任课教师______ 学号______ 姓名______ 班级______ 专业______ 学院______ 线 订 装

南京信息工程大学　试卷

2018－2019 学年 第一学期 线性代数 课程期末试卷（ B 卷）

本试卷共 6 页；考试时间 120 分钟；出卷时间 2018 年 12 月；各专业 适用

<table>
<tr><td rowspan="2">题号</td><td rowspan="2">一</td><td rowspan="2">二</td><td colspan="2">三</td><td rowspan="2">四</td><td rowspan="2">五</td><td rowspan="2">六</td><td rowspan="2">七</td><td rowspan="2">八</td><td rowspan="2">总分</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>分值</td><td>15</td><td>15</td><td>8</td><td>8</td><td>10</td><td>10</td><td>10</td><td>12</td><td>12</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>得分</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>阅卷教师签名</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

统分教师签字：________________　　　核分教师签字：________________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在题中的横线上）

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，则，$\left||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$______________.

（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$______________.

（3）已知向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,k,5)$ 可由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-3,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1)$ 线性表示时，$k=$ ________.

（4）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 4\\ 5 & 7 & 2 & 1\\ 5 & 8 & 4 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 为 4 阶方阵，$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=4$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$__________.

（5）已知 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $1,-2,3$，则 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为 ______________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分. 请将所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & \lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩为 2，则 $\lambda=$（　　　　）

(A) 0；　　(B) 2；　　(C) -1；　　(D) 1.

（2）设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间 R^3 的基，则由基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 的过渡矩阵是（　　　　）

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； (B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$； (C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$； (D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n-1$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解向量，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为(　　　　)

(A) $k\boldsymbol{\alpha}_1$； (B) $k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$； (C) $k(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$； (D) $k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶可逆方阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是(　　　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似； (B) $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似；

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似； (D) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似.

(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵， $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组，则下列结论正确的是(　　　　)

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解；

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在题下空白处作答）

(1) 计算 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

学院________专业________班级________姓名________学号________任课教师________

装……订……线

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}=\left(1,2,3,4\right)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{\beta}=\left(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right)^{\mathrm{T}}$， $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 及 $\boldsymbol{A}^{n}$.

四、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}^{2}=\boldsymbol{E}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$. **(本题满分 10 分)**

五、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}$，求此向量组的秩和一个最大线性无关组, 并把其余向量用这个最大线性无关组线性表示. **(本题满分 10 分)**

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\0 & \lambda-1 & 0\\1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解，

(1) 求 λ, a；

(2) 求方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解. **(本题满分 10 分)**

学院________专业________班级________姓名________学号________任课教师________

装…………订…………线

七、 求一正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2$ 化为标准形，并判定 f 是否为正定的二次型. **(本题满分 12 分)**

八、证明下列命题：**(每小题 6 分，共 12 分)**

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正交矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶对称矩阵，则 $\boldsymbol{ABA}^{-1}$ 是对称矩阵；

（2）若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-4\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只能是 1 或 3.