

一、填充题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 函数 $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$ 的定义域为_____.

2. 设 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, ($x \neq 0, a^2 \neq b^2$), 则 $f(x)$ 的表达式为_____.

3. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}} - 1$ 是关于 x 的_____阶无穷小 (填写阶数).

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x =$ _____.

5. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小, 则常数 $a =$ _____.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \frac{\sin bx}{x} + 1, & x < 0 \end{cases}$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

7. 设 a 为非零常数, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x =$ _____.

8. 已知 $x_n = \sqrt{3 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{3}}}$ (n 重根号), 且极限存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.

二、选择题 (每小题 3 分, 共 24 分)

1. 设 $f(x) = \frac{\sin(x+1)}{1+x^2}$, $-\infty < x < +\infty$, 则此函数是 ()

- (A) 有界函数 (B) 奇函数 (C) 偶函数 (D) 周期函数

2. 下列结论中正确的是 ()

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ($a \neq 0$)

(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 必不存在

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ 必不存在

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 不存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n)$ 必不存在

3. 下列数列中, 发散的是 ()

- (A) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\}$ (B) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}$ (C) $\left\{\frac{2^n-1}{3^n}\right\}$ (D) $\{n(-1)^n\}$

4. 数列的有界性是数列收敛的 ()

- (A) 充分条件 (B) 必要条件 (C) 充要条件 (D) 既非充分又非必要条件

5. 下列函数在指定的变化过程中, 属于无穷小量的是 ()

- (A) $e^{\frac{1}{x}}$, $x \rightarrow \infty$ (B) $\frac{1}{x^2+2x}$, $x \rightarrow \infty$

- (C) $\ln(1+x)$, $x \rightarrow 1$ (D) e^x , $x \rightarrow +\infty$

6. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 与 \sqrt{x} 等价的无穷小量是 ()

- (A) $1-e^{\sqrt{x}}$ (B) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ (C) $1-\cos\sqrt{x}$ (D) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

7. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $\frac{x^2-1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ()

- (A) 等于 2 (B) 等于 0 (C) 不存在但不为无穷大 (D) 无穷大

8. 设 $x_n \leq z_n \leq y_n$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ ()

- (A) 不一定存在 (B) 存在但不一定等于 0
(C) 存在且等于 0 (D) 一定不存在

三、证明题（每小题 6 分，共 12 分）

1. 用函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}+1} = 0$.

2. 用函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x} = \sqrt{5}$.

四、计算下列极限（每小题 6 分，共 24 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x - \sin x}{x \ln(1+x)}.$$

姓名	学号	班级	姓名	学号	班级	姓名	学号

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n+\sqrt{1}} + \frac{1}{2n+\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{2n+\sqrt{n}} \right):$$

五、(本题满分 8 分) 设 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{1 - x} = 5$, 求常数 a 和 b .

六、(本题满分 8 分) 已知 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, $n \in \mathbb{N}^+$. 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收

敛, 并求其极限值.