高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院
大学数学部 高等数学教学团队

1、平面方程：

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

一般式 $Ax+By+Cz+D=0$

截距式 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad (abc\neq 0)$

三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

2、两平面的特殊位置关系：

平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $\vec{n_1}=(A_1,B_1,C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $\vec{n_2}=(A_2,B_2,C_2)$

(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} \perp \vec{n_2} \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n_1} // \vec{n_2} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

(3) Π_1与Π_2重合 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{n_1} // \vec{n_2} \\ \text{有一个交点} \end{cases} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$

3、两平面的夹角余弦公式：

$$\cos\theta = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

4、点到平面的距离公式：

$$d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

第五节 空间直线及其方程

1 空间直线的一般式方程

2 直线的对称式和参数式方程

3 两直线的夹角

4 直线与平面的夹角

5 点到直线的距离

6 应用举例

7 内容小结

空间直线及其方程

教学目标

- 掌握直线的一般式、对称式、参数式方程
- 会求两直线、直线与平面间的夹角
- 会判断直线与平面的位置关系
- 会求点到直线的距离
- 掌握平面束方程

重难点

重点： 直线方程及其求法

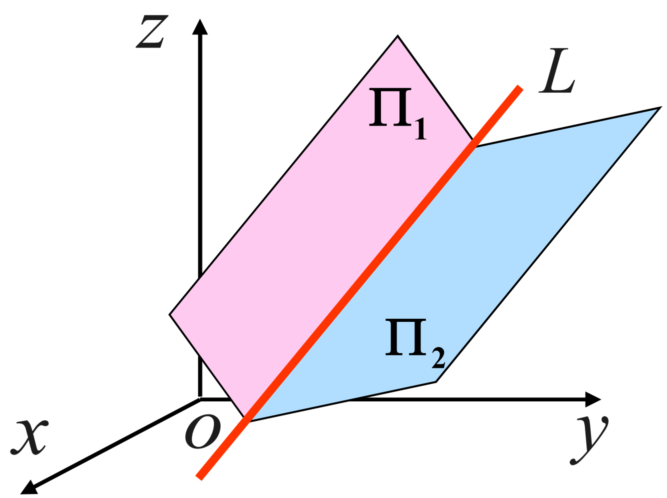
- 线面位置关系的判定
- 点到直线的距离

难点： 直线方程及其求法

- 点到直线的距离

一、空间直线的一般式方程

如图，直线 L 可视为两平面 $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线，



即 $$\boxed{L:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}}$$

—— 空间直线的一般式方程

（即直线上 L 任一点的坐标应同时满足这两个平面方程）

空间直线与方程组满足条件：

1）直线 L 上的每一点均满足方程组；

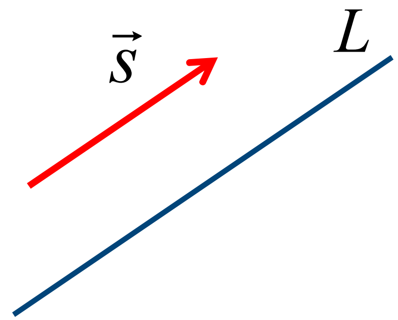
2）若点 M 不在直线 L 上，则它不满足该方程组.

通过空间直线 L 的平面有无限多个，**任选两个**联立所得方程组均可作为直线 L 的一般式方程.

➡ **空间直线的一般式方程不唯一**

二、空间直线的对称式方程与参数方程

1、直线的方向向量：

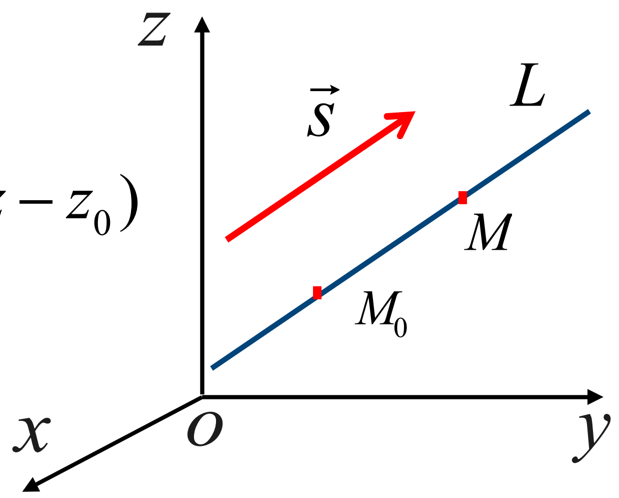


定义1： 平行于已知直线的非零向量，称为该直线的方向向量.

- 直线上任一向量都平行于该直线的方向向量.
- 方向向量不唯一. $\lambda\vec{S}$ $(\lambda \neq 0)$ 也可作为直线的方向向量.

直线方程的确定： 已知直线 L 通过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,

且直线的方向向量为 $\vec{s}=(m, n, p)$， 求直线 L 的方程.



解 设 $M(x, y, z)$ 是直线 L 上的任一点,

则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ ， $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$

从而有 $$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

——直线的对称式或点向式方程

直线的方向数： 直线 L 的任一方向向量 $\vec{s}$ 的**坐标** m,n,p；

直线的方向余弦： 方向向量 $\vec{s}$ 的方向余弦.

注： 因为 $\vec{s}$ 是**非零**向量，所以 m,n,p 不全为零.

(1) 当 m,n,p 中有**一个为零**，如 $n=0$，而 $m,p\neq 0$ 时，

方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 应理解为 $\begin{cases} y=y_0 \\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$.

(2) 当 m,n,p 中有两个为零，如 $n=p=0$，而 $m\neq 0$ 时，

方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{0}=\dfrac{z-z_0}{0}$ 应理解为 $\begin{cases} y-y_0=0 \\ z-z_0=0 \end{cases}$.

注： 令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，得直线方程 $\boxed{\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}}$

——直线的参数式方程

例1 求过点 $P(1,-2,3)$ 且平行于向量 $\vec{s}=(4,2,-4)$ 的直线方程及该直线的方向余弦.

解 由对称式方程得直线方程为 $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$

或 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{-2}$. 因为 $\overrightarrow{s^o}=\dfrac{\vec{s}}{|\vec{s}|}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$

所以方向余弦 $\boxed{\cos\alpha=\pm\dfrac{2}{3},\cos\beta=\pm\dfrac{1}{3},\cos\gamma=\mp\dfrac{2}{3}.}$

例2 用对称式及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$.

解法一 先求直线上的两点 P_1, P_2

令 $x_1=0$，得 $y_1=2, z_1=2$，取 $P_1(0,2,2)$；

令 $y_2=0$，得 $x_2=-1, z_2=-1$，取 $P_2(-1,0,-1)$，

则直线的方向向量为 $\overrightarrow{P_1P_2}=(-1,-2,-3)=-(1,2,3)$.

直线的对称式方程为 $\boxed{\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}.}$

例2 用对称式及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$.

解法二 同解法一，取直线上一点 $P_1(0,2,2)$

取直线的方向向量为 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,-2,-3)$.

则直线的对称式方程为 $\boxed{\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}.}$

例2 用对称式及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+2=0 \end{cases}$.

续解 由直线的对称式方程，令 $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-2}{3}=t$,

得直线的参数式方程为 $\boxed{\begin{cases} x=t \\ y=2+2t, \quad t\in R. \\ z=2+3t \end{cases}}$

三、两直线的夹角

定义2： 两直线的**方向向量的夹角**称为**两直线的夹角**，

通常指**锐角或直角**.

设直线 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_i=(m_i,n_i,p_i),i=1,2$,

则直线 L_1 和 L_2 的**夹角 φ 的余弦** $\cos\varphi$ 可以表示为：

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{s}_1\hat{,}\vec{s}_2\right)\right|\boxed{=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}}$$

两直线的位置关系：

已知两直线 $L_1:\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$L_2:\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$

其中 $\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$，$P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$

（1）$L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

（2）$L_1 /\!/ L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\times\vec{s}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

(3) L_1 与 L_2 共面 $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $\left(\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{s}_1\right) \cdot \vec{s}_2 = 0$

$$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{P_1P_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

(4) L_1 与 L_2相交 $\Longleftrightarrow$ L_1 与L_2 共面且$\vec{s}_1$ 与 $\vec{s}_2$不平行.

(5) L_1 与 L_2异面 $\Longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$

例3 求直线$\begin{cases}5x-3y-2z-9=0\\3x-2y-z-1=0\end{cases}$与$\begin{cases}2x+2y-z+23=0\\3x+8y+z-18=0\end{cases}$的夹角余弦.

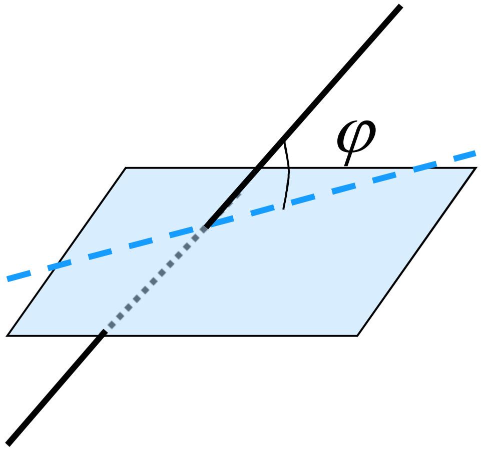
解 取 $\vec{s}_1=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&-3&-2\\3&-2&-1\end{vmatrix}=(-1,-1,-1)\,//(1,1,1)$

$\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&-1\\3&8&1\end{vmatrix}=(10,-5,10)\,//(2,-1,2)$

$$\boxed{\cos\theta=\frac{|2-1+2|}{\sqrt{3}\cdot 3}=\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

四、直线与平面的夹角

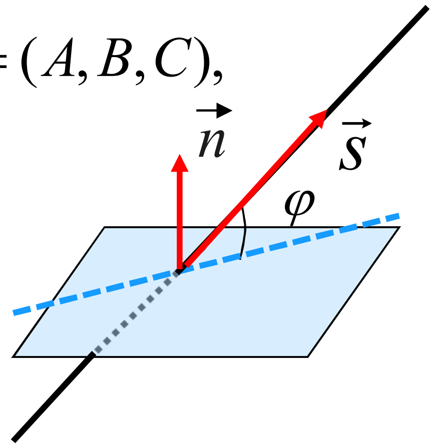
定义3：当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线的夹角 $\varphi\left(0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$，称为直线与平面的夹角；



注：当直线与平面垂直时，规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

设直线 $L:\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，方向向量 $\vec{s}=(m,n,p)$,

平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$, 法线向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$,



直线与平面的夹角为 φ, 那么 φ 和 $\widehat{(\vec{s},\vec{n})}$ 互余

$\sin\varphi=\left|\cos\widehat{(\vec{s},\ \vec{n})}\right|$. 由两向量夹角余弦公式得

$$\boxed{\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}}$$ —— 直线与平面的夹角公式

直线与平面的位置关系：

(1) 直线 L 与平面 Π 垂直 $\Longleftrightarrow$ $\vec{s} \,//\, \vec{n}$ $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) 直线 L 与平面 Π 平行 $\Longleftrightarrow$ $\vec{s} \perp \vec{n}$ $\Longleftrightarrow$ $Am + Bn + Cp = 0$

(3) 直线 L 在平面 Π 上 $\Longleftrightarrow$ $Am + Bn + Cp = 0$ 且直线 L 上

至少有一点满足 $Ax + By + Cz + D = 0.$

例4 判断直线与平面的位置关系．若相交，求交点.

(1) 直线 $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-4}$ 和平面 $2x+5y+4z-11=0.$

解 因为 $\vec{s}\cdot\vec{n}=(3,2,-4)\cdot(2,5,4)=0,$ 所以 $\vec{s}\perp\vec{n},$

即直线与平面平行，将点 $(2,-1,3)$ 代入平面满足

$$2\times2+5\times(-1)+4\times3-11=0,$$

故直线在平面上.

例4 判断直线与平面的位置关系．若相交，求交点．

(2) 直线 $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 和平面 $4x-2y-2z=3$.

解 因为 $\vec{s}\cdot\vec{n}=(-2,-7,3)\cdot(4,-2,-2)=0$, 所以 $\vec{s}\perp\vec{n}$,

即直线与平面平行, 将点 $(3,-4,0)$ 代入平面方程得

$$4\times3-2\times(-4)-2\times0\neq3,$$

$\boxed{\text{故直线与平面平行.}}$

例4 判断直线与平面的位置关系．若相交，求交点．

(3) 直线 $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{1}$ 和平面 $x+2y+2z+6=0.$

解 因为 $\vec{s}\cdot\vec{n}=(3,-2,1)\cdot(1,2,2)=1\neq 0$, 所以直线与平面相交，

且 $\dfrac{A}{m}\neq\dfrac{B}{n}$，故为斜交．将点 $\begin{cases} x=-3+3t \\ y=-2-2t \\ z=t \end{cases}$ 代入平面方程得

$t=1$, 则交点为 $\boxed{(0,-4,1).}$

例4 判断直线与平面的位置关系．若相交，求交点．

(4) 直线 $\begin{cases} x-2y+4z-7=0 \\ 3x+5y-2z+1=0 \end{cases}$ 和平面 $-16x+14y+11z-65=0.$

解 因为 $\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}=-16\vec{i}+14\vec{j}+11\vec{k},$

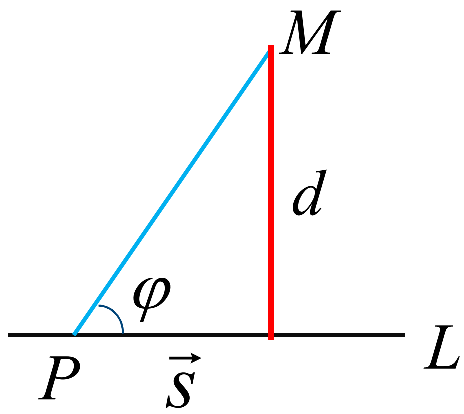
所以 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p},$ 故直线垂直于平面.

五、点到直线的距离

问题 设直线 L 通过点 P，点 M是直线外一点，且直线的方向向量为 $\vec{s}$，讨论：点M到直线 L 的距离.

解 设 φ 为直线 PM 与直线 L的夹角，

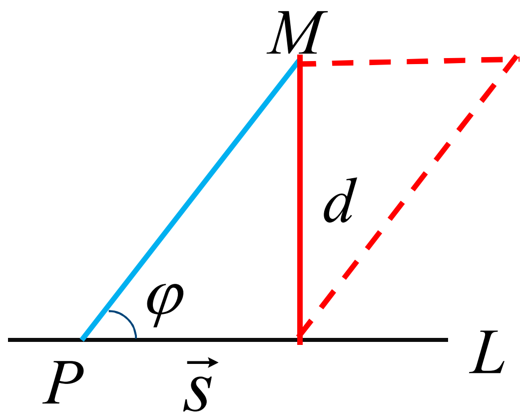
则$d = \left|\overrightarrow{PM}\right| \cdot \sin\varphi$，且 $\sin\varphi = \dfrac{\left|\overrightarrow{PM} \times \vec{s}\right|}{\left|\overrightarrow{PM}\right| \cdot \left|\vec{s}\right|}$.



所以 $\boxed{d=\dfrac{\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}}$ —— 点到直线的距离公式

几何解释：

$d\cdot\left|\vec{s}\right|=\left|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}\right|$ 表示以向量 $\overrightarrow{PM}$, $\vec{s}$ 为邻边的平行四边形面积.



六、应用举例　　1、线面综合问题

例5 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$均平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为$\vec{s}=(m,n,p)$，

则$\vec{s}$与两平面的法向量垂直， 取$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线方程为$\boxed{\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-5}{1}.}$

例6 求过 $M(2,1,2)$ 与 L：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}$ 垂直相交的直线方程.

解 过点M与L垂直的平面Π：$(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0$，

令 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-4}{2}=t$，得 $\begin{cases} x=t+2 \\ y=t+3 \\ z=2t+4 \end{cases}$，代入平面方程得 $t=-1$，

故线面交点为 $N(1,2,2)$. 直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}=(-1,1,0)$,

所求直线方程为 $\boxed{\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{0}}$, 即 $\boxed{\begin{cases} x+y-3=0 \\ z-2=0 \end{cases}.}$

例7 求过点 $(-1,0,4)$, **平行**于平面 $3x-4y+z-10=0$, 且与直线 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$ **相交**的直线方程.

解 设两直线**交点**为 (x,y,z). 令 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}=t$, 得 $\begin{cases} x=t-1 \\ y=t+3 \\ z=2t \end{cases}$,

所求直线的**方向向量** $\vec{s}=(x+1,y,z-4)=(t,t+3,2t-4)$,

$\vec{s}$ **垂直**于平面的**法向量**，$t\cdot 3+(t+3)\cdot(-4)+(2t-4)\cdot 1=0$

解得 $t=16$，$\vec{s}=(16,19,28)$, 直线方程为 $\boxed{\dfrac{x+1}{16}=\dfrac{y}{19}=\dfrac{z-4}{28}}$.

例8 直线过点(1,1,1)且与直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$, $L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{4}$ 相交，求此直线方程.

解 设所求直线为 $L: \frac{x-1}{m} = \frac{y-1}{n} = \frac{z-1}{p}$,

由 L 与 L_1 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-0 & 1-0 & 1-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ m & n & p \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m - 2n + p = 0$,

例8 直线过点 $(1,1,1)$ 且与直线 $L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, $L_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{4}$ 相交，求此直线方程.

续解 由 L 与 L_2 共面 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m & n & p \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 2m+4n-2p=0$，

取 $n=1$, 则 $m=0,\ p=2$,

所求直线为 $\boxed{\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2},}$ 即 $\boxed{\begin{cases} x=1 \\ 2y-z-1=0 \end{cases}.}$

2、平面束问题

设直线 $L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$. 对不同的 $\lambda\in R$，

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$，整理得

$$\boxed{(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+D_1+\lambda D_2=0 \quad (\Delta)}$$

(Δ)表示过直线 L 的所有平面，称为过 L 的平面束.

注：(Δ) 中不含平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

例9 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

解 设过直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 的平面束的方程为

$$(x+y-z-1)+\lambda(x-y+z+1)=0,$$

即 $(1+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$

例9 求直线$\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$在平面 $x+y+z=0$ 上的投影直线的方程.

续解 平面与 $x+y+z=0$ 垂直，$(1+\lambda)\cdot 1+(1-\lambda)\cdot 1+(-1+\lambda)\cdot 1=0$

即 $\lambda=-1$. 代入平面束方程得投影平面方程为 $y-z-1=0$.

所求投影直线的方程为 $\boxed{\begin{cases} x+y+z=0 \\ y-z-1=0 \end{cases}.}$

例10 求通过两平面 $\Pi_1: 2x+y-z-2=0$ 和 $\Pi_2: 2x+y-z-2=0$ 的交线，且与平面 $\Pi_3: 3x+2y+3z-6=0$ 垂直的平面.

解 设平面束为 $\lambda(2x+y-z-2)+\mu(3x-2y-2z+1)=0$ ，

即 $(2\lambda+3\mu)x+(\lambda-2\mu)y+(-\lambda-2\mu)z+(-2\lambda+\mu)=0$.

垂直于 Π_3 ，$3(2\lambda+3\mu)+2(\lambda-2\mu)+3(-\lambda-2\mu)=0 \Rightarrow 5\lambda-\mu=0$,

取 $\lambda=1, \mu=5$ ，得所求平面为 $\boxed{17x-9y-11z+3=0.}$

3*、异面直线的问题

- 异面直线的**证明**

  两直线的**方向向量**与两直线上**任取两点**构成的**向量异面**，则两直线异面.

- 异面直线之间的**距离**

  转化为**点到平面**的距离.

例11 判断两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$，$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$

是否为**异面直线**，若是，求出它们之间的距离.

解 $\vec{s}_1=(1,0,-1)$，$\vec{s}_2=(2,-1,1)$，$P_1(0,0,0)$，$P_2(1,0,1)$，$\overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,1)$.

由 $\left(\vec{s}_1,\vec{s}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0$，$\boxed{\text{得两直线异面.}}$

例11 判断两直线 $L_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-1}$，$L_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{1}$

是否为异面直线，若是，求出它们之间的距离.

续解 构造经过其中一条直线且与另一条直线平行的平面.

$$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=(-1,-3,-1)//(1,3,1),\quad x+3y+z-2=0.$$

所求即点 P_1 到该平面的距离 $\boxed{d=\dfrac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1+9+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{11}}.}$

七、内容小结

- 空间直线的一般式、对称式与参数式方程
- 两直线的夹角（注意两直线的位置关系）
- 直线与平面的夹角（注意直线与平面的位置关系）
- 点到直线的距离公式
- 线面问题的综合研究

时光不老，

连接着充满信息的未来，

收藏过去，

是为了明天

更好地出发。