练习三参考答案

一、填空题

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=$ $\underline{\frac{1}{2}}$

(2) 若 $x=1$ 是 $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x^2-3x+a}$ 的可去型间断点，则 $a=$ $\underline{2}$

(3) 设函数 $y=\ln\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}+\cos 2x$，则 $\mathrm{d}y=$ $\underline{\left[\frac{x}{2(x+1)(x+2)}-2\sin 2x\right]\mathrm{d}x}$

(4) 曲线 $y=\frac{(x-1)^2}{2x-1}$ 的斜渐近线方程为 $\underline{y=\frac{1}{4}(2x-3)}$

(5) 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上具有连续导数，且 $f(a)=0$，$\int_0^a f^2(x)\mathrm{d}x=-4$，则 $\int_0^a xf(x)f'(x)\mathrm{d}x=\underline{2}$

二、选择题

(1) 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则（ C ）

(A) $\tan[f(x)]$ 在点 x_0 处连续　　(B) $\sqrt{f(x)}$ 在点 x_0 处连续

(C) $|f(x)|$ 在点 x_0 处连续　　(D) $f[f(x)]$ 在点 x_0 处连续

(2) 若 $f(x)=\cos x(x+|\sin x|)$，则在 $x=0$ 处（ D ）

(A) $f'(0)=2$　(B) $f'(0)=1$　(C) $f'(0)=0$　(D) 不可导

(3) 设 $y=x\mathrm{e}^x$，则 $y^{(10)}=$(A)

(A) $(10+x)\mathrm{e}^x$　(B) e^x　(C) $(10-x)\mathrm{e}^x$　(D) $(x-10)\mathrm{e}^x$

(4) 设在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$，则（ B ）

(A) $S_1<S_2<S_3$　(B) $S_2<S_1<S_3$　(C) $S_3<S_1<S_2$　(D) $S_2<S_3<S_1$

(5) 反常积分① $\int_{-\infty}^0\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ ② $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性为(B)

(A) ①收敛，②收敛　　(B) ①收敛，②发散

(C) ①发散 ②收敛　　(D) ①发散，②发散

三、计算题

(1) 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}+\frac{x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{2}{3}.$$

(2) 设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\sqrt{t^2+1}\\ y=\ln(t+\sqrt{t^2+1})\end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}$.

解：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$，则$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{1}{t}$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{-1}{t^2\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}=\frac{-\sqrt{t^2+1}}{t^3}$$，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=\left.\dfrac{-\sqrt{t^2+1}}{t^3}\right|_{t=1}=-\sqrt{2}$.

(3) 问a,b为何值时，点$(1,3)$是曲线$y=ax^4+bx^3$的拐点？并求此时曲线的凹凸区间.

解：$y'=4ax^3+3bx^2$，$y''=12ax^2+6bx$，由于点$(1,3)$为曲线的拐点，

故$y(1)=3$，且$y''(1)=0$，

则$a+b=3$，且$12a+6b=0$，解得$a=-3,b=6$.

此时$y=-3x^4+6x^3$，故$y''=-36x^2+36x=36(x-x^2)=36x(1-x)$，

由$y''=0$，解得：$x=0,x=1$，

当$x\in(-\infty,0),(1,+\infty)$时，$y''<0$，　当$x\in(0,1)$时，$y''>0$，

故该曲线的凹区间为$\left[0,1\right]$，凸区间为$\left(-\infty,0\right],\left[1,+\infty\right)$.

(4) 求不定积分$\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解: $\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$

$=x-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^x)=x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$.

(5) 求$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+x)\sin x\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4 x+x\sin x\right)\mathrm{d}x$，因为 $\sin^4 x+x\sin x$为偶函数，所以，

原式$=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\mathrm{d}x\right)=2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\mathrm{d}\cos x\right)$

$=\frac{3}{8}\pi-(2x\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\pi+2$.

（6）求$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\ln x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(1+x\right)}\mathrm{d}x$

$=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\left(1+x\right)}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x$

$=\left[\ln x-\ln\left(1+x\right)\right]\Big|_1^{+\infty}=\ln\frac{x}{1+x}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2$.

四、设$y=f(x)$由方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$所确定，求函数$y=f(x)$的极值.

解：方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$两边对x求导：$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$,

令$y'=0$，得$y=x$，代入原方程$2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$得：

$$2x^3-x^2-1=0\ \Rightarrow\ (x-1)(2x^2+x+1)=0,$$

解得：$x=1$，此时，$y=1$。所以$y=f(x)$的驻点为$x=1$，且$y\left(1\right)=1$，

再对$3y^2y'-2yy'+xy'+y-x=0$的两边求x的导数，得：

$$(3y^2-2y+x)y''+2(3y-1)(y')^2+2y'-1=0,$$

把 $y'\big|_{(1,1)}=0$ 代入上式，得 $y''\Big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{2}>0$，则极小值为 $y(1)=1$.

五、已知 $f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$.

解：由于 $f(1)=0,\ f'(x)=2x\mathrm{e}^{-x^4}$，

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{2}x^2f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\mathrm{d}f(x)=-\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}\left(-x^4\right)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right).$$

六、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续，在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $0<f'(x)<1$， $f(0)=0$，

证明函数 $F(x)=\left[\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]^2-\int_0^x\left[f(t)\right]^3\mathrm{d}t$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

证明：$\forall x\in(0,+\infty)$，由 $0<f'(x)<1$，可知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，故 $f(x)>f(0)=0$，

$$F'(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\cdot f(x)-\left[f(x)\right]^3=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right]$$

令 $G(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)$，则 $G(0)=0$， $G'(x)=2f(x)[1-f'(x)]$，

由 $0<f'(x)<1$，可得 $G'(x)>0$，所以 $G(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，

故 $G(x)>G(0)>0$，因此 $F'(x)>0$，所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是单调增加的.

七、设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0,\ \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，

试证：(1) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根；

(2) 方程 $f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同的实根。

证明：（1）由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，可知存在右邻域 $0<x<\delta<1$，使得：$\dfrac{f(x)}{x}<0$，

取 $0<x_1<\delta<1$，则有 $\dfrac{f(x_1)}{x_1}<0$，故 $f(x_1)<0$

又 $f(1)<0$，且函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,1]$ 上可导必连续，故由零点存在定理，可知

存在$\xi \in (x_1,1) \in (0,1)$，使得：$f(\xi)=0$；

（2）设$F(x)=f(x)f'(x)$，由于函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$存在，

故$f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$，

则$f(0)=f(\xi)$，且$f(x)$在$[0,\xi](\subset[0,1])$上连续、可导，由罗尔定理可知，存在$\eta\in(0,\xi)(\subset[0,1])$，使得：$f'(\eta)=0$，因此$F(0)=F(\eta)=F(\xi)=0$，而$F(x)$在区间$[0,\eta]$、$[\eta,\xi]$上连续且可导，由罗尔定理可知，至少存在不同的两点$\xi_1\in(0,\eta)$、$\xi_2\in(\eta,\xi)$，使得$F'(\xi_1)=0$，$F'(\xi_2)=0$，又$F'(x)=f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2$，即$f(x)f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同的实根.