

## 一、填充题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 函数  $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$  的定义域为\_\_\_\_\_.

2. 设  $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$ , ( $x \neq 0, a^2 \neq b^2$ ), 则  $f(x)$  的表达式为\_\_\_\_\_.

3. 当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$  是关于  $x$  的\_\_\_\_\_阶无穷小 (填写阶数).

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x =$ \_\_\_\_\_.

5. 已知当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos x - 1$  是等价无穷小, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.

6. 设  $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \frac{\sin bx}{x} + 1, & x < 0 \end{cases}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

7. 设  $a$  为非零常数, 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x =$ \_\_\_\_\_.

8. 已知  $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{3}}}$  ( $n$ 重根号), 且极限存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ \_\_\_\_\_.

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 设  $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{1+x^2}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , 则此函数是 ( )

- (A) 有界函数 (B) 奇函数 (C) 偶函数 (D) 周期函数

2. 下列结论中正确的是 ( )

(A) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ( $a \neq 0$ )

(B) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  必不存在

(C) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  不存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$  必不存在

(D) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  不存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$  必不存在

3. 下列数列中, 发散的是 ( )

- (A)  $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$  (B)  $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$  (C)  $\left\{\frac{2^n-1}{3^n}\right\}$  (D)  $\{n(-1)^n\}$

4. 数列的有界性是数列收敛的 ( )

- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

5. 下列函数在指定的变化过程中, 属于无穷小量的是 ( )

- (A)  $e^{\frac{1}{x}}$ ,  $x \rightarrow \infty$  (B)  $\frac{1}{x^2+2x}$ ,  $x \rightarrow \infty$

- (C)  $\ln(1+x)$ ,  $x \rightarrow 1$  (D)  $e^x$ ,  $x \rightarrow +\infty$

6. 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 与  $\sqrt{x}$  等价的无穷小量是 ( )

- (A)  $1-e^{\sqrt{x}}$  (B)  $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$  (C)  $1-\cos\sqrt{x}$  (D)  $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

7. 当  $x \rightarrow 1$  时, 函数  $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$  的极限 ( )

- (A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 不存在但不为无穷大 (D) 无穷大

8. 设  $x_n \leq z_n \leq y_n$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$  ( )

- (A) 不一定存在 (B) 存在但不一定等于 0  
(C) 存在且等于 0 (D) 一定不存在

### 三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 用函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+1} = 0$ .

2. 用函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$ .

### 四、计算下列极限（每小题 6 分，共 24 分）

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1+x)}.$$

姓名	学号	班级	姓名	学号	班级	姓名	学号

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2n+\sqrt{1}} + \frac{1}{2n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n+\sqrt{n}} \right):$$



五、(本题满分 8 分) 设  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$ , 求常数  $a$  和  $b$ .

六、(本题满分 8 分) 已知  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ . 证明: 数列  $\{x_n\}$  收

敛, 并求其极限值.