高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第九节 多元函数的极值及其求法

1 多元函数的极值和最值

2 条件极值、 拉格朗日乘数法

3 内容小结

多元函数的极值及其求法

教学目标

- 多元函数极值的概念、必要条件及充分条件；
- 多元函数最值、条件极值的求法；
- 拉格朗日乘数法求条件极值，解决实际应用问题.

重难点

重点：极值的条件

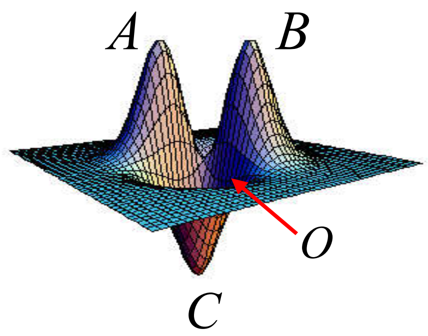
- 多元函数的无条件极值
- 多元函数的条件极值

难点：拉格朗日乘数法

- 拉格朗日乘数法所得方程组的求法

一、多元函数的极值和最值

引例 观察二元函数 $z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形.



分析 A,B 均为局部最高点，C为局部最低点，但是原点O既不是局部最低点也不是局部最高点.

问题 二元函数是否也可以定义类似一元函数的极值、最值？

1、二元函数极值的定义

定义1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 (x_0,y_0) 的点 (x,y):

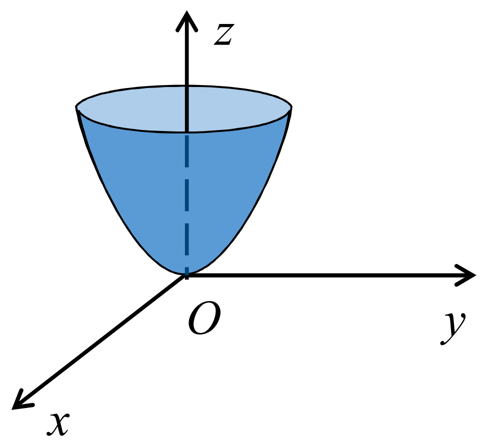
（1） 若满足 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, 则称函数在 (x_0,y_0) 有**极大值**;

（2） 若满足 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$, 则称函数在 (x_0,y_0) 有**极小值**.

极大值、极小值统称为**极值**，使函数取得极值的点称为**极值点**.

例1 讨论函数 $z=3x^2+3y^2$ 的极值点.

解 函数图像为旋转抛物面，开口向上.



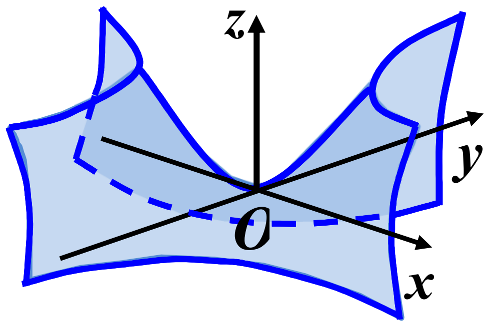
因为点 $(0,0)$ 的任一邻域内异于 $(0,0)$ 点的函数值都为正，而 $(0,0)$ 处的函数值为 0，故 $(0,0)$ 为它的$\boxed{\text{极小值点}}$.

例2 判断原点是否为函数 $z = xy$ 的极值点.

解 因为点 (0,0) 的任一邻域既有函数值

为正的点，也有为负的点，

故在 (0,0) 处$\boxed{\text{无极值}}$.



推广：n 元函数的极值

定义2 设 n 元函数 $u=f(P)$ 的定义域为 D，P_0 为 D 的内点，若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0)\subset D$, 使得对于该邻域内任何异于 P_0 的点 P, 都有

$$f(P)<f(P_0)\text{（或 } f(P)>f(P_0)\text{）},$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 有**极大值**（或**极小值**）$f(P_0)$.

多元函数的极值及其求法

- 多元函数的极值是**局部**的，是与 P_0 的邻域内的值比较.

- 一般来说，极大值**未必是**函数的最大值，极小值**未必是**函数的最小值.

  有时，极小值**可能**比极大值还大.

2、 多元函数取得极值的条件

定理1（必要条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)

具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，

则它在该点的偏导数必为零：

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)=0,}\quad \boxed{f_y(x_0,y_0)=0.}$$

证明： 不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有极大值，

则对于(x_0,y_0)的某邻域内任意 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

故当在该邻域内取任意的 $y=y_0, x\neq x_0$ 的点时，也有

$$f(x,y_0)<f(x_0,y_0),$$

即一元函数$f(x,y_0)$在 $x=x_0$ 处有极大值，则必有

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)=0,}$$

类似可证 $\boxed{f_y(x_0,y_0)=0.}$

几何意义 若曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处有切平面，

若 (x_0,y_0) 为函数 $z=f(x,y)$ 的极值点，则切平面

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

成为平行于 xOy 面的平面 $\boxed{z-z_0=0.}$

推广： 若三元函数$u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$具有偏导数，则它在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 有极值的必要条件：

$$\boxed{f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\ f_z(x_0,y_0,z_0)=0\ .}$$

定义3 凡能使二元函数的一阶偏导数同时为零的点，

均称为二元函数的驻点，即，

使得 $f_x(x,y)=0$ 和 $f_y(x,y)=0$ 同时成立的点.

注：偏导数存在的函数的极值点为驻点；

驻点不一定是极值点.

例如 原点 $(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点，但不是极值点.

问题： 如何判定一个驻点是否为极值点？

定理2(充分条件) 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)某邻域连续，

且有一阶及二阶连续偏导数，又$f_x(x_0,y_0)=0$, $f_y(x_0,y_0)=0$, 令

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A,\ f_{xy}(x_0,y_0)=B,\ f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下：

(1) $AC-B^2>0$时具有极值，且当$A<0$时有极大值，

当$A>0$时有极小值；

(2) $AC-B^2<0$时没有极值；

(3) $AC-B^2=0$时可能有极值,也可能没有极值(用极值定义讨论)

3、 多元函数极值的求法

具有二阶连续偏导数的函数 $z=f(x,y)$ 的极值求法如下：

第一步 解方程组 $f_x(x,y)=0,\ f_y(x,y)=0$ 求出实数解，得驻点；

第二步 对于每一个驻点 (x_0,y_0)，求出二阶偏导数的值 A,B,C；

第三步 根据定理2定出 $AC-B^2$ 的符号，再判定是否是极值.

例3 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解 令 $\begin{cases}3x^2+6x-9=0\\-3y^2+6y=0\end{cases}$，求得驻点为 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$.

又 $f_{xx}=6x+6,\quad f_{xy}=0,\quad f_{yy}=-6y+6$

在 $(1,0)$ 处，$AC-B^2=12\times6-0=72>0$ 且 $A>0$，

所以在点 $(1,0)$ 处有极小值 $\boxed{f(1,0)=-5;}$

例3 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

续解 在 $(1,2)$ 处，$AC-B^2=12\times(-6)=-72<0$，

所以在点 $(1,2)$ 处无极值；

在 $(-3,0)$ 处，$AC-B^2=[6\times(-3)+6]\times 6-0=-72<0$，

所以在点 $(-3,0)$ 处无极值；

在 $(-3,2)$ 处，$AC-B^2=(-12)\times(-6)-0=72>0$，且 $A=-12<0$，

所以在点 $(-3,2)$ 处有极大值 $\boxed{f(-3,2)=31}$.

例4 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的隐函数

$z=f(x,y)$的极值.

解 将方程两边分别对x,y求偏导

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z_x-2-4z_x=0 \\ 2y+2z\cdot z_y+2-4z_y=0 \end{cases},$$

由函数取极值的必要条件知，驻点为$P(1,-1)$，将上述方程组再分别对x,y求偏导数，得二阶偏导

$$A=z_{xx}|_P=\frac{1}{2-z},\ B=z_{xy}|_P=0,\ C=z_{yy}|_P=\frac{1}{2-z},$$

例4 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的隐函数 $z=f(x,y)$的极值.

续解 故 $AC-B^2=\dfrac{1}{(2-z)^2}>0\quad(z\neq 2)$,函数在 P有极值.

将 $P(1,-1)$代入原方程，有 $z_1=-2,\ z_2=6,$

当 $z_1=-2$ 时，$A=\dfrac{1}{4}>0$, 所以$\boxed{z=f(1,-1)=-2}$为极小值；

当 $z_2=6$ 时，$A=-\dfrac{1}{4}<0$,所以 $\boxed{z=f(1,-1)=6}$ 为极大值.

注：若函数在个别点偏导数不存在，这些点也可能为极值点.

例如：函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处有极大值，

但在 $(0,0)$ 处偏导数不存在.

在研究函数的极值时，除研究函数的驻点外，还应研究偏导数不存在的点.

4、多元函数的最值

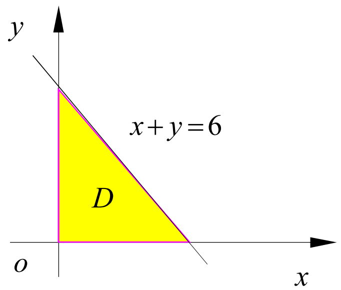
与一元函数相类似，可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值.

◆ 求最值的一般方法

- Step 1: 将函数在D内的所有**驻点**处的函数值以及在D的**边界上的最大值和最小值**相互比较;
- Step 2: 其中，最大者即为最大值，最小者即为最小值.

例5 求二元函数 $z = f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$在直线 $x + y = 6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D上的最大值与最小值.

解 先求函数在 D内的驻点，解方程组



$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy(4-x-y) - x^2 y = 0 \\ f_y(x,y) = x^2(4-x-y) - x^2 y = 0 \end{cases}$$

得D内唯一驻点 $(2,1)$, 且 $f(2,1) = 4$.

例5 求二元函数 $z = f(x,y) = x^2y(4-x-y)$在直线 $x+y=6$ ，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D上的最大值与最小值.

续解 再求$f(x,y)$在 D边界上的最值

在边界$x=0$和$y=0$ 上 $f(x,y)=0$;

在边界$x+y=6$ 上 $f(x,y)=x^2(6-x)(-2)$;

令 $f_x = 4x(x-6)+2x^2=0$

得 $x_1=0,\ y_1=6-x|_{x=0}=6,\ f(0,6)=0;\ x_2=4, y_2=6-x|_{x=4}=2, f(4,2)=-64$

比较可知$\boxed{f(2,1)=4}$为最大值，$\boxed{f(4,2)=-64}$为最小值.

例6 求$z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$的最大值和最小值.

解 令 $z_x=\dfrac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,\ z_y=\dfrac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$

得驻点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

故 $z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

又 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}=0$，即边界上的值为零.

故最大值为$\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，最小值为$\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.

注： 实际问题中，若根据实际问题的性质，得函数 $f(x,y)$ 的最大值（最小值）一定在 D 的内部取得，

而函数 $f(x,y)$ 在 D 内**只有一个驻点**，则该驻点就是函数 $f(x,y)$ 在 D 内取得最大值(最小值)的点.

例7 某厂要用铁板做成一个体积为 $2m^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省.

解 设水箱的长为 x, 宽为 y，则高为 $\dfrac{2}{xy}$.

得水箱表面积 $A = 2(xy + \dfrac{2}{x} + \dfrac{2}{y}),\ (x > 0, y > 0)$

A是 x 和 y 的二元函数，为目标函数.

下面求使其取得最小值的点.

例7 某厂要用铁板做成一个体积为 $2m^3$ 的有盖长方体水箱. 问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省.

续解 令 $A_x = 2(y - \dfrac{2}{x^2}) = 0$, $\quad A_y = 2(x - \dfrac{2}{y^2}) = 0$

得 $\quad x = \sqrt[3]{2}, \quad y = \sqrt[3]{2}$

根据实际问题可知最小值应在定义域内取得.

故唯一驻点是最小值点, 即长, 宽, 高均为 $\boxed{\sqrt[3]{2}}$ 时最省材料.

二、条件极值与拉格朗日乘数法

定义4(无条件极值): 若一极值问题,除了要求**函数的自变量**在其定义域内取值以外,无其他条件的限制,则称为无条件极值.

定义5 (条件极值): 若一极值问题,除了要求**函数的自变量**在其定义域内取值外,还有其他附加条件的限制,则称为条件极值.

实例： 长方体长宽高的和为18，求长、宽、高取何值时长方体体积最大.

设长方体的长、宽、高分别为x, y, z.

问题的实质：

求目标函数 $V = xyz$ 在约束条件：$x + y + z = 18$

之下的条件极值.

求解方法：1、将条件极值转化为无条件极值

如上例，由约束条件得$z = 18 - x - y$, 代入目标函数, 得:

$$V = xy(18 - x - y) = 18xy - x^2y - xy^2$$

则问题转化为求区域$D: x > 0, y > 0, x + y < 18$内目标函数$V$的无条件极值问题．求解如下方程组

$$\begin{cases} V_x = 18y - 2xy - y^2 = 0 \\ V_y = 18x - x^2 - 2xy = 0 \end{cases}, \quad (x, y) \in D$$

可得唯一的驻点 $x = 6, y = 6.$

由于V在D内只有一个驻点,且长方体体积一定有最大值,

故当长宽高都为6时体积取得最大值.

注：通过将约束条件代入目标函数中,可化条件极值问题为无条件极值问题,但在一般情况下这样做比较困难,甚至不可能.

求解方法：2、用Lagrange乘数法求解条件极值

分析：先找目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下

取得极值的必要条件.

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得所求的极值,则 $\varphi(x_0,y_0)=0$

假设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内均具有一阶连续偏导数，且 $\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0.$

由 $\varphi(x,y)=0$ 可确定一个函数 $y=\psi(x)$, 则有 $z=f[x,\psi(x)]$.

多元函数的极值及其求法

由一元可导函数取得极值的必要条件,得：$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0$

即 $f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\psi'(x_0)=0$ （1）

由隐函数存在定理,将方程 $\varphi(x,y)=0$两边关于自变量x求导

有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$，代入（1）式，得

$$f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\cdot\left(-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}\right)=0 \quad (2)$$

令 $\lambda = -\dfrac{f_y(x_0, y_0)}{\varphi_y(x_0, y_0)}$，　则有：$f_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ 且有

$f_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi_y(x_0, y_0) = 0$,故有如下方程组：

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

故可构造辅助函数 $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, —拉格朗日函数.

其中 λ 为待定参数,称为拉格朗日乘子.

结论：拉格朗日乘数法

求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点,

- 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$
- 令 $\begin{cases} L_x=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ L_\lambda=\varphi(x,y)=0. \end{cases}$
- 解出 x,y,λ，其中 x,y 就是可能的极值点的坐标.

注： 此法可推广到多自变量，多条件情形.

问题： 如何找函数 $u = f(x,y,z,t)$ 在条件

$$\phi(x,y,z,t) = 0,\ \psi(x,y,z,t) = 0$$

下的可能极值点？

答： 构造拉格朗日函数

$$F(x,y,z,t,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z,t) + \lambda_1\phi(x,y,z,t) + \lambda_2\psi(x,y,z,t)$$

其中 λ_1,λ_2 均为常数，令函数 F 对各个变量 x,y,z,t 的偏导数为零，解得可能极值点的坐标.

例8 求表面积为 a^2 而体积最大的长方体体积.

解 设长方体的三棱长为 x, y, z. 则问题即为

在条件 $\varphi(x, y, z) = 2(xy + yz + xz) - a^2 = 0$ 下，

求 $V = xyz$， $(x > 0, y > 0, z > 0)$ 的最大值.

作拉格朗日函数

$$F(x, y, z) = xyz + \lambda(2xy + 2yz + 2xz - a^2)$$

例8　求表面积为 a^2 而体积最大的长方体体积.

续解　　求 $\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ \varphi(x,y,z) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = \dfrac{\sqrt{6}}{6}a,$

由于 F 只有唯一的驻点，且体积一定有个最大值，

故在驻点取得最大值为 $\boxed{V_{\max} = \dfrac{\sqrt{6}}{36}a^3}$.

例9 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 使它与三个坐标面所围成的四面体体积最小,求切点坐标.

解 设 $P(x_0, y_0, z_0)$ 为椭球面上一点,

令 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,

则 $F_x|_P=\frac{2x_0}{a^2}$, $F_y|_P=\frac{2y_0}{b^2}$, $F_z|_P=\frac{2z_0}{c^2}$.

过 $P(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程 $\frac{x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(z-z_0)=0$

例9 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使它与三个坐标面所围成的四面体体积最小,求切点坐标.

续解 化简为 $\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}+\frac{z\cdot z_0}{c^2}=1$, 该切平面在

三个轴上的截距各为 $x=\frac{a^2}{x_0}$, $y=\frac{b^2}{y_0}$, $z=\frac{c^2}{z_0}$.

所围四面体的体积 $V=\frac{1}{6}xyz=\frac{a^2b^2c^2}{6x_0y_0z_0}$.

在条件 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1$ 下求 V 的最小值.

例9 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使它与三个坐标面所围成的四面体体积最小，

续解 令 $u=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0$，

$$G(x_0,y_0,z_0)=\ln x_0+\ln y_0+\ln z_0+\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1\right)$$

由 $\begin{cases} G_{x_0}=0, \quad G_{y_0}=0, \quad G_{z_0}=0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{y_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$，

即 $\begin{cases} \frac{1}{x_0}+\frac{2\lambda x_0}{a^2}=0 \\ \frac{1}{y_0}+\frac{2\lambda y_0}{b^2}=0 \\ \frac{1}{z_0}+\frac{2\lambda z_0}{c^2}=0 \\ \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1=0 \end{cases}$

例9 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面，使它与三个坐标面所围成的四面体体积最小，

续解 $\Rightarrow x_0=\frac{a}{\sqrt{3}}, y_0=\frac{b}{\sqrt{3}}, z_0=\frac{c}{\sqrt{3}}$

由于 V 只有唯一的驻点，且一定有个最小值，

故驻点为最小值点，当切点为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时，

四面体的体积最小 $\boxed{V_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{2}abc.}$

三、小结

1、多元函数的极值

（取得极值的必要条件、充分条件）

2、多元函数的最值

3、拉格朗日乘数法

思考题： 若 $f(x_0, y)$ 及 $f(x, y_0)$ 在 (x_0, y_0) 点均取得极值，

则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点是否也取得极值？

解答： 不是. 如：$f(x, y) = x^2 - y^2$ 在 $(0,0)$ 处.

珍惜当下，

把握当下，

让自律成为一种习惯，

一点一滴的积累终将铸就

不一样的你！