南京信息工程大学　试卷答案

2020－2021 学年 第一学期　线性代数　课程期末试卷（ A 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\boldsymbol{B}=(\alpha_2,3\alpha_1-\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3)$， $\alpha_i(i=1,2,3)$ 是三维列向量，已知 $|\boldsymbol{A}|=3$，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=$ $\underline{\quad -18 \quad}$.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=-2$，则 $|2\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-2}|=$ $\underline{\quad -4 \quad}$.

(3) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&2\end{pmatrix}$，则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$ $\underline{\begin{pmatrix}2&1\\-4&3\end{pmatrix}}$.

(4) 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,-2,0,3)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(2,\lambda,1,-2)^{\mathrm{T}}$，已知 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交，则 $\lambda=$ $\underline{\quad 5 \quad}$.

(5) 设三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 使得 $|2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|3\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^2|=$ $\underline{\quad 9 \quad}$.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上）

(1) 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，则必有（　C　）

(A) 若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　(B) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆；

(C) 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$；　(D) 若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

(2) 已知 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1}=$（　D　）

(A) $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$；　(B) $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$；　(C) $-\frac{1}{2}(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})$；　(D) $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})$.

(3) 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}_1$ 与 $\boldsymbol{B}_1$ 相似，$\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_2$ 相似，则（　D　）

(A) $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$ 相似；　(B) $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ 与 $\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2$ 相似；

(C) $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 不与 $\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2$ 相似；　(D) $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}_2\end{pmatrix}$ 相似.

(4) 若 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&a\\2&1&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ 对应于 λ 的一个特征向量，则（　B　　）

(A) $a=1,\lambda=2$；　　　　(B) $a=-1,\lambda=2$；

(C) $a=0,\lambda=-1$；　　　　(D) $a=-1,\lambda=1$.

(5) 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+2cx_1x_3+ax_3^2$ 正定的充要条件是实数 a,b,c 满足条件（ D ）

(A) $a>0,b>0,c>0$；　　　　(B) $a>c,b>0$；

(C) $|a|>|c|,b>0$；　　　　(D) $a>|c|,b>0$.

三、计算题（每小题 6 分，共 18 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在对应题号下面的空白处作答）

(1) 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ 且 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{B}$.

解：$\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}^2$　　（---------2 分）

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}-\begin{pmatrix}2&2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\2&-1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&2&0&0\\-1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$　　（---------4 分）

$$=\begin{pmatrix}0&-3&0&0\\3&0&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$　　（---------6 分）

(2) 求行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix}$ (其中 $ab \neq 0$).

解： $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ -a & -b & 0 & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 \\ -a & 0 & 0 & b \end{vmatrix}$ （---------3 分）

$= \begin{vmatrix} 1+a-\frac{a}{b}-1+\frac{a}{b} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{vmatrix} = a^2b^2$ （---------6 分）

(3) 设二阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,-3$, 对应的特征向量依次为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：由题意可知 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ （---------2 分）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ -40 & -19 \end{pmatrix}$ （---------6 分）

四、(本题满分 10 分)

设矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{X}$, 矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

解： $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} + 2\boldsymbol{X} \Rightarrow (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \Rightarrow \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ （---------3 分）

而 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&2\end{pmatrix}$，于是

$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&2&4&2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&1&0\\0&1&2&-1&1\\0&0&1&2&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&-1&-1\\0&1&0&-5&-1\\0&0&1&2&1\end{array}\right)$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-1&-1\\-5&-1\\2&1\end{pmatrix}$.（---------10 分）

五、(本题满分 10 分)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\1\\2\\k\end{pmatrix}$，

(1) k 为何值时，此向量组的秩为 3.

(2) 秩为 3 时，求一个最大线性无关组, 并把其余向量用这个最大无关组线性表示.

解：$$(\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\2&1&1&1\\0&-2&0&2\\1&0&1&k\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&1&-3\\0&-2&0&2\\0&0&1&k-2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&1&-3\\0&0&2&-4\\0&0&1&k-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&k\end{pmatrix}$$ （---------4 分）

$k=0$ 为何值时，此向量组的秩为 3.（---------6 分）

此时最大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$，（---------8 分）

$$\boldsymbol{\alpha}_4=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3.$$ （---------10 分）

六、(本题满分 10 分) 求 a 为何值时，下列方程组有解？在有解时求出此方程组的通解,

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+3x_4=1 \\ \qquad x_2+2x_3+x_4=1 \\ -x_1+x_2+3x_3 \qquad =a \end{cases}.$$

解：$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 & a+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}$

$a=2$时，方程组有解.　　　　　　　　　　　　　　　　（---------4 分）

此时$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

得同解方程组为$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=-1 \\ x_2+2x_3+x_4=1 \end{cases}$,

令$x_3=x_4=0$，非齐次线性方程组的特解为$\eta=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

对应齐次线性方程组的基础解系为：令$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\xi_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},(k_1,k_2\in R)$　　　　（---------10 分）

七、(本题满分 12 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+3x_3^2$ 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 之下的标准形是 $f=3y_1^2+4y_2^2+y_3^2$，求正交变换矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

解：实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2+2x_2x_3+3x_3^2$

对应的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

其特征值为$\lambda_1=3,\lambda_2=4,\lambda_3=1,$　　　　　　　　　　　　（---------3 分）

当 $\lambda_1=3$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，

由于 $\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，将其单位化得 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$，

由于 $\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，将其单位化 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$.（---------8 分）

当 $\lambda_3=1$ 时，解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=0$

由于 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$,

得基础解系 $\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，将其单位化得 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$.（---------10 分）

故所求的正交变换矩阵为$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.　　（---------12 分）

八、(本题满分 10 分)

(1) 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2， $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 n 维向量， $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关， $\boldsymbol{\alpha}_3\neq\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 都与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交,

证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.

(1) 解：三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$　　（---------2 分）

由 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值满足 $\lambda^2+2\lambda=\lambda(\lambda+2)=0$　　（--------4 分）

所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-2,\lambda_3=-2.$　　（---------5 分）

(2) 证明：设有 k_1,k_2,k_3 使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=0$　　（---------1 分）

两边与 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 作内积 $\left[k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3\right]=k_3|\boldsymbol{\alpha}_3|=0$

所以 $k_3=0$, 代入上式得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=0$,　　（--------3 分）

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 所以 $k_1=k_2=0$,

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关.　　（---------5 分）

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分仅供参考.