南京信息工程大学

2016-2017 学年第二学期线性代数期中试卷答案

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、 设 $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$，则 $A^{-1}=$ $\underline{\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{3}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}}$.

2、 已知矩阵 A 可逆，其伴随矩阵为 A^*，则 $\left(3A^*\right)^{-1}=$ $\underline{\dfrac{A}{3|A|}}$.

3、 设 A,B 为两个 3 阶方阵，且 $|A|=-1,|B|=2$，则 $\left|(-2)\begin{pmatrix}A^T&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}\right|=$ $\underline{\ 4\ }$.

4、 设 $A=\begin{pmatrix}1&4&5\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\left|A^3\right|=$ $\underline{\ 216\ }$.

5、 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&a&1\\3&-1&1\end{pmatrix}$，$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=0$，则 $a=$ $\underline{\ -1\ }$.

二、选择题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 A,B,C 是 n 阶方阵，则下列结论正确的是（ A ）

A. 若 $AB=0$，则 $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　B. 若 $A(B-C)=0$，且 $A\neq 0$ 则 $B=C$

C. 若 $A\neq B$，则 $|A|\neq|B|$　　D. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

2、对于 n 元方程组，下列命题正确的是（ C ）

A. 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解.

B. 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解.

C. 若 $AX=b$ 有无穷多组解，则 $AX=0$ 有非零解.

D. $AX=b$ 有唯一解的充要条件 $r(A)=n$.

3、设 A 是 n 阶方阵，且 $R(A)=n-1$，则 $|A|=$ （ B ）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 不能确定

4、设 A 为3阶方阵, 将 A 的第二行加到第一行得到 B, 再将 B 的第一列的 -1 倍加到第二列得到 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 （ B ）

A. $C=P^{-1}AP$　　B. $C=PAP^{-1}$　　C. $C=P^{T}AP$　　D. $C=PAP^{T}$

5、下列矩阵是对称矩阵的是（ C ）

A. $A-A^T$　　B. AB^T+A^TB　　C. $A+A^T$　　D. A^TB+BA^T

三、计算题(每小题 5 分，共 10 分).

(1) 求行列式 $D=\begin{vmatrix}x+1&3&5\\1&x+3&5\\1&3&x+5\end{vmatrix}$.

(2) 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$，$A_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式，求 $A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}$.

解：(1) 原式 $=(9+x)\begin{vmatrix}x+1&3&5\\1&x+3&5\\1&3&x+5\end{vmatrix}=(9+x)\begin{vmatrix}1&3&5\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix}=x^2(9+x)$　　(5 分)

(2) 法 I. 原式 $=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2-r_1\\r_3+r_1}}{\underset{r_4-2r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-1&-6\\0&4&2&4\\0&-6&-3&-5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&-1&-6\\2&1&2\\-6&-3&-5\end{vmatrix}$

$\overset{r_3+3r_2}{=}2\begin{vmatrix}0&-1&-6\\2&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}-1&-6\\0&1\end{vmatrix}=4$　　(5 分)

法 II. 原式 $=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}\overset{r_4+r_3}{\underset{r_3-r_1}{=}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&-5\\-2&2&0&2\\1&-1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-5\\-2&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}$

$\overset{c_2+c_1}{=}\begin{vmatrix}1&2&-5\\-2&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-5\\0&2\end{vmatrix}=4$　　(5 分)

四、设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a & 1\\ 2 & -3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & a & b\end{pmatrix}$ 的秩为 2，求 a,b 并写出 A 的一个最高阶非零子式. (10 分)

解：$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a & 1\\ 2 & -3 & 1 & 0\\ 4 & 1 & a & b\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & a & 1\\ 0 & -7 & 1-2a & -2\\ 0 & 7 & a-2 & b\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & a & 1\\ 0 & -7 & 1-2a & -2\\ 0 & 0 & -a-1 & b-2\end{pmatrix}$，　　(4 分)

因为矩阵的秩为 2，所以 $-a-1=0, b-2=0$，从而 $a=-1, b=2$.　　(8 分)

A 的一个最高阶非零子式为 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}$.　　(10 分)

五、设 $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$AP=PB$，求 A^n.（10 分）

解：$|P|=2$，$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.　　(3 分)

$A=PBP^{-1}$，$\therefore A^n=\underbrace{(PBP^{-1})\cdot(PBP^{-1})\cdots\cdots(PBP^{-1})}_{\text{n个}}=PB^nP^{-1}$，　　(6 分)

而 $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$，$\therefore B^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$.　　(8 分)

故 $A^n=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 2^{n+1}\\ 1 & 2^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2-2^n & 2^n-1\\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1\end{pmatrix}$　　(10 分)

六、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=B+2X$. (10 分)

解：$(A-2E)X=B \Rightarrow X=(A-2E)^{-1}B$　　(3 分)

$$(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2}\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$ （7 分）

$$X=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -5 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$ （10 分）

七、设方阵 A 满足 $A^2+2A-4E=0$，证明 A 及 $A-E$ 都可逆，并求 A^{-1} 及 $\left(A-E\right)^{-1}$．(8 分)

证明：由 $A^2+2A-4E=0$ 得 $A\left(A+2E\right)=4E$，即 $A\dfrac{A+2E}{4}=E$，

所以 A 可逆，而且 $A^{-1}=\dfrac{A+2E}{4}$. (4 分)

由 $A^2+2A-4E=0$ 得 $\left(A-E\right)\left(A+3E\right)=E$，

所以 $A-E$ 可逆，而且 $\left(A-E\right)^{-1}=A+3E$. (8 分)

八、设有线性方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$，问 λ 取何值时，此方程组（1）有唯一解；（2）无解；

（3）有无穷多个解？并在有穷多解时求其通解. （12 分）

解：增广矩阵 $B=\left(A,b\right)=\begin{pmatrix}1+\lambda & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3\\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & -\lambda & -\lambda\left(2+\lambda\right) & -\lambda\left(1+\lambda\right)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda\left(3+\lambda\right) & \left(1-\lambda\right)\left(3+\lambda\right)\end{pmatrix}.$$ (4 分)

（1）当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq -3$ 时，$R(A)=R\left(B\right)=3$，方程组有唯一解； (6 分)

（2）当 $\lambda=0$ 时，$R(A)=1, R\left(B\right)=2$，方程组无解； (8 分)

（3）$\lambda=-3$ 时，$R(A)=R\left(B\right)=2$，方程组有无穷多个解.

此时，$B \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，　通解为$\begin{cases} x_1 = x_3 - 1, \\ x_2 = x_3 - 2, \end{cases}$（$x_3$可任意取值）

即$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$，$(c \in R)$　(12 分)