南京信息工程大学试卷答案及评分标准

2019 －2020 学年 第 1 学期 线性代数 课程试卷(B 卷)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 已知 $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1} =$__________.

答：$\frac{1}{8}\boldsymbol{A}^*$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则 $a =$__________.

答：6.

(3) 已知三维向量空间 R^3 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{\beta} = (1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标是________.

答：$1,0,1$.

(4) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 1，2，3，则 $|\boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{E}| =$__________.

答：-12.

(5) 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，则 k 的取值范围是________.

答：$k > 2$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 下列等式正确的是（ D ）.

(A) $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$； (B) $\begin{vmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$；

(C) $\begin{vmatrix} x & y \\ z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & -a \end{vmatrix}$；　　　　(D) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3a & 4 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

(2) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　A　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$；　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$；　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.

(3) 设$\boldsymbol{A}$为3阶矩阵，且$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，关于$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的说法，正确的是(　A　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第2行乘以2得到$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；　　(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第2列乘以2得到$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第2行乘以$\dfrac{1}{2}$得到$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；　　(D) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$的第2列乘以$\dfrac{1}{2}$得到$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

(4) 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{A}$的秩$R(\boldsymbol{A})=r$，则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$有非零解的充要条件是(　B　).

(A) $r>n$；　(B) $r<n$；　(C) $r>m$；　(D) $r<m$.

(5) n阶方阵$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值是与对角阵相似的(　B　).

(A) 充分必要条件；　(B) 充分非必要条件；

(C) 必要非充分条件；　(D) 既非充分也非必要条件.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在答题册对应题号下面的空白处作答）

(1) 设$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & -8 & 2 \end{vmatrix}$，$M_{ij}$是$D$中元素$a_{ij}$的余子式，求$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}$.

解：$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=-A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & -8 & 2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=27.$$

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\1&3&0\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$， $\boldsymbol{A}^n$（$n\geq 3$为正整数）.

解：由题知： $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{pmatrix}$， $\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

进而 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O}$（$n\geq 3$为正整数）.

(3) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为$1,-1,0$，对应于$1,-1$的特征向量依次为

$\boldsymbol{p}_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{p}_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量.

解：设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$。由于实对称矩阵不同特征值对应的特征向量必正交，

故$\begin{cases}[\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{x}]=0\\ [\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{x}]=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3=0\\ 2x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$,

解得基础解系为$\boldsymbol{\xi}=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}$,

于是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 0 的特征向量$k\boldsymbol{\xi}$（k 不等于零）.

四、**(本题满分 10 分)** 设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&2\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解：由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 知: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{A}$.

而 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&2&1\\3&3&2\\1&2&1\end{pmatrix}$,

又$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}0&2&1&1&2&1\\3&3&2&3&4&2\\1&2&1&1&2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&2\\0&-3&-1&0&-2&-1\\0&2&1&1&2&1\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&2&2\\0&-1&0&1&0&-3\\0&2&1&1&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&1\\0&1&0&-1&0&3\\0&0&1&3&2&-5\end{pmatrix},$$

所以$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&3\\3&2&-5\end{pmatrix}$.

五、(**本题满分 10 分**) 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}$，求该矩阵的秩以及列向量组的一个极大无关组，并把不属于极大无关组的列向量用极大无关组线性表示.

解：对矩阵进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}\triangleq\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-2\\0&5&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right)=3$.

且极大线性无关组为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，且$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$.

六、(**本题满分 10 分**) 当λ取何值时，线性方程组$\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda\\\lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=\lambda\\3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3\end{cases}$有唯一解、无解、无穷多解？当方程组有无穷多解时求出它的通解.

解：方程组的系数行列式为$\begin{vmatrix}\lambda+3&1&2\\\lambda&\lambda-1&1\\3(\lambda+1)&\lambda&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2\left(\lambda-1\right)$，

则当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq1$时，方程组唯一解.

当$\lambda=0$时，对方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)=\begin{pmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\3&0&3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&1&2&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&3\end{pmatrix},$$

因此$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right)=2$，$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)=3$，所以方程组无解.

当$\lambda=1$时，对方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)=\begin{pmatrix}4&1&2&1\\1&0&1&1\\6&1&4&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

因此$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)=2<3$，所以方程组无穷多解.

其通解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}$.

七、**(本题满分 12 分)** 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，

(1) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 化二次型为标准形；

(2) 判断此二次型是否正定.

解：(1) 由题知：二次型对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&9\end{pmatrix}$，

由 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&3\\-1&1-\lambda&-3\\3&-3&9-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-11)=0$，

得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=11$，

解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-0\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\xi}_2=(-3,0,1)^{\mathrm{T}}$

解线性方程组 $(\boldsymbol{A}-11\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1,-1,3)^{\mathrm{T}}$，

将 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 正交化，令 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\frac{[\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(-3,3,2)^{\mathrm{T}}$，

再将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 单位化有 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}-3\\3\\2\end{pmatrix}$， $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{3}{\sqrt{22}}&\frac{1}{\sqrt{11}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{22}}&-\frac{1}{\sqrt{11}}\\0&\frac{2}{\sqrt{22}}&\frac{3}{\sqrt{11}}\end{pmatrix}$，正交变换为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$，且标准形为 $f=11y_3^2$.

(2) 由(1)知：二次型的对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 0, 0, 11.

因此特征值不是全大于 0，即正惯性指数小于 3，所以 f 不是正定二次型.

八、**(本题满分 10 分)** 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：$\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

(2) 若 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，证明: $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

证明：(1) 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{O}$，

则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\le n$，

又因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\ge \mathrm{R}(2\boldsymbol{E})=n$，

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\mathrm{R}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n$.

(2) 由于 $|\boldsymbol{A}|=-1$ 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$，

所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|$，

$$=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=-|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|,$$

所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=0$.

解：对矩阵进行初等行变换：

$$\boldsymbol{A}\triangleq(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&0&1\\2&1&3&0\\2&5&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&-2&0\\0&1&-1&-2\\0&5&-5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$.

且极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$，且 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+0\cdot\boldsymbol{\alpha}_4$.

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分仅供参考.