练习二参考答案

一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{(1+x)(\cos x-1)}=\underline{-\dfrac{2}{3}}$.

(2) 函数 $y=x\cdot 2^x$ 的极小值点 $x=\underline{-\dfrac{1}{\ln 2}}$.

(3) 设 $f'(\sin^2 x)=\cot^2 x-\cos^2 x$， 则当 $x>0$ 时， $f(x)=\underline{\ln x-2x+\dfrac{x^2}{2}+C}$.

(4) 函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y+\mathrm{e}^y=x$ 所确定，则 $y'=\underline{\dfrac{1-2xy}{x^2+\mathrm{e}^y}}$.

(5) $\int_{-a}^{a}(x^3+2)\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\underline{\pi a^2}$.

二、选择题

(1) 设曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$，则该曲线（ D ）

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平又有铅直渐近线.

(2) 若 $f(x)$ 的一个原函数为 e^x，则 $\int f'(2x)\mathrm{d}x=$（ A ）

(A) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C$　　(B) $2\mathrm{e}^x+C$　　(C) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x+C$　　(D) $2\mathrm{e}^{2x}+C$.

(3) 设函数 $f(x)$ 连续， $t>0$，则 $t\int_0^{\frac{s}{t}}f(tx)\,\mathrm{d}x$ 的值（ A ）

(A) 依赖于 s ，不依赖于 t 和 x　　(B) 依赖于 s 和 t ，不依赖于 x

(C) 依赖于 t 和 x ，不依赖于 s　　(D) 依赖于 s 和 x，不依赖于 t.

(4) 积分 $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=$（ D ）

(A) -2　　(B) 2　　(C) 0　　(D) 发散.

三、计算题

(1) 求函数 $y=\ln(1+x^2)+\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 的微分 $\mathrm{d}y$.

解： $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{2x}{1+x^2}+\dfrac{(1-x)^2}{2(1+x^2)}\dfrac{2}{(1-x)^2}=\dfrac{2x+1}{1+x^2}$，

所以 $\mathrm{d}y=\dfrac{2x+1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1+t^2\\ y=\cos t\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-\sin t}{2t}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-2t\cos t+2\sin t}{(2t)^2\cdot 2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3} \quad .$$

（3） 求 a,b 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=1$.

解： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=1$，得 $b=1$，

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{\dfrac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{a+x}}=1$，得 $a=4$，故 $a=4,b=1$.

方法二：令 $\sqrt{a+t}=u$ ，则 $t=u^2-a$

$$\int_0^x\frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+x}}\frac{(u^2-a)^2}{u}\cdot 2u\mathrm{d}u=2\left[\frac{1}{5}u^5-\frac{2}{3}au^3+a^2u\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left[\dfrac{1}{5}u^5-\dfrac{2}{3}au^3+a^2u\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+x}}}{bx-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^{\frac{3}{2}}-2a(a+x)^{\frac{1}{2}}+a^2(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{b-\cos x}$$

该极限存在，所以 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0\Rightarrow b=1$

原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^{\frac{3}{2}}-2a(a+x)^{\frac{1}{2}}+a^2(a+x)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^2-2a(a+x)+a^2}{\frac{1}{2}x^2\sqrt{a+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}}=1\Rightarrow a=4$$

(4)求不定积分 $\int e^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x$.

解：$I=-\int\sin 2x\mathrm{d}e^{-x}=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x$

$=-e^{-x}\sin 2x-2\int\cos 2x\mathrm{d}e^{-x}=-e^{-x}\sin 2x-2e^{-x}\cos 2x-4\int e^{-x}\sin 2x\mathrm{d}x$,

$I=-\dfrac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$.

（5）设 $f(x)=\begin{cases}xe^{-x^2}, & x\ge 0\\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0\end{cases}$，求 $\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解： 令 $x-2=u$

原式 $=\int_{-1}^{2}f(u)\,\mathrm{d}u=\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int_0^2 xe^{-x^2}\,\mathrm{d}u$

$=\tan\dfrac{x}{2}\Big|_{-1}^{0}-\dfrac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^2=\tan\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}e^{-4}+\dfrac{1}{2}$.

四、设 $f(x)$ 是多项式，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4$， $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=8$，求 $f(x)$.

解：由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-8x^8}{2x^2+3x+1}=4$，可设 $f(x)=8x^8+8x^2+ax+b$ ，

又由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=8$ 得 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，从而 $b=0$，

则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x^8+8x^2+ax}{x}=8$，得 $a=8$，所以 $f(x)=8x^8+8x^2+8x$.

五、求函数 $y=x^4(12\ln x-7)$ 的凹凸区间及拐点.

解： 函数的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，

$y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot 12\cdot\dfrac{1}{x}=48x^3\ln x-16x^3$， $y''=48\cdot 3x^2\ln x$，

令 $y''=0$ 得 $x=1$，当 $x>1$ 时， $y''>0$；当 $0<x<1$ 时， $y''<0$，

可知函数的凹为 $[1,+\infty)$，函数的凸区间 $(0,1]$， 函数的拐点为 $(1,-7)$.

六、 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=\arctan x-\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

解：设 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=A$，则 $\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[\arctan x-x\int_0^1 x f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x$

故 $A=\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x-A\int_0^1 x\mathrm{d}x$， $A=\int_0^1\arctan x\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{A}{2}$，

$$\frac{3A}{2}=\frac{x^2}{2}\arctan x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x-\arctan x]\Big|_0^1$$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$， $A=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}$， 所以 $f(x)=\arctan x-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}$.

方法二. $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$， 则 $f(x)=\arctan x-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$=\arctan x-\left[\frac{x^2}{2}\cdot f(x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\ =\arctan x-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\arctan x-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left[\arctan x\right]_0^1=\arctan x-\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8},$$

令 $x=1$，得 $f(1)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{3}$. 又 $f(1)=\frac{\pi}{4}-\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$，

所以 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{3}$， 所以 $f(x)=\arctan x-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}$.

七、 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$， $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(2)$，

证明：存在 $\xi\in(0,2)$，使得 $f''(\xi)=0$.

证明：由题设及 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)}{\cos\pi x}=0$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$， $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，

又由 $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(2)$ 及积分中值定理得，$\exists\xi_1\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，使得 $f(\xi_1)=f(2)$ ，

由罗尔定理 $\exists\xi_2\in(\xi_1,2)$，使 $f'(\xi_2)=0$，

显然 $\xi_2>\frac{1}{2}$，由 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，且 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=f'(\xi_2)=0$，

对 $f'(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},\xi_2\right]$ 上应用罗尔定理得：$\exists\xi\in\left(\frac{1}{2},\xi_2\right)\subset(0,2)$，使 $f''(\xi)=0$.