试卷二

一、填空题 （每题 3 分，共 15 分）

1. 计算$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -2 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix} =$____________.

2. 若$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$的代数余子式 $A_{12} = -1$，则代数余子式 $A_{21} =$____________.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×4 矩阵， $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$， $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB}) =$______________.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A} - 4\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}\right)^{-1} =$____________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\left|\boldsymbol{A}\right| = -2$，则$\left|\left(\frac{1}{12}\boldsymbol{A}\right)^{-1} + \left(3\boldsymbol{A}\right)^*\right| =$________.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 D 是 n 阶行列式，则下列各式中正确的是(　　　　).

   (A) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = 0$，$j = 1, 2, \cdots, n$；　　(B) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = D$，$j = 1, 2, \cdots, n$；

   (C) $\sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{2k} = D$；　　(D) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列加到第 2 列得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行的 (-1) 倍加到第 1 行得 $\boldsymbol{C}$，记 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则(　　　　　)

   (A) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；　(B) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$；　(C) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$；　(D) $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

3. 下述命题不正确的是(　　　　　)

   (A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}_{m \times n}) \leqslant \min\{m, n\}$；

   (B) 若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{B})$；

   (C) 若 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ}) = \mathrm{R}(\boldsymbol{A})$；

   (D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有某个 k 阶子式不为 0，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) > k$.

4. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知数个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则(　　　　)

(A) $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；　　(B) $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

(C) $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；　　(D) $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶的对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶的反对称矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2$ 是(　　　　)

(A) 对称矩阵;　　(B) 反对称矩阵;

(C) 可逆矩阵;　　(D) 对角矩阵.

三、计算下列各题（每题 6 分 ，共 18 分）

1．计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ **，其中** $a\neq 0$ **；**

2．行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **，求** $2\boldsymbol{A}_{11}+4\boldsymbol{A}_{12}-2\boldsymbol{A}_{13}+\boldsymbol{A}_{14}$ **.**

3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$， $\boldsymbol{A}^4$.

四、设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$， $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^{100}$.（10 分）

五、已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{B}$.（**10 分**）

六、设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的秩，并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.（**12 分**）

七、当λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$（1）有唯一解（2）无解；（3）有无穷多个解？在无穷多解时，求解。（12 分）

八、设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n\times 1$ 阶非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$．（8 分）