高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第六节 隐函数的求导公式

1 一个方程的情形

2 方程组的情形

3 内容小结

隐函数的求导公式

教学目标

- 一个方程时隐函数求导公式
- 方程组时隐函数求导公式

重难点

重点：隐函数求导方法

难点：方程组情形隐函数求导

- 隐函数的高阶导数求法

一、一个方程的情形

1、二元方程$F(x,y)=0$的情形

隐函数存在定理1：设函数$F(x,y)$满足

① 在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内具有连续偏导数；

② $F(x_0,y_0)=0, F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程$F(x,y)=0$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内能唯一确定一个连续且有连续导数的函数$y=f(x)$满足$F(x,y)=0$,

并有 $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}}$ —— 隐函数求导公式

隐函数的求导公式

◆ 对此定理不作证明，仅就公式推导如下：

由于$y=f(x)$是方程$F\big(x,y(x)\big)=0$确定的隐函数，所以

对方程$F\big(x,y(x)\big)=0$两边同时对x求导得$F_x+F_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0,$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}.$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & x \\ F \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\ & y - x \end{tikzcd}$$

注：（1）$F_x + F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$中左边是$F\big(x,y(x)\big)$对$x$求导的结果，

F_x是函数$F(x,y)$对x的偏导数，此时y看作常量；

同理，F_y是函数$F(x,y)$对y的偏导数，此时x看作常量.

(2) 如果条件$F_y(x_0,y_0) \neq 0$改成$F_x(x_0,y_0) \neq 0$, 这时结论

是能唯一确定隐函数$x = g(y)$，而且有$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\dfrac{F_y}{F_x}$.

隐函数的求导公式

注： (3)

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & x \\
\frac{F_x}{F_y} \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & \\
 & y - x
\end{tikzcd}$$

$$=-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^{\,2}-2F_xF_yF_{yx}+F_{yy}F_x^{\,2}}{\left(F_y\right)^3}$$

例1 验证方程$x-y^2=0$在点$(1,1)$的某邻域内能唯一确定一个具有连续导数，且当$x=1$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求该函数的一阶和二阶导数在$x=1$的值.

解 设$F(x,y)=x-y^2$，则

$$F_x=1,\ F_y=-2y,\ F(1,1)=0,\ F_y(1,1)=-2\neq 0.$$

由隐函数存在定理1可知，所求隐函数为$y=\sqrt{x}$.

例1 验证方程$x-y^2=0$在点(1,1)的某一邻域内能唯一确定一个具有连续导数，且当$x=1$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$，并求该函数的一阶和二阶导数在$x=1$的值.

续解 下面求该函数的一阶和二阶导数，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{1}{2y}, \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{y'}{2y^2}=-\frac{1}{4y^3}, \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}=-\frac{1}{4}.$$

例2 已知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}$,

则 $F_x(x,y)=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, F_y(x,y)=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$,

当 $F_y(x,y)\neq 0$，即 $y\neq x$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{x+y}{y-x}$.

2、三元方程$F(x,y,z)=0$的情形

隐函数存在定理2 设函数 $F(x,y,z)$满足

① 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有连续的偏导数；

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$ $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

则方程$F(x,y,z)=0$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的**某一邻域**内能**唯一**确定一个**连续且有连续偏导数**的函数$z=f(x,y)$，它满足$z_0=f(x_0,y_0)$并有

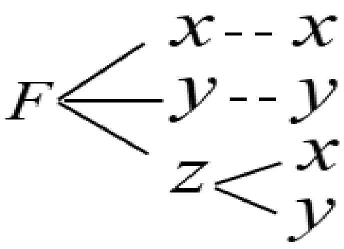
$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}}$$

隐函数的求导公式

◆ 定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

由条件在方程 $F[x,y,f(x,y)]=0$ 两边同时对x求导，得

$$F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$$



在方程 $F[x,y,f(x,y)]=0$ 两边同时对y求导得

$$F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

例3 已知 $e^{-xy}-2z+e^{-z}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法一 利用隐函数求导公式. 设 $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{-z}$

$$F_x=-ye^{-xy},\quad F_y=-xe^{-xy},\quad F_z=-2-e^{-z},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-ye^{-xy}}{-2-e^{-z}}=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-xe^{-xy}}{-2-e^{-z}}=-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}.$$

例3 已知 $e^{-xy}-2z+e^{-z}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

解法二 利用复合函数求导法则直接计算.

方程两端对x求偏导，得

$$e^{-xy}(-y)-2\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \text{即}\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}};$$

方程两端对y求偏导，得

$$e^{-xy}(-x)-2\frac{\partial z}{\partial y}-e^{-z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0,\quad \text{即}\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}.$$

例3 已知 $e^{-xy}-2z+e^{-z}=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解法三 利用全微分形式的不变性.

方程两边求全微分，有 $d(e^{-xy})-2dz+de^{-z}=0$,

$$-e^{-xy}(ydx+xdy)-(2+e^{-z})dz=0$$

整理得 $dz=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}}dx-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}dy$

因此 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ye^{-xy}}{2+e^{-z}},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xe^{-xy}}{2+e^{-z}}$

例4 设 $z=f(xz,z-y)$，求 $\mathrm{d}z$

解法一 先求z对x和y的偏导数

等式 $z=f(xz,z-y)$对x求偏导，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)+f_2'\cdot\frac{\partial z}{\partial x}$$

因此 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{f_1'\cdot z}{1-xf_1'-f_2'}.$$

例4 设 $z=f(xz,z-y)$，求 $\mathrm{d}z$

续解　同理等式两端同时对y求偏导，得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x\frac{\partial z}{\partial y}+f_2'\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial y}-1\right)\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2'}{1-xf_1'-f_2'}$$

$$\therefore \mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{zf_1'}{1-xf_1'-f_2'}\mathrm{d}x-\frac{f_2'}{1-xf_1'-f_2'}\mathrm{d}y$$

例4 设 $z=f(xz,z-y)$，求 $\mathrm{d}z$

解法二 利用全微分形式的不变性,等式两边同时求全微分得

$$\mathrm{d}z=f_1'\mathrm{d}(xz)+f_2'\mathrm{d}(z-y)\Rightarrow \mathrm{d}z=f_1'\left(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z\right)+f_2'\left(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y\right),$$

整理得 $$\mathrm{d}z=\frac{zf_1'\mathrm{d}x-f_2'\mathrm{d}y}{1-xf_1'-f_2'}$$

注： 例3,例4说明可通过求偏导数得到多元函数的全微分，也可通过求全微分得到多元函数对各变量的偏导数.

例5 设 $z = f(x+y+z, xyz)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial x}{\partial y}, \frac{\partial y}{\partial z}$.

解 令 $F(x,y,z) = z - f(x+y+z, xyz)$，则

$$F_x = -f_1' - f_2' \cdot yz \qquad F_y = -f_1' - f_2' \cdot xz \qquad F_z = 1 - f_1' - f_2' \cdot xy$$

所以 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{f_1' + yzf_2'}{1 - f_1' - xyf_2'}$ $\qquad$ $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y} = \frac{1 - f_1' - xyf_2'}{f_1' + xzf_2'}$

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x} = -\frac{f_1' + xzf_2'}{f_1' + yzf_2'}$$

二、方程组的情形

1、三元方程组情形

隐函数存在定理3 设函数 $F(x,y,z),G(x,y,z)$ 满足：

① 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内有对各变量的连续偏导数；

② $F(x_0,y_0,z_0)=0$，$G(x_0,y_0,z_0)=0$ 且由偏导数所组成的函数

行列式(或称雅可比(Jacobi)行列式)

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}$$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处不等于零，

隐函数的求导公式

则方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某一邻域内能唯一确定一组具有连续导数的函数 $\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$ 它满足条件 $y_0=y(x_0), z_0=z(x_0)$ 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad (1) \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}=-\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_x \\ G_y & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}} \quad (2)$$

隐函数的求导公式

- 定理证明从略，仅就求导公式推导如下：

方程组两边求 x 的导数得，$\begin{cases} F_x + F_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + F_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \\ G_x + G_y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + G_z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$ (3)

当 $J = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$ 时，(3)式有唯一解，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}.$$

注：方程组(3)是线性方程组，可以利用线性代数的克兰默法则求解，雅可比行列式为其系数行列式.

例6 设 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 2 \end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解 将方程组中各方程两边同时对x求导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2x + 2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\ 2x + 4y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -2x \\ 2y \cdot \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3z \cdot \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -x \end{cases}$$

当 $J = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时,上述方程组有唯一解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{J} \begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix} = \frac{x}{3z+1}$$

2、四元方程组的情形

设方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$,类似隐函数存在定理3的条件，

唯一确定一组二元函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$

下面我们推导 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

隐函数的求导公式

方法：方程组$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$两端同时对$x$求偏导数, 得

$$\begin{cases} F_x + F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

当$J = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \triangleq \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$ 时，上述方程组有唯一解：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{J} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{J} = -\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}.$$

隐函数的求导公式

同理可得$\begin{cases} F_y + F_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + F_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ G_y + G_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial y} + G_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$，　当 $J \neq 0$ 时,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_y & F_v \\ G_y & G_v \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\begin{vmatrix} F_u & F_y \\ G_u & G_y \end{vmatrix} = -\frac{1}{J} \cdot \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}.$$

例7 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解 运用公式推导的方法.

将所给方程的两边同时对x求偏导数，得

$$\begin{cases} 1 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin v + \dfrac{\partial v}{\partial x} \cdot \cos v \cdot u \\ 0 = e^u \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos v + u\sin v \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

例7 设 $\begin{cases} x = e^u + u\sin v \\ y = e^u - u\cos v \end{cases}$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$.

续解 利用**高斯消元法**解得,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\cos v - e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

将所给方程的两边同时对 y 求偏导数可得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\cos v}{e^u(\sin v - \cos v) + 1}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\sin v + e^u}{u[e^u(\sin v - \cos v) + 1]}$$

例8 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 求 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta$.

解 因为$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$, 对方程组两端对 x 求偏导数得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\theta + r(-\sin\theta)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \\ 0 = \dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x} \end{cases}$$ 当 $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & r(-\sin\theta) \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \neq 0$ 时

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} -1 & -r\sin\theta \\ 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} = \cos\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\theta & -1 \\ \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\sin\theta}{r}.$$

例8 设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 求 $\mathrm{d}r, \mathrm{d}\theta$.

续解 再对方程组两端同时对 y 求偏导数得

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\theta + r(-\sin\theta)\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \\ 1 = \dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} 0 & -r\sin\theta \\ -1 & r\cos\theta \end{vmatrix} = \sin\theta, \quad \frac{\partial\theta}{\partial y} = -\frac{1}{r}\begin{vmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & -1 \end{vmatrix} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

所以 $\mathrm{d}r = \cos\theta\mathrm{d}x + \sin\theta\mathrm{d}y, \mathrm{d}\theta = -\dfrac{\sin\theta}{r}\mathrm{d}x + \dfrac{\cos\theta}{r}\mathrm{d}y.$

三、小结

1. 隐函数存在定理（分以下几种情况）：

- 一个方程的情形：

(1) $F(x, y)=0;$ (2) $F(x, y, z)=0;$

- 方程组情形：

(3) $\begin{cases} F(x, y, z)=0 \\ G(x, y, z)=0 \end{cases};$ (4) $\begin{cases} F(x, y, u, v)=0 \\ G(x, y, u, v)=0 \end{cases}.$

隐函数的求导公式

2. 隐函数(组)求导方法:

方法一 利用复合函数求导法则直接计算;

方法二 利用隐函数求导公式;

方法三 利用全微分形式的不变性.

时间是宝贵的，

抓住了时间就抓住了成功。

只有孜孜不倦地求索，

才有源源不断的收获。