南京信息工程大学试卷

2017 －2018 学年 第 一 学期 线性代数 课程试卷（A 卷）

本试卷共 2 页；考试时间 120 分钟；任课教师________；出卷时间 2017 年 12 月

__________学院__________专业 ______年级 _____ 班

学号__________ 姓名__________ 得分__________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\3 & -3 & 1\\2 & a & -2\end{pmatrix}$，如果齐次线性方程组 $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $a=$ ________

2、 已知二阶方阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$，则其伴随矩阵 $A^*=$ ____________

3、 设 $A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3), B=(\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_1,2\vec{\alpha}_2)$，其中 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 为 3 维列向量，且 $|A|=2$，则

$|A+B|=$ __________

4、 $n+1$ 个 n 维向量构成的向量组一定线性__________

5、 设三阶方阵 A 使 $2E-A, E+A, 3A-E$ 都不可逆，则 $|A|=$ ____________

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 A 是二阶方阵，且 $|A|=a$，则 $|(-2A)^3|=$（ ）

A. $8a^3$ **B.** $-8a^3$ **C.** $64a^3$ **D.** $-64a^3$

2、设 A 是 n 阶方阵满足 $A^2=A$，则 $A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=$（ ）

A. $A-2E$ **B.** $\frac{1}{2}(A-2E)$

C. $-\frac{1}{2}(2A-E)$ **D.** $-\frac{1}{2}(A-2E)$

3、设 $P^{-1}AP=B$，其中 $P=\begin{pmatrix}-1 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$，则 $A^{11}=$（ ）

A. $\begin{pmatrix}1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$ B. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\-1 & -1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}2 & 3\\-1 & 2\end{pmatrix}$

4、设 $\mathbf{A},\mathbf{X},\mathbf{b}$ 依次为 $m\times n, n\times 1, m\times 1$ 矩阵，则下列命题正确的是（ ）

A. 若 $AX=0$ 只有零解，则 $AX=b$ 有唯一解.

B. 若 $AX=0$ 有非零解，则 $AX=b$ 有无穷多解.

C. 若 $AX=b$ 有无穷多组解，则 $AX=0$ 有非零解.

D. $AX=b$ 有唯一解的充要条件 $R(\mathrm{A})=n$.

5、下列 R^3 的子集中，构成向量空间的是（　　　　）

A. $\left\{X=(x_1,x_2,x_3)^T \middle| x_1-x_2+x_3=1\right\}$　　**B.** $\left\{X=(x_1,x_2,x_3)^T \middle| x_1=2x_3, x_2=0\right\}$

C. $\left\{X=(x_1,x_2,x_3)^T \middle| X^TX=1\right\}$　　**D.** $\left\{X=(x_1,x_2,x_3)^T \middle| x_1x_2=0\right\}$

三、计算下列行列式.（每小题 6 分，共 12 分）

（1）$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$，其中 a_1,a_2,a_3,a_4 均不为0.

四、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，求解矩阵方程 $AX=B+2X$.（10 分）

五、设线性方程组为 $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2+ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$，问：$a$、$b$ 取何值时，方程组无解、有唯一解、有无穷多解？ 在有无穷多解时求出其通解.（10 分）

六、已知向量组 $\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix},\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},\vec{\alpha}_4=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$，求向量组的秩和一个最大线性无关组，并将其余的向量用该最大线性无关组线性表示.（10 分）

七、已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，求矩阵 A 的所有特征值及对应的特征向量.（10 分）

八、用导出组的基础解系表示线性方程组 $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11 \\ 5x_1+3x_2+6x_3-x_4=-1 \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6 \end{cases}$ 的通解.（10 分）

九、设 $\vec{\beta}_1=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$, $\vec{\beta}_2=\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+2\vec{\alpha}_3$, $\vec{\beta}_3=\vec{\alpha}_1+2\vec{\alpha}_2+3\vec{\alpha}_3$, 如果 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\vec{\beta}_1,\vec{\beta}_2,\vec{\beta}_3$ 也线性无关.（8 分）