南京信息工程大学
Nanjing University of Information Science & Technology

专题一 中学数学内容补充

（2）数学归纳法及其应用

数学与统计学院公共数学教学部

数学归纳法及其应用

“上帝创造了自然数，其他数都是人造的.”

——德国数学家克罗尼克

“道生一，一生二，二生三，三生万物.”

——老子《道德经》

数学归纳法及其应用

一、数学归纳法

一种重要的数学方法，用于证明和自然数有关的数学命题.

证明过程：

（1）验证 $n=1$ 时结论成立.

找准基点
奠基要稳

（2）假设 $n=k$ 时结论成立，利用此假设推导证明 $n=k+1$ 时结论也成立.

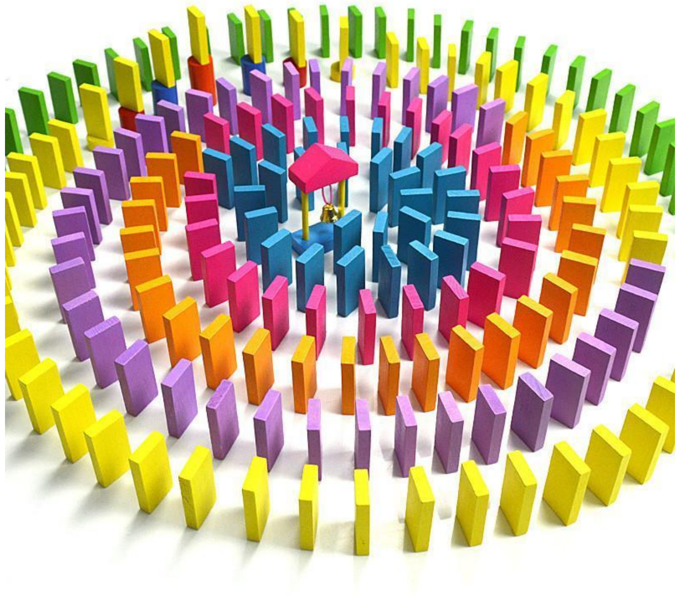
用上假设
递推才真

写明结论
才算完整

综上对于所有正整数结论均成立.

数学归纳法及其应用

数学归纳法思想与“多米诺骨牌效应”



如何保证骨牌倒下？

（1）能够推倒第一张骨牌；

（2）能够保证第 k 张骨牌倒下一定能够推倒第 $k+1$ 张骨牌倒下.

数学归纳法及其应用

思考：数学归纳法的第一步的初始值是否一定是 $n=1$？

提示：不一定！如证明 n 边形的内角和公式 $(n-2)\cdot 180^\circ$，其初始值 $n=3$.

数学归纳法证明流程：

（1）验证 $n=n_0$ 时结论成立.

（2）假设 $n=k$ 时结论成立，利用此假设推导证明 $n=k+1$ 时结论也成立.

（3）综上对于所有 $n\geq n_0$ 的自然数结论均成立.

二、数学归纳法的应用

应用一 和数列有关的命题证明.

例如 用数学归纳法证明等比数列求和公式

$$1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}(a\neq 1).$$

用数学归纳法证明数列的单调性、有界性等.

数学归纳法及其应用

例1 设数列$\{a_n\}$为正数数列，前n项和为S_n，且$2S_n=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，用数学归纳法证明：$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geq 1)$.

证明 （1）当$n=1$时，$a_1=S_1=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)\Rightarrow a_1^2=1\Rightarrow a_1=\sqrt{1}-\sqrt{1-1}$

（2）假设$a_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}$成立，则$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\dfrac{1}{2}\left(a_{k+1}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)-S_k$

其中$S_k=\dfrac{1}{2}\left(a_k+\dfrac{1}{a_k}\right)\boxed{=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}+\dfrac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\right)=\sqrt{k}}$

所以$a_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_{k+1}+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)-\sqrt{k}\Rightarrow a_{k+1}^2+2\sqrt{k}a_{k+1}-1=0\Rightarrow a_{k+1}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$

（3）综上，对于任意自然数$n\in\mathrm{N}^+$均有$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$成立.

数学归纳法及其应用

例2 设 $x_1=\sqrt{a}>0, x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots,x_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}},\cdots$，证明数列$\{x_n\}$有上界.

$x_n=\sqrt{x_{n-1}+a}$

证明 （1）$x_1=\sqrt{a}<\sqrt{a}+1$

（2）假设 $x_k<\sqrt{a}+1$ 成立，则

$$x_{k+1}=\sqrt{x_k+a}\ \boxed{<\sqrt{\sqrt{a}+1+a}}\ <\sqrt{2\sqrt{a}+1+a}=\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}=\sqrt{a}+1$$

（3）综上，对于任意自然数 $n\in\mathrm{N}^+$均有 $x_n<\sqrt{a}+1$ 成立.

数学归纳法及其应用

例3 设 $x_0>0, x_n=\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$. 证明数列$\{x_n\}$是单调的.

证明 $x_n-x_{n-1}=\dfrac{2(1+x_{n-1})}{2+x_{n-1}}-\dfrac{2(1+x_{n-2})}{2+x_{n-2}}=\dfrac{2\left(x_{n-1}-x_{n-2}\right)}{\left(2+x_{n-1}\right)\left(2+x_{n-2}\right)}$

则 x_n-x_{n-1} 与 $x_{n-1}-x_{n-2}$ 同号，依次类推可知x_n-x_{n-1}与 x_1-x_0 同号，

而 $x_1-x_0=\dfrac{2(1+x_0)}{2+x_0}-x_0=\dfrac{2-x_0{}^2}{2+x_0}$ ，

当 $0<x_0<\sqrt{2}$ 时，$x_1-x_0>0$ ，则$x_n-x_{n-1}>0$ ，此时数列单调递增.

当 $x_0\geq\sqrt{2}$ 时，$x_1-x_0\leq 0$，则 $x_n-x_{n-1}\leq 0$，此时数列单调递减.

数学归纳法及其应用

应用二 二项式定理.

$$a+b = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$\cdots\ \cdots$

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

$\cdots\ \cdots$

——帕斯卡(Pascal)三角形

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, n \in \mathrm{N}^+$$

数学归纳法及其应用

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n, n \in \mathrm{N}^+$$

该公式称为**二项式定理**. 等式右端的多项式称为 $(a+b)^n$ 的二项展开式，它一共有 $n+1$ 项，其中各项的系数$C_n^r (r = 0,1,2,\cdots,n)$称为二项式系数，式中 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 称为二项式的通项.

在二项式中如果令 $a=1, b=x$，则

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n, n \in \mathrm{N}^+$$

$$= 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n, n \in \mathrm{N}^+$$

数学归纳法及其应用

例4 证明 $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^{n-1} x^{n-1} + x^n, n \in \mathrm{N}^+$.

证明 （1）$n=1$ 时，$1+x = 1 + C_1^1 x$ 显然成立.

（2）假设 $n=k$ 时结论成立，则

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)(1+x)^k = (1+x)\left(1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + \cdots + C_k^{k-1} x^{k-1} + x^k\right)$$

$$= 1 + \left(1 + C_k^1\right)x + \cdots + \left(C_k^{r-1} + C_k^r\right)x^r + \cdots + \left(C_k^{k-1} + C_k^k\right)x^k + x^{k+1}$$

$$C_k^{r-1} + C_k^r = \frac{k!}{(r-1)!(k-r+1)!} + \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$= \frac{k!}{r!(k-r+1)!}\left(r + k - r + 1\right)$$

$$= C_{k+1}^r$$

$$= 1 + C_{k+1}^1 x + \cdots + C_{k+1}^r x^r + \cdots + C_{k+1}^k x^k + x^{k+1}$$

（3）综上，对于任意自然数 $n \in \mathrm{N}^+$ 均有结论成立.

数学归纳法及其应用

应用三：n 阶行列式的定义.

1. 行列式的来源

消元法求解二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组

有解 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$

引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

数学归纳法及其应用

2. 二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3. 三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\boxed{a_{13} \text{ 余子式 } M_{13}}$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$\cdots$

数学归纳法及其应用

n 阶行列式的定义

归纳法

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

a_{11} 余子式 M_{11}

a_{12} 余子式 M_{12}

a_{1n} 余子式 M_{1n}

例5 计算以下行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ -c & -d \end{vmatrix}$； (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 2\times5-4\times(-3) \boxed{=22}$

$\begin{vmatrix} a & b \\ -c & -d \end{vmatrix} = -ad-(-bc) \boxed{=bc-ad}$

数学归纳法及其应用

续解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\times\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\times\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1\times(-3) - 2\times(-6) + 3\times(-3) \quad \boxed{=0}$$

注意三个余子式的计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 1\times\begin{vmatrix} x & 3 \\ x^2 & 9 \end{vmatrix} + 1\times\begin{vmatrix} x & 2 \\ x^2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 6 - 9x + 3x^2 + 4x - 2x^2 \boxed{= x^2 - 5x + 6}$$

三阶范德蒙德行列式

数学归纳法及其应用

小结:

- 数学归纳法：由特殊到一般，是数学发现的重要方法.
- 数学归纳法科学性：基础正确，可传递.
- 数学归纳法证明程序化步骤：两个步骤，一个结论.
- 数学归纳的思想也可用于一些数学定义的给出.

数学归纳法及其应用

注意：

- 与自然数有关的数学命题可以考虑用数学归纳法证明，但注意不要滥用，并非任何和自然数有关的命题都可以用它来证明，如果命题中没有“递推”关系，数学归纳法将失去效力.

- 掌握数学归纳法的实质与步骤，其中由假设$n=k$时命题成立推导出$n=k+1$时命题也成立是数学归纳法证明的核心环节，推导过程要完整、严谨、规范.

感 谢 聆 听

Thank You