南京信息工程大学试卷答案

2018 – 2019 学年 第一学期 高等数学理工科 期中试卷 (A卷)

本答案共 4 页; 考试时间 100 分钟; 任课教师 __________; 出卷时间 2018 年 11 月

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}$ 的定义域 $\underline{[2,5]}$.

2. 若 $f'(0)=2$, 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}=\underline{4}$.

3. 已知 $f(x)$ 可微, 则 $\mathrm{d}\left[\ln f(x)+\cos f(x)\right]=\underline{\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}-\sin f(x)\cdot f'(x)\right]\mathrm{d}x}$.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, 则 $f^{(n)}(x)=\underline{\dfrac{(-1)^n 2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$.

5. $f(x)=e^{2x}$ 的带拉格朗日型余项的三阶麦克劳林公式为
$\underline{e^{2x}=1+2x+2x^2+\dfrac{4}{3}x^3+\dfrac{2}{3}e^{2\theta x}x^4, 0<\theta<1.}$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 若函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, 则有 (B)

 (A) 当 $g(x)$ 为任意函数时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$;

 (B) 当 $g(x)$ 为有界函数时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$;

 (C) 仅当 $g(x)$ 为常数时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$;

 (D) 仅当 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=0$.

2. 当 $x\to\infty$ 时, 函数 e^x, e^{x^2}, e^{-x^2}, $\arctan x$, $\arctan(x^2)$ 中极限存在的个数为 (B)

 (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

3. 当 $x\to 1$ 时, $1-x$ 是 $1-x^2$ 的 (D)

 (A) 高阶无穷小; (B) 低阶无穷小;

 (C) 等价无穷小; (D) 同阶但不等价的无穷小.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$, 其中 a,b 为常数, 则 (C)

 (A) $a=b=1$; (B) $a=-1,b=1$;

 (C) $a=1,b=-1$; (D) $a=b=-1$.

5. 下列条件中不是函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分条件的是 (A)

 (A) $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$; (B) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$;

 (C) $f'(x_0)$ 存在; (D) $f(x)$ 在 x_0 可微.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 30 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{\frac{\cos x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sqrt{1+x^2}-1}}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}} = e^{-1}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 2x}{24x}=\frac{1}{3}.$$

3、$y=\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$, 求 y'.

解: $y=\ln|x+2|-\ln|x+3|+\dfrac{1}{2}\ln|1+x|-\dfrac{1}{2}\ln|1-x|$

$$y'=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2(1+x)}+\frac{1}{2(1-x)}.$$

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 确定, 求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.

解: 等式两边同时对 x 求导得,

$e^{xy}(y+xy')+\sec^2(xy)(y+xy')=y'$

又 $x=0$ 时, $y=1$, 代入上式得 $y'(0)=2$,

所以切线方程为 $y=2x+1$.

5. 设参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=3t+t^3, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解: $x'(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$, $y'(t)=3(1+t^2)$,

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(1+t^2\right)^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=12t\left(1+t^2\right)^2,$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=48$.

四、(本题共 10 分) 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}$ 的连续性, 若有间断点讨论间断点的类型.

解: 由题意可得 $f(x)=\begin{cases} x, & |x|<1, \\ 0, & |x|=1, \\ -x, & |x|>1. \end{cases}$

当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -1$ 时, $f(x)$ 连续;

当 $x=1$ 时, $f(1^-)=1,f(1^+)=-1$, 所以 $x=1$ 为第一类跳跃型间断点;

当 $x=-1$ 时, $f(-1^-)=1,f(-1^+)=-1$, 所以 $x=-1$ 为第一类跳跃型间断点.

五、(本题共10分) 求 a,b 的值, 使函数 $f(x)=\begin{cases} e^{a(x-1)}-1, & x\leq 1, \\ \ln x+b, & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导, 并求 $f'(x)$.

解: 由题意, $f(x)$ 在 $x=1$ 可导, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

因此 $f(1^+)=f(1)=f(1^-)$, 即 $\lim\limits_{x\to 1^+}(\ln x+b)=0$, 所以 $b=-\ln 1=0$.

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导得 $f'_+(1)=f'_-(1)$,

又因为 $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x-0}{x-1}=1$,

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{a(x-1)}-1}{x-1}=a$, 所以 $a=1$.

且 $f'(1)=f'_+(1)=f'_-(1)=1$.

又当 $x<1$ 时, $f'(x)=e^{x-1}$; 当 $x>1$ 时, $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

所以 $f'(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & x\leq 1, \\ \dfrac{1}{x}, & x>1. \end{cases}$

六、(本题共10分) 设$0<x_1<1$, $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$, 证明: 数列$\{x_n\}$收敛, 并且求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证: 首先由数学归纳法可证得 $0<x_n<1$.

又因为 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)<x_n$, 所以 $\{x_n\}$ 单调减.

由单调有界原理可得 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$, 等式 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)$ 两边同时取极限得,

$A=A\,(1-A)$, 解得 $A=0$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

七、(本题共10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$, 试证: 至少存在一点 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=1$.

证: 设 $F(x)=f(x)-x$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,

且 $F(1)=f(1)-1=-1<0$, $F\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>0$,

由零点定理, 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{3},1\right)$, 使得 $F(\eta)=0$.

由于 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续, $(0,\eta)$ 内可导, 且 $F(0)=f(0)-0=0=F(\eta)$,

所以由罗尔定理可知存在 $\xi \in (0, \eta) \subset (0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$, 即 $f'(\xi)=1$.

八、附加题 (本题共 10 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数, 且 $f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 证明:

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(II) 方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

证: (I) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$, 由极限保号性知, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(0,\delta)$ 时 $\dfrac{f(x)}{x}<0$, 从而 $f(x)<0$. 又由于 $f(1)>0$ 且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导,

则由零点存在定理可知, 至少存在一点 $\xi\in(0,x)\subset(0,1)$ 使得 $f(\xi)=0$.

即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

(II) 令 $F(x)=f(x)f'(x)$, 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, 且 $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2$.

由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知, $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$.

又由 (I) 知, $f(\xi)=0$, 所以由罗尔定理可得

$\exists\, x_0\in(0,\xi)$, 使得 $f'(x_0)=0$, 从而 $F(0)=F(x_0)=F(\xi)$.

再由罗尔定理可知, $\exists\, \xi_1\in(0,x_0), \xi_2\in(x_0,\xi)$, 使得 $F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$.

也即方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,\xi)\subset(0,1)$ 内有两个不同的实根.