高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院

大学数学部 高等数学教学团队

第七节 多元函数微分学的几何应用

1 空间曲线的切线与法平面

2 曲面的切平面与法线

3 内容小结

多元函数微分学的几何应用

➢ 曲线的切线方程与法平面方程

➢ 曲面的切平面方程与法线方程

教学目标

重难点

重点： 曲线的切线方程与曲面的切平面方程的求法

难点： 曲线以一般方程形式给出时切向量的求法

一、空间曲线的切线与法平面

复习

平面曲线的切线：**割线的极限位置.**

平面曲线的法线：**过切点且与切线垂直的直线.**

空间曲线的切线方程推导：设空间曲线的参数方程

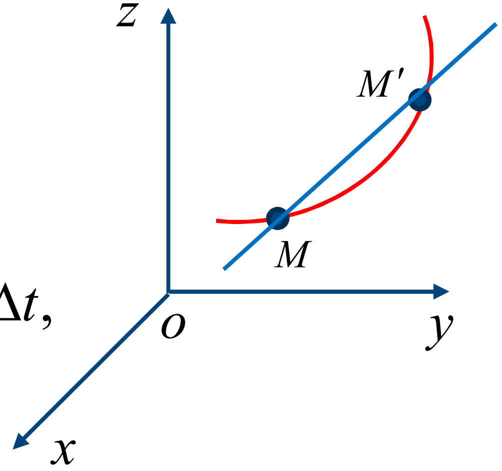
$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta) \qquad (1)$$

(1) 式中的三个函数均可导.

设空间曲线上点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 对应于 $t = t_0$,

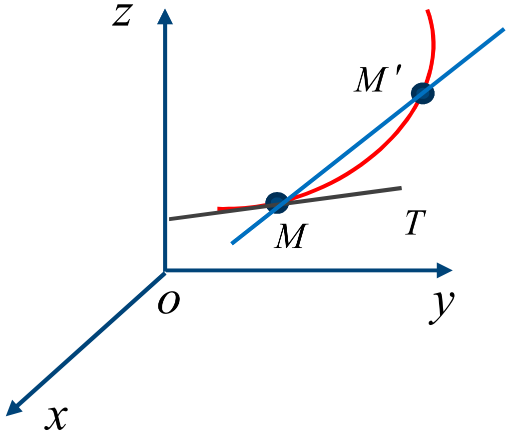
点 $M'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ 对应于 $t = t_0+\Delta t$,

则割线 MM' 的方程为:



$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z},\ \text{其中}\ \overrightarrow{MM'} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z),$$

考察割线 MM' 趋近于极限位置——切线 MT 的过程



上式分母同除以Δt, 得

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当$M'\to M$时，即$\Delta t\to 0$时曲线在M处的切线方程为

$$\boxed{\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.}$$

空间曲线的切向量：切线的方向向量称为曲线的切向量.

$$\vec{s}_{切}=\overrightarrow{MT}=\lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{MM'}=\left(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)$$

空间曲线的法平面：过点 M 且与切线垂直的平面称为曲线在点 M 处的法平面.

法平面方程为

$$\boxed{\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0}$$

例1 求曲线 $\Gamma: x=\int_0^t e^u \cos u du,\ y=2\sin t+\cos t,\ z=1+e^{3t}$

在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解 当 $t=0$ 时， $x=0,\ y=1,\ z=2,$

$x'=e^t\cos t,\ y'=2\cos t-\sin t,\ z'=3e^{3t},\Rightarrow x'(0)=1,\ y'(0)=2,\ z'(0)=3,$

切线方程 $\boxed{\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}}$

法平面方程$x+2(y-1)+3(z-2)=0$,即 $\boxed{x+2y+3z-8=0.}$

例2 在曲线 $\Gamma: x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解 因为 $\vec{s}_{切}=(1,2t,3t^2)$ 平行于平面，所以 $\vec{s}_{切}\cdot\vec{n}=0$,

即 $1\cdot 1+2t\cdot 2+3t^2\cdot 1=0$, $\Longrightarrow$ $t=-1$ 或 $t=-\dfrac{1}{3}$,

故所求点为 $\boxed{(-1,1,-1)}$ 或 $\boxed{\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},-\dfrac{1}{27}\right)}$.

特殊地：

1. 若空间曲线 Γ 表示为 $\begin{cases} y=\phi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$ $\xLeftrightarrow{\text{以 } x \text{ 参数}}$ $\begin{cases} x=x \\ y=\phi(x) \\ z=\psi(x) \end{cases}$

若 $\phi(x), \psi(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处

$$\vec{s}_{切}=(1, \phi'(x_0), \psi'(x_0)),$$

切线方程为：$\boxed{\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{\phi'(x_0)}=\dfrac{z-z_0}{\psi'(x_0)}}$

法平面方程为：$\boxed{(x-x_0)+\phi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0.}$

2．若空间曲线方程 Γ 表示为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$$

若 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}=\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\neq 0$,将方程组两边对 x 求导,得

$$\begin{cases} F_x+F_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F_z\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \\ G_x+G_y\cdot\dfrac{dy}{dx}+G_z\cdot\dfrac{dz}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$（消元法求解）

可得曲线的**切向量** $\vec{S}=\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$，其中

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{J}\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}$$

则曲线 Γ 在 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处，

$$\vec{S}_{切}=\left(1,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\Bigg|_M // \left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix}_M,\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix}_M,\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}_M\right)$$

切线方程为：

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M},$$

法平面方程为：

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_M (x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_M (y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_M (z-z_0)=0.$$

例3 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2=0 \\ 2x-3y+4z-11=0 \end{cases}$在点$P(2,-1,1)$处的切线及法平面方程.

解 将曲线方程组的两边对x求导，得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-2=0 \\ 2-3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,-1,1)}=2,\quad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(2,-1,1)}=1,$$

切向量$\vec{S}_{切}=(1,2,1)$,故所求**切线方程** $\boxed{\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1},}$

例3 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2=0 \\ 2x-3y+4z-11=0 \end{cases}$在点$P(2,-1,1)$处的切线及法平面方程.

续解 法平面方程为 $(x-2)+2(y+1)+(z-1)=0,$

即 $\boxed{x+2y+z=0.}$

注：对方程组求导后,可先代入点坐标再求解方程组,不仅计算简单,而且可直接求出曲线在该点的切向量.

例4 求柱面 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 在交点 $M\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 处的切线及法平面方程.

解 方程的两边对x求导，得 $\begin{cases} 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 \\ 2x+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0 \end{cases}$

代入交点 $M\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$，解得： $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_M=-1$， $\left.\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_M=-1.$

由此得**切向量：** $\vec{S}_{切}=\left.\left(1,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)\right|_{\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)}=(1,-1,-1),$

例4 求柱面 $x^2+y^2=R^2, x^2+z^2=R^2$ 在交点 $M\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 处的切线及法平面方程.

续解 故得所求**切线方程**: $\boxed{\dfrac{x-\frac{R}{\sqrt{2}}}{1}=\dfrac{y-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}=\dfrac{z-\frac{R}{\sqrt{2}}}{-1}}$

法平面方程: $\left(x-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)-\left(y-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)-\left(z-\frac{R}{\sqrt{2}}\right)=0,$

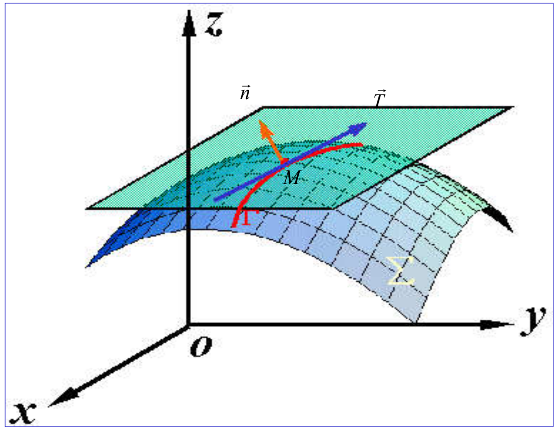
即 $\boxed{x-y-z+\dfrac{R}{\sqrt{2}}=0}$

二、曲面的切平面与法线

设曲面方程为Σ：$F(x,y,z)=0$，点 $M(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$

并设函数 $F(x,y,z)$ 的偏导数在该点

连续且不同时为零.



思路：在曲面上任取一条曲线Γ过点M，

研究该曲线在点M处的切线，寻找规律.

分析：一方面

在曲面上任取一条通过点M的曲线$\Gamma:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}$，

当 $t=t_0$ 时，对应点 $M(x_0,y_0,z_0)$

且 $\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)$ 存在且不全为零，

则得到曲线在 M 处的切向量：$\vec{S}_{切}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$，

另一方面

由曲线 Γ 在曲面上，故有 $F[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]=0$，

上述方程两边在 $t=t_0$ 处求导，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}=F_x(x_0,y_0,z_0)\cdot\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\cdot\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\cdot\omega'(t_0)=0$$

（即函数 F 在 $t=t_0$ 处有全导数且为0 ）

发现 $(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\perp(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$

取 $\vec{n}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right)$,

而 $\vec{S}_{切}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$,

$\vec{S}_{切}\perp\vec{n}$ 表明:

曲面上过M的任意曲线在点M 的切线与同一个向量$\vec{n}$垂直.

曲面上过点M 的任何曲线在点 M 处的切线在同一平面上.

这个平面称为曲面在点M的**切平面**.

切平面方程为：

$$\boxed{F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0}$$

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的法向量.

曲面在M处的法向量 $\boxed{\vec{n}=\left(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\right).}$

过点$M(x_0,y_0,z_0)$垂直于切平面的直线称为曲面在该点的法线.

法线方程为： $\boxed{\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}}$

特殊地： 空间曲面方程形为 $z=f(x,y)$,

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$,(或 $z-f(x,y)$) ,

则 $F_x(x,y,z)=f_x(x,y), F_y(x,y,z)=f_y(x,y), F_z(x,y,z)=-1$,

所以 $\vec{n}_{法}=(f_x,f_y,-1)$ 或 $\vec{n}_{法}=(-f_x,-f_y,1)$.

曲面在 M 处的法线方程为：$\boxed{\dfrac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}.}$

曲面在 M 处的切平面方程为：

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0}$$

上述切平面也可表示为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

此式可看作是全微分的几何意义：

因为上面切平面方程的右端为 $\mathrm{d}z\,|_{(x_0,y_0)} = \mathrm{d}f(x,y)\,|_{(x_0,y_0)}$，

$z = f(x,y)$在(x_0, y_0)的全微分在几何上表示曲面$z = f(x,y)$

在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面上点的竖坐标的增量.

此时曲面的法向量 $\vec{n}_{法}=(-f_x,-f_y,1)$.

法向量的方向余弦： 若α、β、γ 表示曲面的法向量的方向角, 并假定法向量的方向是向上的, 即它与z轴的正向所成的角γ是锐角, 则法向量的**方向余弦**为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\ \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}.$$

例5 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2-1$ 在点 $(2,1,4)$ 处的切平面及法线方程.

解 令 $f(x,y)=x^2+y^2-1$, $\vec{n}\big|_{(2,1,4)}=(2x,2y,-1)\big|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$,

切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$,

即 $\boxed{4x+2y-z-6=0}$

法线方程为 $\boxed{\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}.}$

例6 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

解 令$F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$, 得 $F_x=2x, F_y=4y, F_z=6z$

设(x_0,y_0,z_0)为曲面上的切点, 则切平面的法向量为

$$\vec{n}=(2x_0,4y_0,6z_0)$$

切平面方程为$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0$

切平面平行于已知平面 $\dfrac{2x_0}{1}=\dfrac{4y_0}{4}=\dfrac{6z_0}{6} \Rightarrow 2x_0=y_0=z_0.$

例6 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的切平面方程.

续解 因为 (x_0, y_0, z_0) 是曲面上的切点, 代入方程得 $x_0=\pm1$,

故所求切点为 $(1,2,2)$, $(-1,-2,-2)$,

切平面方程(1): $2(x-1)+8(y-2)+12(z-2)=0$

即 $\boxed{x+4y+6z=21}$

切平面方程(2): $-2(x+1)-8(y+2)-12(z+2)=0$

即 $\boxed{x+4y+6z=-21}$

例7 在曲面 $z = xy$ 上求一点, 使这点处的法线垂直于平面 $x + 3y + z - 19 = 0$.

解 令$F(x, y, z) = xy - z$, 故法向量 $\vec{n}_{法} = (y, x, -1)$.

因为平面法向量为 $\vec{n} = (1, 3, 1)$,

又因为 $\vec{n}_{法} \perp$ 平面, 故 $\vec{n}_{法} // \vec{n}$.

即 $\dfrac{y}{1} = \dfrac{x}{3} = \dfrac{-1}{1} \quad \Rightarrow y = -1, x = -3 \quad \Rightarrow z = 3$

故所求点为 $\boxed{(-3, -1, 3)}$.

例8 证明：曲面 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 在任意一点处的切平面都平行于直线$\dfrac{x-1}{l}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z-3}{n}$，其中 F 具有连续的偏导数.

证　令 $G(x,y,z)=F(nx-lz,ny-mz)$

则 $G_x=nF_1',G_y=nF_2',G_z=-lF_1'-mF_2'$，

故任意一点处的法向量为

$$\vec{n}=(nF_1',nF_2',-lF_1'-mF_2').$$

例8 证明：曲面 $F(nx-lz,ny-mz)=0$ 在任意一点处的切平面都平行于直线 $\frac{x-1}{l}=\frac{y-2}{m}=\frac{z-3}{n}$, 其中 F 具有连续的偏导数.

续证 由于所给直线的方向向量为 $\vec{s}=(l,m,n)$

则 $\vec{n}\cdot\vec{s}=nlF_1'+mnF_2'-nlF_1'-mnF_2'=0 \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{s}$

即直线平行于切平面, 所以曲面上任一点的切平面都平行于所给直线.

三、内容小结

1、空间曲线的切线与法平面

2、曲面的切平面与法线

注：利用公式求解曲线的切向量和曲面的法向量时，已知点是曲线或曲面上的点. 如果给出的点是曲线或曲面外的已知点，附加另外的条件也可以讨论对应的切线或切平面问题，这点类似一元函数中求曲线的切线问题(验证一下已知点是否是曲线上的点)，需要注意区别.

所有的不甘，

都是因为还心存梦想，

在你放弃之前，

好好拼一把，

只怕心老，

不怕路长。