任课教师________ 学号________ 线 姓名________ 订 班级________ 装 专业________ 学院________

南京信息工程大学 试卷

2019－2020 学年 第一学期 线性代数 课程期末试卷（ A 卷）

本试卷共 3 页；考试时间 120 分钟；出卷时间 2019 年 12 月

请将所有答案（含填空、选择）写到《试卷答题册》上相应位置！

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 计算 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=$____________.

(2) 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，则其伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为____________.

(3) 已知三维向量空间 R^3 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{\beta}=(2,0,0)^{\mathrm{T}}$ 在此基下的坐标是____________.

(4) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的一个特征值为 3，则 $y=$____________.

(5) 已知二次型 $f\left(x_1,x_2\right)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，则该二次型的正惯性指数为__________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 已知三阶行列式 D 的第 3 列元素分别为 $a_{13}=1,a_{23}=3,a_{33}=-2$，其对应的余子式分别为 $M_{13}=3,M_{23}=-2,M_{33}=1$，则 $D=$（ ）.

(A) 5； (B) -5； (C) 7； (D) -7.

(2) 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下列向量组中线性无关的是（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2$； (B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$； (D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶可逆矩阵，且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\boldsymbol{A}$, 则下面关于 $\boldsymbol{A}^{-1},\boldsymbol{B}^{-1}$ 的说法，正确的是(　　　　).

(A) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 3 行得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$；　　　　(B) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 2 列得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$；

(C) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 2 行得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$；　　　　(D) 交换 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的第 1, 3 列得到 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充要条件是(　　).

(A) $m=n$；

(B) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解；

(C) 向量组 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示；

(D) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关，而增广矩阵 $\left(\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{b}\right)$ 的列向量组线性相关.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称阶矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是实可逆矩阵，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}$，则(　　　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似；　　　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价；

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同；　　　　(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在答题册对应题号下面的空白处作答）

(1) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\-1&1-a&a&0\\0&-1&1-a&a\\0&0&-1&1-a\end{vmatrix}$.

(2) 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,0,1)$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，求 $\boldsymbol{A}^n$ (n 为正整数).

(3) 设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值分别为 $5,5,0$，且对应于特征值 0 的特征向量为 $\boldsymbol{p}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的特征向量.

四、(本题满分 10 分) 设 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

学院________ 专业________ 班级________ 姓名________ 学号________ 任课教师________

装 订 线

五、(本题满分 10 分) 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\1\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\0\\7\\a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\\0\end{pmatrix}$ 线性相关.

(1) 求 a 的值；

(2) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的极大线性无关组，并将其余向量用此极大无关组线性表示.

六、(本题满分 10 分) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$，若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，试求出 a 的值，并求非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

七、(本题满分 12 分) 已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=x_1{}^2-5x_2{}^2+x_3{}^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$，且向量 $(2,1,2)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征向量.

(1) 求 a,b 的值；

(2) 用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把二次型化成标准形，并写出相应的正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

八、(本题满分 10 分) 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，证明：矩阵 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}$ 可逆，并求 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^{-1}$.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^*$ 也是正定矩阵.