南京信息工程大学 2022–2023 学年第一学期

《高等数学（1）》第二次月考暨期中试卷参考答案及评分标准

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．函数 $y=\ln(\underbrace{1-2x}_{>0})+\arcsin\boxed{\dfrac{x-1}{2}}$ 的定义域为 $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right)$．

$-1\leq \dfrac{x-1}{2} \leq 1$

2．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\sqrt[n]{20^n+1960^n+70^n+2022^n}}_{x_n}=$ 2022．

$2022^n < 20^n+1960^n+70^n+2022^n < 4\cdot 2022^n$

夹逼准则

$\therefore 2022 < x_n < \sqrt[n]{4}\cdot 2022$

3．设函数 $f(x)=\cos(5x)$，则当 $n\geq 1$ 时，$f^{(n)}(x)=5^n\cos\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$．

$\cos(ax+b)$ 的 n 阶导数．

4．函数 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{x}{2}}+\cos x-2, & x<0 \\ 2\sin x, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)=\dfrac{1}{2}$．

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{\frac{x}{2}}+\cos x-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}-\sin x}{1}=\dfrac{1}{2}$

5．设 $y=\operatorname{arccot}\sqrt{1-x}$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=-1}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$．

求导链式法则

二、选择题 （每题 3 分，共 15 分）

1．函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续是可微的 （ B ）

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既非充分也非必要条件

2．设函数 $y=f(e^{-x})$，则 $y'=$ （ C ）

(A) $f'(e^{-x})$　　(B) $e^{-x}f'(e^{-x})$　　(C) $-e^{-x}f'(e^{-x})$　　(D) $-f'(e^{-x})$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{3}, & x\leq 1 \\ x^2, & x>1 \end{cases}$，则在 $x=1$ 处 （ A ）

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-\frac{1}{3}}{x-1}=\cancel{\lim(x+1)}=\infty$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\frac{x^2}{3}-\frac{1}{3}}{x-1}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=\dfrac{2}{3}$

(A) 左导数存在，右导数不存在　　(B) 左导数与右导数均存在

(C) 左导数与右导数均不存在　　(D) 左导数不存在，右导数存在

4．由方程 $xy+2\ln x=y^4$ 所确定的 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 （ D ）

隐函数求导　① $y'(1)=1$　② $(1,1)$　→ 切线 $y-1=1\cdot(x-1)$ 即 $y=x$

(A) $x+y=1$　　(B) $x-y=1$　　(C) $y=-x$　　(D) $y=x$

5．设函数 $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，则方程 $f'(x)=0$ 根的个数为 （ C ）

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

$f(x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2,\ x_4=3,\ x_5=4,\ x_6=5$

$f(x)$ 罗尔定理　$f'(\xi_1)=0$　$f'(\xi_2)=0$　$f'(\xi_3)=0$　$f'(\xi_4)=0$　$f'(\xi_5)=0$

三、计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1．求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{(1-e^{-x})\ln(1+x^2)}$．

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{3x^2}$ ……………………………4 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-1}{3(1+x^2)}=-\dfrac{1}{3}$． ……………………………6 分

2．求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x+x)^{\frac{1}{\tan 2x}}$．

解：原式 $=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{\tan 2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^x+x)}{2x}}$ ……………………………3 分

$=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x+1}{2(e^x+x)}}=e$． ……………………………6 分

3．设 $\Delta x\to 0$ 时，$f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)-2\Delta x$ 是比 Δx 高阶的无穷小，求 $df(x_0)$．

解：由题设 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)-2\Delta x}{\Delta x}=0$，则 ……………………………2 分

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+3\Delta x)-f(x_0)}{3\Delta x}\times 3=3f'(x_0)=2$． ……………4 分

于是 $df(x_0)=f'(x_0)dx=\dfrac{2}{3}dx$． ……………………………6 分

4．设 $y=x^2e^{2x}$，求 $y^{(20)}$．

解：记 $u=e^{2x}$，$v=x^2$，则 $u^{(k)}=2^ke^{2x}$，$v'=2x$，$v''=2$，$v'''=0$． ……………………2 分

由莱布尼兹公式，$y^{(20)}=u^{(20)}v+C_{20}^1u^{(19)}v'+C_{20}^2u^{(18)}v''+0$ ……………………4 分

$=2^{20}e^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}e^{2x}\cdot 2x+190\cdot 2^{18}e^{2x}\cdot 2$

$=2^{20}e^{2x}(x^2+20x+95)$． ……………………………6 分

5．设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\ln(1+t)\\ y=t^3+\dfrac{3}{2}t^2\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$．

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2+3t}{1-\frac{1}{1+t}}=3(t+1)^2$． ……………………………2 分

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6(t+1)}{1-\frac{1}{1+t}}=\frac{6(t+1)^2}{t},\quad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=\left.\frac{6(t+1)^2}{t}\right|_{t=1}=24.$$ ……………………6 分

四、(本题 8 分)设函数 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x^2), & x>0 \end{cases}$ 处处可导,求 a,b.

解:$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$. …………… 2 分

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x}=0$. …………… 5 分

$f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a=f'_+(0)=0$. 即 $a=0$,$b=1$. ………… 8 分

五、(本题 8 分)求函数 $f(x)=\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}$ 的间断点,并判断其类型.

解:函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 及 $x=2$ 处无定义.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{x-2}}=\lim\limits_{x\to 0}(x-2)=-2$,$x=0$ 是第一类可去间断点. ………… 4 分

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=0$,$\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x\arctan x}{e^{\frac{x^2}{x-2}}-1}=-2\arctan 2$,$x=2$ 是第一类跳跃间断点. …… 8 分

六、(本题 8 分)设函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导数,$f(0)=0$,$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\ne 0 \\ f'(0), & x=0 \end{cases}$. 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解:由题设,$g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f'(0)x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{2}=\dfrac{1}{2}f''(0)$. …………3 分

$$g'(x)=\begin{cases} \dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\ne 0 \\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0 \end{cases}.$$ ………………………………5 分

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

则 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续. ……………………………8 分

七、（本题 8 分）证明费马引理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且在 x_0 处可导. 若对任意的 $x\in U(x_0)$，有 $f(x)\le f(x_0)$，则 $f'(x_0)=0$.

一只有导数定义 2分

证明：$f(x)$ 在 x_0 处可导，且 $\forall x\in U(x_0)$，有 $f(x)\le f(x_0)$，则 $f(x)-f(x_0)\le 0$.

由导数的定义及极限的保号性，$\forall x\in U(x_0)$，

当 $x>x_0$ 时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ 2'，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$. …………… 3 分 少"=" -2

当 $x<x_0$ 时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ 2'，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$. …………… 6 分

所以 $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=0$. ………………………………8 分

八、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 内连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=f(1)=0$. 证明：$(x^2+1)f'(x)-2xf(x)=$ (在 $(0,1)$ 内至少存在一个根.

证明：令 $F(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$，$x\in[0,1]$， ……………………………………… 3 分

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$F(0)=F(1)=0$. 由罗尔定理， ……… 5 分

-1 -1

至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=\frac{(x^2+1)f'(x)-2xf(x)}{(x^2+1)^2}\Big|_{x=\xi}=0$， 2'

则 $(x^2+1)f'(x)-2xf(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根 ξ，得证. …………………… 8 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.