高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院
大学数学部 高等数学教学团队

第二节 向量及其线性运算

向量及其线性运算

- 理解向量的概念及其表示
- 掌握单位向量、向量的模、方向余弦
- 掌握向量的坐标分解式
- 掌握向量的线性运算
- 理解向量在轴上的投影

教学目标

重难点

重点：向量的概念

- 向量的坐标
- 向量的线性运算

难点：向量在轴上的投影

一、向量的基本概念

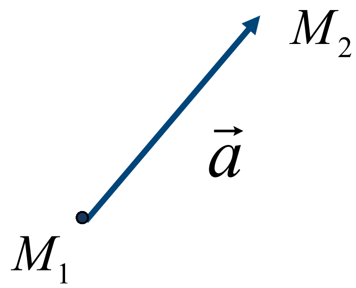
向量： 既有**大小**又有**方向**的量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 或 $\vec{a}$.

向量的模： 向量的大小，记作 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$ 或 $\left|\vec{a}\right|$.

单位向量： 模为1的向量.

零向量： 模为0的向量, 记为 $\vec{\mathbf{0}}$

自由向量： 与起点无关的向量.



向量及其线性运算

负向量：大小相等但方向相反的向量，记作 $-\vec{a}$.

相等向量：大小相等且方向相同的向量，记作 $\vec{a}=\vec{b}$.

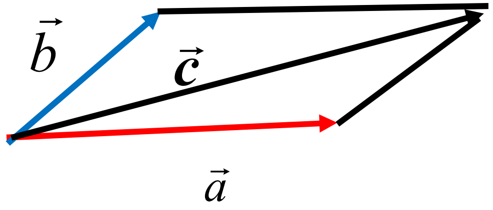
向量平行：方向相同或相反的非零向量，记作 $\vec{a}//\vec{b}$.

两向量共线：起点重合, 终点和公共起点在一条直线上.

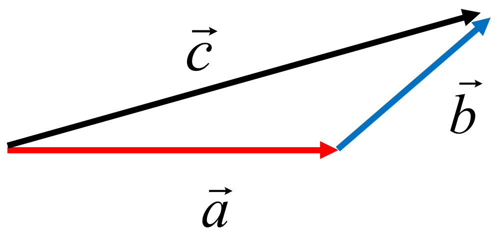
三向量共面：起点重合, 终点和公共起点在一个平面内.

二、向量的线性运算

1、向量的加法 $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



平行四边形法则

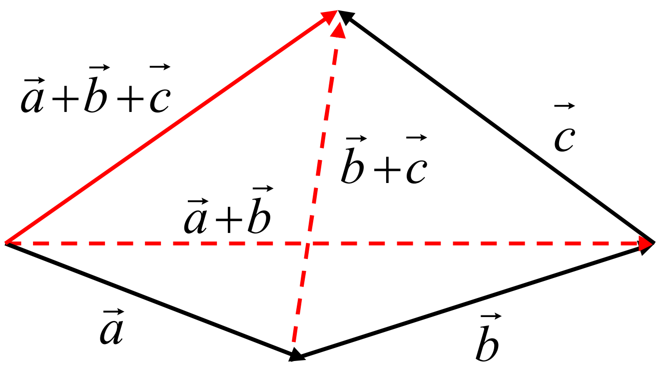


三角形法则

向量加法的运算规律

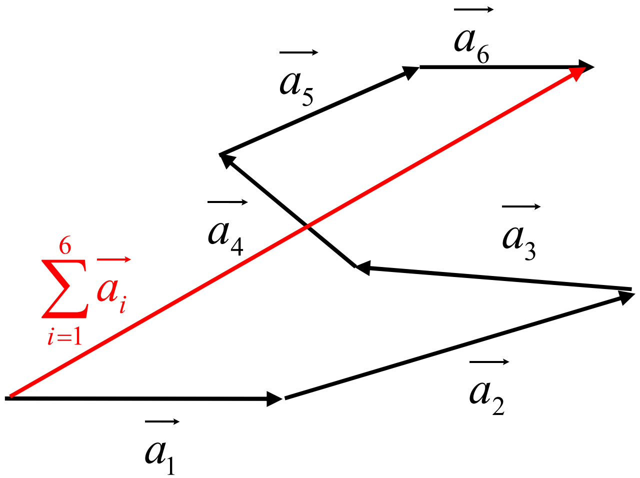
(1) 交换律： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) 结合律： $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$



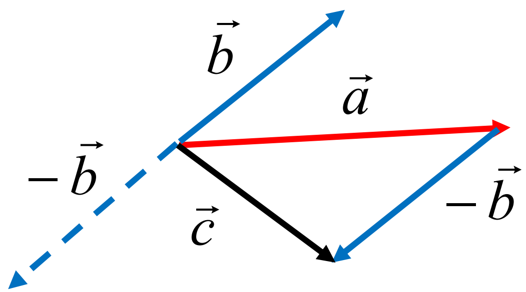
推广到多个向量相加的情形

依次把后一向量的**起点**放在前一向量的**终点**上，连接 $\vec{a}_1$ 的起点和 $\vec{a}_n$ 的终点，所得向量即为 $\vec{a}_1+\vec{a}_2+\cdots+\vec{a}_n$.

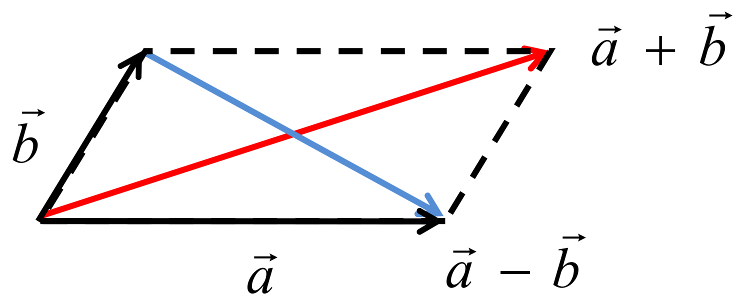


——首尾相连

2、向量的减法 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



三角形法则



平行四边形法则

向量及其线性运算

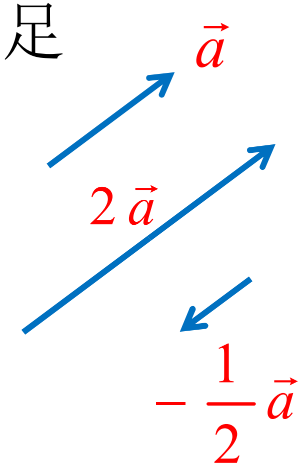
3、向量与数的乘法

定义： 向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的**乘积** $\lambda\vec{a}$ 为**向量**，且满足

（1）$\lambda>0$，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ **同向**，$|\lambda\vec{a}|=\lambda|\vec{a}|$；

（2）$\lambda<0$，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ **反向**，$|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$.

（3）$\lambda=0$，$\lambda\vec{a}=\vec{0}$；



注： 向量的加减法、**数乘运算**统称为**向量的线性运算**.

数与向量的的运算规律　　设 λ, μ 是实数

(1) **结合律**： $\lambda(\mu \vec{a}) = \mu(\lambda \vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$

(2) **分配律**： $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$， $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$.

选证： (1) 因为 $\lambda(\mu\vec{a})$ 、$(\lambda\mu)\vec{a}$ 、$\mu(\lambda\vec{a})$ 方向相同，

且 $|\lambda(\mu\vec{a})| = |(\lambda\mu)\vec{a}| = |\mu(\lambda\vec{a})|$ ，得证.

非零向量方向上的单位向量　　记作 $\vec{a}^{0}$

因为 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 的模 $\left|\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \dfrac{1}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = 1$，又 $\dfrac{1}{|\vec{a}|} > 0$，则有

$$\boxed{\vec{a}^{0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$ ——非零向量的单位化

三、两向量平行的条件

定理1 设向量 $\vec{a} \neq 0$，则向量 $\vec{b}$ 平行于 $\vec{a}$ 的充分必要条件是**存在唯一**的实数 λ，使 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

选证： 设 $\vec{b} // \vec{a}$，**取** $|\lambda| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 同向时，λ 取正；反向时取负；

则 $\vec{b}$ 与 $\lambda\vec{a}$ 同向，且 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}| = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}|\vec{a}| = |\vec{b}|$，从而 $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

设 $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \mu\vec{a}$，相减得 $(\lambda - \mu)\vec{a} = \vec{0}$. 由 $\vec{a} \neq 0$ 得 $\lambda = \mu$.

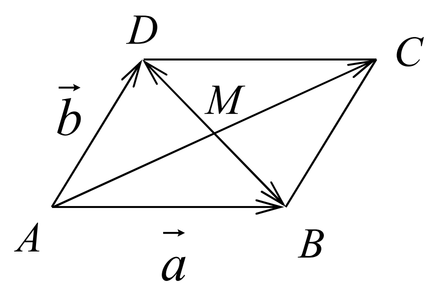
例1 平行四边形$ABCD$中，设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，试用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$，其中$M$是$ABCD$对角线的交点.

解 由于**对角线互相平分**，所以$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MA}$

于是$\boxed{\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$，$\boxed{\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})}$.

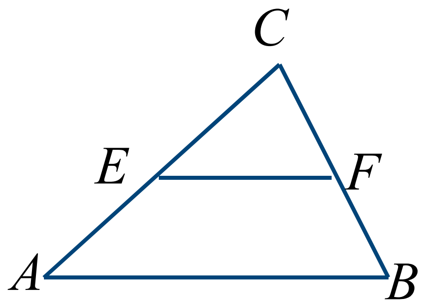
由$-\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MD}$，得$\boxed{\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})}$，

$\boxed{\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})}$.



例2 如图，E,F 分别为三角形 ABC 中两腰 AC,BC 的中点，用向量法证线段 EF 平行于AB，且等于其一半.

解 由图可知，$\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



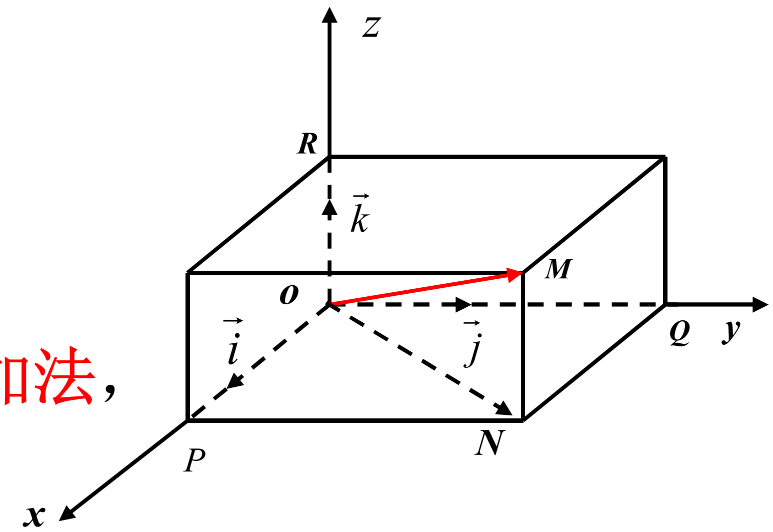
$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

由向量平行的条件得 $\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{AB}$，又 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|$，得证.

四、向量的坐标分解式

1、向量的坐标表示

1）向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标



设 $M=(x,y,z)$，由向量的加法，

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

$$\boxed{=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}\quad \text{——}\overrightarrow{OM}\text{的坐标分解式}$$

x,y,z称为向量的坐标，记 $\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$.

2）一般向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标

设点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，求 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表达式.

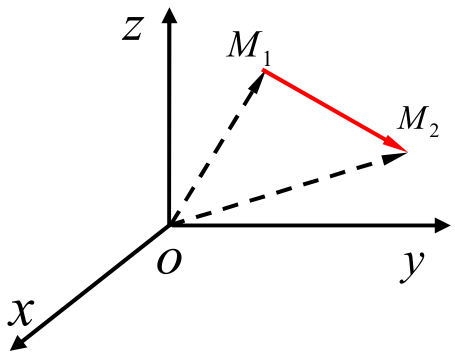
解

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$= (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})$$

$$= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



注： 一般向量的坐标等于它的终点坐标减去起点坐标.

2、向量的坐标用于线性运算

设 $\vec{a}=\left(a_x, a_y, a_z\right)$，$\vec{b}=\left(b_x, b_y, b_z\right)$， 则有

$$\vec{a}\pm\vec{b}=\left(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z\right)$$

$$=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k}$$

$$\lambda\vec{a}=\left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right)=(\lambda a_x)\vec{i}+(\lambda a_y)\vec{j}+(\lambda a_z)\vec{k}$$

即向量的线性运算等于向量坐标对应的线性运算.

3、向量平行的坐标表示

非零向量 $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$.

坐标式为 $(b_x,\ b_y, b_z) = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z) \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}}$

即平行向量的对应分量成比例.

注：当分母中有部分为0时，对应分子也为0.

如 $a_x = 0, a_y \neq 0, a_z \neq 0$ ，则 $b_x = 0,\ \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z}$.

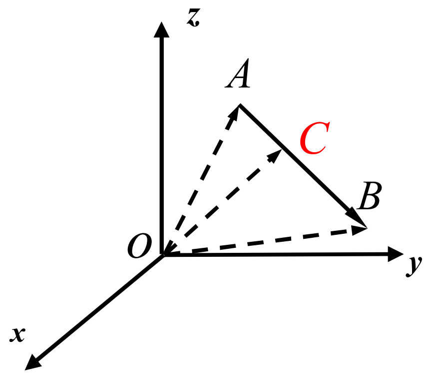
4、定比分点的坐标表示

给定两点$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$及实数$\lambda\neq-1$，若点C将AB分成两段AC和CB，使$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，则称点$C$为有向线段$\overrightarrow{AB}$的定比为$\lambda$的**定比分点**. 试求$C$点的坐标.

解 设C点的坐标为$C(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{AC}=\left(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1\right)$$

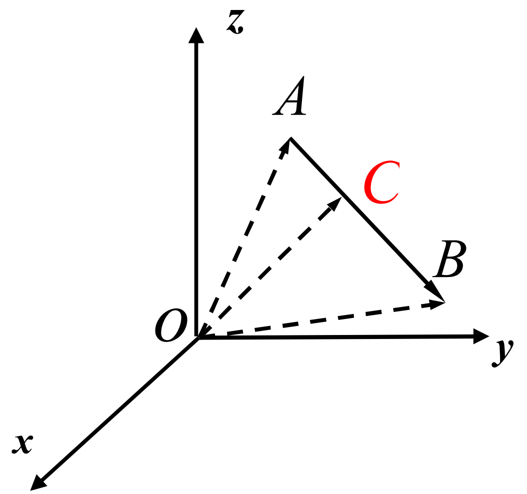
$$\overrightarrow{CB}=\left(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z\right)$$



由 $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{CB}$，即 $(x-x_1,\ y-y_1,\ z-z_1)=\lambda(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z)$

解得**定比分点** C 的坐标为：

$$\boxed{\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)}$$



特别，$\lambda=1$ 时，得 $\overline{AB}$ **中点**坐标：

$$\boxed{\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)}$$

五、向量的模和方向余弦

1、向量的模

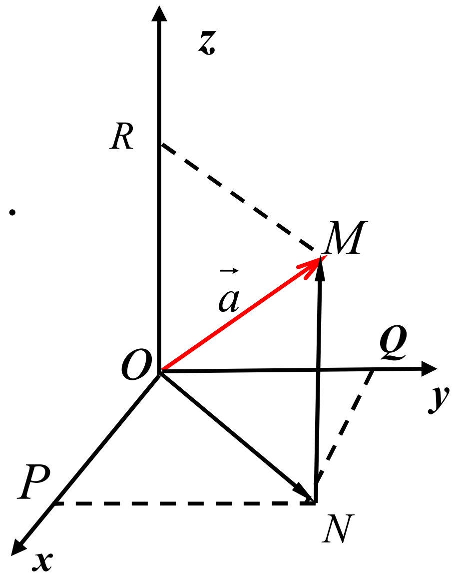
任给非零向量$\vec{a}=(x,y,z)$，作$\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.

则 $\vec{a}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.

$$\left|\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{OM}\right|=\sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2+|\overrightarrow{OR}|^2}$$

$$\boxed{=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

——向量模的坐标表示



一般，设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间任意两点，

则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$.

则向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模就是点 M_1、M_2 间的距离，即

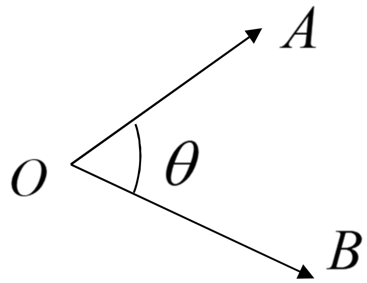
$$\boxed{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

2、向量的夹角

定义 设两非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，任取空间一点O，

作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，称 $\theta=\angle AOB$ $(0\le\theta\le\pi)$

为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记作$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.



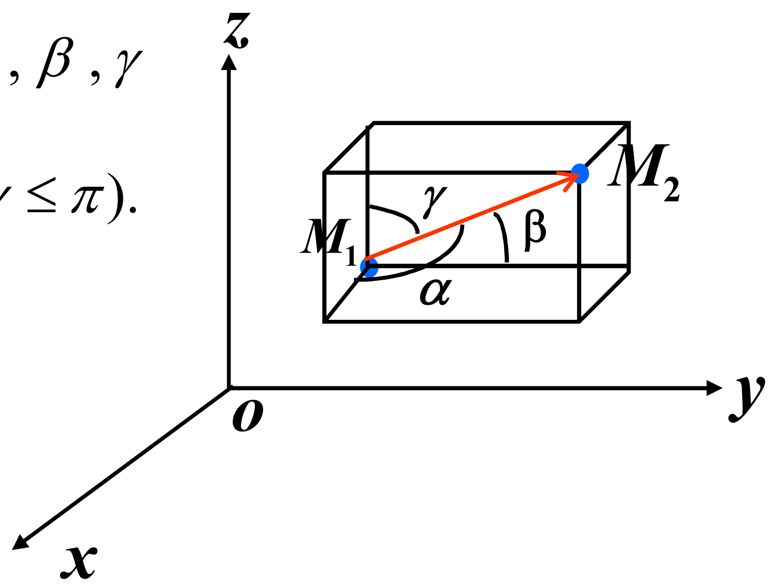
注： 若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$有一个是零向量，夹角可

取0与π之间的任意值.

3、非零向量 $\vec{a}$ 的方向角

向量与三**坐标轴正向**的夹角 $\alpha\,,\beta\,,\gamma$

称为向量 $\vec{a}$ 的**方向角** $(0\le\alpha,\beta,\gamma\le\pi)$.



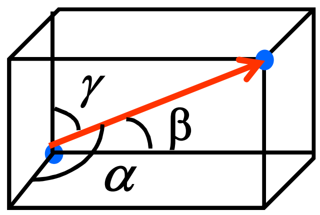
4、非零向量 $\vec{a}$ 的方向余弦

方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$

称为 $\vec{a}$ 的**方向余弦**.

5、向量方向余弦的坐标表示

设非零 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$， 则 $r=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\neq 0$，



$$\cos\alpha=\frac{a_x}{r},\qquad \cos\beta=\frac{a_y}{r},\qquad \cos\gamma=\frac{a_z}{r}.$$

注： ➢ 方向余弦满足 $\boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.}$

➢ 向量的单位化 $\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$

例3 已知两点$A(4,0,5)$, $B(7,1,3)$, 求向量的模、方向余弦及与$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量.

解 向量$\overrightarrow{AB}=(7,1,3)-(4,0,5)=(3,\ 1,-2)$.

向量的模 $\boxed{\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\ .}$

向量的方向余弦 $\boxed{\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{14}},\cos\gamma=\frac{-2}{\sqrt{14}}.}$

同方向的单位向量 $\boxed{\vec{e}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2)\ .}$

例4 设有向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1 的坐标为 $(1, 0, 3)$，求 P_2 的坐标.

解 设向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向角为 α，β，γ，则 $\alpha=\frac{\pi}{3}, \beta=\frac{\pi}{4}$,

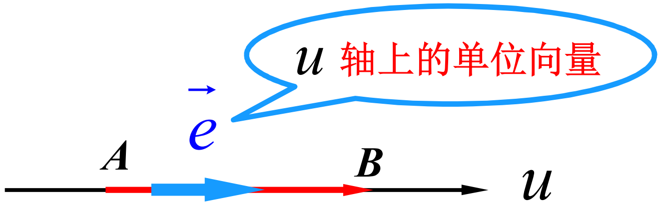
由 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，得 $\cos\gamma=\pm\frac{1}{2}$，$\gamma=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$.

设 P_2 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,y,z-3)$，又 $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=2$，

由**方向余弦**的计算公式，得 P_2 坐标为 $\boxed{(2,\sqrt{2},4)}$，$\boxed{(2,\sqrt{2},2)}$.

六、向量在轴上的投影

1、轴上有向线段的值



设有一轴 u，$\overrightarrow{AB}$ 是轴 u 上的有向线段. 若 λ 数满足:

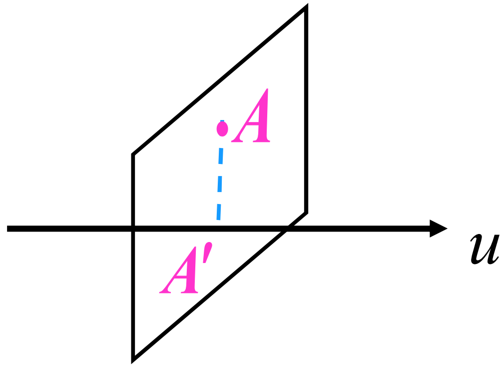
- $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$；
- 当 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴**同向**时，λ 取正；

  当 $\overrightarrow{AB}$ 与 u 轴**反向**时，λ 取负；

则称**数** λ 为 u **轴上有向线段** $\overrightarrow{AB}$ **的值**，则 $\boxed{\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{e}}$.

2、点在轴上的投影

过点 A 的垂直平面与 u 轴的交点 A'.



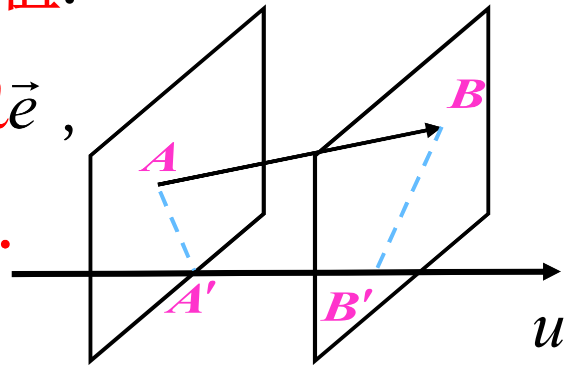
3、向量在轴上的投影

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的投影向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 在 u 轴上的值.

设 $\vec{e}$ 是 u 轴上的单位向量, 若 $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\vec{e}$,

则数 λ 即是向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影.

记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\lambda$ 或 $\left(\overrightarrow{AB}\right)_u=\lambda$.



4、向量在坐标轴上的分向量及投影

设向量 $\vec{a}$ 的坐标为 (a_x, a_y, a_z)，即

$$\boxed{\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}}$$

$a_x\vec{i}$, $a_y\vec{j}$, $a_z\vec{k}$ 称为向量在三个坐标轴上的**分向量,**

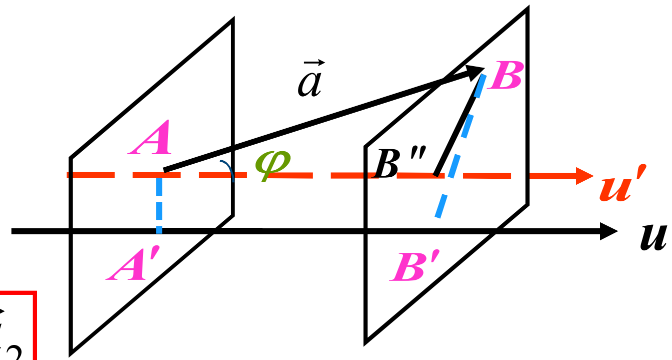
a_x, a_y, a_z 为向量在三个坐标轴上的**投影.**

5、向量在轴上的投影的性质

性质1 $\boxed{\mathrm{Prj}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi}$ ，φ 为向量 $\vec{a}$ 与投影轴 u 的夹角.

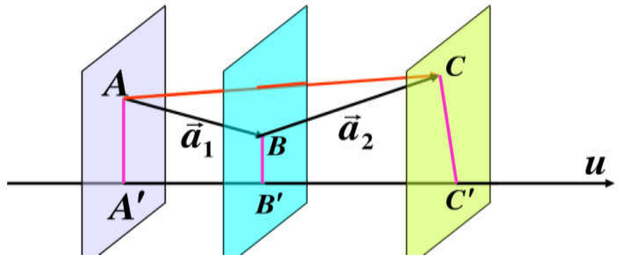
证明 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_{u'}\overrightarrow{AB}$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$$



性质2 $\boxed{\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2}$

性质3 $\boxed{\mathrm{Prj}_u(\lambda\vec{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\vec{a}}$



例5 设向量的起点为$A\ (-2,3,0)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影分别为 $4,-4,7$，求这个向量的终点 B 的坐标.

解 设终点 B 的坐标为 (x,y,z)，则 $\overrightarrow{AB}=\left(x+2,y-3,z\right)$.

$$\begin{cases} x+2=4 \\ y-3=-4 \\ z=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=7 \end{cases}$$

故向量终点 B 的坐标为 $\boxed{(2,-1,7)}$.

七、内容小结

- 向量的基本概念
- 向量的线性运算
- 向量坐标及其坐标表示下的线性运算
- 向量的模及方向角、方向余弦的坐标表示
- 向量在轴上的投影

时光不老，

连接着充满信息的未来，

收藏过去，

是为了明天

更好地出发。