

2021-2022 学年第一学期 南京信息工程大学
《高等数学 I (1)》(理工) 第二次月考暨期中考试试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	21	21	18	18	8	8	6	
得分								

一、填充题 (每小题 3 分, 共 21 分)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-2n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $y = x^{\sin x}$, 则 $dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x - \tan x$ 是 $2x$ 的 $\underline{\hspace{2cm}}$ 阶无穷小 (填写阶数).

4. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+7x)}{\sqrt{1+4x}-1}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 已知 $f'(5) = 11$, 则 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - f(5+h)}{4h} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 抛物线 $y = x^2$ 上与直线 $x + 4y = 1$ 垂直的切线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

7. 设 $f(x) = (3x^2 + 1)e^x$, 则 $f^{(20)}(0) = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题 (每小题 3 分, 共 21 分)

1. 设函数 $f(x)$ 可导, 则 $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$ 的导数 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\quad)$

(A) $f'(\sqrt{x^2 + 1}) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(B) $f'(\sqrt{x^2 + 1})$



$$(C) f'(\sqrt{x^2+1}) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$(D) f'(\sqrt{x^2+1}) \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

2. 下列各组函数中, $f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同函数的组是 ()

$$(A) f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, g(x) = 1 \quad (B) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(C) f(x) = x, g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad (D) f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}, g(x) = x$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \cdots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \right] = \quad ()$$

$$(A) -1 \quad (B) 1 \quad (C) 0 \quad (D) \infty$$

4. 关于极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2+e^{\frac{1}{x}}}$ 的值, 结论正确的是 ()

$$(A) \frac{5}{2} \quad (B) 0 \quad (C) \frac{5}{3} \quad (D) \text{不存在}$$

5. 设函数 $y = \frac{1}{x^2-1}$, 则 $y^{(100)} = \quad ()$

$$(A) \frac{100!}{2} \frac{1}{(x^2-1)^{101}} \quad (B) \frac{100!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{101}} - \frac{1}{(x+1)^{101}} \right]$$

$$(C) \frac{100!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{101}} + \frac{1}{(x+1)^{101}} \right] \quad (D) \frac{2^{100} 100! x^{100}}{(x^2-1)^{101}}$$

6. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x)$ ()

(A) 必为无穷大量 (B) 必为无穷小量

(C) 必为非零常数 (D) 极限值不确定

7. $x=0$ 是函数 $y = \frac{\sqrt{2-2\cos x^2}}{x^2}$ 的 ()

(A) 连续点 (B) 可去间断点

(C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点



三、计算下列极限（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{\pi}{2} + \arctan x \right).$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n^2 + \pi} + \frac{n}{3n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{n}{3n^2 + n\pi} \right).$



四、计算下列导数 (每小题 6 分, 共 18 分)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \ln(1-x^3), & x \leq 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$.

2. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \ln \sqrt{1+t^2} \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

3. 设 $y = y(x)$ 是由 $e^{xy} + y^3 - 5x = 0$ 所确定的隐函数, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0}$, $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}$.



五、(本题满分 8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - ax + b}{x^2 - 9} = -\frac{1}{6}$, 求常数 a 和 b .

六、(本题满分 8 分) 设 $x_1 = 6$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限值.



七、(本题满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, 且 $f(1)=1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$.

证明: 在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f''(\xi)=2$.

