一、填空题

1．函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $p_0(1,1)$ 处的最大方向导数为【 $\sqrt{2}$ 】.

2．使函数 $z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 取极大值的点的坐标为【 $(-3,2)$ 】.

3．$\int_0^2 dx\int_x^2 e^{-y^2}dy=$【 $\frac{1}{2}(1-e^{-4})$ 】.

4．设 Σ 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$ 【 $2\pi a^4$ 】.

5．若 $\vec{A}=3x^2y\vec{i}+e^yz\vec{j}+2x^3z\vec{k}$，则 $\operatorname{div}\vec{A}\big|_{(1,0,2)}=$【 4 】.

6．已知闭曲线 C 的方程为 $|x|+|y|=2$，则 $\oint\limits_C(|x|+|y|)ds=$ 【 $16\sqrt{2}$ 】.

7．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n5^n}$ 的收敛域为【 $[-5,5)$ 】.

二、 选择题

1．已知 $f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)=xy$，则 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=$ （ B ）

(A) $-\frac{1}{x^2y^2}$， (B) $-\frac{x+y}{x^2y^2}$， (C) $\frac{x-y}{x^2y^2}$， (D) $\frac{y-x}{x^2y^2}$.

2．设区域 D 是圆环域 $a^2\le x^2+y^2\le b^2$，则 $\iint\limits_D(x^2+y^2)d\sigma=$（ D ）

(A) $\frac{\pi}{2}b^4$ (B) $\frac{2\pi}{3}b^3$ (C) $\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)$ (D) $\frac{\pi}{2}(b^4-a^4)$

3．已知 $(x+ay)dx+(x+y)dy$ 为某函数的全微分，则 $a=$（ C ）

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2

4．设 L 为圆周 $x^2+y^2=2$ 的逆时针方向，则 $\oint\limits_L\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=$（ A ）

(A) 2π (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) 0

5．下列级数收敛的是（ D ）

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$　　(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

6. 函数 $f(x)=\frac{1}{1+2x}$ 在点 $x=0$ 处的幂级数展开式为（　C　）

(A) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$，$|x|<2$　　(B) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{n+1}x^n$，$|x|<\frac{1}{2}$

(C) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^n$，$|x|<\frac{1}{2}$　　(D) $\sum_{n=0}^{\infty}2^{n+1}x^n$，$|x|<2$

7. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 收敛，则此级数在 $x=2$ 处（　B　）

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 收敛性不能确定

三、求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)$ 的和.

解： 根据等比级数的结论,知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1/2}{1-1/2}=1.$

又 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+----+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}$,

所以 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$,　则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$,

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{3}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=4.$

四、判别下列级数的敛散性.

1. 判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$ 的敛散性.

解： $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}\frac{n\cdot 3^n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1$,

由比值法知，原级数收敛.

2. 判别$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(1+n)}$的敛散性,若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

解： 令$a_n=\frac{1}{\ln(1+n)}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(1+n)}=0$， 且$a_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{\ln(n+2)}=a_{n+1}$，

即$\left\{\frac{1}{\ln(1+n)}\right\}$单调递减，由莱布尼兹定理，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}$收敛.

又$n>\ln(n+1)$，所以$a_n=\frac{1}{\ln(1+n)}>\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，由比较法可知：

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$发散，从而原级数条件收敛.

五、求球面$x^2+y^2+z^2=14$在点$(1,2,3)$处的切平面及法线方程.

解： $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$， 则$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)$，

$\vec{n}\big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)\,||\,(1,2,3)$，则点$(1,2,3)$处的切平面为$x+2y+3z-14=0$，

法线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}$.

六、求上半球面$x^2+y^2+z^2=4a^2$含在柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$内部的那部分面积.

解： 设Σ：$z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$，在xOy面上的投影为D：$x^2+y^2\le 2ax$，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy.$$

由D：$x^2+y^2\le 2ax$，且D关于y轴对称，故

$$S=\iint_{\Sigma}dS=\iint_{D}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\frac{2a}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\rho d\rho$$

$$=4a\int_0^{\frac{\pi}{2}}2a(1-\sin\theta)d\theta=4a^2(\pi-2).$$

七、已知起点$O(0,0)$及终点$A(1,1)$，且曲线积分

$$I=\int_{OA}\left(ax\cos y-y^2\sin x\right)dx+\left(by\cos x-x^2\sin y\right)dy$$

与路径无关，试确定常数a,b，并求I .

解：令 $P=ax\cos y-y^2\sin x,\ Q=by\cos x-x^2\sin y$，

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-ax\sin y-2y\sin x$， $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=-by\sin x-2x\sin y$，

由题意 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，解得 $a=b=2$.

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=\int_0^1P\left(x,0\right)dx+\int_0^1Q\left(1,y\right)dy$$

$$=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(2y\cos1-\sin y)dy=2\cos1 .$$

【或 $I=\int_{(0,0)}^{(1,1)}Pdx+Qdy=\int_0^1Q\left(0,y\right)dy+\int_0^1P\left(x,1\right)dx$

$=\int_0^1 2ydy+\int_0^1\left(2x\cos1-\sin x\right)dx=2\cos1$.】

八、设Σ为上半球面$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的下侧，求曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3+az^2\right)dydz+\left(y^3+ax^2\right)dzdx+\left(z^3+ay^2\right)dxdy .$$

解：记$\Sigma_1:z=0$，取上侧，Ω是Σ,Σ_1所围成的空间区域，则

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}=-\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=-3\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$$

$$=-3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2dr=-\frac{6}{5}\pi a^5 .$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a a\rho^2\sin^2\theta\cdot\rho d\rho=\dfrac{\pi a^5}{4}$，

【或 $\iint\limits_{\Sigma_1}=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}ay^2dxdy=\dfrac{a}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}(x^2+y^2)dxdy=\dfrac{a}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a\rho^3d\rho=\dfrac{\pi a^5}{4}$ 】

故原式$=-\dfrac{6}{5}\pi a^5-\dfrac{1}{4}\pi a^5=-\dfrac{29}{20}\pi a^5$.

~~九、~~求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$的收敛半径、收敛域及和函数.

解法一： 由$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\frac{n!}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$，

故收敛半径$R=+\infty$，收敛域为$(+\infty,-\infty)$.

令$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!}x^n$，则$s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$. 令$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}$，则

$\int_0^x g(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=xe^x$，所以$g(x)=(xe^x)'=(x+1)e^x$，

故$S(x)=x(x+1)e^x$， $x\in(+\infty,-\infty)$.

解法二： $s(x)=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n-1)!}x^{n-1}=x\left[x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}x^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right]$

$=x^2e^x+xe^x=x(x+1)e^x$， $x\in(+\infty,-\infty)$.