18-19年B卷.

三.

(1) $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+c_4]{\substack{c_1+c_2 \\ c_1+c_3}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5\times 1^4 = 5$$

(2) 设 $\vec{\alpha}=(1,2,3,4)^T$, $\vec{\beta}=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})^T$. 求 $A=\vec{\alpha}^T\vec{\beta}$, $B=\vec{\beta}\vec{\alpha}^T$ 及 A^n.

解: $A=\vec{\alpha}^T\cdot\vec{\beta}=(1,2,3,4)\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=1\times1+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{4}=4.$

$\cancel{B=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}^T}$

$$B=\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}^T=\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}(1,2,3,4)=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^n=(\vec{\alpha}^T\vec{\beta})^n=4^n$$

$$B^n=(\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}^T)^n=\vec{\beta}\cdot\underline{\vec{\alpha}^T\cdot\vec{\beta}}\cdot\vec{\alpha}^T\cdots\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}^T$$

$$=\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}^T\vec{\beta})^{n-1}\vec{\alpha}^T$$

$$=4^{n-1}\cdot\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}^T$$

$$=4^{n-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

四、$A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{bmatrix}$，且 $X-AX+A^2=E$，求矩阵 X.

解：$(E-A)X=E-A^2=(E-A)(E+A)$. ①.

由于 $E-A=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&-1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1&-3\\0&0&1\end{bmatrix}$，显然可逆.

则①式两侧同时左乘 $(E-A)^{-1}$，可得：

$$X=E+A=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&-1\\0&1&5\end{bmatrix}.$$

五、$\vec{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\2\\5\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\4\\7\end{bmatrix}$，$\vec{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix}$，求此向量组的秩和一个最大线性无关组，并用其表示其余向量.

解：$(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&2&4&3\\1&5&7&3\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&2&2&2\\0&5&5&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-5r_2]{r_2\times\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[\substack{r_1-r_3\\ r_2-r_3}]{r_3\times(-\frac{1}{3})}\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3,\vec{\beta}_4).$$

则 $R(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4)=3$.

$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_4$ 是一个最大线性无关组.

由于 $\vec{\beta}_3=2\vec{\beta}_1+\vec{\beta}_2$

那么 $\vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2$

六. $A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$，$\vec{b}=\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}$，已知 $A\vec{x}=\vec{b}$ 存在两个不同的解.

(1) 求 λ, a；

(2) 求方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解.

解：(1) $A\vec{x}=\vec{b}$ 有两个不同的解，则必有无穷多解.

即 $R(A)=R(A\,|\,b)<3$.

那么 $|A|=0$.

由于 $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$.

则 $\lambda=1$ 或 -1.

当 $\lambda=1$ 时,

$(A\,|\,\vec{b})=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right]$，观察第二行，方程组明显无解.

当 $\lambda=-1$ 时,

$(A\,|\,\vec{b})=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_1}\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & a+1\end{array}\right]\xrightarrow{r_3+r_2}\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & a+2\end{array}\right]$

由于 $R(A\,|\,\vec{b})<3$，可知 $a+2=0$，$\Longrightarrow a=-2$.

综上所述，$\begin{cases}\lambda=-1\\ a=-2.\end{cases}$

(2) 由(1)可得：

$(A\,|\,\vec{b})=\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$

先求出 $A\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系.

$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=0\\ -2x_2=0\end{cases}$　令 $x_3=1$，可得：$\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

再找出 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的一个特解.

$\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=-2\\ -2x_2=1\end{cases}$　令 $x_3=0$，可得 $\vec{\eta}^*=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$.

那么 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的通解为：$\vec{\xi}=k_1\vec{\xi}_1+\vec{\eta}^*$，$k_1\in R$

七、求正交变换 $\vec{x}=P\vec{y}$，使 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$ 化为标准形，并判定 f 是否为正定二次型。

解：f 所对应的矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$

特征多项式为：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\-1&\lambda-2&0\\0&0&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-3)\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\-1&\lambda-2\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)^2$.

则特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=3$.

对于 $\lambda_1=1$，求 $(\overset{E-A}{\cancel{\lambda_1 E-A}})\vec{x}=\vec{0}$ 的基础解系。

$E-A=\begin{bmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 则 $\vec{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$，单位化得 $\vec{p}_1=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}$

对于 $\lambda_2=\lambda_3=3$，求 $(\overset{3E-A}{\cancel{\lambda_2 E-A}})\vec{x}=\vec{0}$

$3E-A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

令 $\begin{bmatrix}x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，可得 $\vec{\xi}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\vec{\xi}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

$\vec{\xi}_2,\vec{\xi}_3$ 显然正交，直接单位化即可。

$\vec{p}_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\end{bmatrix}$，$\vec{p}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$.

正交矩阵 $P=(\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3)=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. 正交变换为：$\vec{x}=P\vec{y}$.

对角阵 $\Lambda=P^{-1}AP=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}$.

因此标准形为：$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+3y_2^2+3y_3^2$

标准形是正定二次型，那么原二次型 f 是正定二次型。