf{A}$.

(3) 设 \mathbf{A} 、 \mathbf{B} 都是可逆矩阵, 则分块矩阵 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{pmatrix}$ 的逆 $\mathbf{X}^{-1} = (\quad)$

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \\ \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{-1} \end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}^{-1} \end{pmatrix}$.

(4) 设 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 是 n 阶方阵, 若 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似, 则下列结论错误的是 ()

(A) \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 均可对角化; (B) 存在可逆矩阵 \mathbf{P} , 使得 $\mathbf{PB} = \mathbf{AP}$;

(C) $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}|$; (D) \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 有相同的特征值.

(5) 设 \mathbf{A} 为 n 阶方阵, 且 $|\mathbf{A}| \neq 0$, 下列命题正确的是 ()

(A) 对 n 阶方阵 \mathbf{B} , 若 $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$, 则 \mathbf{A} , \mathbf{B} 有相同的特征值;

(B) 对 n 阶方阵 \mathbf{B} , 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$;

(C) 对 n 阶方阵 \mathbf{B} , 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则 $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$;

(D) 对任意的非零向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 都有 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$.

三、计算题 (每小题 8 分, 共 16 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 请直接在题下空白处作答)

$$(1) \text{ 计算 } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 10 \\ 4 & 1 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

(2) 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, 求 \mathbf{A}^2 , $|\mathbf{A}^5|$.

四、解矩阵方程 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. (本题满分 10 分)

五、设向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ ，求此向量组的秩和一个最大线性无关组，并把其余向量用这个最大线性无关组线性表示. (本题满分 10 分)

六、求非齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -6 \end{cases}$$
 的通解. (本题满分 10 分)

七、已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 把 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化成标准形. (本题满分 12 分)

八、证明下列命题：（每小题 6 分，共 12 分）

- (1) 若 \mathbf{A} 可逆，且 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 相似，则 \mathbf{A}^* 与 \mathbf{B}^* 相似；
- (2) 设 \mathbf{A} 为 n 阶实对称矩阵，且 $\mathbf{A}^3 - 6\mathbf{A}^2 + 11\mathbf{A} - 6\mathbf{E} = \mathbf{O}$ ，则 \mathbf{A} 是正定矩阵.