高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第三节 偏导数

1 偏导数定义及运算

2 高阶偏导数

3 内容小结

偏导数

➢ 理解偏导数的定义

➢ 掌握偏导数的运算法则

➢ 掌握偏导数的几何意义

➢ 掌握高阶偏导数

教学目标

重难点

重点：偏导数的计算

难点：偏导数的定义

➢ 偏导数的几何意义

➢ 分段函数的偏导数

一、偏导数的定义及其计算法

一元函数 $y=f(x)$ ，$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D,P_0(x_0,y_0)\in D$

定义1 固定$y=y_0$ ，$x:x_0\to x_0+\Delta x$， 称

$$\boxed{\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}$$

为函数$z=f(x,y)$ 在点$P_0(x_0,y_0)$处对x的偏增量.

偏导数

定义2 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域有定义，

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta z_x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，

则称此**极限**为 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **对 x 的偏导数**.

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0,y_0)$.

即 $$\boxed{f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.}$$

偏导数

类似地，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **对 y 的偏导数**

定义为 $$\boxed{f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.}$$

记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_y(x_0,y_0)$.

偏导数

注：（1）$f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\boxed{=\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}}$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}\boxed{=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}}$$

（2）如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内任一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，称为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的**偏导函数**（简称**偏导数**）.

注：（3）偏导数的概念可以推广到二元以上函数，

如函数 $u=f(x,y,z)$ 在 (x,y,z) 处

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}$$

注：求偏导数的方法

- 分界点、不连续点处的偏导数要用定义.

例如，设 $z = f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ ，求 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$.

解 $$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = 0 = f_y(0,0).$$

- 用求导法则，先将偏导函数求出，再将点代入.

将一个自变量看作固定的, 用一元函数微分法求.

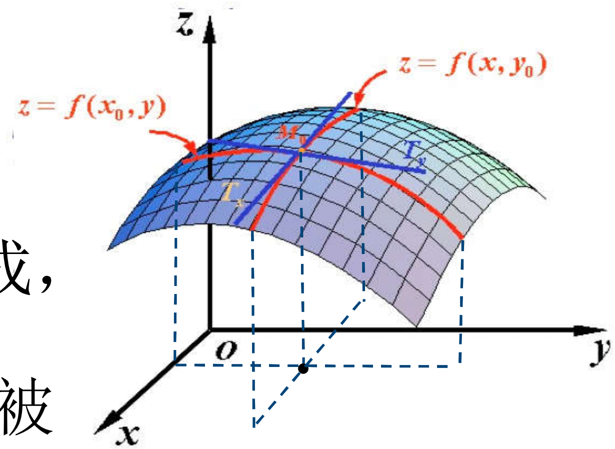
如求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ ， 将 y 暂看作常量而对 x 求导数;

求 $\frac{\partial f}{\partial y}$ ， 将 x 暂看作常量而对 y 求导数.

- 求二元函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 时, 可以先令

$y=y_0$, 对一元函数 $z=f(x,y_0)$ 对 x 求导再将 $x=x_0$ 代入.

2、偏导数的几何意义



设 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$为曲面 $z=f(x,y_0)$ 上一点，

$z=f(x,y_0)$可看成是由方程组$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=y_0 \end{cases}$生成，

因此偏导数$f_x(x_0,y_0)=\dfrac{d}{dx}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$就是曲面被平面$y=y_0$所截得的曲线在点$M_0$处的切线 M_0T_x对 x 轴的斜率；

偏导数 $f_y(x_0,y_0)=\dfrac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=y_0}$ 就是曲面被平面$x=x_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_y 对 y 轴的斜率.

例1　求 $z = xy + x^3 + xy^2$ 在点 $(-1,1)$ 处的偏导数.

解　$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + 3x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2xy,$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}} = 1 + 3 + 1 = 5, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}} = -1 - 2 = -3.$$

例2 设 $z=(1+xy)^y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1},$$

令 $z=e^{y\ln(1+xy)}$,

则 $$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{y\ln(1+xy)}\cdot\left[\ln(1+xy)+y\cdot\frac{x}{1+xy}\right]=(1+xy)^y\cdot\left[\ln(1+xy)+\frac{xy}{1+xy}\right].$$

例3 设 $z=\sqrt{x^4+y^4}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}$；当 $(x,y)=(0,0)$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{(\Delta x)^4+0}-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0,$$

则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$，　综上可得 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^4}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

例4 设 $f(x,y)=x^2+(y^2-1)\arctan\sqrt{xy}$ ，求 $f_x(1,1)$.

解法一 $f_x(x,y)=2x+(y^2-1)\cdot\dfrac{1}{1+xy}\cdot\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$,

则 $f_x(1,1)=2$.

解法二 令 $y=1$ 时，$f(x,1)=x^2$

则 $f_x(1,1)=2x\big|_{x=1}=2$.

例5 已知理想气体的状态方程 $pV = RT$（R为常数），

求证：$\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-1.$

证明 $p=\dfrac{RT}{V}\Rightarrow\dfrac{\partial p}{\partial V}=-\dfrac{RT}{V^2}$; $\quad V=\dfrac{RT}{p}\Rightarrow\dfrac{\partial V}{\partial T}=\dfrac{R}{p}$;

$T=\dfrac{pV}{R}\Rightarrow\dfrac{\partial T}{\partial p}=\dfrac{V}{R}$;

$$\frac{\partial p}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}=-\frac{RT}{V^2}\cdot\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}=-\frac{RT}{pV}=-1.$$

3、偏导数存在与连续的关系

对一元函数来说，若函数在某点可导必然能推出该函数在该点连续，即函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件.

然而，对多元函数来说，它在某点处偏导数的存在性与连续性之间又有着怎样的关系呢？

例6 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，

但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 对 x 和 y 的偏导数不存在.

证明 因为 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$ 且 $f(0,0)=0$，

所以函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

但 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ 不存在；

例6 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处连续，

但$f(x,y)$在点$(0,0)$对x和y的偏导数不存在.

续证 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{(\Delta y)^2}-0}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta y|}{\Delta y}$，也不存在；

所以$f(x,y)$在点$(0,0)$对x和y的偏导数不存在.

例7 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，

但两个偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在.

解 由9.1例3知，当 (x,y)沿 $y=kx$ 趋向于$(0,0)$ 时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

当k取不同值时，极限值不同，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

因此 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处**不连续**.

例7 证明函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，

但两个偏导数 $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在.

续解 根据偏导数的定义知：

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

则函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续，但两个偏导数都存在.

注：（1）对多元函数来说，当函数在某一点连续时，

函数在该点对各个变量的偏导数未必存在；

$$\boxed{\text{多元函数连续}} \;\not\Longrightarrow\; \boxed{\text{可导}}$$

（2）反之，当函数在该点对各个变量的偏导数

存在(即函数可导)时，函数在该点未必连续.

$$\boxed{\text{多元函数可导}} \;\not\Longrightarrow\; \boxed{\text{连续}}$$

二、高阶偏导数

若偏导函数的偏导数也存在，则称它们是函数

$z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)}$$ —**混合偏导数**

定义3 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**.

例8 设 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 3y^3 - y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y - 9xy^2 - x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2y - 9y^2 - 1, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2y - 9y^2 - 1.$$

例9 设 $u = e^{ax}\cos by$， 求二阶偏导数.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ae^{ax}\cos by, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -be^{ax}\sin by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 e^{ax}\cos by, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -b^2 e^{ax}\cos by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -abe^{ax}\sin by, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -abe^{ax}\sin by.$$

观察： 上两例中二阶混合偏导函数间的关系：有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

这是偶然的吗？

问题： 混合偏导数都相等吗？具备怎样的条件才相等？

事实上，我们有下列定理：

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在区域D连续，则在该区域内这两个二阶混合偏导数相等．即**二阶混合偏导数**在**连续**的连续的条件下**与求导次序无关**.

注： 该结论可推广到高阶导数的情形.

例10 验证函数 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足**拉普拉斯方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

证明 $\because \ln\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, $\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$ 相加，得证.

例11 设$z = x\ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y = \ln(xy)+1$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{xy}\cdot x = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = 0$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$.

三、内容小结

- 偏导数的**定义**（**偏增量比的极限**）
- 偏导数的**计算**、偏导数的**几何意义**
- 分段函数的**可偏导性与连续性**
- **高阶**偏导数、混合偏导（**相等的条件**）

或许前路永夜，

即便如此我也要前进，

因为星光即使微弱，

也会为我照亮

前方的路。