高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第四节 全微分

1 全微分的概念

2 可微的条件

3 全微分的计算

4* 在近似计算中的应用

5 内容小结

全微分

教学目标

- 理解多元函数全微分的概念,几何意义
- 掌握可微的必要条件和充分条件
- 了解全微分在近似计算中的应用

重难点

重点： 全微分的概念

- 可微的必要条件和充分条件

难点： 函数的可微与偏导数存在、连续性之间的关系

一、全微分的概念

1、一元函数微分的回顾

定义： 函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0 及$x_0+\Delta x$ 在此区间内，如果

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

成立（其中A 是与Δx 无关的常数），称函数$y=f(x)$在点x_0**可微**，并称$A\cdot\Delta x$为函数$y=f(x)$在点x_0相应自变量增量Δx的**微分**，记作 $\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0)$，即 $\boxed{\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x.}$

2、增量的概念

对于二元函数$z=f(x,y)$,由一元函数的微分得

$$\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y) \approx f_x(x,y)\Delta x$$

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f_y(x,y)\Delta y$$

上两式的左端分别叫做二元函数对x和 y 的**偏增量**,

而右端分别叫做二元函数对x和y的**偏微分**.

在实际中, 有时需研究多元函数中各自变量都取得增量时因变量所获得的增量, 即所谓**全增量**的问题.

例：设矩形金属薄板受热膨胀后，长由x_0 增加Δx，宽由 y_0 增加Δy，则面积变化为 $\Delta S=(x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y)-x_0y_0$，

即
$$\boxed{\Delta S=y_0\Delta x+x_0\Delta y+\Delta x\Delta y}$$

全增量ΔS 由三项组成，前两项是Δx与Δy的线性函数，

第三项是比$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$高阶的无穷小.

一般地，函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量记为Δz，即

$$\boxed{\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}$$

3、全微分的概念

定义1： 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可以表示为 $\boxed{\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)}$

其中A,B不依赖于$\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x,y 有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$,

则称函数$z=f(x,y)$在点(x,y) **可微**，$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) 的**全微分**，记为 $\mathrm{d}z$，即

$$\boxed{\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y}$$

全微分

如果函数$z=f(x,y)$在区域D内各点都可微分, 则称函数$z=f(x,y)$在D内**可微分**, 或称函数$z=f(x,y)$是D内的**可微函数**.

注：多元函数全微分有类似于一元函数微分的性质.

- $\mathrm{d}z$是Δx与Δy的线性函数，
- Δz与$\mathrm{d}z$之差是比ρ高阶的无穷小.

二、可微的条件

1、可微与连续的关系

定理1 若函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分,则它在该点连续.

证明: 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分, 则

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0$, 从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim\limits_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z] = f(x,y),$

因此, 函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处连续.

➢ 该结论的逆命题不成立，即连续不一定可微分！

例. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续但不可微分.

解 连续易证，因为在点 $(0,0)$ 处有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\text{不存在.}$$

所以函数在此点不可微分.

2、可微的必要条件

定理2（必要条件） 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分，

则该函数在点(x,y)的偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$必存在，且

函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全微分为

$$\boxed{\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y}$$

全微分

证明： 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 可微分，

$\forall P'(x+\Delta x, y+\Delta y)\in U(P,\delta)$，总有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

特别地，当$\Delta y=0$时，上式仍成立，此时$\rho=|\Delta x|$，

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\cdot\Delta x+o(|\Delta x|),$$

即 $\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=A+\dfrac{o(|\Delta x|)}{\Delta x}\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z}{\Delta x}=A$， 故 $A=f_x(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

同理得 $B=\dfrac{\partial z}{\partial y}$. 所以 $\boxed{\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y}$

问题：一元函数有“可导是可微的充要条件”，多元函数是否有类似的性质？

由上例知函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0,0)处有 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但不可微分.

所以偏导数存在是可微分的**必要条件**而**不是充分条件**.

3、可微分的充分条件

定理3(充分条件) 如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$ **连续**，则该函数在点(x,y) **可微分**.

证明:（略）

- 该定理的逆命题不成立,

即可微函数的偏导数不一定连续!

例1 试证函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续, 偏导数存在但偏导数在(0,0)不连续, 而函数在此点可微.

证明：1）证明函数 $f(x,y)$ 在点(0,0) 处连续.

$\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy=0$， $\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 为有界函数

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$, 故函数在点(0,0)连续.

例1 试证函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续, 偏导数存在但偏导数在$(0,0)$不连续, 而函数在此点可微.

证明: 2）证明函数 $f\,(x,y)$在点 $(0,0)$ 处偏导数存在.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理可得 $f_y(0,0)=0.$

例1 试证函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续, 偏导数存在但偏导数在$(0,0)$不连续, 而函数在此点可微.

证明: 3) 证明函数 $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

当$(x,y)\neq(0,0)$时, $f_x(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y=x}} f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\dfrac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cos\dfrac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$,极限不存在

所以$f_x(x,y)$在$(0,0)$不连续. 同理可证 $f_y(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

例1 试证函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$

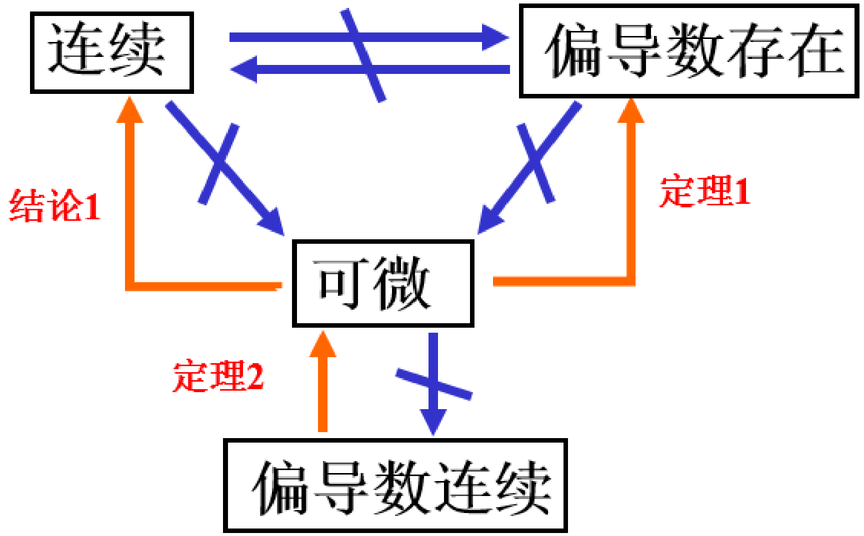
连续，偏导数存在但偏导数在 $(0,0)$ 不连续，而函数在此点可微.

证明：4) 证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微分.

$$\because \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

$\therefore f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微，且 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0)}=0.$

多元函数连续，可导，可微的关系：



注：如何判断多元函数的可微性

①若函数不连续，则函数不可微；

②若函数偏导数不存在，则函数不可微；

③若函数连续且偏导数存在, 用可微的定义或充分条件判断.

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta z - (A\Delta x + B\Delta y)}{\rho} =$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - (f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y)}{\rho} \overset{?}{=} 0$$

例2 设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 讨论函数在(0,0)处的连续性、可偏导性和可微性.

解:1) $\because \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|}=0=f(0,0)$

故函数 $f(x,y)$在点 (0,0) 连续.

例2 设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 讨论函数在$(0,0)$处的连续性、可偏导性和可微性.

解：2） $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$，所以 $f_x(0,0)=0$;

$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{0}{\Delta y}=0$，所以 $f_y(0,0)=0$.

$\therefore f(x,y)$ 在点$(0,0)$可偏导.

例2 设 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 讨论函数在(0,0)处的连续性、可偏导性和可微性.

解: 3) 由于 $\dfrac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\sqrt{\dfrac{|\Delta x\cdot\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{\Delta z-\mathrm{d}z}{\rho}=\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\frac{\left|k(\Delta x)^2\right|}{(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2}}=\sqrt{\frac{|k|}{1+k^2}}$$

当 k 取不同值时, 极限值不同, 因此极限不存在,

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

三、全微分的运算

习惯上, 把自变量的增量用自变量的微分表示, 记函数 $z=f(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$. 通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和称为二元函数的微分符合**叠加原理**.

推广: 设$u=f(x,y,z)$可微分, 则$\boxed{\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.}$

例3 计算下列函数的全微分

（1）$z = xe^{2y}$;　　（2）$z = x^2 - xy + y^2$

解:（1）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{2y}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xe^{2y}$，所以 $\mathrm{d}z = e^{2y}\mathrm{d}x + 2xe^{2y}\mathrm{d}y$;

（2）$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x,$

所以$\mathrm{d}z = (2x - y)\mathrm{d}x + (2y - x)\mathrm{d}y.$

例4 设 $z=\arctan\dfrac{x}{1+y^2}$， 求 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}$.

解：

$$z_x'\big|_{(1,1)}=\frac{1/(1+y^2)}{1+\left(x/(1+y^2)\right)^2}\bigg|_{(1,1)}=\frac{2}{5},$$

$$z_y'\big|_{(1,1)}=\frac{-2xy/(1+y^2)^2}{1+\left(x/(1+y^2)\right)^2}\bigg|_{(1,1)}=-\frac{2}{5},$$

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\dfrac{2}{5}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{5}\mathrm{d}y=\dfrac{2}{5}(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$

全微分

例5 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解： $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$,

故所求全微分 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x + (\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz})\mathrm{d}y + ye^{yz}\mathrm{d}z$.

四*、全微分在近似计算中的应用

当二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的两个偏导数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ 连续，且 $|\Delta x|,|\Delta y|$ 较小时，有近似不等式

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

也可写成

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.}$$

例6 计算 $(1.04)^{2.02}$ 的近似值.

解：设函数 $f(x,y)=x^y$. 取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$.

$\because\quad f(1,2)=1,\ f_x(x,y)=yx^{y-1},\ f_y(x,y)=x^y\ln x,$

所以 $f_x(1,2)=2,\ f_y(1,2)=0$. 由公式得

$$(1.04)^{2.02}\approx 1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08.$$

五、内容小结

1、多元函数全微分的概念；

2、多元函数全微分的求法；

3、多元函数连续、可导、可微的关系.

（注意：与一元函数有很大区别）

全微分

思考题 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微的充分条件是（ D ）

(A) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续.

(B) $f_x(x,y)$、$f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域存在.

(C) $\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y$, 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时是无穷小量.

(D) $\dfrac{\Delta z-f_x(x,y)\Delta x-f_y(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$, 当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时是无穷小量.

所谓天才，

只不过是把别人喝咖啡的功夫

都用在工作上了。

善于利用零星时间的人，

才会做出更大的成绩来。