南京信息工程大学 2018-2019 学年第一学期

《线性代数》期末试卷 B 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在题中的横线上）

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则，$\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$______________.

【答案】16.

（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$______________.

【答案】2.

（3）已知向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,k,5)$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)$ 线性表示时，$k=$________.

【答案】-8.

（4）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&2&4\\5&7&2&1\\5&8&4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=4$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$__________.

【答案】2.

（5）已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $1,-2,3$，则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 ______________.

【答案】3, 3, 13.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分. 请将所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$（　　　　）

(A) 0；　　(B) 2；　　(C) -1；　　(D) 1.

【答案】D.

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 R^3 的基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵是（　　　　）

(A) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$；　(B) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$；　(C) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$；　(D) $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

【答案】A.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(　　　　)

(A) $k\boldsymbol{\alpha}_1$； (B) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$； (C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$； (D) $k\boldsymbol{\alpha}_2$.

【答案】B.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是(　　　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似； (B) $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似；

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似； (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

【答案】C.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，则下列结论正确的是(　　　　)

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

【答案】D.

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在题下空白处作答）

(1) 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解： 原式 $=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ……………4 分

$=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=5$. ……………8 分

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}^n$.

解：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=(1,2,3,4)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}=4$ ……………2 分

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4}\end{pmatrix}(1,2,3,4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \frac{1}{2}&1&\frac{3}{2}&2\\ \frac{1}{3}&\frac{2}{3}&1&\frac{4}{3}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&1\end{pmatrix}$$ ……………5 分

$$\boldsymbol{B}^n=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})^n=(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})$$

$$=\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\cdots(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{\beta}4^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=4^{n-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{T}=4^{n-1}B$$ ……………8 分

四、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$．**(本题满分 10 分)**

解：由 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，

得 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$，即 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})$， ……………4 分

又 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&-1&-3\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-2&0&0\\0&0&1\\0&-1&-3\end{vmatrix}=-2\neq 0$，

因此矩阵 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆，

故 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&-1\\0&1&5\end{pmatrix}$ ……………10 分

五、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$，求此向量组的秩和一个最大线性无

关组, 并把其余向量用这个最大线性无关组线性表示. **(本题满分 10 分)**

解： $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&2&4&3\\1&5&7&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&2&2&2\\0&5&5&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&1\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&2&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ ……………6 分

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个最大线性无关组，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$. ……………10 分

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1\\0&\lambda-1&0\\1&1&\lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，

(1) 求 λ,a；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解. **(本题满分 10 分)**

解： (1) 对增广矩阵进行初等变换

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&a\\0&\lambda-1&0&1\\1&1&\lambda&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\\lambda&1&1&a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&1-\lambda&1-\lambda^2&a-\lambda\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&\lambda&1\\0&\lambda-1&0&1\\0&0&1-\lambda^2&a-\lambda+1\end{pmatrix}$$

由已知 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，

故 $\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{A}})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})<3$，则只可能 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，

而当 $\lambda=1$ 时，$\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{A}})=2$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=1$,故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解，

所以当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，$\mathrm{R}(\bar{\boldsymbol{A}})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2<3$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解. ………5 分

(2) 当 $\lambda=-1$，$a=-2$ 时，

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&-2&0&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&-2&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&\frac{3}{2}\\0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以同解方程组为：$\begin{cases}x_1-x_3=\frac{3}{2}\\x_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ ……………10 分

七、求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$，使二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$ 化为标准形，并判定 f 是否为正定的二次型. **(本题满分 12 分)**

解：由题知二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，

因为 $\left|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}\right|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{vmatrix}=-\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)^2$，

故 $\lambda_1=\lambda_2=3$，$\lambda_3=1$ ……………5 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=3$ 时，解 $\left(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系：$x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

将它们正交单位化得：$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

当 $\lambda_3=1$时，解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，得基础解系：$x_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，将其单位化得：$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{pmatrix}$，

作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ ，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=3y_1^{\,2}+3y_2^{\,2}+y_3^{\,2}$ ……………11 分

显然 f 是正定的二次型. ……………12 分

八、证明下列命题： **(每小题 6 分，共 12 分)**

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{ABA}^{-1}$ 是对称矩阵；

(2) 若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 3.

证明：(1) 由已知得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{-1}$ ，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$， ……………2 分

因此 $\left(\boldsymbol{ABA}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{ABA}^{-1}$

所以 $\boldsymbol{ABA}^{-1}$ 是对称矩阵. ……………6 分

(2) 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为对应 λ 的特征向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，

因此 $\left(\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^2-4\lambda+3\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$， ……………3 分

即 $\lambda^2-4\lambda+3=(\lambda-1)(\lambda-3)=0$，

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 λ 只可能为：1 或 3. ……………6 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.