一、填充题（每小题 3 分，共 21 分）

1．函数 $y=\arctan x-x$ 的单调递减区间是 $\underline{(-\infty,+\infty)}$．

2．点 $(0,1)$ 是曲线 $y=3x^3-ax^2+b$ 的拐点，则 $a=\underline{0}$ ，$b=\underline{1}$．

3．函数 $y=x+\dfrac{4}{x^2}$ 的极小值点 $x_0=\underline{2}$．

4．设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^x，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=\underline{x^2e^x+C}$．

5．计算不定积分 $\int\dfrac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\underline{x-\arctan x+C}$．

6．$\dfrac{1}{2-x}$ 带佩亚诺型余项的 n 阶麦克劳林公式为 $\underline{\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{2^2}+\dfrac{x^2}{2^3}+\cdots+\dfrac{x^n}{2^{n+1}}+o(x^n)}$．

7．曲线 $y=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y=x+3}$．

二、 选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1．设 $f'(x)=(x-1)(2x+1),\ x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内（ B ）

（A）单调增加且曲线为凹的　　（B）单调减少且曲线为凹的

（C）单调减少且曲线为凸的　　（D）单调增加且曲线为凸的

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $f''(x)>0$，则下式中正确的是（ B ）

（A） $f'(0)<f'(1)<f(1)-f(0)$　　（B） $f'(0)<f(1)-f(0)<f'(1)$

（C） $f'(1)<f'(0)<f(1)-f(0)$　　（D） $f(1)-f(0)<f'(1)<f'(0)$

3．设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（ B ）

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

（C）$(0, f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

4．若函数 $y = f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处取得极大值，则必有（ D ）

（A） $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) > 0$　　　（B） $f'(x_0) = 0$ 且 $f''(x_0) < 0$

（C） $f'(x_0) = 0$　　　（D） $f'(x_0) = 0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在

5．函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\,\mathrm{d}x\right] =$（ C ）

（A） $f(x)$　　（B） $f(x)+C$　　（C） $f(x)\,\mathrm{d}x$　　（D） $f'(x)\mathrm{d}x$

6．设 $\forall x \in (a,b)$，有 $f'(x) = g'(x)$，则 $\forall x \in (a,b)$ 有（ A ）

（A） $f(x) = g(x) + C$　　　（B） $f(x) = g(x)$

（C）$\int f(x)\mathrm{d}x = g(x) + C$　　　（D）$\int g(x)\mathrm{d}x = f(x) + C$

7．若 $\int f'(x^3)\mathrm{d}x = x^3 + C$，则 $f(x) =$（ B ）

（A）$\dfrac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$　　（B）$\dfrac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$　　（C）$x^3 + C$　　（D）$x + C$

三、计算下列不定积分（每小题 5 分，共 20 分）

1．$\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{x}\mathrm{d}x$.

解：原式 $\displaystyle= \int \frac{x^2+2x+1}{x}\mathrm{d}x = \int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C$.

2．$\displaystyle\int \frac{1}{x(2+\ln x)}\mathrm{d}x$.

解：原式 $\displaystyle= \int \frac{1}{2+\ln x}\mathrm{d}(2+\ln x) \quad = \ln|2+\ln x| + C$.

3．$\int x\sin x\mathrm{d}x$.

解：原式 $= \int x\mathrm{d}(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\mathrm{d}x \quad = -x\cos x + \sin x + C$.

4. $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解：令 $x=\sin t$， $\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ ，则

原式 $=\int \frac{\cos t}{\sin t\cos t}\mathrm{d}tdt=\int \csc t\mathrm{d}x$

$=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C$.

四、（本题满分 8 分）求曲线 $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ 的凹凸区间及拐点.

解：$f(x)$ 的定义域为 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$， $f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$.

令 $f''(x)=0$ 得 $x=1$. 当 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$，当 $x\in(0,1)$ 时，

$f''(x)<0$. 凹区间为 $\left(-\infty,0\right)\cup[1,+\infty)$，凸区间为 $(0,1]$. 拐点为 $\left(1,0\right)$.

五、（本题满分 8 分）设 $f(x)+\sin x=\int f'(x)\sin x\mathrm{d}x$，求函数 $f(x)$.

解：等式两边求导 $f'(x)+\cos x=f'(x)\sin x$，则 $f'(x)=\frac{-\cos x}{1-\sin x}$.

$f(x)=\int\frac{-\cos x}{1-\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}(1-\sin x)=\ln(1-\sin x)+C$.

六、（本题满分 8 分）在曲线 $y=\frac{1}{x^2}$ 的第一象限求点 M，使过该点的切线被两坐标轴所截得的长度最短，并求出这最短长度.

解：设 $M\left(t,\frac{1}{t^2}\right),0<t<+\infty$，则切线方程为 $y-\frac{1}{t^2}=-\frac{2}{t^3}(x-t)$.

两坐标轴上的截距分别为 $\frac{3t}{2}$ 与 $\frac{3}{t^2}$，则长度 $l=\sqrt{\frac{9}{4}t^2+\frac{9}{t^4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^4}}$.

设 $f(t)=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{t^4}$， $f'(t)=\frac{1}{2}t-\frac{4}{t^5}$. 令 $f'(t)=0$，得唯一驻点 $t=\sqrt{2}$.

$f''(\sqrt{2})=\left(\frac{1}{2}+\frac{20}{t^6}\right)\Big|_{t=\sqrt{2}}>0$，则 $t=\sqrt{2}$ 是极小值点也是最小值点.

所以 M 点的坐标为 $M(\sqrt{2},\frac{1}{2})$，最短长度为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

七、证明：当$x<1$时，有$e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

证明：令 $f(x)=(1-x)e^x$， $x<1$， $f'(x)=-xe^x$.

当$-\infty<x<0$时，$f'(x)>0$；当$0<x<1$时， $f'(x)<0$，

故 $f(0)=1$为函数的极大值也是最大值.

当$x<1$时， $f(x)\le f(0)=1$．即$(1-x)e^x<1$， $e^x \le \dfrac{1}{1-x}$.

八、**（本题满分 6 分）**设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}$， 求积分$\displaystyle\int\frac{f(x)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解： $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{1}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left(1+\dfrac{x-t}{t-1}\right)^{\frac{t-1}{x-t}\cdot\frac{1}{t-1}}=e^{\frac{1}{x-1}}$.

$$\int\frac{f(x)}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\int e^{\frac{1}{x-1}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x-1}\right)=-e^{\frac{1}{x-1}}+C.$$