练习三

一、填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$__________.

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x^2-3x+a}$ 的可去型间断点，则 $a=$__________.

(3) 设函数 $y=\ln\dfrac{x+2}{\sqrt{x+1}}+\cos 2x$，则 $\mathrm{d}y=$__________.

(4) 曲线 $y=\dfrac{(x-1)^2}{2x-1}$ 的斜渐近线方程为__________.

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有连续导数，且 $f(a)=0$，$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=-4$，则 $\int_0^a xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=$______.

二、选择

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则(　　　　)

(A) $\tan[f(x)]$ 在点 x_0 处连续　　(B) $\sqrt{f(x)}$ 在点 x_0 处连续

(C) $|f(x)|$ 在点 x_0 处连续　　(D) $f[f(x)]$ 在点 x_0 处连续.

(2) 若 $f(x)=\cos x(x+|\sin x|)$，则在 $x=0$ 处(　　　　)

(A) $f'(0)=2$　　(B) $f'(0)=1$　　(C) $f'(0)=0$　　(D) 不可导.

(3) 设 $y=x\mathrm{e}^x$，则 $y^{(10)}=$(　　　　)

(A) $(10+x)\mathrm{e}^x$　　(B) e^x　　(C) $(10-x)\mathrm{e}^x$　　(D) $(x-10)\mathrm{e}^x$.

(4) 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则(　　　　)

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$　　(C) $S_3<S_1<S_2$　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

(5) 反常积分① $\int_{-\infty}^0\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ ② $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性为(　　　　)

（A）①收敛，②收敛　　　　（B）①收敛，②发散

（C）①发散 ②收敛　　　　（D）①发散，②发散.

三、计算题

(1) 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1} \\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1}) \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

(3) 问 a,b 为何值时，点 $(1,3)$ 是曲线 $y=ax^4+bx^3$ 的拐点？并求此时曲线的凹凸区间.

(4) 求不定积分 $\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

(5) 求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+x)\sin x\mathrm{d}x$.

(6) 求$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

四、设$y=f(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，求函数$y=f(x)$的极值.

五、已知$f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

六、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $0<f'(x)<1$， $f(0)=0$ 证明函数

$F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x\left[f(t)\right]^3\mathrm{d}t$ 在$[0,+\infty)$上单调增加.

七、设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且 $f(1)>0,\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，

试证：(1)方程 $f(x)=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在一个实根；

(2)方程 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.