高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第一节 多元函数的基本概念

1 平面点集与n维空间

2 多元函数的概念

3 多元函数的极限

4 多元函数的连续性

5 内容小结

多元函数的基本概念

- 理解多元函数的概念
- 掌握多元函数极限的概念
- 掌握多元函数连续的概念
- 掌握有界闭区域上连续函数的性质

教学目标

重难点

重点：多元函数的概念

- 二重极限的计算
- 连续的性质

难点：二重极限的计算

- 二重极限不存在判定方法
- 二元函数连续性的概念

一、平面点集与n维空间

1、平面点集：

平面上引入了一个直角坐标系后，

平面的点P $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 二元实数组(x, y)

二元有序实数组(x, y)全体

$$R^2 = R \times R = \{(x, y) | x, y \in R\}$$

就表示**坐标平面**.

(1) 平面点集:

坐标面上具有某种性质的点的集合，称为**平面点集**，

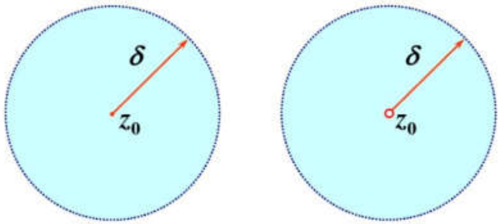
记作 $$\boxed{E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{具有性质}P\}}$$

例如 平面上以原点为中心、r为半径的圆内所有点的集合可以表示为

$$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2<r^2\}$$

(2) 邻域:

设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xoy 平面上一点, δ 是一正数,



点 P_0 的 δ 邻域:

与 $P_0(x_0, y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x, y)$ 的全体, 记作 $U(P_0, \delta)$

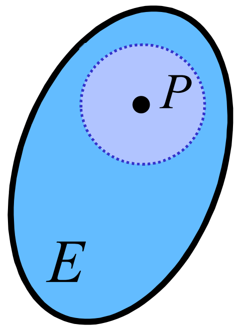
即 $U(P_0,\delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\} = \left\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$

点 P_0 的去心 δ 邻域:

记作 $\mathring{U}(P_0,\delta) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\} = \left\{(x, y) \mid 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\right\}.$

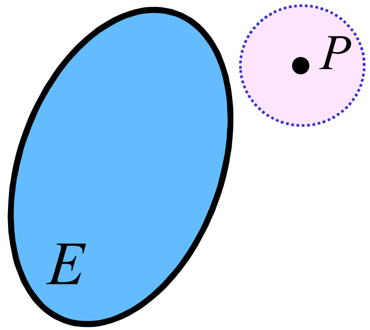
(3) 区域

设 E 是平面上一个点集, P 是平面上一个点.



内点： 若存在点 P 的某一邻域 $U(P) \subset E$,

则称 P 为 E 的**内点**. E 的内点**属于** E .



外点： 若存在点 P 的某一邻域 $U(P)$,

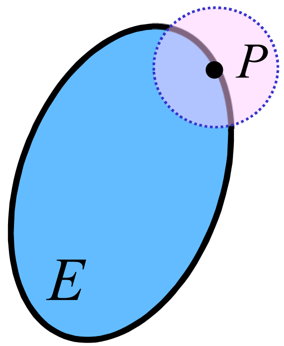
使 $U(P) \cap E = \varnothing$, 则称 P 为 E 的**外点**.

E 的外点必**不属于** E .

边界点： 若 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，

也有不属于 E 的点, 称 P 为 E 的**边界点**.

E 的边界点全体称为 E 的**边界**, 记为 ∂E .

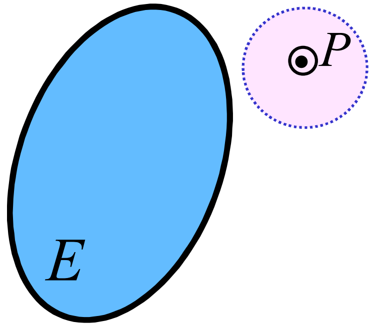


- 边界点 P 可以属于 E, 也可以不属于 E.

聚点： 对 $\forall \delta > 0$，点 P 的去心邻域 $\overset{\circ}{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，称 P 为 E 的**聚点**.

孤立点： 若$\exists\delta>0$，使得$\overset{\circ}{U}(P,\delta)\cap E=\varnothing$，

则称P为E的**孤立点**.



注： (1) 内点一定是聚点；

(2) 边界点可能是聚点；

(3) 点集E的聚点可以属于E，也可以不属于E.

开集： 若点集E的点都是内点，则称E为**开集**.

例如 $E_1=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 即为开集.

连通集：若对开集 D 内任何两点都可用折线连接，且折线上点都属于D，则称**开集**D为**连通**的.

开区域：连通的开集称为**开区域**或**区域**.

闭区域：开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

有界(无界)点集:

对于点集 E, 如果存在正数 K, 使一切点 $P \in E$ 与某一定点 A 间的距离 $|AP|$ 不超过 K，即

$$|AP| \le K，对一切\ P \in E\ 成立,$$

则称 E 为**有界点集**，否则称为**无界点集**.

2、n维空间

n维空间： n为取定的一个自然数，称n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的全体为**n维空间**，而每个n元数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为n维空间的一个**点**或一个**n维向量**，**数**x_i称为该点的第i个**坐标**或第i个**分量**.

注： (1) n维空间的记号为R^n；

(2) R^n中零元$\vec{0}$ 称为R^n的**坐标原点**或**n维零向量**.

注：(3) 在 R^n 中可定义**线性运算**(和、差、数乘).

(4) R^n 中两点 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\vec{y}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$**距离**定义:

$$\rho(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}.$$

特殊地，$\rho(\vec{x},\vec{0})=|\vec{x}|=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+\cdots+x_n^{\ 2}}$.

(5) 设 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$ ，若 $|\vec{x}-\vec{a}|\to 0$

则称变元 $\vec{x}$ 在 R^n 中趋于 $\vec{a}$，记作 $\vec{x}\to\vec{a}$.

(6) n 维空间中邻域：$U(P_0,\delta)=\{P\,\big|\,|PP_0|<\delta,P\in R^n\}$.

二、多元函数概念

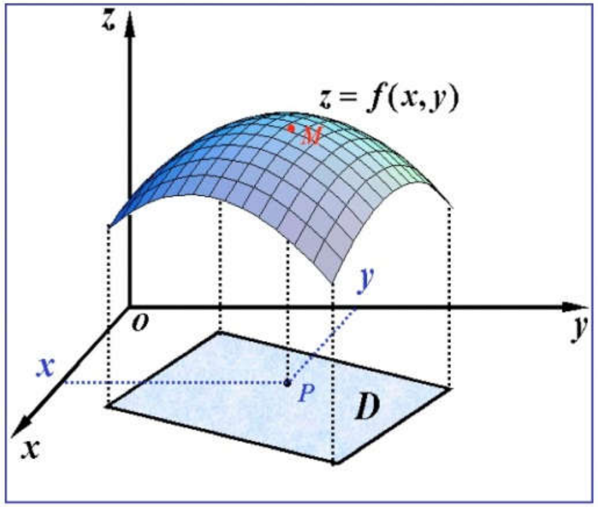
定义1： 设 D 是 R^2 的一个非空子集，称**映射** $f:D\to R$ 为定义在 D 上的**二元函数**，通常**记为** $z=f(x,y),(x,y)\in D$（或记为 $z=f(P),P\in D$）.

点集 D --**定义域**，x,y--**自变量**，z --**因变量**，函数值 $f(x,y)$的集合--**值域**，记作 $f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$.

注： 类似可定义***n*****元函数**，$n\geq 2$ 时统称为**多元函数**.

二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形

设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $P(x,y)\in D$，对应有函数值 $z=f(x,y)$，这样就确定空间一点 $M(x,y,z)$，当 x 取遍 D 上一切点时，得一个空间点集

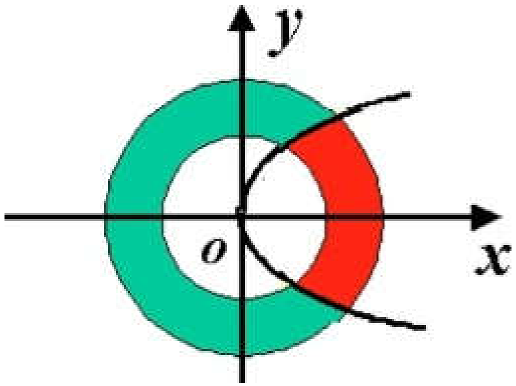


$$\boxed{\{(x,y,z) \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}}$$

—称为二元函数的图形，通常为一张曲面

例1　求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解　函数 $f(x,y)$ 的定义域为 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$,



即 $\begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$,

所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4, x>y^2\}$.

三、多元函数的极限

定义2： 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是其**聚点**，如果对 $\forall\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，对满足不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的点 $P(x,y)$，都有

$$\boxed{|f(x,y)-A|<\varepsilon}$$

则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的**极限**，记作

$$\boxed{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A, \text{ 或 } \lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A(\rho=|PP_0|).}$$

- 定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的；
- 二元函数的极限也叫二重极限.

二元函数的极限形式可以推广到n元函数的极限：

定义3： 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D, P_0是其聚点，若对$\forall \varepsilon > 0$，总存在$\delta > 0$，使得对于适合$0 < |PP_0| < \delta$的点$P \in D$，都有$|f(P) - A| < \varepsilon$，则称A为函数$f(P)$当$P \to P_0$时的**极限**，记为

$$\boxed{\lim_{P \to P_0} f(P) = A}$$

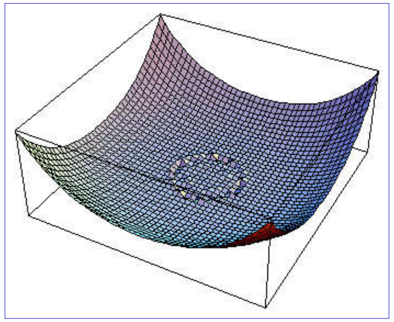
例2 利用极限的定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0,(x^2+y^2\neq 0).$

证明 对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leq x^2+y^2$，

所以取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，有

$$\left|\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0,(x^2+y^2\neq 0).$



二重极限定义中 $P \to P_0$ 的方式是**任意**的，所以有

极限不存在的判定方法

若能找到**不同的方式**，让点 $P(x, y)$ 趋于 $P(x_0, y_0)$ 时，**函数极限不同或有的极限不存在**，则可以判定函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在.

例3 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

解 当(x,y)沿$y=kx$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

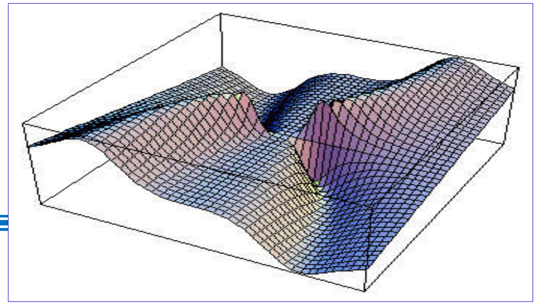
其极限值随 k 不同而变化，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在.

例4 证明 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$ 不存在.

证明 当 (x, y) 沿 $y = kx^3$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx^3}} \frac{x^3 \cdot kx^3}{x^6 + k^2 x^6} = \frac{k}{1 + k^2}$$

右端的极限值会随着k的变化而不同，因此重极限不存在



例5 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2}$.

解 将原式化为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$, $\left|\dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \le \dfrac{1}{2}|x| \to 0$, $(x\to 0)$

由有界函数与无穷小的乘积是无穷小, 得 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2 y)}{x^2+y^2} = 0.$

- 多元函数极限运算,有与一元函数类似的运算法则.

例6 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$；　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 (1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=\lim\limits_{xy\to 0}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim\limits_{y\to 2}y=1\cdot 2=2$

(2) 因为 $0\le\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\le\dfrac{x+y}{2xy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)$,

又 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)=0$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}=0.$

例6 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(xy)}{x}$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to +\infty}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$； (3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解 (3) $\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{x}{x+y}}$

$$=e^{\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\frac{x}{x+y}}=e^{\lim\limits_{\substack{x\to +\infty\\ y\to a}}\frac{1}{1+\frac{y}{x}}}=e.$$

四、多元函数的连续性

1、连续性

定义4： 设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为点集 D，

$P_0(x_0,y_0)$ 是其聚点且 $P_0\in D$，如果

$$\boxed{\lim_{P\to P_0} f(P)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)=f(P_0)}$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处**连续**.

若 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上**连续**.

间断点： 若函数 $f(x,y)$ 在 P_0 不连续，称 P_0 是函数的**间断点**.

- 孤立点是函数 $z=f(x,y)$ 的不连续点.
- 沿 D 内某些曲线，函数 $f(x,y)$ 没有定义，则这些曲线上的点是函数的间断点.

例如 $z=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，

该圆周上各点均是其间断点.

例7 讨论$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0)\end{cases}$在$(0,0)$处的连续性.

解法一 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\cdot x+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}\cdot y\right)$

由于$\left|\dfrac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq 1$ 有界，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x=0,$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}=0,$ 同理 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^3}{x^2+y^2}=0$ ，

因此$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0).$ 所以$f(x,y)$在$(0,0)$处连续.

例7 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的连续性.

解法二 取 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$,

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)|<2\rho,$$

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0}\rho=0$,

由夹逼准则可得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$,

即函数在 $(0,0)$ 处连续.

2、有界闭区域上多元连续函数的性质：

性质1、最大值和最小值定理：

在有界闭区域 D 上的多元连续函数, 必定在 D 上有界, 且能取得最大值和最小值. 即在 D 上至少存在点 P_1, P_2, 使得 $\forall P \in D$, 有 $f(P_2) \le f(P) \le f(P_1)$.

性质2、介值定理：

在有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

3、多元初等函数

定义5： 由多元多项式及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合所构成的可用一个式子表示的多元函数叫**多元初等函数**.

- 一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时, 如果 $f(P)$ 是初等函数, 且 P_0 是 $f(P)$ 定义域的内点, 则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续, 即 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$

例8 求 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{2-\sqrt{xy+4}}$.

解 (1) 由连续性得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{2-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2-0}{0+1}=2.$

(2) 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy(2+\sqrt{xy+4})}{4-xy-4}$

$$=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}-(2+\sqrt{xy+4})=-(2+2)=-4.$$

五、内容小结

- 多元函数的定义
- 多元函数极限的概念（注意趋近方式的任意性）
- 多元函数连续的概念；闭区域上连续函数的性质

思考题

若点(x,y)沿着无数多条平面曲线趋向于点(x_0,y_0)时，

函数$f(x,y)$ 都趋向于A, 能否断定$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$？

解 不能　　如 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{\left(x^2+y^4\right)^2}$ $(x,y)\to(0,0)$

选取 $y=kx$, 则 $f(x,kx)=\dfrac{x^3\cdot k^2x^2}{\left(x^2+k^4x^4\right)^2}\to 0\ (x\to 0)$,

如取 $x=y^2$, 则 $f(x,y)=\dfrac{y^6y^2}{\left(y^4+y^4\right)^2}\to\dfrac{1}{4}$.

黎明前的天是最黑暗的，

不过千万别闭眼，

因为不敢直视黑暗的人，

也看不到明天的

第一缕光明。