一、填空题（每小题 3 分，共 21 分）

1. e^{-2}　　2. $x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x$　　3. 3　　4. $\dfrac{7}{2}$　　5. $-\dfrac{11}{2}$

6. $y=4x-4$　　7. 1141

二、 选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1. C　　2. A　　3. B　　4. D　　5. B　　6. D　　7. B

三、计算下列极限（每小题 6 分，共 18 分）

1．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2．$\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan x\right)$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}+\arctan x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}=-1$.

3．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n^2+\pi}+\dfrac{n}{3n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{3n^2+n\pi}\right)$.

解：$\dfrac{n^2}{3n^2+n\pi}\le\dfrac{n}{3n^2+\pi}+\dfrac{n}{3n^2+2\pi}+\ldots\ldots+\dfrac{n}{3n^2+n\pi}\le\dfrac{n^2}{3n^2+\pi}$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2+n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{1}{3}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3n^2+\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3+\dfrac{\pi}{n^2}}=\dfrac{1}{3}$,

由夹逼法则可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n^2+\pi}+\dfrac{n}{3n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{3n^2+n\pi}\right)=\dfrac{1}{3}$.

四、计算下列导数（每小题 6 分，共 18 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ \ln(1-x^3), & x\le 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解：当 $x>0$ 时，$f'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

当 $x<0$ 时，$f'(x)=\left[\ln(1-x^3)\right]'=-\dfrac{3x^2}{1-x^3}$.

右导数 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，

左导数 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-x^3)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x^3}{x}=0$.

所以 $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ -\dfrac{3x^2}{1-x^3}, & x\le 0 \end{cases}$.

2．设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}=t$，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1}{\frac{t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{t}$.

3．设 $y=y(x)$ 是由 $e^{xy}+y^3-5x=0$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解：对方程两边关于 x 求导有 $(y+xy')e^{xy}+3y^2y'-5=0$，解得 $y'=\dfrac{5-ye^{xy}}{xe^{xy}+3y^2}$.

由原方程可知，当 $x=0$ 时， $y=-1$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=y'(0)=2$.

对方程 $(y+xy')e^{xy}+3y^2y'-5=0$ 关于 x 求导，有

$$(2y'+xy'')e^{xy}+(y+xy')^2e^{xy}+6y(y')^2+3y^2y''=0$$

代入可得，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=y''(0)=\dfrac{19}{3}$.

五、（本题满分 8 分） 设 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-9}=-\dfrac{1}{6}$，求常数 a 和 b .

解：因 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)=0$，则 $\lim\limits_{x\to3}(x^2-ax+b)=\lim\limits_{x\to3}(x^2-9)\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-9}=0$.

从而 $9-3a+b=0$，即 $b=3a-9$.

$-\dfrac{1}{6}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-ax+3a-9}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x+3-a}{x+3}=\dfrac{6-a}{6}$.

所以 $a=7$， $b=12$.

六、（本题满分 8 分） 设 $x_1=6$， $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$. 证明：数列 $\left\{x_n\right\}$ 收敛，并求其极限值.

解：①注意到 $x_2=\sqrt{6+6}<6=x_1$. 假设 $x_n<x_{n-1}$，那么

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}<0,$$

从而 $x_{n+1}<x_n$. 因此，由数学归纳法可知数列 $\left\{x_n\right\}$ 单调递减.

②注意到 $x_1=6>3$. 假设 $x_n>3$，则 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}>\sqrt{6+3}=3$，数列 $\left\{x_n\right\}$ 有下界.

由单调有界准则可知，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

③设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，对 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ 两边取极限得 $a=\sqrt{6+a}$，即 $a^2-a-6=0$，

解得 $a=3$， $a=-2$（舍去）. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

七、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=2$.

证明：①由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 可知，$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}x=0$.

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

②令 $F(x)=f(x)-x^2$，则 $F(0)=0$，$F(1)=0$.

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，由罗尔定理，$\exists\eta\in(0,1)$，使 $F'(\eta)=0$.

③ $F'(x)=f'(x)-2x$，$F'(0)=0$，$F'(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件，则存在

$\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得 $F''(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=2$.