南京信息工程大学 2019-2020 学年第二学期

《线性代数》期末试卷 A 卷参考答案及评分标准

一、填空题(每小题 3 分，共 15 分)

（1）设$\alpha=(1,2,3)^T$，$\beta=\left(1,\frac{1}{2},0\right)^T$，$A=\alpha\beta^T$，则$A^3=$______________.

【答案】$\begin{pmatrix}4&2&0\\8&4&0\\12&6&0\end{pmatrix}$；

（2）设方程$\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}&1&1\\1&\boldsymbol{a}&1\\1&1&\boldsymbol{a}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$有无穷多个解，则$\boldsymbol{a}=$____.

【答案】-2；

（3）设行列式$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为____.

【答案】-28；

（4）设A为3阶方阵且$|A|=8$，又A有2个特征值-1和4，E为3阶单位阵，则

$|A-E|=$_________.

【答案】-28；

（5）设$\alpha_1=(1,1)^T$，$\alpha_2=(1，0)^T$，$\beta_1=(2,3)^T$，$\beta_2=(3,1)^T$则从α_1，α_2到β_1，β_2的过渡矩阵为__________________________.

【答案】$\begin{pmatrix}3&1\\-1&2\end{pmatrix}$.

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

（1）设A为3阶矩阵，将A的第二行加到第一行得B，再将B的第一列的-1倍加到第2列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　　　　　）.

【答案】B；

（A）$C=P^{-1}AP$　　（B）$C=PAP^{-1}$　　（C）$C=P^{T}AP$　　（D）　$C=PAP^{T}$

（2）下列命题错误的是（　　　　）

（A）如果 A、E 均为 n 阶矩阵，则 $(A-E)(A+E)=(A+E)(A-E)$；

（B）如果 A、B 均为 $n\times 1$ 阶矩阵，则 $A^{T}B=B^{T}A$；

（C）如果 A、B 均为 n 阶矩阵且 AB=0，则 $(A+B)^{2}=A^{2}+B^{2}$；

（D）如果 A 均为 n 阶矩阵，则 $A^{m}A^{k}=A^{k}A^{m}$.

【答案】C;；

（3）设 A、B 为满足 AB=0 的任意两个非零矩阵，则必有（　　　　）

（A） A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

（B） A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关；

（C） A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关；

（D） A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

【答案】A；

（4）设 A 是 4 阶实对称矩阵，且 A^{2}+A=0，若 $r(A)=3$，则 A 相似于（　　　　）

（A） $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$；　　（B） $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$；

（C） $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$；　　（D） $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

【答案】D；

（5）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$， B=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A、B（　　　　）

（A）合同且相似；　　（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；　　（D）既不合同也不相似.

【答案】B.

三、计算题(每小题 6 分，共 18 分)

（1）计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^n \\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^n \end{vmatrix}$

【解】$D=n!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-1} \end{vmatrix}$ ⋯

$=n!\cdot(n-1)!\cdot(n-2)!\cdots 2!\cdot 1!=\prod_{k=1}^{n} k!$ ⋯

（2） 设$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$，求矩阵$B$的秩，并求其一个最高阶非零子式.

【解】 对$\boldsymbol{B}$施行初等行变换：

$$\boldsymbol{B}\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-2r_1 \\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 8 \end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_0.$$ ⋯

右端已变成阶梯矩阵，它有两个非零行，故$\mathrm{r}(\boldsymbol{B})=2$． ⋯

最高阶非零子式为$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. ⋯

（3）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & -6 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

【解】 对矩阵$(\boldsymbol{A}\,|\,E)=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -8 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$施行行变换得⋯

$$\xrightarrow[L_3+3L_1]{\substack{L_2+5L_1\\(-1)L_1}}\begin{pmatrix}1&-2&-1&-1&0&0\\0&2&-1&5&1&0\\0&-1&1&-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3+L_2]{\substack{L_1+L_2\\L_2+L_3}}\begin{pmatrix}1&0&-2&4&1&0\\0&1&0&2&1&1\\0&0&1&-1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1+2L_3}\begin{pmatrix}1&0&0&2&3&4\\0&1&0&2&1&1\\0&0&1&-1&1&2\end{pmatrix}.\cdots$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&4\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}.\cdots$$

四、设$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$，已知线性方程组$AX=b$存在两个不同解.

（1）求 λ　　（2）求$AX=b$的通解.**(本题满分 10 分)**

【解】（1）因为$AX=b$存在两个不同的解，所以$AX=b$有无穷多组解，故$|A|=0$

即$\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0$解得$\lambda=1$或$\lambda=-1\cdots$

又$\lambda=1$时$(A,\ b)=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(A)\neq R(A,b)$，方程无解

$\lambda=-1$时$(A,\ b)=\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&2&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

$R(A)=R(A,b)<3$，符合题意，故$\lambda=-1\cdots$

（2）$(A,\ b)=\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdots$

因此通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ （$k \in R$）…

五、设向量组 A：$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$，$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$，求向量组的秩及其一个最大无关组.**(本题满分 10 分)**

【解】$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 11 & 7 \\ 4 & 15 & 8 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$…

所以 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=3$，…

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为一个最大无关组.……

六、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ 相似

（1）求 x 与 y （2）求一个可逆矩阵 P，使其满足 $P^{-1}AP = B$.**(本题满分 10 分)**

【解】（1）因为 A, B 相似，所以 $trA = trB, |A| = |B|$,…

即 $2 + x = y + 1, -2 = -2y$，

所以 $x=0$， $y = 1$ …

（2）由（1）计算得到结果，有 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

显然 A 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$，

求出它们对应的特征向量，有 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$,$P_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,$P_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

由于它们属于不同的特征向量，所以一定线性无关，

令 $P=\left(P_1,P_2,P_3\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$,则 P 可逆，且有 $P^{-1}AP=B$

七、设 $\alpha_1,\cdots$，α_k 是齐次方程 $AX=0$ 的一个基础解系，$A\beta\neq 0$，证明：β，$\beta+\alpha_1,\cdots$，$\beta+\alpha_k$ 线性无关.**(本题满分 12 分)**

【证明】令 $l_0\beta+l_1\left(\beta+\alpha_1\right)+\cdots+l_k\left(\beta+\alpha_k\right)=0 \quad (1)\cdots$

两边右乘 A 得：$\left(l_0+l_1+\cdots+l_k\right)A\beta=0$，所以 $l_0+l_1+\cdots+l_k=0\cdots$

代入（1）式得 $l_1\alpha_1+\cdots+l_k\alpha_k=0$，所以 $l_1=\cdots=l_k=0$ 且 $l_0=0\cdots$

所以 β，$\beta+\alpha_1,\cdots$，$\beta+\alpha_k$ 线性无关.

八、设 $\boldsymbol{U}$ 为可逆矩阵，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}$，证明：$f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型.**(本题满分 10 分)**

【证明】显然 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$,即 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}$，则 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{U}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$，$\cdots$

对任意的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{U}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$，

故 $f=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=y_1^{\;2}+y_2^{\;2}+\cdots+y_n^{\;2}>0$，$\quad\cdots$

即 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型. $\quad\cdots$

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.