第一章　函数与极限

一、主要内容小结

（一）、函数

1．定义　设 x, y 是两个变量，若 x 在其变化范围 D 内任取一个值，y 按照一定的法则有确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的函数. 记作 $y = f(x)$. x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数的定义域.

注意如何求函数的定义域（分一般解析式、分段函数、复合函数分析）

2．函数的性质：有界性、单调性、奇偶性、周期性。

3．初等函数与基本初等函数

基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数。

初等函数：由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所得函数称为初等函数。

（二）极限

1．极限的定义

数列极限的定义：对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，总有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 。

函数极限的"$\varepsilon - \delta$"定义：对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 。

函数极限的"$\varepsilon - X$"定义：对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当 $|x| > X$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 。

2．左（右）极限：对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $0 < x_0 - x < \delta \ (0 < x - x_0 < \delta)$ 时，总有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 x 从 x_0 左（右）侧趋于 x_0 时的极限，记作

$$f(x_0^-) = f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \ \left(f(x_0^+) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \right)。$$

3．无穷小：若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = 0$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0 (x \to \infty)$ 时的无穷小。

无穷大：对于 $\forall M > 0, \exists X > 0 (\delta > 0)$，当 $|x| > X \ \left(0 < |x - x_0| < \delta\right)$ 时，总有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 当 $x \to \infty (x \to x_0)$ 时为无穷大，记为 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = \infty$ 。

无穷小的比较：设 $\lim\alpha(x)=0, \lim\beta(x)=0$，

（1）若 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 高阶的无穷小，记为 $\beta(x)=o(\alpha(x))$。

（2）若 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 低阶的无穷小。

（3）若 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=C,(C\neq 0)$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是同阶无穷小。

（4）若 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是等价无穷小，记为 $\beta(x)\sim\alpha(x)$。

（5）若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\beta(x)}{x^k}=C\left(C\neq 0,k>0\right)$,，则称 $\beta(x)$ 是 x 的 k 阶无穷小。

4．求极限的常用工具及常用方法：（包括相关定理）

（1）基本极限： $\lim C=C$（C 为常数），$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1，\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>0)，\lim_{n\to\infty}q^n=\begin{cases}\infty, & |q|>1\\ 1, & q=1\\ 0, & |q|<1\end{cases}$$

（2）极限的四则运算 设 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 存在，则

$$\lim\left[f(x)\begin{matrix}\pm\\ \times\\ \div\end{matrix}g(x)\right]=\lim f(x)\begin{matrix}\pm\\ \times\\ \div\end{matrix}\lim g(x).$$

注意 在商的运算法则中, 分母的极限不为零。

（3）两个极限存在准则：

1^0 **夹逼准则：**

设 $f(x)$ 满足两个条件：（1）$g(x)\leq f(x)\leq h(x)$；（2）$\lim g(x)=\lim h(x)=A,$

则 $\lim f(x)=A$.

2^0 **单调有界数列必存在极限。**

（4）两个重要极限：

1^0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；

推广形式： 若 $\lim\limits_{x\to}\mu(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to}\dfrac{\sin\mu(x)}{\mu(x)}=1$.

2^0 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$.

推广形式： 若 $\lim\limits_{x\to}\mu(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to}\left[1+\mu(x)\right]^{\mu(x)}=\mathrm{e}$.

（5）利用无穷小的性质

设 α,β 是在自变量的同一变化过程中的无穷小，u 是有界量，c 是常数，$n\in N$，则

1）$\alpha\pm\beta$、$u\alpha$、$c\alpha$、$\alpha\beta$、α^n、$\alpha\pm\cdots\pm\beta$、$\alpha\cdots\cdots\beta$ 是这一变化过程中的无穷小；

2）$\beta\sim\alpha \Leftrightarrow \beta=\alpha+o(\alpha)$；

3）$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，$\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $\Rightarrow \lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$（等价无穷小代换定理）

特别地 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$，$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

（6）常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arctan x\sim x,$

$$\ln(1+x)\sim x,\quad \mathrm{e}^x-1\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ a^x-1\sim x\ln a,$$

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x，(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x.$$

推广形式： 若 $\lim\limits_{x\to}\mu(x)=0$，则当 $x\to$ 时，$\sin\mu(x)\quad \mu(x)$，$\mathrm{e}^{\mu(x)}-1\sim\mu(x)$（其余以此类推）

（7）利用函数的连续性：

1）设函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。

2）设 $\lim\varphi(x)=a$，而 $f(u)$ 在 $u=a$ 处连续，则 $\lim f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\lim\varphi(x)\right]$

（8）利用左右极限：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$；

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

（9）利用极限的有关定理（了解，不是重点）

定理 1 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$。

定理 2 （保号性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A, A>0(A<0)$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$

时，$f(x)>0(f(x)<0)$。

定理 3 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(x\right)=A, f(x)>0(f(x)<0)$，则 $A\ge 0\ (A\le 0)$。

（10）利用极限定义证明。

（三）连续

1．**定义** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，

则称 $f(x)$ 在点 x_0 **连续**。

2．**运算法则**（由极限运算法则）

3．**间断点** 若函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点。

第一类间断点 左、右极限都存在的间断点；

$$\begin{cases}\text{左、右极限存在且相等，称为可去间断点}\\ \text{左、右极限存在但不相等，称为跳跃间断点.}\end{cases}$$

第二类间断点 左、右极限至少有一个不存在的间断点：无穷间断点；振荡间断点

4．**初等函数的连续性** 初等函数在其定义域内均连续。

5．**闭区间上连续函数的性质**

定理 1（有界性与最大值最小值定理）闭区间上的连续函数在该区间上有界且一定有最大值和最小值。

定理 2（零点定理）设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$。

定理 3（介值定理）设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上连续，且 $f(a)\ne f(b)$，若 c 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意数，则至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$。

二、练习题

1．函数

1.1 设 $f(x)$ 的定义域为 $\left[0,1\right]$，求 $f(x+a)+f(x-a)\ \left(a>0\right)$ 的定义域。

解： 由题意知，要使 $f(x+a)+f(x-a)$ 有意义，只要

$$\begin{cases}0 \le x+a \le 1, \\ 0 \le x-a \le 1.\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}-a \le x \le 1-a, \\ a \le x \le 1+a.\end{cases}$$

由于 $a=\max\{-a,a\}, 1-a=\min\{1-a,1+a\}$, 当 $a<1-a$ 时，

$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $[a,1-a]$；当 $a=1-a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，其定义域为 $\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$；当 $a>1-a$，

即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时，其定义域为空集。

注意 求复合函数的定义域时，内层函数的值域必须包含在外层函数的定义域内.

1.2 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，$\varphi(x)\ge 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。（98 年考研题）

（分析：此为一复合函数问题，可设 $u=\varphi(x)$，指出 u 与 x 的关系）

解： 因为 $f(x)=e^{x^2}$，所以 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$，即 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，

两边取对数，得 $\varphi^2(x)=\ln(1-x)$，又 $\varphi(x)\ge 0$，

因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，其定义域为 $(-\infty,0]$.

若设 $f(x)=\ln(x+1)$，则 $f(f(x))$ 的定义域为____________。（答案：$\left(\dfrac{1}{e}-1,+\infty\right)$）

2．极限

求极限的方法有：①用定义证明极限存在；②用极限的运算法则求极限；③用极限的存在准则证明极限存在；④用两个重要极限求极限；⑤用等价无穷小代换求极限；⑥用无穷小的性质求极限；⑦利用罗必达法则求极限（在第三章第二节中介绍）。

2.1 求下列极限：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)$（$k$ 为常数）;

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{28}+\cdots+\dfrac{1}{9n^2-3n-2}\right)$。

解： （1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=0$$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^k}+\dfrac{2}{n^k}+\cdots+\dfrac{n}{n^k}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^k}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n^{k-1}}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{k-2}}+\frac{1}{n^{k-1}}\right)=\begin{cases}0, & k>2,\\ \frac{1}{2}, & k=2,\\ \infty, & k<2\end{cases}$$

（3） $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\cdots+\frac{1}{9n^2-3n-2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 4}+\frac{1}{4\times 7}+\frac{1}{7\times 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}\text{。}$$

小结：求数列极限，当项数与 n 有关时，不能直接用极限法则，应先将其化为项数与 n 无关的若干项，再求极限。

2.2 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}$（提示：$\lim_{x\to+\infty}e^x=0, \lim_{x\to-\infty}e^x=+\infty$）

解： 当 $x>0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1-e^{-nx})}{\lim_{n\to\infty}(1+e^{-nx})}=1$ ，

当 $x=0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=0,$

当 $x<0$ 时，$\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}=-1$ 。

常见错解： $\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-nx}}{1+e^{-nx}}=\frac{\lim_{n\to\infty}(1-e^{-nx})}{\lim_{n\to\infty}(1+e^{-nx})}=1$ 。

错误原因：忽视了对参数取值范围的讨论。

2.3 求下列极限：（1） $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}$；（98 年考研题）

（2） $\lim_{x\to+\infty}[\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}]$；（3） $\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

解：（1）原式 $=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sqrt{1-x^2}-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2)(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{4}。$$

（2） 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0。$$

（3）原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2-\frac{3}{x})^{20}(3+\frac{2}{x})^{30}}{(2+\frac{1}{x})^{50}}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$。

一般地，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n\end{cases}$ 这里$a_0b_0\neq 0.$

2.4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\dfrac{1}{2}$。

常见错解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=0$.

错误原因：求解时错误地运用了结论：若$\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，则$\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$.

但这个结论在当$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=1$ ($\alpha=\sin x,\ \beta=\tan x,\alpha'=\beta'=x$) 时不成立.

注意：①利用等价无穷小代换求某些多个因式乘积的极限时比较简便，但用等价无穷小代换求和差的极限时要慎重。

② 注意常用的等价无穷小。

2.5 设$x\to 0$时，$e^{x\cos x^2}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则n为( ).

(A) 5 (B) 4 (C) $\dfrac{5}{2}$ (D) 2

解： 因为 $e^{x\cos x^2}-e^x=e^x\left[e^{x(\cos x^2-1)}-1\right]$,

当$x\to 0$时，$\left[e^{x(\cos x^2-1)}-1\right]\sim x(\cos x^2-1)\sim x\left(-\dfrac{x^4}{2}\right)$，所以，$n=5$。 故选(A)。

2.6 已知$x\to 0$时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\cos x-1$,求$\alpha$.

解： 当 $x \to 0$ 时， $\left(1+\alpha x^2\right)^{\frac{1}{2}}-1 \sim \frac{1}{2}\alpha x^2$， $\cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$，

由等价无穷小的代换得：$\frac{1}{2}\alpha x^2 \sim -\frac{1}{2}x^2$， 所以 $\alpha=-1$。

2.7 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

分析： 本题属于 $\frac{0}{0}$ 型的极限问题，当 $x \to 0$ 时， $\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$，

$e^x-1 \sim x$，故 $\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1 \sim \frac{1}{2}f(x)\sin 2x$， $e^{3x}-1 \sim 3x$。

解： 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$， 又 $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{3x}-1\right)=0$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1\right)=0$， $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\sin 2x=0$，

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\sin 2x}{2\left(e^{3x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)\sin 2x}{2\times 3x}=2$

又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=1$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

2.8 求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}$； (2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$（95 年考研题）；(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]$.

解： (1) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$；

(2) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{1-2x}{4x^2-1}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{1-2x}{(2x-1)(2x+1)}=-\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{1}{(2x+1)}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=e^6$；

(4) $\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]=\lim\limits_{x\to +\infty}x\ln\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1$。

注意： 1^0 若通过恒等变型或变量代换能化为下列形式之一：$\lim\limits_{\psi\to 0}\frac{\sin\psi}{\psi}$， $\lim\limits_{\psi\to 0}\left(1+\psi\right)^{\frac{1}{\psi}}$，

$\lim\limits_{\psi\to \infty}\left(1+\frac{1}{\psi}\right)^{\psi}$，则可以分别利用重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$， $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$，

$\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ 来求极限。

2^0对形如$\lim u(x)^{v(x)}$的极限，若$\lim u(x)=a>0,\lim v(x)=b,$ 则$\lim u(x)^{v(x)}=a^b$.

2.9 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求$a$。（96 年考研题）

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\cdot\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^a$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{3a}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^a=e^{3a}$$

所以 $e^{3a}=8,a=\ln 2$。

2.10 若$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=3$，求常数$a$、$b$的值.

解： 因为$\lim\limits_{x\to1}\sin(x^2-1)=0$，故仅当$\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=0$时才能使$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}$存在，由此得

$1+a+b=0$，即$b=-1-a$，将其代入左边，有

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{\sin(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1+a(x-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1+a}{x+1}=\frac{a+2}{2},$$

于是$\dfrac{a+2}{2}=3$，得$a=4$，所以$b=-5$。

2.11 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}$；

解： 设$x_n=\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3\left[1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$，由于$1<1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n<3$，所以$3<x_n<3\cdot3^{\frac{1}{n}}$，而

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(3\cdot3^{\frac{1}{n}}\right)=3$，由夹逼定理，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2^n+3^n\right)^{\frac{1}{n}}=3$。

本题可推广到更一般的结论： $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\right)^{\frac{1}{n}}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\},$

这里$a_1,a_2,\cdots,a_m>0$。

2.12 设$a>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{4}(3x_n+\dfrac{a}{x_n^3})(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

分析： 在目前所学的知识范围内证明极限存在, 一般有两种方法, 一种是利用定义证明, 另一种是利用极限存在的两个准则证明. 证明极限等于某值时, 常用定义证明. 该例可以考虑用极限存在的准则来证明.

证明：① 证 $\{x_n\}$ 有界。因为 $x_{n+1}=\frac{1}{4}(x_n+x_n+x_n+\frac{a}{x_n^3})\geq\sqrt[4]{x_nx_nx_n\frac{a}{x_n^3}}=\sqrt[4]{a}$，

所以数列 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt[4]{a}$，即对一切 $n, x_n\geq\sqrt[4]{a}$。

② 证 $\{x_n\}$ 单调减少。

又 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{4}(3+\frac{a}{x_n^4})\leq\frac{1}{4}(3+\frac{a}{a})=1$，即 $x_{n+1}\leq x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 是单调减少。

根据单调有界数列必有极限的准则，数列 $\{x_n\}$ 有极限，设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，且 $A\geq\sqrt[4]{a}>0$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\left(3x_n+\frac{a}{x_n^3}\right)$，

即 $A=\frac{1}{4}\left(3A+\frac{a}{A^3}\right)\Rightarrow A=\pm\sqrt[4]{a}$（因 $A>0$，负值舍去），即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[4]{a}$。

3．连续

3.1 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 的连续性。

分析：讨论分段函数在分界点处的连续性，采用的方法是利用结论：

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0)$。

本题中，当 $x\neq 0$ 时，$f(x)$ 显然是连续的，所以问题的关键是讨论在点 $x=0$ 处的连续性。

解：因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1\neq f(0)$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=0=f(0)$，

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右连续但不左连续，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续。

3.2 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin^2\frac{1}{x}, & x>0,\\ a+x^2, & x\leq 0\end{cases}$ 怎样选择 a，才能使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

解： 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(a+x^2\right)=a=f(0)$，

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin^2\frac{1}{x}=0$，

所以 $f(x)$在$x=0$ 连续应有：$f(0-0)=f(0+0)=f(0)=a=0$，

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]\cup(0,+\infty)$ 上为初等函数，故是连续的。

故当 $a=0$ 时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续。

3.3 讨论 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x$ 的连续性，若有间断点，判断其类型。

解： 因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases}x, & |x|<1\\ 0, & |x|=1\\ -x, & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}-x, & x<-1\\ 0, & x=-1\\ x, & -1<x<1\\ 0, & x=1\\ -x, & x>1\end{cases}$，

在分段点 $x=-1$ 处，$f(-1-0)=\lim\limits_{x\to-1-0}-x=1,\ f(-1+0)=\lim\limits_{x\to-1-0}x=-1,$

显然 $f(-1-0)\neq f(-1+0)$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点；

在分段点 $x=1$ 处，$f(1-0)=\lim\limits_{x\to1-0}x=1, f(1+0)=\lim\limits_{x\to1+0}-x=-1,$

显然 $f(1-0)\neq f(1+0)$，所以 $x=1$ 也是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

所以当 $x\neq\pm1$时，$f(x)$ 处处连续，$x=\pm1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。

3.4 设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)(x+2)}{|x|(x^2-4)}$，求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

解： 由 $f(x)$ 知 $x\neq-2,0,2$，而 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(0,2)$ 上是初等函数，故连续。

故 $f(x)$ 的间断点是 $-2,0,2$.

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x(x+1)}{|x|(x-2)}=-\dfrac{1}{4}$，故 $x=-2$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，属第一类；

$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{x(x+1)}{-x(x-2)}=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x(x+1)}{x(x-2)}=-\dfrac{1}{2}$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属第一类；

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x+1)(x+2)}{|x|(x^2-4)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x(x+1)}{x(x-2)}=\infty$，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类。

3.5 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln(1+x), & -1<x\le 0 \end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

分析： $x=0$ 是函数的分段点，$x=1$ 是函数无意义的点，故只需讨论 $f(x)$ 在 $x=0$，$x=1$ 是否连续即可。

解： 因为 $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\ln(1+x)=0,\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x-1}}=\frac{1}{e},$

所以 $f(0-0)\ne f(0+0)$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点，属第一类；

因为 $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0,\ f(1+0)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$

所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点，属第二类。

3.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，则在 $[x_1,x_n]$ 上必有 ξ 使

$f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$。

分析： 由于 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$ 是介于 $f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,f(x_n)$ 的最大值 M 和最小值 m 之间，根据介定理便可证明结论。

证明： 设 $M=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\},\ m=\min\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\},$

由于 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]\subset[a,b]$ 上连续，且 $m\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$，

根据闭区间上连续函数的介值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_n)$ 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}。$$

注意： ① 若该题中已知条件不变，结论改为 $f(\xi)=t_1 f(x_1)+t_2 f(x_2)+\cdots+t_n f(x_n)$，

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i=1,t_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，也可以类似证明；

② 将本题已知条件 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ 换为 $a<c<d<b$，其余条件不变，结论改为

$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$，其中 $p>0,q>0$. 将 $pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$ 恒等变形为

$\dfrac{pf(c)+qf(d)}{p+q}=f(\xi)$，即为①中 $n=2$ 的情形。

3.7 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续（ $a>0$ ），且 $f(0)=f(a)$，证明方程 $f(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 在 $(0,a)$ 内至少有一个实根。

证明： 令 $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{a}{2}\right)$，则 $g(x)$ 在 $\left[0,\frac{a}{2}\right]$ 上连续，

并且 $g(0)=f(0)-f\left(\frac{a}{2}\right)$， $g\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(a)$，因为 $f(0)=f(a)$，

所以 $g\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)-f(0)$，故而 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)\leq 0$ 。

当 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)=0$ 时，取 $x_0=\frac{a}{2}$ 即满足要求。

当 $f(0)\neq f\left(\frac{a}{2}\right)$ 时，有 $g(0)\cdot g\left(\frac{a}{2}\right)<0$，由零点定理，存在 $x_0\in\left(0,\frac{a}{2}\right)$，使 $f(x_0)=f\left(x_0+\frac{a}{2}\right)$，即 x_0 是 $(0,a)$ 内方程 $f(x)=f\left(x+\frac{a}{2}\right)$ 的根。