高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第四节 平面及其方程

平面及其方程

- 了解曲面方程的概念
- 掌握平面的法向量及方程形式
- 会判别两平面的位置关系
- 会求两平面之间的夹角
- 会求点到平面的距离

教学目标

重难点

重点：平面方程及其求法

- 两平面位置关系的判定
- 点到平面的距离

难点：平面方程及其求法

一、曲面方程的概念

1、曲面 S 的方程：

在空间解析几何中，任何曲面都可以看作**点的轨迹**.

三元方程 $F(x,y,z)=0$ 与曲面 S 若满足：

(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足方程 $F(x,y,z)=0$；

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足方程 $F(x,y,z)=0$,

则 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面 S 的方程,

曲面 S 叫做方程 $F(x,y,z)=0$ 的图形.

例1 求球心坐标为 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 r 的球面方程.

解 设 $P(x, y, z)$ 为所求球面上的**任一点**, 则有 $|PP_0| = r$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r$

化简得**球面方程**为 $\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2}$

特别, 球心在原点 $O(0,0,0)$,半径为 r 的球面方程为

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$$

例2 设有点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$，求线段 AB 的垂直平分面方程.

解 设 $M(x,y,z)$ 为所求平面上的**任一点**，则有 $|AM|=|BM|$

即 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$

化简得垂直平分面方程为 $\boxed{2x-6y+2z-7=0}$

注： 在本节里，我们首先讨论最简单的曲面——平面.

二、平面的点法式方程

1、法向量：

称垂直于平面的非零向量为该平面的法向量.

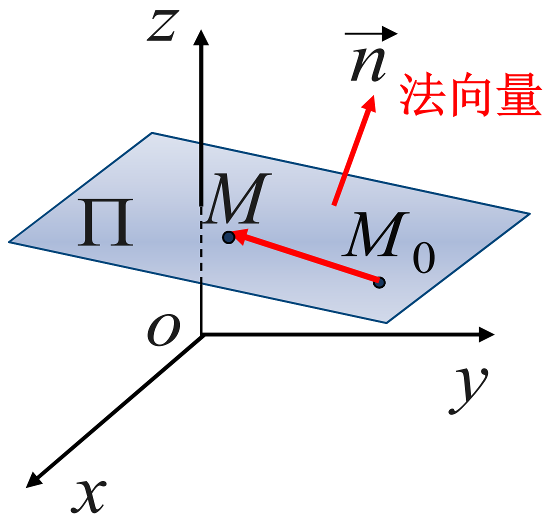
即若非零向量$\vec{n} \perp \Pi$，则称$\vec{n}$为平面Π的法向量.

2、法向量的特征：

- 法向量垂直于该平面内的任一向量.
- 法向量不唯一. $\lambda\vec{n}$ $(\lambda \neq 0)$ 也可作为平面Π的法向量.

3、平面方程的建立:

设平面过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, 求该平面Π的方程.



解 $\forall M(x, y, z) \in \Pi$, 则有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n}$

故 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$$ —— 平面的点法式方程

例3 平面过点 $(1,1,1)$，法向量为 $\vec{n}=(3,-1,2)$，求平面方程.

解 根据平面的点法式方程，所求平面的方程为

$$3(x-1)-1(y-1)+2(z-1)=0$$

化简得 $\boxed{3x-y+2z-4=0}$

例4 求过三点 $A(1,1,-1)$, $B(-2,-2,2)$, $C(1,-1,2)$ 的平面方程.

解法一 $\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$, $\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$, 取平面的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & -3 & 3\\ 0 & -2 & 3\end{vmatrix}=(-3,9,6),$$

由平面的点法式方程，所求平面的方程为

$$-3(x-1)+9(y-1)+6(z+1)=0$$

化简得 $\boxed{x-3y-2z=0}$

例4 求过三点 $A(1,1,-1)$, $B(-2,-2,2)$, $C(1,-1,2)$ 的平面方程.

解法二 设 $P(x,y,z)$ 为平面上任一点，则三个向量

$\overrightarrow{AB}=(-3,-3,3)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-2,3)$, $\overrightarrow{AP}=(x-1,y-1,z+1)$ 共面,

$\left[\overrightarrow{AP}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right]=0$，即有 $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$

化简得所求平面方程为 $\boxed{x-3y-2z=0}$.

注：一般地，求过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $k=1,2,3$

的平面方程为：

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

平面的点法式方程　　1 法向量

2 平面上一点

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}$$

三、平面的一般式方程

1、平面的一般式方程： 法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$

平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

其中 $Ax_0+By_0+Cz_0=-D$

则有 $\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$ ——平面的一般式方程

任一平面都可以用三元一次方程来表示.

反过来，任一三元一次方程 $Ax+By+Cz+D=0$

的图形总是一个平面.

例如　方程 $3x-4y+z-8=0$ 表示一个平面，

$\vec{n}=(3,-4,1)$ 是该平面的一个法向量.

2、平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的一些特殊情形

(1) 当 $D=0$ 时，平面过坐标原点；

(2) 当 $A=0$ 时，方程为 $By+Cz+D=0$，

其法向量 $\vec{n}=(0,B,C)\perp x$ 轴，该平面平行于 x 轴.

同理可得：平面 $Ax+Cz+D=0 // y$ 轴，

$Ax+By+D=0 // z$ 轴.

(3) 当 $A=0, D=0$ 时，平面 $By+Cz=0$ 过 x 轴；

当 $B=0, D=0$ 时，平面 $Ax+Cz=0$ 过 y 轴；

当 $C=0, D=0$ 时，平面 $Ax+By=0$ 过 z 轴.

(4) 当 $A=B=0$ 时，平面 $Cz+D=0$ 平行于 xoy 面；

当 $B=C=0$ 时，平面 $Ax+D=0$ 平行于 yoz 面；

当 $A=C=0$ 时，平面 $By+D=0$ 平行于 zox 面.

例5 求通过 x 轴和点 $M_0(1,-1,1)$ 的平面方程.

解 由题意，设该平面的方程为 $By+Cz=0$

因为该平面过点 $M_0(1,-1,1)$，故 $-B+C=0$ ，即 $C=B$.

代入所设方程并除以 $B\ (B\neq 0)$

得平面方程 $\boxed{y+z=0}$

例6 求过点 $(1,-2,4)$ 而平行于 xOy 面的平面方程.

解 因为所求平面平行于 xOy 面，

故可设所求平面方程为 $C(z-z_0)=0$，

将点 $(1,-2,4)$ 代入得 $C(z-4)=0$，因为 $C\neq 0$

故所求平面方程为 $\boxed{z-4=0}$.

例7 设平面过原点及点$(6,-3,2)$ 且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程.

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$.

由平面过原点知 $D=0$ ，

由平面过点 $(6,-3,2)$ 知 $6A-3B+2C=0$ ，

又 $\vec{n}\perp(4,-1,2)$ ，则 $4A-B+2C=0$ ，解得 $A=B=-\frac{2}{3}C$ ，

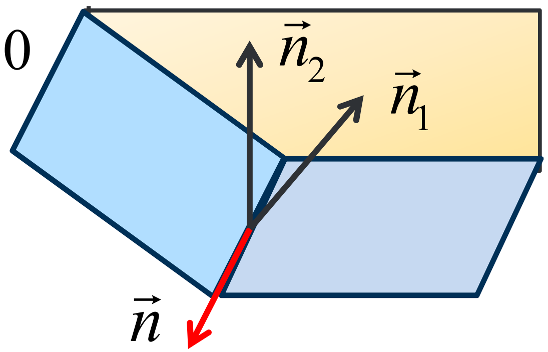
故所求方程为 $\boxed{2x+2y-3z=0}$.

例8 求过点 $(1,1,1)$，且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和平面 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

解 $\vec{n}_1=(1,-1,1)$，$\vec{n}_2=(3,2,-12)$，取法向量 $\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(10,15,5)$

所求平面为 $10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0$

化简得 $\boxed{2x+3y+z-6=0.}$



例9 设平面与 x,y,z 轴的交点依次为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 三点（其中 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$c\neq 0$），求该平面方程.

解 设此平面方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，

因为点 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 都在这平面上，

代入所设方程，即有 $\begin{cases} aA+D=0 \\ bB+D=0 \\ cC+D=0 \end{cases}$.

$$\begin{cases} aA + D = 0 \\ bB + D = 0 \\ cC + D = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{D}{a},\ \ B = -\frac{D}{b},\ \ C = -\frac{D}{c}$$

将其代入所设方程，得 $-\frac{D}{a}x-\frac{D}{b}y-\frac{D}{c}z+D=0$

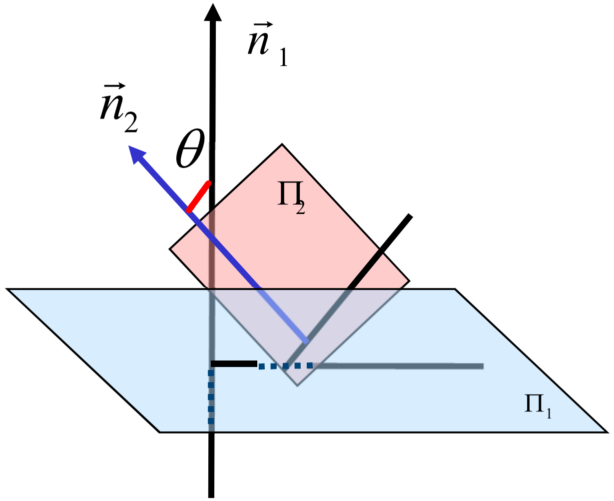
即 $\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1}$ ——平面的截距式方程

其中a,b,c依次叫做平面在 x,y,z 轴上的截距.

四、两平面的夹角

1、两平面的夹角：

两平面法向量的夹角，常指锐角.



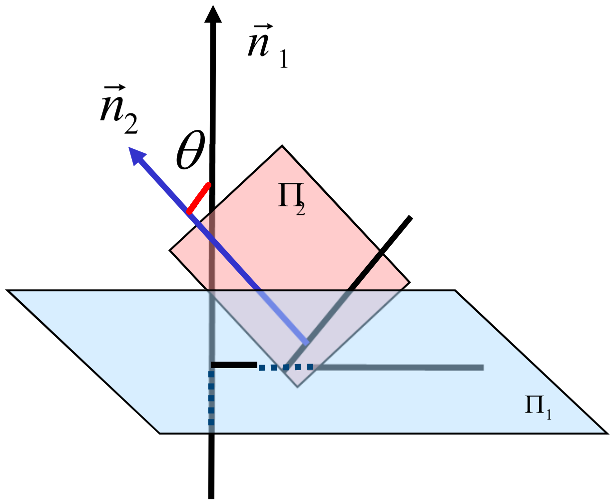
2、两平面的夹角余弦：

设平面Π_1,Π_2的法向量分别为

$\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$，则 $\boxed{\cos\theta=\left|\cos\left(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2\right)\right|}$.

由向量的坐标表示，两平面

Π_1, Π_2 的夹角 θ 的余弦



$$\cos\theta = \left|\cos\left(\vec{n}_1 \hat{,} \vec{n}_2\right)\right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\boxed{= \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}}$$ —— 两平面的夹角余弦

3、两平面的特殊位置关系：

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

(3) Π_1与Π_2重合 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ \text{有一个交点} \end{cases} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

例10 求两平面 $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$ 的夹角.

解 因为 $\vec{n}_1=(2,-1,1)$，$\vec{n}_2=(1,1,2)$，故

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|2\times1+(-1)\times1+1\times2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{2},$$

所以，所求夹角为 $\boxed{\theta=\frac{\pi}{3}.}$

例11 平面过两点 $M_1=(1,1,1)$ 和$M_2=(0,1,-1)$且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

解法一 $x+y+z=0$ 的法向量$\vec{n}_2=(1,1,1)$. $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{n}_1=(-1,0,-2)$.

设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则 $\vec{n}$ 可取为 $\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ ，

即$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, 则所求平面方程为

$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$，即 $\boxed{2x-y-z=0}$.

例11 平面过两点 $M_1=(1,1,1)$ 和 $M_2=(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

解法二 $x+y+z=0$ 的法向量 $\vec{n}_2=(1,1,1)$. $\overrightarrow{M_1M_2}=\vec{n}_1=(-1,0,-2)$.

设所求平面的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则 $\vec{n}\perp\vec{n}_1$，$\vec{n}\perp\vec{n}_2$，

即 $-A-2C=0$，$A+B+C=0$， 解得 $A=-2C$， $B=C$.

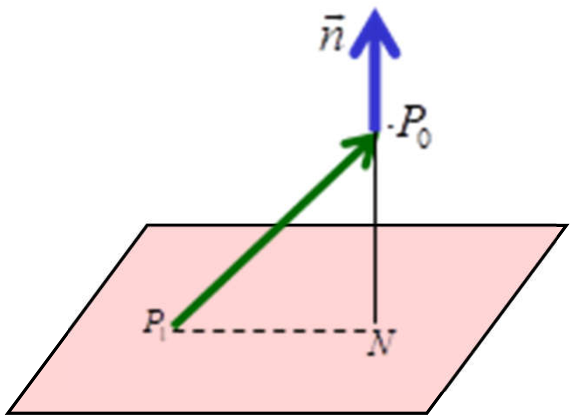
由点法式，得所求平面为 $-2C(x-1)-C(y-1)+C(z-1)=0$，

化简得 $\boxed{2x-y-z=0.}$

五、点到平面的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外的一点，

求 P_0 到该平面的**距离**.



解 设 $\vec{n}$ 是平面的法向量，

在平面上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$,

则 P_0 到这平面的距离为

$$d = \left|\mathrm{Prj}_{\vec{n}}\ \overrightarrow{P_1P_0}\right| = \frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} .$$

因为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 在该平面上，故 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$，

所以 $\boxed{d = \dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$ ——点到平面的距离公式

例12 求点 $(2,1,1)$ 到平面 $x+y-z+1=0$ 的距离.

解

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|1\times 2+1\times 1+(-1)\times 1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}\boxed{=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.}$$

练习题 讨论下列各组中两平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0;$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0;$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0.$

解 (1) 因为 $\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$,

所以两平面相交，夹角为 $\boxed{\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt{60}}.}$

(2) $\vec{n}_1=(2,-1,1),\ \vec{n}_2=(-4,2,-2)\Rightarrow\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$，两平面平行.

又 $M(1,1,0)\in\Pi_1,\ M(1,1,0)\notin\Pi_2$，两平面平行但不重合.

(3) $\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$，$M(-1,-1,0)\in\Pi_1,\ M(-1,-1,0)\in\Pi_2$，平面重合.

六、内容小结

1、平面方程：

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \quad (abc \neq 0)$

三点式
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

2、两平面的特殊位置关系：

平面 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

(3) Π_1与Π_2重合 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \\ \text{有一个交点} \end{cases} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

3、两平面的夹角余弦公式：

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

4、点到平面的距离公式：

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

没有一个冬天不可逾越

没有一个春天不会来临

让我们携手

--静待花开