试卷一参考答案

一. 填空

1. $k=-10$.

2. $-\frac{16}{27}$

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2|A|\cdot A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\cdot|A|^{-1}=-\frac{16}{27}$$

3. $(A+E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+2E)$

由于 $A^2+3A-4E=0$

则 $(A^2+A)+(2A+2E)-2E-4E=0$

$$A(A+E)+2(A+E)=6E$$

$$(A+2E)(A+E)=6E$$

$$\frac{1}{6}(A+2E)\cdot(A+E)=E$$

$$\Longrightarrow (A+E)^{-1}=\frac{1}{6}(A+2E)$$

4. 0

由题 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=D_1=\begin{vmatrix}1&1&7&-1\\1&1&8&0\\1&1&4&3\\1&1&2&5\end{vmatrix}=0$.

5. $a=-5$

$A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\vec{0}$ 有非零解. 即 $R(A)<3$.

又 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&a&3\\-1&1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&a-4&-3\\0&3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&a-4&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{a-4}{3}\cdot r_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&1\\0&0&-3-\frac{a-4}{3}\end{bmatrix}$

结合 $R(A)<3$, 可知 $-3-\frac{a-4}{3}=0 \Longrightarrow a=-5$

二. 选择.

1. D

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= m - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} = m-n$$

2. D

$$\left.\begin{array}{l} AB=AC \\ A\text{是方阵} \end{array}\right\} \xRightarrow{A\text{可逆}} B=C.$$

3. C

最高非零子式与矩阵秩的关系.

4. C

$|A|=0 \Longrightarrow A\vec{x}=\vec{b}$ 无解或有无穷多解.

5. A

明显只涉及行变换, 可排除 C. D.

再比较 A, B 两选项不难得到正解.

三. 计算.

(1)

解: ① $AB^T=\begin{bmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2\\3&4\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&6\\18&10\\3&10\end{bmatrix}$

② $|4A|=4^3\cdot|A|=4^3\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\3&4&0\\-1&2&1\end{vmatrix}=4^3\cdot1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-128$

(2)

解: $D=\begin{vmatrix}5&3&3&3\\3&5&3&3\\3&3&5&3\\3&3&3&5\end{vmatrix}\xlongequal[c_1+c_4]{c_1+c_2,\ c_1+c_3}\begin{vmatrix}14&3&3&3\\14&5&3&3\\14&3&5&3\\14&3&3&5\end{vmatrix}=14\cdot\begin{vmatrix}1&3&3&3\\1&5&3&3\\1&3&5&3\\1&3&3&5\end{vmatrix}$

$\xlongequal[r_4-r_1]{r_2-r_1,\ r_3-r_1}14\cdot\begin{vmatrix}1&3&3&3\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=14\times8=112.$

四. 已知条件中A应该是二阶矩阵.

解: 由于 $P^{-1}AP=B$, 可知 $A=PBP^{-1}$.

那么 $A^n=(PBP^{-1})^n=\underbrace{PBP^{-1}\cdot PBP^{-1}\cdots PBP^{-1}}_{n组}=P\cdot B^n\cdot P^{-1}$

因为 $P=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}$.

则 $(P\,\vdots\,E)=\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\5&3&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-\frac{5}{2}r_1}\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&1\end{array}\right]$

$\xrightarrow{r_1-2r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&6&-2\\0&\frac{1}{2}&-\frac{5}{2}&1\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\times2]{r_1\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&3&-1\\0&1&-5&2\end{array}\right]$

即 $P^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$

因此 $A^n=PB^nP^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}^n\cdot\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\5&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1^n&0\\0&2^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6-5\cdot2^n&-2+2^{n+1}\\15-15\cdot2^n&-5+3\cdot2^{n+1}\end{bmatrix}$

五. 解: 由于 $AB=A+2B$.

则 $AB-2B=A$

$(A-2E)\cdot B=A$

$\Longrightarrow \quad B=(A-2E)^{-1}\cdot A$

~~那么~~因为 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{bmatrix}$, 那么 $A-2E=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{bmatrix}$

$$[A-2E \mid A]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right]\xrightarrow{r_2-r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&-1&0&-4&3&2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&1&0&4&-3&-2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right]$$

因此. $B=(A-2E)^{-1}A=\begin{bmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{bmatrix}$

七. 由题可知

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\2&1&1&2&1\\5&3&2&2&3\end{array}\right]\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-2r_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&-2&2&2&-22\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-2r_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&5\\0&-1&1&2&-9\\0&0&0&-2&-4\end{array}\right]$$ 即 $$\begin{cases}x_1+x_2=5\\-x_2+x_3+2x_4=-9\\-2x_4=-4.\end{cases}$$

令 $x_3=k$, 则 $x_2=k+13$, $x_1=-k-8$, $x_4=2$.

通解为: $\begin{cases}x_1=-k-8\\x_2=k+13\\x_3=k\\x_4=2.\end{cases}$, k为任意常数.