一、填充题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则用"$\varepsilon - N$"的定义可叙述为

____.

2、设函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{x}, & x<0 \\ -1, & x=0 \\ \dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{1+bx}, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______，$b=$______.

3、曲线 $xy+e^{y^2}-x=0$ 在点 $(1,0)$ 处的法线方程是________________________.

4、$d(\arctan e^x)=$ ____________________ $d(\tan\sqrt{x})$.

5、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x\sin x}-1}{x\arctan x}=$____________________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续，则（　　　　）.

A. $f'(x_0)$ 必存在　　　　B. $f'(x_0)$ 必不存在

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必存在　　　　D. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必不存在

2、设 $f(x)=\operatorname{sgn} x,\ g(x)=1+x^2$，则 $x=0$ 是 $g(f(x))$ 的（　　　　）.

A. 连续点　　B. 可去间断点　　C. 跳跃间断点　　D. 第二类间断点

3、下列 $x\to0^+$ 时的无穷小量中，阶数最高的是（　　　　）.

A. $(e^{\sqrt{x^3}}-1)\arcsin x$　B. $\sqrt{1-\cos x^2}$　C. $\ln(1+x^2)$　D. $\sin x-\tan x$

4、设 $f'(0)$ 存在，若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(2x)}{x}$ 存在，则此极限（　　　　）.

A. 等于 0　B. 等于 $\dfrac{1}{2}f'(0)$　C. 等于 $2f'(0)$　D. 所给条件无法求出

5、以下命题正确的是（　　　　）.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$　　B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|a|$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$　　D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在

三、计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1、设 $y=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]$，求 y''.

2、求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$.

3、设 $\begin{cases} x=2t+\arcsin\dfrac{1}{2}+3 \\ y=2-3t+\ln(1+t^2) \end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx}$ 和 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

4、求 $f(x)=\dfrac{x}{\ln|x-1|}$ 的间断点，并判定其类型.

5、设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线交 x 轴于 $(x_n,0)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\sqrt{x_n})$.

四、(本题 8 分)

求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.

五、(本题 8 分)

设 n 是正整数，$a<0$，证明：有且仅有一个负数 b，使得 $b^{2n+1}+9b=a$.

六、(本题 8 分) **（理工科）**

(1) 求 $y=\sin x, x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数 $x=\arcsin y$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

(2) 试从 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{y'}$ 推出 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$，利用此结果求（1）中的 $x=\arcsin y$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$，从而验证你所得到的结论是否正确.

六、(本题 8 分) **（文科）**

(1) 设 $\varphi(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，函数 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，求复合函数 $F(x)=f[\varphi(x)]$ 的导数.

(2) $F(x)$ 是否也具有一阶连续的导数？请给出你的理由.

七、(本题 11 分)

(1) 利用拉格朗日中值定理证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$；

(2) 设 $x_{n+1}=\ln(1+x_n), x_1>0$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限；

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_nx_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}$.

参考答案

一、1. $\forall\varepsilon>0,\exists N,$ 当 $n>N$, 有 $\left|x_n-a\right|<\varepsilon$

2. $a=-1,b=1$　　3. $y=-x+1$　　4. $\dfrac{2\sqrt{x}e^x}{(1+e^{2x})\sec^2\sqrt{x}}$　　5. $\dfrac{1}{5}$

二、1. B　　2. B　　3. D　　4. C　　5. A

三、1. 解：$y'=\{x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]\}'=2\cos(\ln x).$

$$y''=-\frac{2}{x}\sin(\ln x).$$

2. 解：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^2\sin x}\overset{2'}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\overset{2'}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}\overset{2'}{=}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}\overset{1'}{=}-\dfrac{1}{6}$.

3. 解：因为$\dfrac{dy}{dt}=-3+\dfrac{2t}{1+t^2},\dfrac{dx}{dt}=2,$所以$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{t}{1+t^2}$.

又$\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}=\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$，所以$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dt}\cdot\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1-t^2}{2(1+t^2)^2}$.

4. 解：易见，$x=0,1,2$ 是 $f(x)$ 的间断点.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln|x-1|}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\ln(1-x)}=-1$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{\ln|x-1|}=0$，故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类（可去）间断点.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x}{\ln|x-1|}=\infty$，故 $x=2$ 是 $f(x)$ 的第二类（无穷）间断点.

5. 解：$f'(x)=nx^{n-1},\ f'(1)=n$. 切线方程为 $y-1=n(x-1)$.

令 $y=0,x_n=\dfrac{n-1}{n}$,

$f(\sqrt{x_n})=(\dfrac{n-1}{n})^{\frac{n}{2}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}f(\sqrt{x_n})=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{1}{n})^{\frac{n}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

四、解：由 Leibniz 公式有：

$$f^{(n)}(x)=\ln^{(n)}(1+x)\cdot x^2+C_n^1\ln^{(n-1)}(1+x)\cdot 2x+C_n^2\ln^{(n-2)}(1+x)\cdot 2.$$

故 $f^{(n)}(0)=2C_n^2\ln^{(n-2)}(1+x)\big|_{x=0}=n(n-1)\left.\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\right|_{x=0}=\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}(n\ge 3)$.

$f'(0)=f''(0)=0$.

五、证：设 $f(x)=x^{2n+1}+9x-a$，则 $f(0)=-a>0$.

因为 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 即 $\forall M>0,\exists X>0,当x<-X时,有f(x)<-M<0$.

取 $c<-X$，则有 $f(c)<0$. $f(x)$ 在 $[c,0]$ 上连续，且 $f(0)f(c)<0$.

由零点定理，$\exists b\in(c,0)$，使 $f(b)=0$，即 $b^{2n+1}+9b=a$.

下面证唯一性：（反证法）设另有 $b_1<0(b_1<b),\ b_1^{2n+1}+9b_1=a$，则 $f(b_1)=f(b)=0$.

$f(x)$ 在 $[b_1,b]$ 上满足罗尔定理，故 $\exists\xi\in(b_1,b)$ 使 $f'(\xi)=0$.

而 $f'(x)=(2n+1)x^{2n}+9>0$，产生矛盾.故仅有一个 b 使 $b^{2n+1}+9b=a$.

六、（理工科）解：（1）$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$，$\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{y}{\sqrt{(1-y^2)^3}}$.

(2) $\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dx}{dy}\right)=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{y'}\right)=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{y'}\right)\cdot\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{y''}{y'^2}\cdot\dfrac{1}{y'}=-\dfrac{y''}{y'^3}$,

利用此结论，有 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=-\dfrac{y''}{y'^3}=-\dfrac{-\sin x}{\cos^3 x}\overset{y=\sin x}{=}\dfrac{y}{\sqrt{(1-y^2)^3}}$.

（文科）解：（1）$F(x)=f[\varphi(x)]=\begin{cases} f(x^2\sin\dfrac{1}{x}), & x\ne 0\\ f(0), & x=0\end{cases}$.

当 $x\ne0$ 时，$F'(x)=f'(x^2\sin\dfrac{1}{x})\left[2x\sin\dfrac{1}{x}+x^2\cos\dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\right]$

$$=f'(x^2\sin\frac{1}{x})\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right).$$

当 $x=0$ 时，$F'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x^2\sin\frac{1}{x})-f(0)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2\sin\frac{1}{x})-f(0)}{x^2\sin\frac{1}{x}-0}\cdot\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=f'(0)\cdot 0=0.$$

故 $F'(x)=\begin{cases} f'(x^2\sin\frac{1}{x})\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$.

(2) 由 $f(x)$ 具有一阶连续的导数，故当 $x\neq 0$ 时，$F(x)$ 具有一阶连续的导数.

当 $x=0$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x^2\sin\frac{1}{x})\cdot 2x\sin\frac{1}{x}=f'(0)\cdot 0=0$.

（i）若 $f'(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x^2\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}=0$，此时 $\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=0=F'(0)$，$F'(x)$ 在 $x=0$ 处连续；（ii）若 $f'(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x^2\sin\frac{1}{x})\cdot\cos\frac{1}{x}$ 不存在，故

$\lim\limits_{x\to 0}F'(x)=\lim\limits_{x\to 0} f'(x^2\sin\frac{1}{x})\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$ 不存在，则 $F'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

综上, 当 $f'(0)=0$ 时，$F(x)$ 也具有一阶连续的导数；当 $f'(0)\neq 0$ 时，$F(x)$ 除 $x=0$ 外都具有一阶连续的导数.

七、(1) 证：设 $f(x)=\ln(1+x)$，$\forall x>0$, 由 Lagrange 中值定理，可知 $\exists\xi\in(0,x)$

使得 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x=\frac{1}{1+\xi}x$.

由 $0<\xi<x$ 可知 $\frac{x}{1+\xi}\in(\frac{x}{1+x},x)$，所以 $\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$.

(2) 由 (1) 知 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$，所以数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

又 $x_1>0$，故 $x_{n+1}=\ln(1+x_n)>0$，因此极限存在，设为 A，则有 $A=\ln(1+A)$，

此方程有唯一解 $A=0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n\ln(1+x_n)}{x_n-\ln(1+x_n)}$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{x-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{1-\frac{1}{1+x}}=2$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}}=2$.