高等数学衔接课程

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

专题一 中学数学内容补充

（3）复 数

数学与统计学院公共数学教学部

主要内容

一、引入

二、复数相关概念

三、复数与平面向量、三角函数的联系

四、欧拉公式

五、小结与思考

复 数

一、引入

例 求一元二次方程 $2x^2-13x+15=0$ 的根.

因式分解法

解 $\because 2x^2-13x+15=0 \quad \therefore (2x-3)(x-5)=0$

因此，原方程有两个不相等的实根：$x_1=\dfrac{3}{2}, x_2=5.$

推广： 一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$，

当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，方程有两个不相等的实根：$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

当 $\Delta=b^2-4ac=0$ 时，方程有两个相等的实根：$x_1=x_2=\dfrac{-b}{2a}$

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实根

公式法

问题： 求一元二次方程 $x^2-4x+5=0$ 的根.

$\because \Delta=16-20=-4<0$，故无实根.

二、复数相关概念

1. 复数的定义

虚数单位： $\mathbf{i}$

规定：(1) $\mathrm{i}^2=-1$

(2) 实数可与 $\mathbf{i}$ 进行四则运算，且原有的加、乘运算律仍成立

复数： $a+b\mathrm{i},(a,b\in R)$

如：$3+2\mathrm{i}$,$-5\mathrm{i}$,$8\cdots$

复数集： 全体复数所组成的集合， 一般用大写 C表示

复　数

2. 复数的表示

代数上: 复数通常用字母 z 表示，即

$$z = a + b\mathrm{i}, (a, b) \in \mathrm{R}.$$

实部　　**虚部**　　复数的代数形式

特别地，

当 $b = 0$ 时，　$z = a + b\mathrm{i} = a$ ：实数

当 $a = 0, b = 0$ 时，　$z = a + b\mathrm{i} = 0$ ：实数0

当 $b \neq 0$ 时，　$z = a + b\mathrm{i}$ ：虚数

当 $a = 0, b \neq 0$ 时，　$z = a + b\mathrm{i} = b\mathrm{i}$ ：纯虚数

复数相等：如果两个复数的实部和虚部分别相等，称这两个复数相等

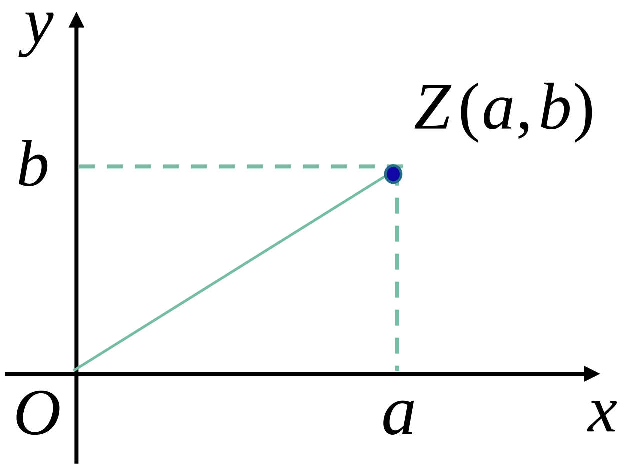
共轭复数：当两个复数实部相等，虚部互为相反数时，称这两个复数为共轭复数

复　数

几何上： $z=a+bi \Leftrightarrow (a,b)$

点 Z 的横坐标是 a，纵坐标是 b，

复数 $z=a+bi$ 可以用点 $Z(a,b)$ 表示.



复平面：用直角坐标系表示复数的平面

x 轴：**实轴**；　y 轴：**虚轴**

实轴上的点：实数

虚轴上的点（除原点外）：纯虚数

复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)$

3. 复数的计算

（1）复数的加法与减法

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di, (a,b,c,d\in R)$ 是两个任意的复数，则

加法： $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i;$

减法： $(a+bi)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)i.$

两个复数相加（减）的运算：把两复数的**实部与实部**、**虚部与虚部**分别相加（减）

复数的加法运算满足：交换律、结合律

例 计算 $(5-6i)+(-2-i)-(3+4i)$.

解 原式 $=(5-2-3)+(-6-1-4)i=-11i.$

复 数

（2）复数的乘法与除法

设 $z_1=a+bi, z_2=c+di,(a,b,c,d\in R)$ 是两个任意的复数，则

乘法： $(a+bi)(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

除法： $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{(ac+bd)}{c^2+d^2}+\dfrac{(bc-ad)i}{c^2+d^2}.\quad (c+di\neq 0)$

例 计算 $(1+2i)(2-i)\div(1+4i)$.

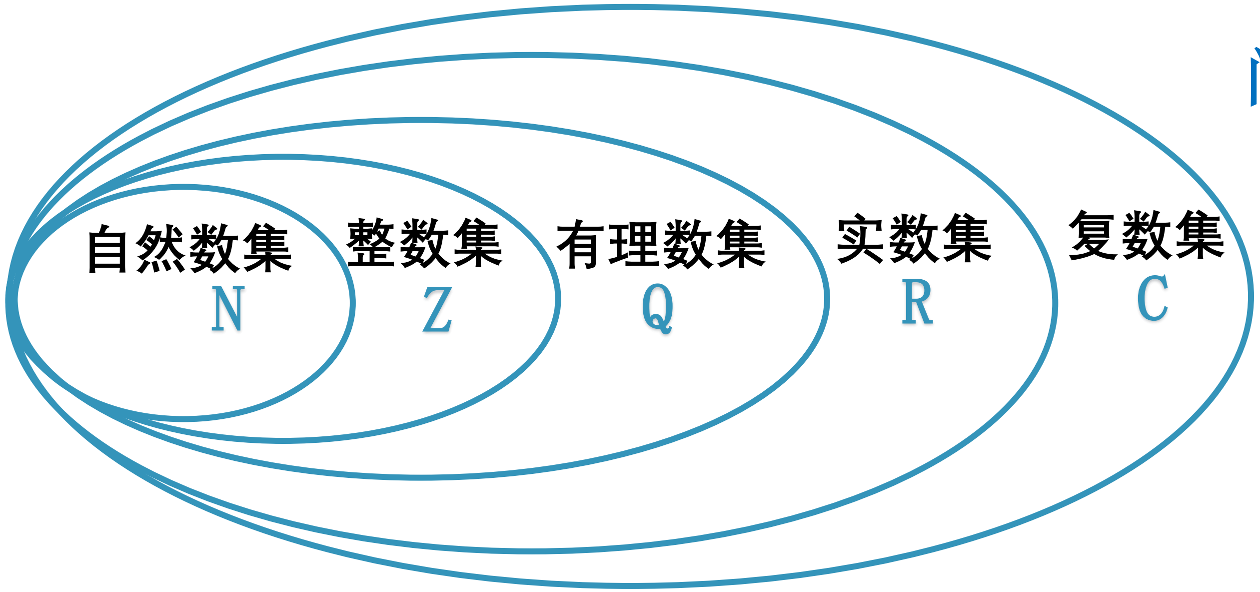
解 原式 $=\dfrac{(1+2i)(2-i)}{1+4i}=\dfrac{2-i+4i+2}{1+4i}=\dfrac{4+3i}{1+4i}$

$$=\frac{(4+3i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}=\frac{(4+3i)(1-4i)}{17}=\frac{16}{17}-\frac{13i}{17}.$$

复 数

4. 数系的扩充

自然数 $\xrightarrow{\text{负数}}$ 整数 $\xrightarrow{\text{分数}}$ 有理数 $\xrightarrow{\text{无理数}}$ 实数 $\xrightarrow{\text{虚数}}$ 复数



问题： 求解一元二次方程 $x^2-4x+5=0.$

$$\because \Delta=b^2-4ac=16-20=-4<0$$

$$\therefore x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{4\pm 2i}{2}=2\pm i.$$

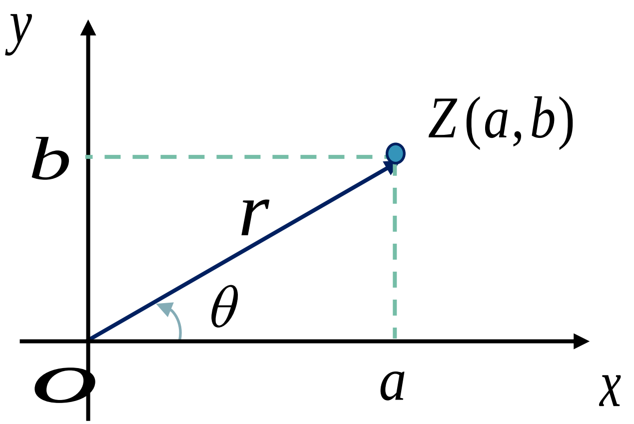
三、复数与平面向量、三角函数的联系

1. 复数与平面向量

复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)$

点 $Z(a,b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$

复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 向量 $\overrightarrow{OZ}$



2. 复数与三角函数

设点 $Z(a,b)$, $r=\left|\overrightarrow{OZ}\right|$, θ 是以 x 轴的非负半轴为始边、以 OZ 所在射线为终边的角,

那么 a,b 与 r,θ 的关系？ 复数 $z=a+bi \Longrightarrow \boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$

r：模； θ：辐角 $(r\neq 0)$

复数的三角形式

复 数

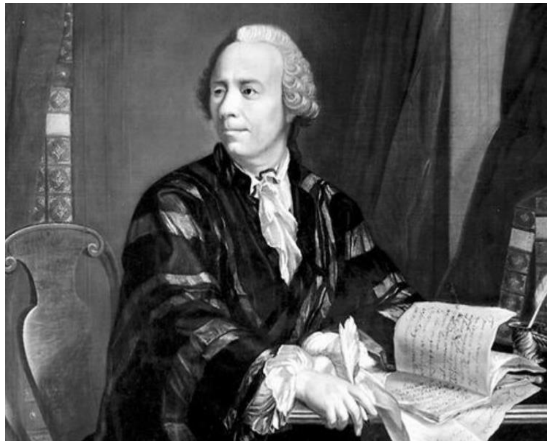
四、欧拉公式

规定： $e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$ （1）

由此，得 $e^{-\theta i}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ （2）

$e^{\theta i}+e^{-\theta i}=2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2}(e^{\theta i}+e^{-\theta i})$ （3）

$e^{\theta i}-e^{-\theta i}=2i\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{1}{2i}(e^{\theta i}-e^{-\theta i})$ （4）



欧拉公式

欧拉：瑞士数学家和物理学家，“历史上最伟大的数学家之一”，“数学之王”；在微积分、初等数学、微分方程、数论、几何等方面都做出了卓越的贡献；创造了数学符号：π, $f(x)$, i， e 等.

复 数

复数 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \xRightarrow{e^{\theta \mathrm{i}} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta} \boxed{z = re^{\theta \mathrm{i}}}$ 复数的指数形式

例 设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, 求 $(1) z_1 z_2, (2) \dfrac{z_1}{z_2}$.

解 (1) 法一：复数的三角形式

$$\because z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1) \times r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r[\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \mathrm{i}(\sin\theta_1 \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \sin\theta_2) + (\mathrm{i}\sin\theta_2 \times \mathrm{i}\sin\theta_1)]$$

$$= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}(\sin(\theta_1 + \theta_2))]$$

复 数

例 设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1), z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，求 (1) z_1z_2，(2) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

续解 (1) 法二：复数的指数形式

$$\because z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\quad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2},$$

$$\therefore z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\times r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$

$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}(\sin(\theta_1+\theta_2))]$$

指数形式简便

(2) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}(\sin(\theta_1-\theta_2))]$$

特别地，设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，求 z^n.

$$\boxed{z^n=(r\mathrm{e}^{\theta i})^n=r^n\mathrm{e}^{n\theta i}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)}$$

复　数

欧拉等式（公式）——世界上最著名、最伟大、最美丽的等式之一

$$e^{\theta i}=\cos\theta+i\sin\theta$$

若在欧拉公式中，令 $\theta=\pi$，则 $e^{\pi i}=-1$，即：$e^{\pi i}+1=0$ 欧拉等式

神奇之处： 把数学中最基本的五个常数，以非常优美、极其简单的形式结合起来！

e——自然对数，代表了大自然

π——圆周率，代表了无限

i——虚数单位，代表了想象

1——数字一，代表了起点

0——数字零，代表了终点

乘法：代表结合
指数：代表加成
加法：代表累计
等号：代表统一

大自然充满无限想象，但是最终都会归于终点！

五、小结与思考

- 复数的概念、代数及几何上的表示方法

$$z=a+b\mathrm{i}=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

$$z=a+b\mathrm{i} \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{点 } Z(a,b) \xleftrightarrow{\text{一一对应}} \text{向量 } \overrightarrow{OZ}$$

- 复数的运算 **注：**复数表示形式的选择！！
- 数系扩充 自然数 $\Longrightarrow$ 整数 $\Longrightarrow$ 有理数 $\Longrightarrow$ 实数 $\Longrightarrow$ 复数
- 欧拉公式

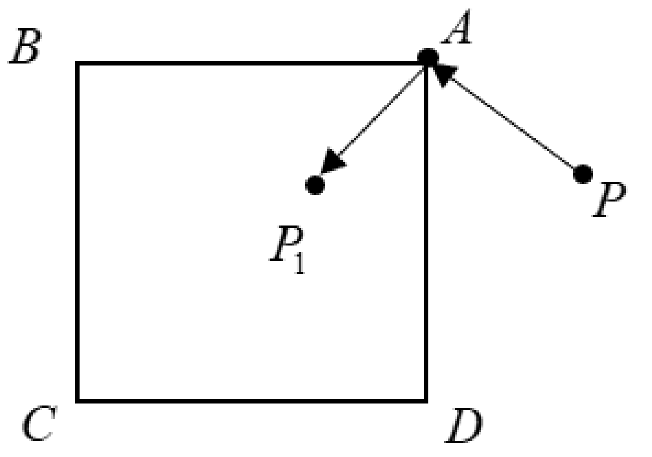
$$\mathrm{e}^{\theta\mathrm{i}}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

$$\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}+1=0$$

勤思考
善总结

复　数

在同一平面上，有点A和点P（如图），一个机器人从点P开始向点A直线前进，到达点A后，逆时针转向90°，继续前进，走同样长的一段距离到达一点P_1，这样，我们说这个机器人完成了一次关于点A的“左转弯运动”，设A，B，C，D是平面上的正方形的四个顶点，点P距离点D为$10m$，一个机器人从点P出发，先 关于点A作一次左转弯运动，到达点P_1，接着再对B作一次左转弯运动，到达点P_2，然后关于C，D，A，B连续地作左转弯运动，作过 11111 次左转弯运动后，到达点Q，问点Q距出发点多少米？



【答案：$PQ=10\sqrt{2}m.$】

感谢聆听

Thank You