高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第一节 空间直角坐标系

空间直角坐标系

- 理解空间直角坐标系
- 掌握空间点的坐标
- 会求空间对称点的坐标
- 会求空间两点间距离

教学目标

重难点

重点：空间点的坐标

- 空间两点间距离

难点：空间对称点的坐标

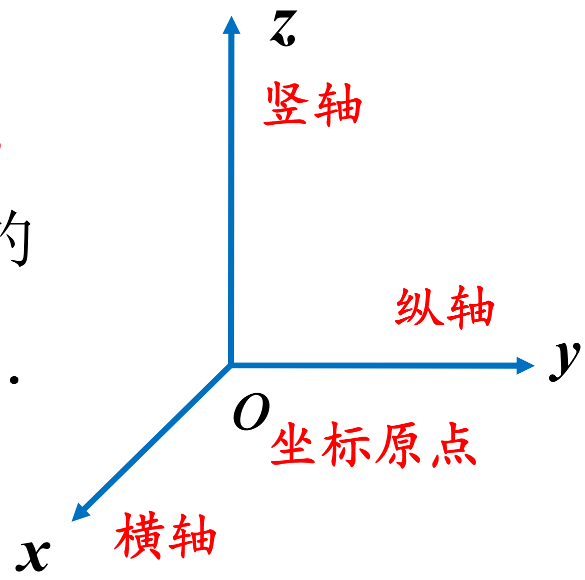
- 空间两点间距离

一、空间直角坐标系

1、坐标轴、坐标原点、空间直角坐标系

在空间选定一点O，过O作两两垂直的三条数轴，一般具有相同的长度单位.

分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)和 z 轴(竖轴)，统称坐标轴.

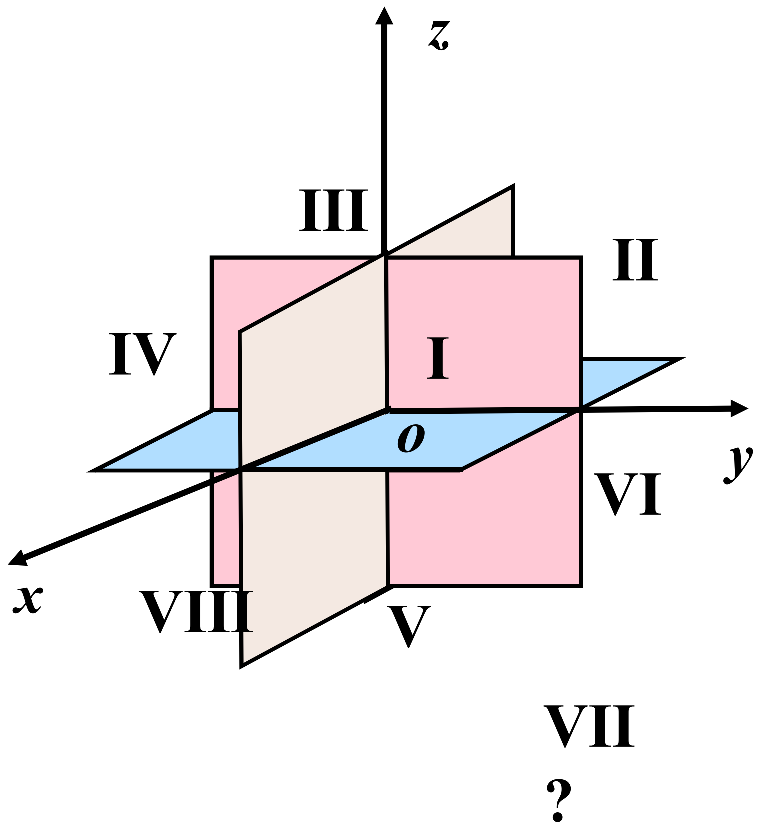


三坐标轴的正方向符合右手系，组成空间直角坐标系.

2、坐标面、卦限

三坐标轴中任意两条确定的平面，称为**坐标面**，分别称为xOy面，yOz面和zOx面.

三张坐标面把空间分成的八个部分称为**卦限**.



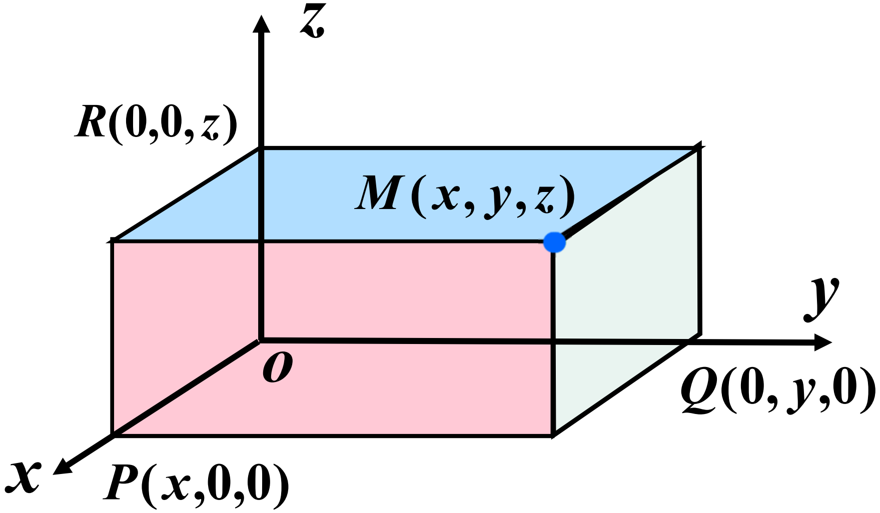
3、空间中点的坐标表示

过点M作三坐标轴的垂直平面，所得交点P, Q, R在x轴、y轴、z轴的坐标依次为x, y, z，称有序数组(x, y, z)为点M的坐标.

空间点M

$\Updownarrow$ 一一对应

有序数组$M(x, y, z)$



4、一些特殊点的坐标

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}\text{ 轴上的点 } P(x,0,0) \\ \boldsymbol{y}\text{ 轴上的点 } Q(0,y,0) \\ \boldsymbol{z}\text{ 轴上的点 } R(0,0,z) \end{cases} \qquad \begin{cases} \boldsymbol{xOy}\text{面上的点 } A(x,y,0) \\ \boldsymbol{yOz}\text{面上的点 } B(0,y,z) \\ \boldsymbol{zOx}\text{面上的点 } C(x,0,z) \end{cases}$$

思考题 $A(1,-2,3)$、$B(2,3,-4)$、$C(2,-3,-4)$ 分别在哪个卦限？

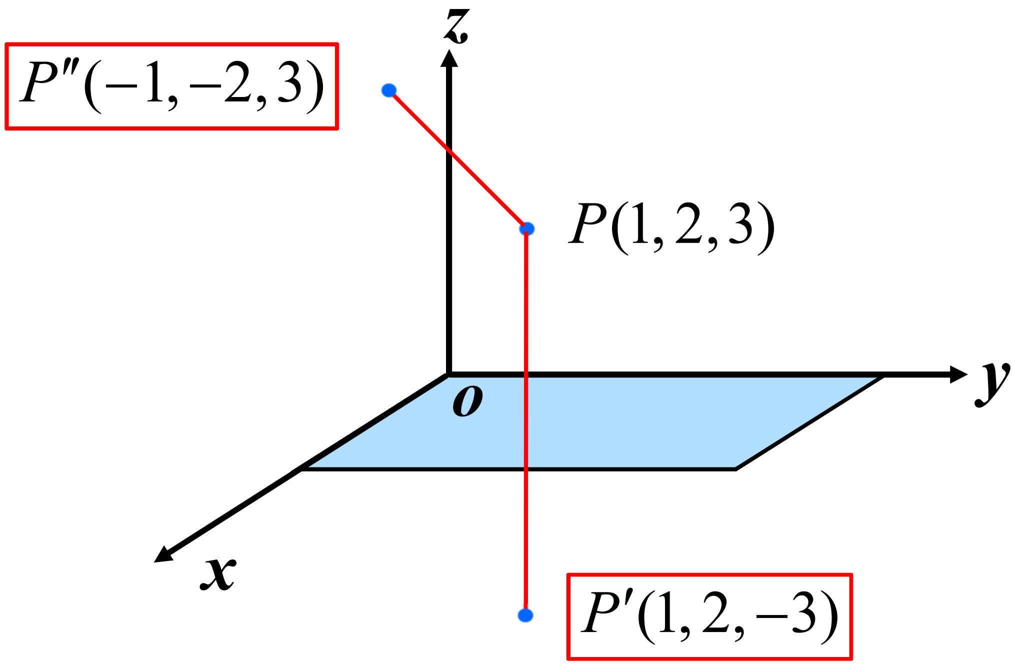
解 分别在第Ⅳ，Ⅴ，Ⅷ 卦限.

各卦限内点的坐标的符号如下：

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

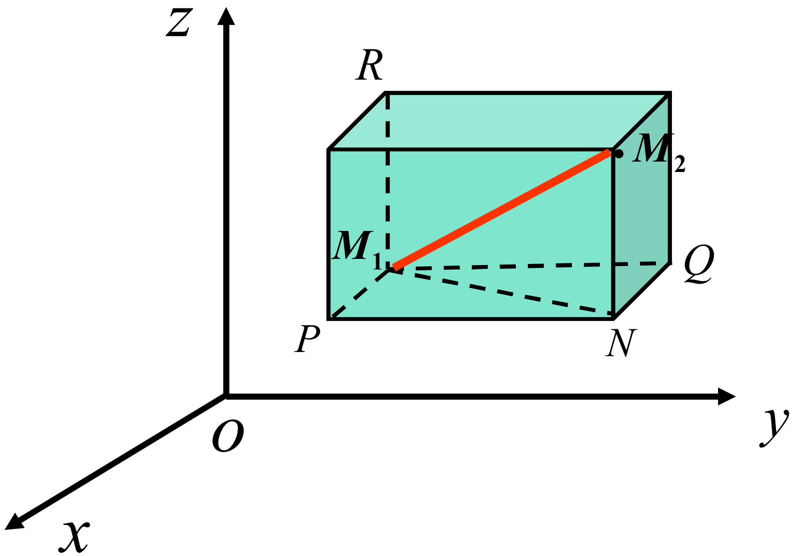
例1 指出点 $P(1,2,3)$ 关于 xOy 面以及 z 轴的对称点的坐标.

解



二、空间两点间距离公式

设点$M_1(x_1,y_1,z_1)$和$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间任意两点，

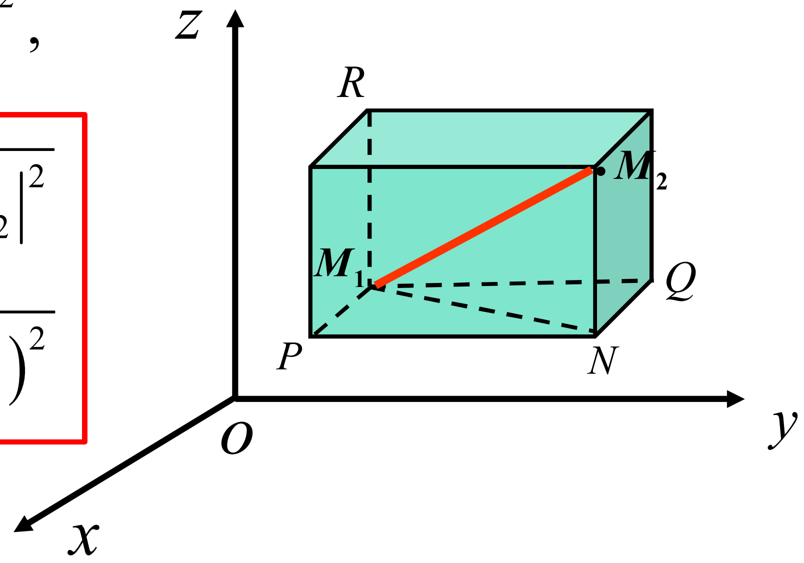


$$d=\left|M_1M_2\right|=?$$

$$\because |M_1P| = |x_2 - x_1|, |PN| = |y_2 - y_1|, \quad |NM_2| = |z_2 - z_1|,$$

$$\therefore |M_1M_2|^2 = |M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2,$$

$$\boxed{\begin{aligned}\therefore\ |M_1M_2| &= \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\end{aligned}}$$



——空间两点间距离公式

例2 求证以$A(4,3,1)$、$B(3,1,2)$、$C(5,2,3)$为顶点的三角形ΔABC是一个等边三角形.

证明 由两点间距离公式得:

$$|AB|^2 = (4-3)^2+(3-1)^2+(1-2)^2 = 6$$

$$|BC|^2 = (5-3)^2+(2-1)^2+(3-2)^2 = 6$$

$$|AC|^2 = (5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2 = 6$$

$\boxed{\therefore |AB|=|AC|=|BC|,}$ 得证.

例3 设 P 在 x 轴上，它到 $P_1(0,\sqrt{2},3)$ 的距离为到点 $P_2(0,1,-1)$ 距离的两倍，求点 P 的坐标.

解 设 P 点坐标为 $P(x,0,0)$，则

$$|PP_1|=\sqrt{x^2+11},\quad |PP_2|=\sqrt{x^2+2}$$

由于 $|PP_1|=2|PP_2|$ $\therefore \sqrt{x^2+11}=2\sqrt{x^2+2}$

解得 $x=\pm 1$. 所求点为 $\boxed{(1,0,0),(-1,0,0).}$

三、内容小结

- 空间直角坐标系（**轴**、**坐标面**、**卦限**）
- 空间点的**坐标**，特殊点的坐标
- 空间两点间**距离**公式

$$\left|M_1M_2\right| = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$

没有一个冬天不可逾越

没有一个春天不会来临

让我们携手

--静待花开