高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第七节 曲线及其方程

1 空间曲线的一般方程

2 空间曲线的参数式方程

3 曲线在坐标面上投影

4 立体,曲面在坐标面投影

5 内容小结

6 *曲面的参数式方程

曲线及其方程

- 理解空间曲线方程的概念
- 掌握空间曲线的一般方程
- 掌握空间曲线的参数方程
- 掌握空间曲线在坐标面上的投影曲线

教学目标

重难点

重点：空间曲线一般方程

- 空间曲线的参数方程
- 空间曲线在坐标面的投影

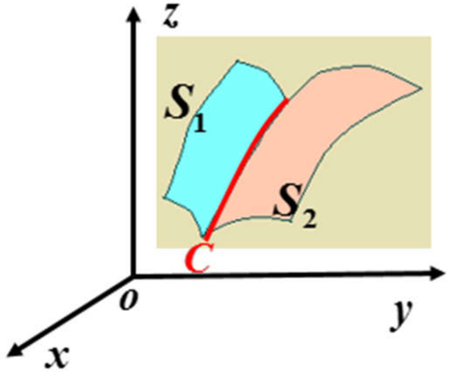
难点：空间曲线在坐标面的投影

一、空间曲线的一般方程

定义1　空间曲线可看作两曲面的交线

即 $$\boxed{C:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}}$$

——空间曲线的一般方程



◆ 特点：曲线上所有点都满足方程组，

不在曲线上的点不同时满足方程组.

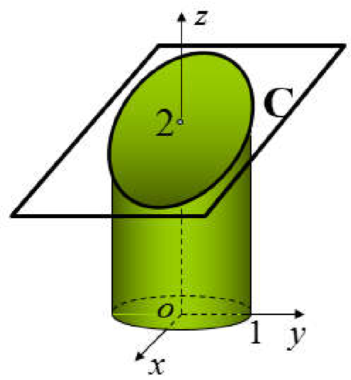
例1 方程组$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$表示怎样的曲线.

解 $x^2+y^2=1$表示母线平行于z轴的圆柱面

$2x+3z=6$ 表示一个斜平面

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 就表示上述平面

与圆柱面交线—空间的一个椭圆

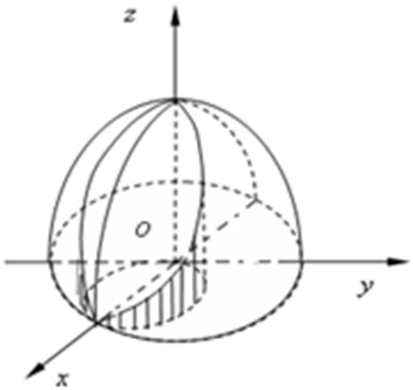


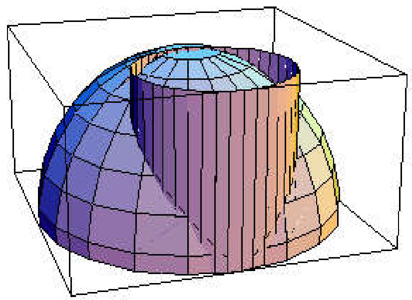
例2 方程组$\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ \left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$表示怎样的曲线.

解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示球心在原点半径为a的上半球面;

$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$表示母线平行于$z$轴的圆柱面

方程组表示上半球面与圆柱面的交线, 称为**维维安尼曲线**.





二、空间曲线的参数方程

定义2 若空间曲线 C 上点坐标 x,y,z 表示为参数 t 的函数：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in [a,b]. \\ z = z(t) \end{cases}$$

——— **空间曲线的参数方程**

$$\boxed{\text{参数 } t} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \boxed{\text{曲线 } C \text{ 上的点}}$$

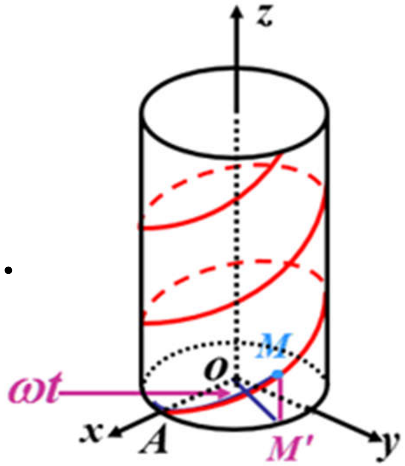
例3 如果空间一动点M在圆柱面$x^2+y^2=a^2$上以角速度ω绕z轴旋转，同时又以线速度v沿平行于z轴的正方向上升(其中ω, v都是常数)，求动点的轨迹方程.

解　取时间t为参数.

设当$t=0$时, 动点位于$A(a,0,0)$

记M在xOy面上投影为$M'(x,y,0)$.

所以经过时间t, $\angle AOM'=\omega t$



从而 $\begin{cases} x = |OM'| \cdot \cos \angle AOM' = a\cos \omega t \\ y = |OM'| \cdot \sin \angle AOM' = a\sin \omega t \\ z = |MM'| = vt \end{cases}$

令$\omega t = \theta$，得曲线参数方程 $\boxed{\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases}}$ —— **螺旋线**

其中$b = \dfrac{v}{w}$为常数，θ 为参数.

当OM'转一周时，上升固定高度$h = 2\pi b$，称为**螺距**.

三、空间曲线在坐标面上的投影

1. 曲线（在坐标面上）投影的概念

定义3 以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面,称作曲线 C 关于坐标平面 xOy 的投影柱面.

投影柱面与 xOy 面交线,称作曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线，简称投影.

类似可定义曲线在其它坐标面上的投影.

2. 曲线在坐标面上投影的求法（以 xOy 面上的为例）

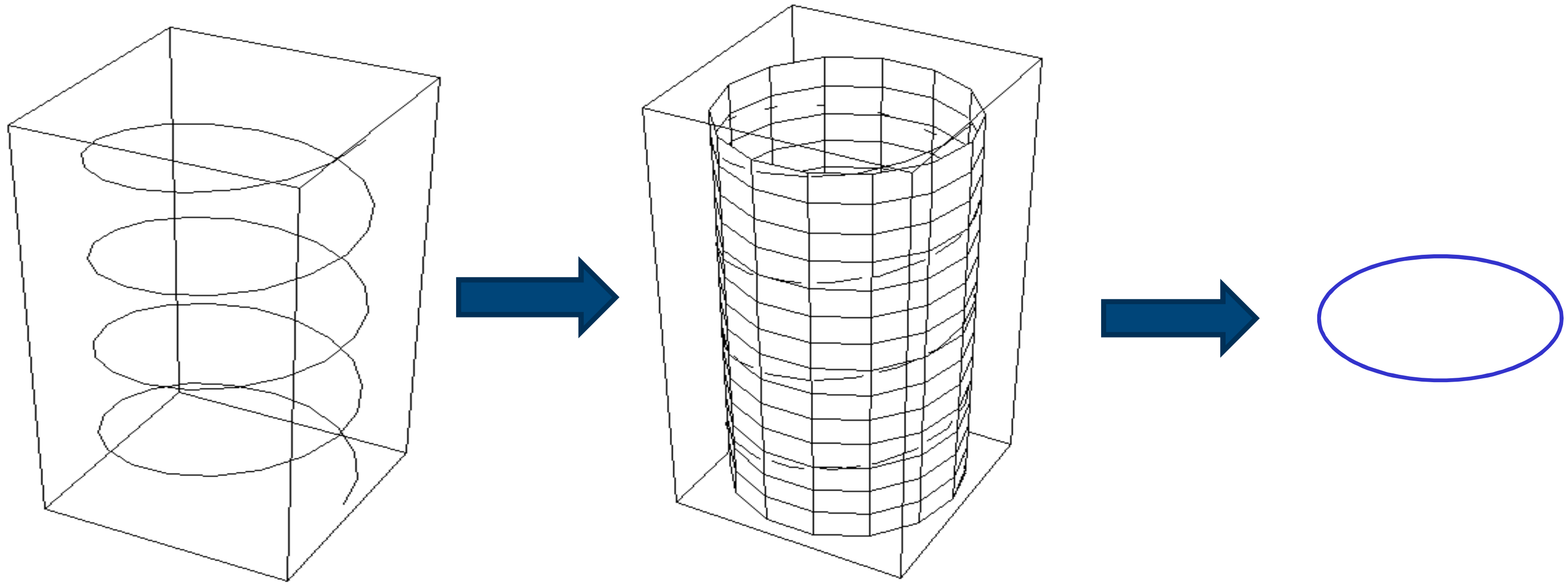
设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

第一步，方程组消去变量 z，得投影柱面方程： $H(x,y)=0$;

第二步，将投影柱面方程与 $z=0$ 联立，可得曲线 C

在 xOy 面上的投影方程： $\boxed{\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}.}$

投影求解过程的图示法（以 xOy 面上的为例）：



空间曲线　投影柱面　投影曲线

类似地，空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

（1）在面 yOz 上的投影柱面为 $R(y,z)=0$;

投影曲线为 $\boxed{\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}}$

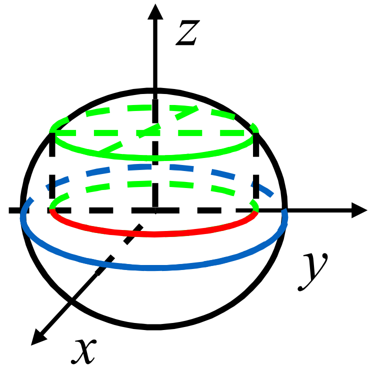
（2）在面 xOz 上的投影柱面为 $T(x,z)=0$;

投影曲线为 $\boxed{\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}}$

例4　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影..

解　(1)　消去变量 z 得投影柱面方程：$x^2+y^2=\dfrac{3}{4}$

在 xOy 面上的投影曲线为圆：$\boxed{\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{3}{4} \\ z=0 \end{cases}}$

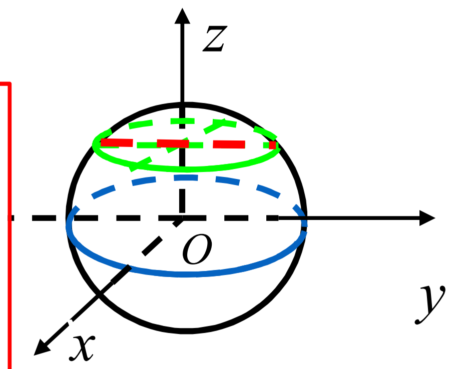


例4　求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影..

续解 (2) 因为曲线在平面 $z=\dfrac{1}{2}$ 上,

在 xOz 面上的投影曲线为线段:

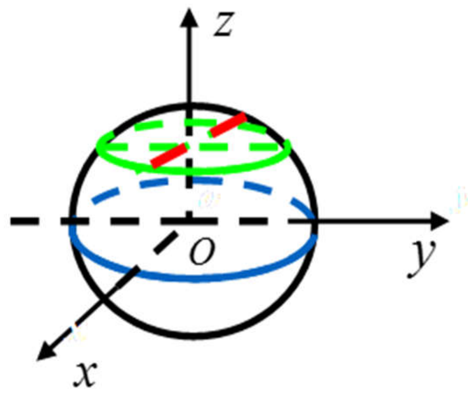
$$\begin{cases} |x| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y=0 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$



例4 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在三个坐标面上的投影..

续解(3) 在 yoz 面上的投影曲线也为线段：

$$\boxed{\begin{cases} x=0 \\ |y|\le \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}}.$$

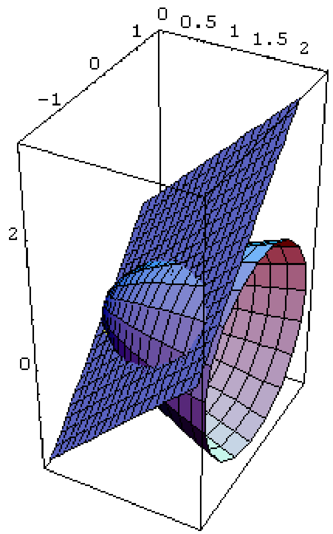


例5 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

解 交线方程为 $\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

（1）**方程组**消去 z，得 xoy 面上的投影：

$$\boxed{\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}}$$



例5 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

续解

（2） 消去 y，得 xoz 面上的投影：$\boxed{\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}}$

（3） 消去 x，得 yoz 面上的投影：$\boxed{\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}}$

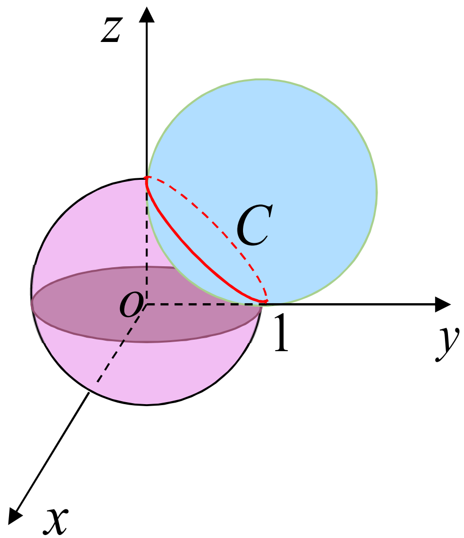
例6 已知两球面方程为$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，求它们的交线C在xoy面上的投影方程.

解 将方程 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 化为

$$x^2+y^2+z^2-2y-2z=-1,$$

再与方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 相减，得

$$y+z=1.$$



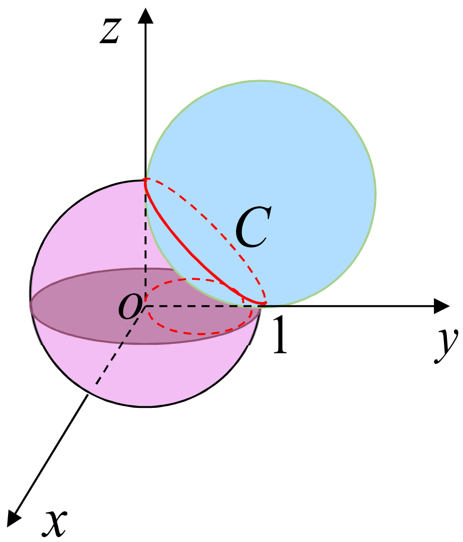
例6 已知两球面方程为$x^2+y^2+z^2=1$和$x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$，求它们的交线C在xoy面上的投影方程.

续解 将 $z=1-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2=1$，得

$$x^2+2y^2-2y=0$$

为交线C在xoy面上的投影柱面方程.

故所求的投影方程为圆 $\boxed{\begin{cases} x^2+2y^2-2y=0 \\ z=0 \end{cases}}$

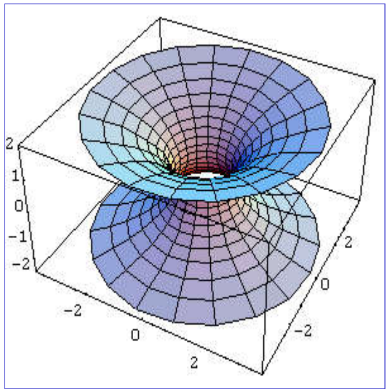


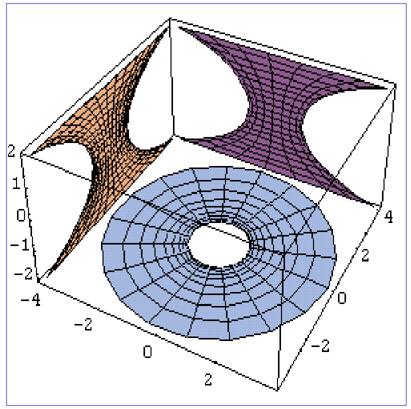
四、空间立体或曲面在坐标面上的投影

应用：重积分与曲线积分计算.

- 曲面的投影

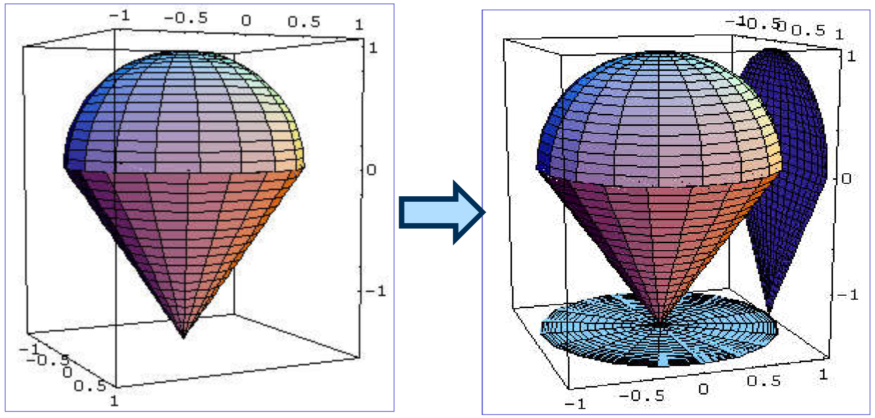
解法：将曲面的边界曲线投影到平面，投影曲线面内围成的区域就是所求.



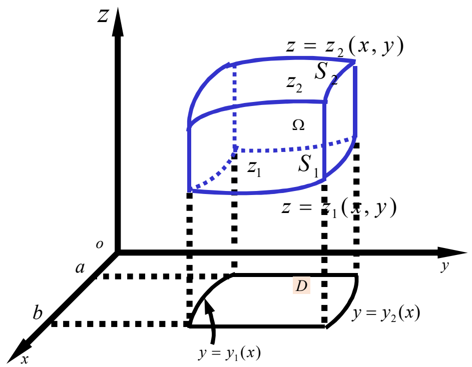


- 空间立体的投影

解法：将**边界曲面**的**交线**或**轮廓线**投影到相应坐标面，**投影曲线**所围区域为所求.



注：投影曲线可利用**投影柱面**来求.

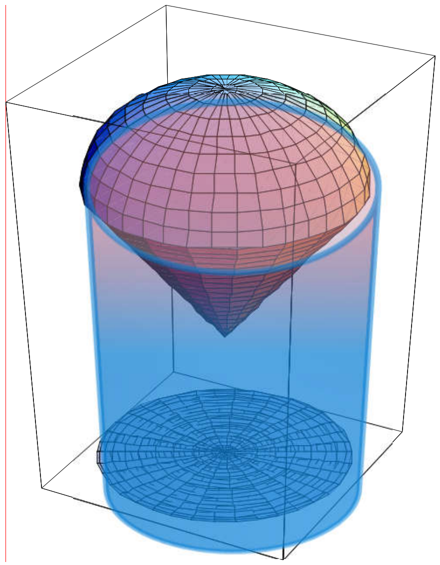


例7 求由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$所围成的立体在xOy面上的投影.

解 半球与锥面**交线**C: $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$,

消去z得到交线C关于xOy面的

投影柱面：$x^2+y^2=1$,



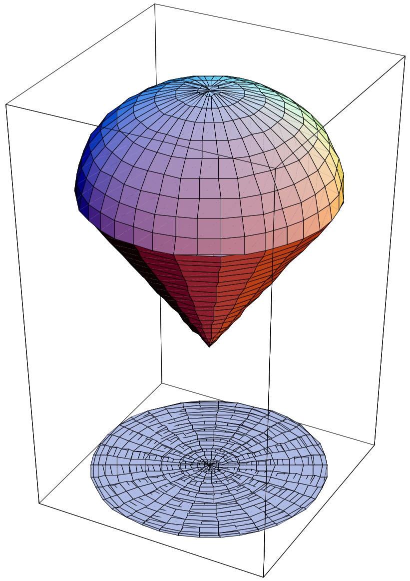
例7 求由上半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和锥面$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$所围成的立体在xOy面上的投影.

续解 则交线C在xOy面上的**投影曲线**为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

——为xOy面上的一个**圆.**

所求投影为 $\boxed{x^2+y^2\le 1.}$

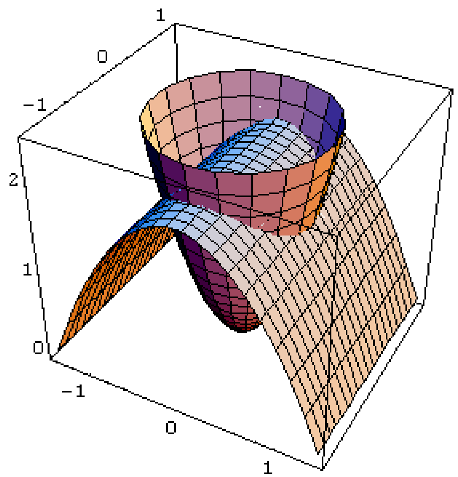


例8 求椭圆抛物面 $2y^2+x^2=z$ 与抛物柱面 $2-x^2=z$ 的交线关于 xOy 面上的投影曲线方程.

解 交线方程为 $\begin{cases} 2y^2+x^2=z \\ 2-x^2=z \end{cases}$,

消去 z 得投影柱面：$x^2+y^2=1$,

在 xOy 面上的投影为：$\boxed{\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}.}$



五、小结

1. 空间曲线的一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$;

空间曲线的参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$.

2. 空间曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在坐标面的投影:

(1) 投影柱面 $H(x,y)=0$, 曲线在 xOy 面的投影: $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$,

(2) 投影柱面 $R(y,z)=0$, 曲线在 yOz 面的投影: $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$,

(3) 投影柱面 $T(x,z)=0$, 曲线在 xOz 面的投影: $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$.

六*、曲面的参数方程

曲面的参数方程通常是含两个参数的方程，形如

$$\begin{cases} x = x(s,\ t) \\ y = y(s,\ t) \\ z = z(s,\ t) \end{cases}$$

例 求空间曲线$C:\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ 绕z轴旋转所得曲面.

解 固定t，得C上点$M_1(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))$，$M_1$绕$z$轴旋转得一圆，

该圆在平面$z=\omega(t)$，其半径为$\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}$，因此得方程

$$\boxed{\begin{cases}x=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\cos\theta\\ y=\sqrt{[\varphi(t)]^2+[\psi(t)]^2}\sin\theta\,,\\ z=\omega(t)\end{cases}}\quad(\alpha\le t\le\beta,0\le\theta\le 2\pi)$$

练习：直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$ 绕z轴旋转的旋转曲面为 $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{1+t^2}\sin\theta \\ z=2t \end{cases}$

注：上式消t和θ, 可得曲面的直角坐标方程为

$$x^2+y^2=1+\frac{z^2}{4}$$

有一份热，发一份光

就令萤火一般，

也可以在黑暗里发一点光

不必等待火炬