高等数学衔接课程

南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

专题一　中学数学内容补充

（1）反函数与反三角函数

数学与统计学院公共数学教学部

一.函数与反函数

1. 函数的定义

设数集$D \subset \mathrm{R}$，如果对于任意的$x \in D$，y 按照某对应法则，总有唯一确定的值与之对应，则称y 是 x 的**函数**，并称x 是自变量，y 是因变量，

记作 $y = f(x), x \in D$. 其中数集 D 称为函数$f(x)$ 的定义域，记作D_f ，

即 $D_f = D$.

注：函数有一一对应和多对一两种情况。

2. 反函数的定义

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R，用 y 表示 x 得到 $x=\varphi(y)$，

如果对于 R 中的任意 y，通过 $x=\varphi(y)$, x 在 D 中都有唯一的值与之对应，

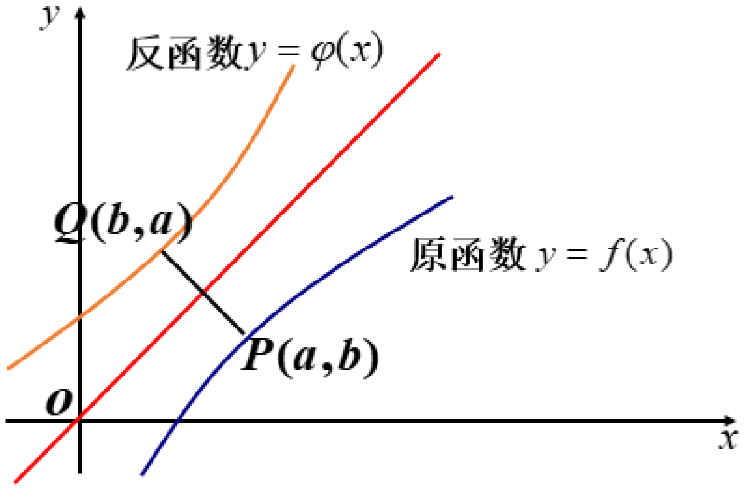
则 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**, 记为 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，一般用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以对调 $x=f^{-1}(y)$ 的字母

x, y, 把它改写成 $y=f^{-1}(x)$.

注：（1）只有一一对应的函数才有反函数.

（2）原函数与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.



例1. 求函数$y=\begin{cases} x^2-1, & 0\le x\le 1 \\ x^2, & -1\le x<0 \end{cases}$的反函数.

解： 函数$y=x^2-1\left(0\le x\le 1\right)$的值域为$\left[-1,0\right]$，解出$x=\pm\sqrt{y+1}$.

因为$x\ge 0$，所以函数$y=x^2-1$的反函数为$y=\sqrt{x+1}, x\in\left[-1,0\right]$.

例1. 求函数$y=\begin{cases} x^2-1, & 0\le x\le 1 \\ x^2, & -1\le x<0 \end{cases}$的反函数.

续解: 又函数$y=x^2\left(-1\le x<0\right)$的值域为$\left(0,1\right]$, 解出$x=\pm\sqrt{y}$.

因为$x<0$，所以函数$y=x^2$的反函数为$y=-\sqrt{x}, x\in\left(0,1\right]$.

故所求函数的反函数是$y=\begin{cases} \sqrt{x+1}, & -1\le x\le 0 \\ -\sqrt{x}, & 0<x\le 1 \end{cases}$.

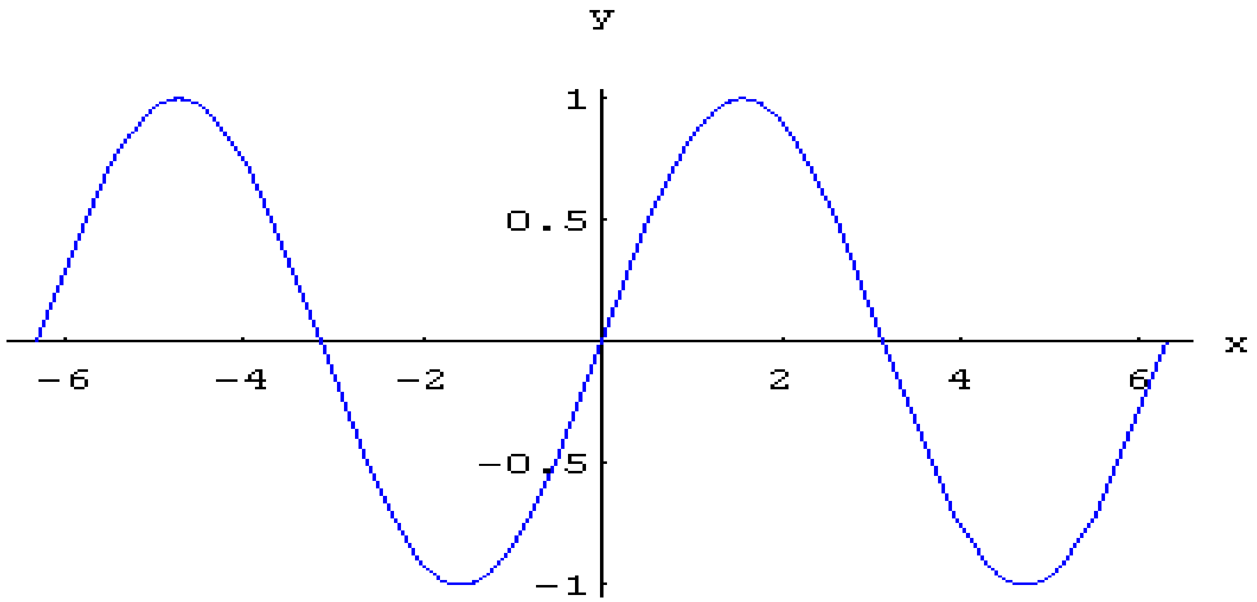
二. 三角函数与反三角函数

1. 三角函数

（1）正弦函数 $y = \sin x$

$$D = (-\infty, +\infty)$$

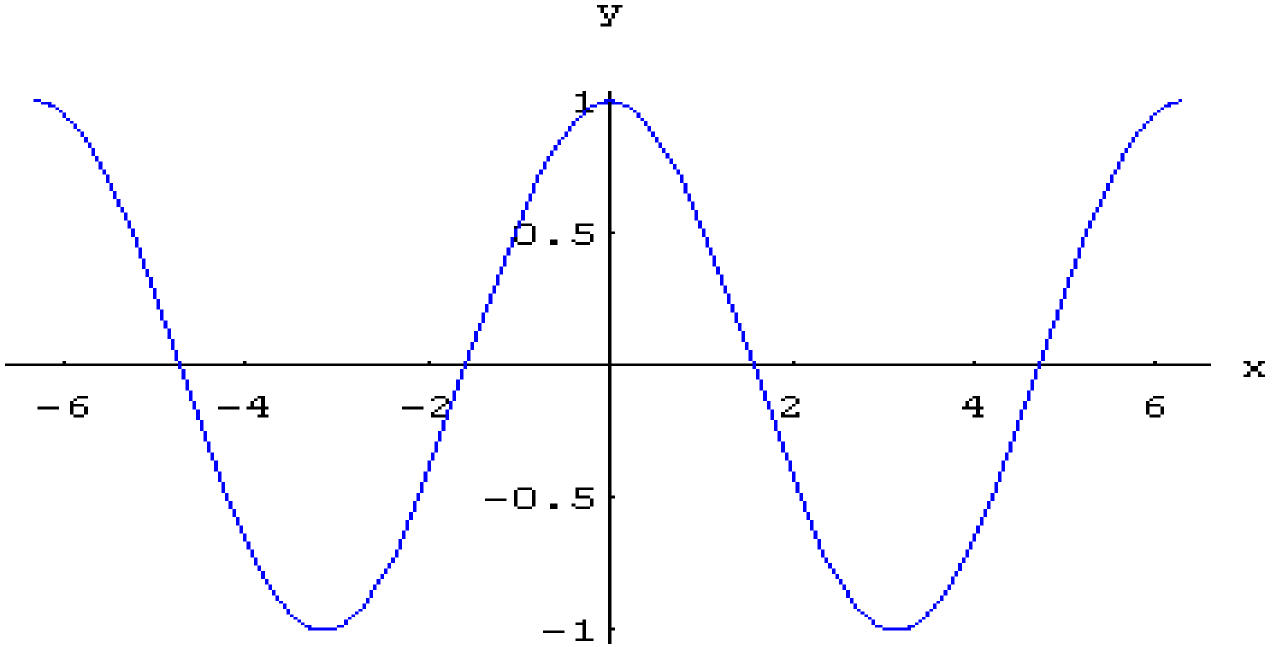
$$f(D) = [-1, 1]$$



（2）余弦函数 $y=\cos x$

$$D=(-\infty,+\infty)$$

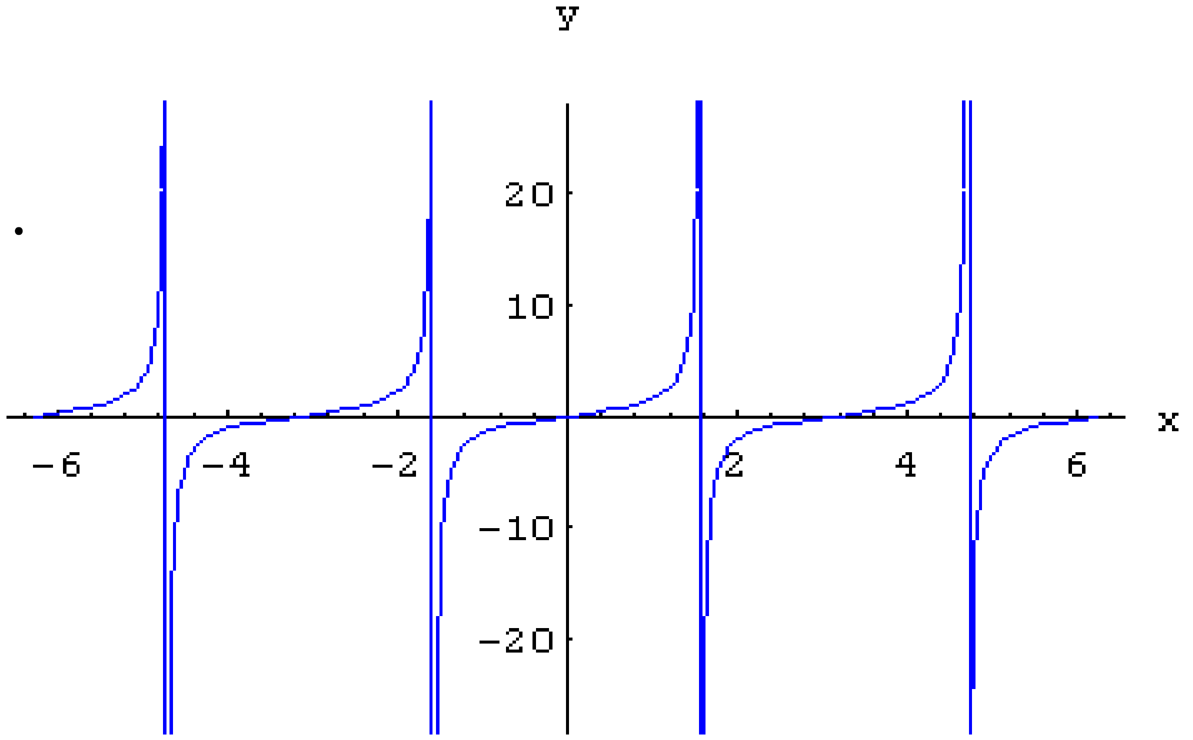
$$f(D)=[-1,1]$$



（3）正切函数 $y = \tan x$

$$D = \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

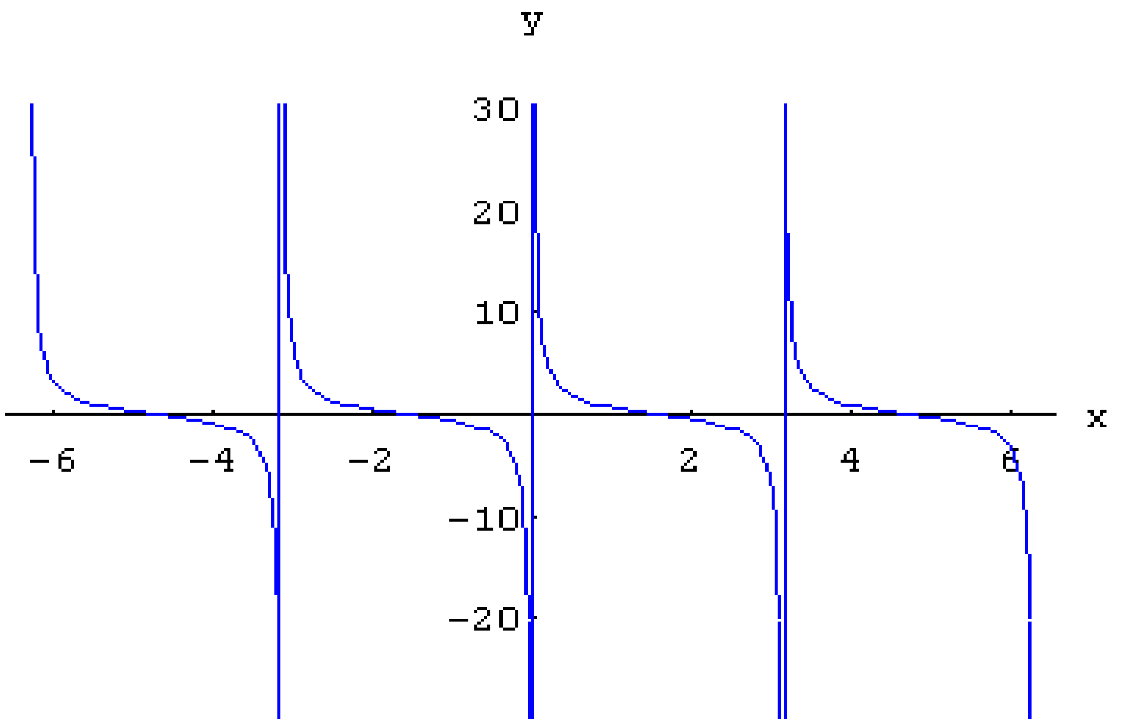
$$f(D) = (-\infty, +\infty)$$



（4）余切函数　$y = \cot x$

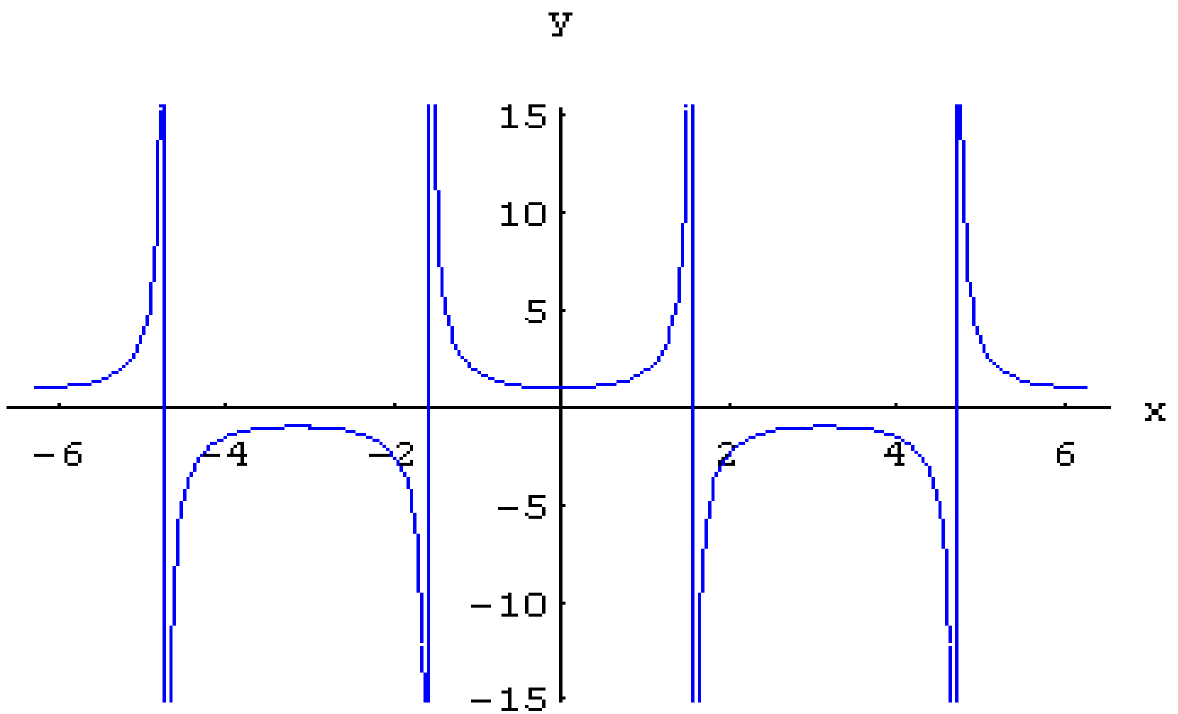
$$D = (k\pi, k\pi + \pi),\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$f(D) = (-\infty, +\infty)$$



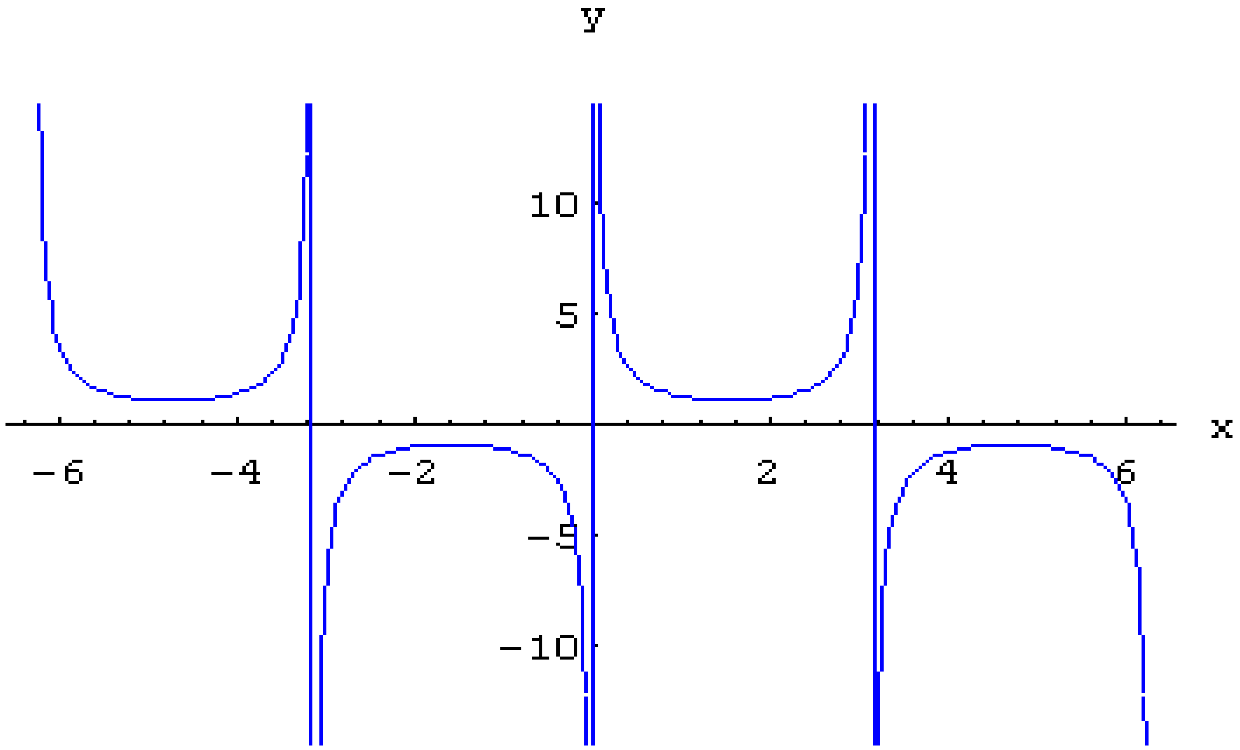
（5）正割函数

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$



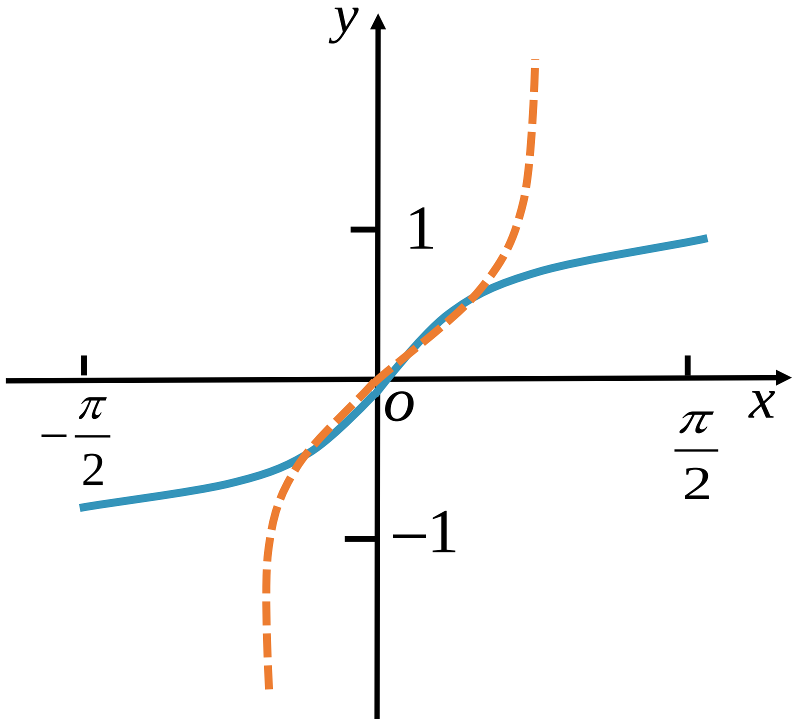
（6）余割函数

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

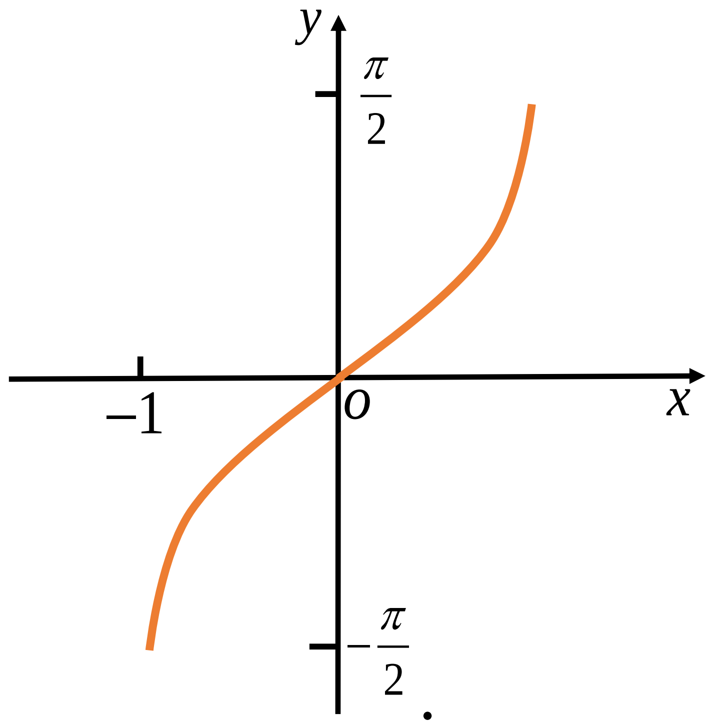


2、反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$ 定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$



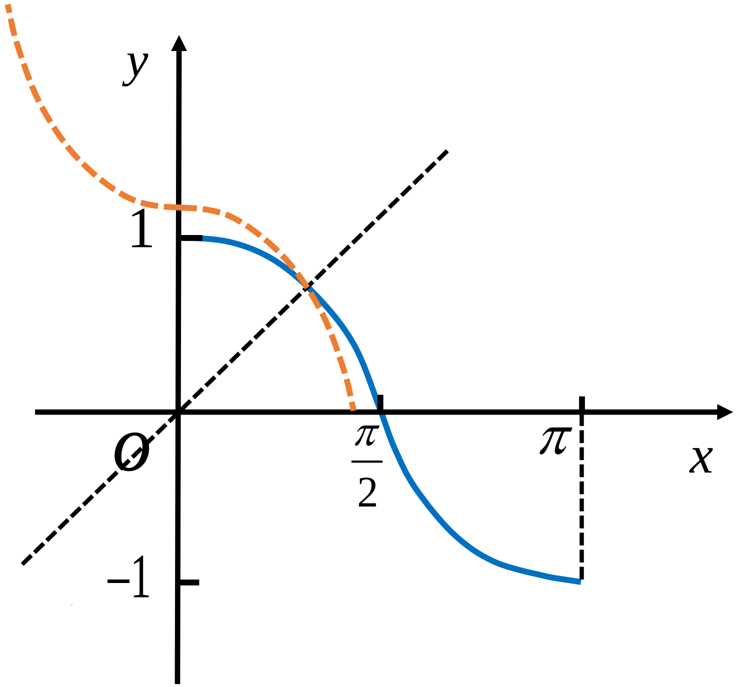
$y=\sin x$



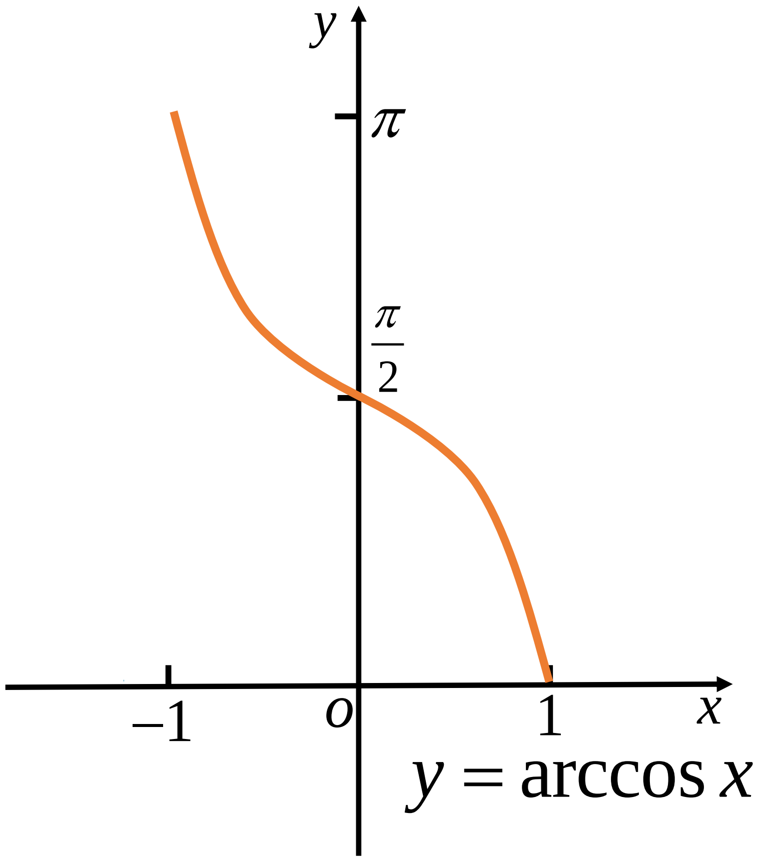
$y=\arcsin x$

（2）反余弦函数 $y = \arccos x$

定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$，图形如下图



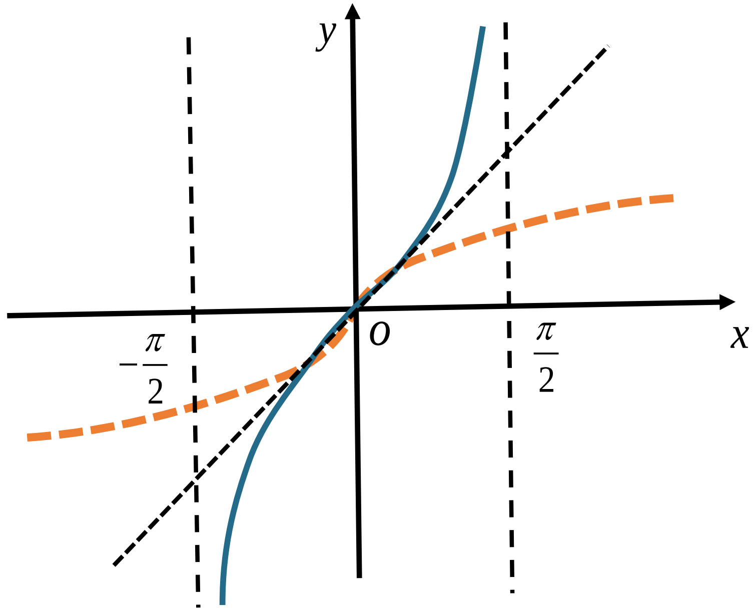
$y = \cos x$



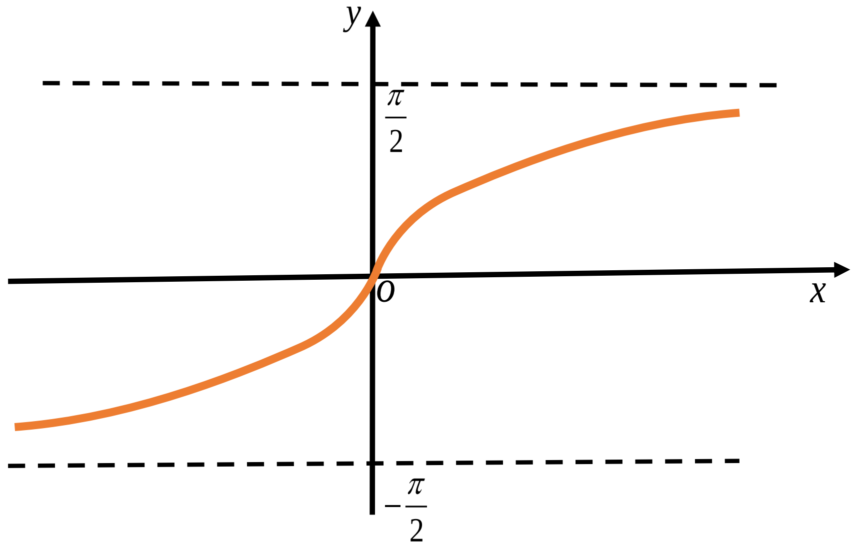
$y = \arccos x$

（3）反正切函数 $y=\arctan x$

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，图形如下图



$y=\tan x$

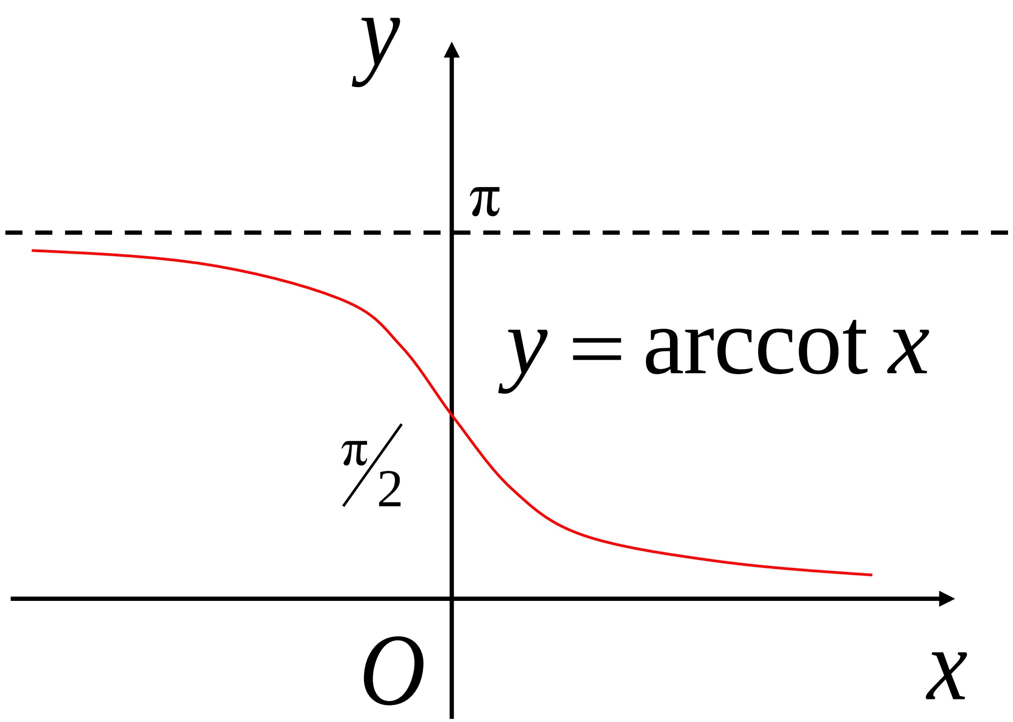


$y=\arctan x$

(4) 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

定义域为$(-\infty, +\infty)$

值域为$(0, \pi)$



反三角函数满足如下互余恒等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, x \in [-1,1]$$

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

例2. 求下列各式的值：

$$(1)\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right); \qquad (2)\tan(\arcsin x), x\in(-1,1)$$

解： $$(1)\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$$

例2. 求下列各式的值：

$$(1)\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right);\qquad (2)\tan(\arcsin x),\ x\in(-1,1)$$

续解： $(2)\tan(\arcsin x)=\dfrac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\dfrac{x}{\cos(\arcsin x)}$

由于$x\in(-1,1)$，$-\dfrac{\pi}{2}<\arcsin x<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\cos(\arcsin x)>0$

故$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-[\sin(\arcsin x)]^2}=\sqrt{1-x^2}$，原式$=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3、重要的三角公式

（1）同角三角函数的基本关系式

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\boxed{\tan x \cdot \cot x = 1}$$

$$\boxed{1 + \tan^2 x = \sec^2 x}$$

$$\boxed{1 + \cot^2 x = \csc^2 x}$$

（2）和差角公式

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha \cdot \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha}$$

（3）和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

（4）积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

（5）二倍角公式

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

感 谢 聆 听

Thank You