南京信息工程大学试卷答案及评分标准

2019 －2020 学年 第 1 学期 线性代数 课程试卷（ A 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 计算 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$____________.

答：$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(2) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为____________.

答：0.

(3) 已知三维向量空间 R^3 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标是____________.

答：$1,1,-1$.

(4) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值为 3，则 $y=$____________.

答：2.

(5) 已知二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，则该二次型的正惯性指数为________.

答：1.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 已知三阶行列式 D 的第 3 列元素分别为 $a_{13}=1,a_{23}=3,a_{33}=-2$，其对应的余子式分别为 $M_{13}=3,M_{23}=-2,M_{33}=1$，则 $D=$（ C ）.

(A) 5； (B) -5； (C) 7； (D) -7.

(2) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（ B ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$； (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$； (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$，则下面关于 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$ 的说法，正确的是（ B ）.

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 3 行得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$； (B) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 2 列得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$；

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 2 行得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$； (D) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 3 列得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是（ D ）.

(A) $m=n$；

(B) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(C) 向量组 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，而增广矩阵 $(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})$ 的列向量组线性相关.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是实可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，则（ C ）.

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似； (B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价；

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同； (D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在答题册对应题号下面的空白处作答）

(1) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$.

解：$D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1.$ ………6 分

(2) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,0,1)$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，求 $\boldsymbol{A}^n$（n 为正整数）.

解：由题知：$\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(2,0,1)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=5$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}(2,0,1)=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&0&2\\6&0&3\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^2=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\beta}=5\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，

所以 $\boldsymbol{A}^n=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)^n=\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\boldsymbol{\beta}=5^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，

故 $\boldsymbol{A}^n=5^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=5^{n-1}\begin{pmatrix}2&0&1\\4&0&2\\6&0&3\end{pmatrix}$.

(3) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为$5,5,0$，且对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量.

解：设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量为 $\boldsymbol{x}=\left(x_1,x_2,x_3\right)^{\mathrm{T}}$。由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交，

故$\left[\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}\right]=0$，即 $x_1+x_3=0$，

解得基础解系为$\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\xi}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量$k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$（$k_1$，$k_2$ 不同时为零）.

四、（本题满分 10 分）设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$ 知: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{B}$，

则 $\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}$.

又$\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\,|\,\boldsymbol{A}\right)=\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

五、（本题满分 10 分）已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$线性相关.

(1) 求a的值；

(2) 求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的极大线性无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

解：(1) 对矩阵进行初等行变换：

$$\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&3&1\\-1&3&0&-2\\2&1&7&2\\4&2&a&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&3&3&-1\\0&1&1&0\\0&2&a-12&-4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&a-14&-4\end{pmatrix}$$

因为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的线性相关，所以$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)<4$，故$a=14$.……5 分

(2) $\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\to\to\begin{pmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

此时极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，且$\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$.

六、（本题满分 10 分）设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解，试求出$a$的值，并求非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

解：由齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解知：$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & a+2\\ 1 & a & 2\end{vmatrix}=-(a-1)^2=0$，

解得 $a=1$.

对增广矩阵进行初等行变换：

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 3\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

解得通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

七、（本题满分 12 分）已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=x_1{}^2-5x_2{}^2+x_3{}^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$，且向量 $(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量，

(1) 求 a,b 的值；

(2) 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 把二次型化成标准形，并写出相应的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解：(1) 由题知：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & -5 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}$，

设向量 $(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 对应的特征值为 λ，则有

$$\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & -5 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}，即\begin{cases}2+a+2=2\lambda\\ 2a-5+2b=\lambda\\ 2+b+2=2\lambda\end{cases}，$$

解出：$a=b=2$，$\lambda=3$.

(2) 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ 2 & -5-\lambda & 2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)(\lambda+6)=0$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-6,\lambda_3=3$，

解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}$，

解线性方程组 $(\boldsymbol{A}+6\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_2=(1,-4,1)^{\mathrm{T}}$，

令 $\boldsymbol{\xi}_3=(2,1,2)^{\mathrm{T}}$，则 $\boldsymbol{\xi}_3$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 属于 3 的一个特征向量。

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化得 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$，

则所求正交矩阵为 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\\ 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，标准形为 $-6{y_2}^2+3{y_3}^2$.

八、（本题满分 10 分） 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

证明：(1) 因为 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{E}$，

则 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{E}$，即 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})(3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{E}$，

于是矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，且 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}=3\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的对称矩阵，又 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，

故 $(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^*$，即 $\boldsymbol{A}^*$ 是对称矩阵.

若 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，由 $\boldsymbol{A}$ 正定知 $\lambda>0$，进而 $|\boldsymbol{A}|>0$，

而 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $\frac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda}$，显然大于 0，所以 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分仅供参考.