高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院
大学数学部 高等数学教学团队

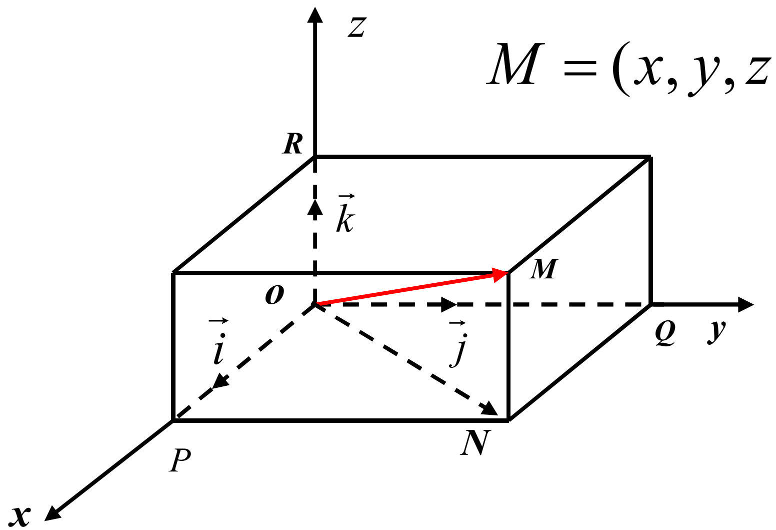
向量及其线性运算

1、向量的表示

2、向量的模

3、向量的方向余弦

4、投影



$$M=(x,y,z)$$

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 4\\ 3 & -7 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1 & 4\\ -7 & 5\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -7\end{vmatrix}=69$$

第三节 向量的数量积、向量积与混合积

1 向量的数量积

2 向量的向量积

3 向量的混合积

4 内容小结

向量的数量积、向量积与混合积

➢了解向量的数量积、向量积的物理背景

➢ 理解数量积、向量积、混合积的概念

➢ 掌握向量的数量积、向量积与混合积的计算方法

教学目标

重难点

重点：向量的数量积

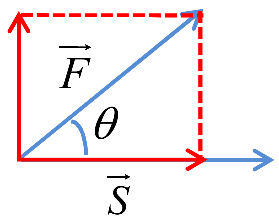
➢ 向量积、混合积

➢ 向量垂直和平行的条件

难点：向量积与混合积

一、向量的数量积　　数！

1、物理背景　设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下沿直线从点 M_1 移动到 M_2，记 $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$，$\theta$ 为 $\vec{F}$ 与 $\vec{s}$ 的夹角，则力 $\vec{F}$ 所作的功为 $W=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta\boxed{=\vec{F}\cdot\vec{s}}.$



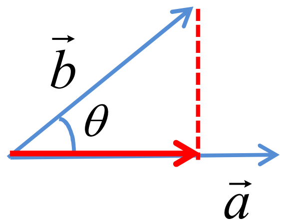
2、定义　称 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 为向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的**数量积**（**内积**、**点积**），记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.　即 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta.}$

3、数量积与投影的关系

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}\qquad \boxed{\mathrm{Prj}_u\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\varphi}$$

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

当 $\vec{b}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$



4、数量积的性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$；　　(2) 非零 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

5、数量积的运算规律

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}}$$

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 分配律 $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

(3) 数乘结合律

$$\boxed{\mathrm{Prj}_u(\vec{a}+\vec{b})=\mathrm{Prj}_u\vec{a}+\mathrm{Prj}_u\vec{b}}$$

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right),\ \lambda \text{ 为数.}$$

6、用坐标进行数量积运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .}$

证明： $\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$

$$=a_xb_x\vec{i}\cdot\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\cdot\vec{j}$$

$$+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\cdot\vec{k}$$

$$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\ .$$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$

$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$

注： ➢ 设非零向量 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 与 $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ 的夹角为 θ ，则有两向量夹角余弦的坐标表达式

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\boxed{=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}.$$

➢ 非零向量 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$$

例1 已知 $\vec{a}=(1,0,-1)$，$\vec{b}=(-1,-2,1)$ 的夹角为 θ，求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；　　(2) $\cos\theta$；　　(3) $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$.

解　(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times(-1)+0\times(-2)+(-1)\times1=\boxed{-2.}$

(2) $$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{1+1}\sqrt{1+4+1}}=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3}.}$$

(3) $$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=\boxed{-\sqrt{2}.}$$

例2 已知 $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$， 求 $\vec{A}=2\vec{a}+\vec{b}$ $\vec{B}=-\vec{a}+3\vec{b}$ 的夹角 θ 的余弦.

解 $\vec{A}\cdot\vec{B}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\vec{a}+3\vec{b})=-2|\vec{a}|^2+5|\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}+3|\vec{b}|^2=15.$

同理可得 $|\vec{A}|^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=12.$

$$|\vec{B}|^2=\vec{B}\cdot\vec{B}=(-\vec{a}+3\vec{b})\cdot(-\vec{a}+3\vec{b})=31.$$

则 $\boxed{\cos\theta=\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}=\dfrac{15}{\sqrt{12}\sqrt{31}}.}$

例3 试证：向量 $\vec{a}$ 与向量 $\vec{p}=\vec{c}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})-\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})$垂直.

证明 $\vec{a}\cdot\vec{p}=\vec{a}\cdot[\vec{c}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{a})-\vec{b}\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})]$

$$=(\vec{a}\cdot\vec{c})\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot(\vec{c}\cdot\vec{a})$$

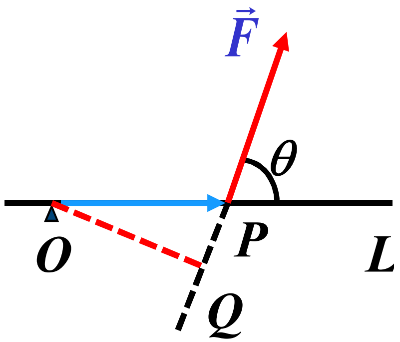
$=0$ ，得证.

➢ 非零向量 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

二、向量的向量积

1、物理背景

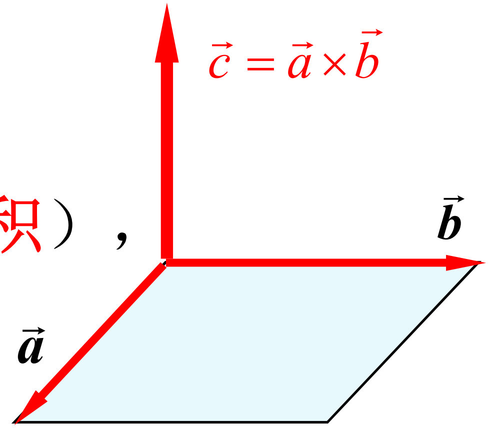
设杠杆 L 的支点为 O，力 $\vec{F}$ 作用于 L 上 P 点处，力 $\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ，则力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量，其大小为



$$|\overrightarrow{M}| = |\overrightarrow{OQ}||\vec{F}| \boxed{= |OP||\vec{F}|\sin\theta}$$

方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{F}$ 所在平面，且 $\overrightarrow{OP}$，$\vec{F}$ 与 $\overrightarrow{M}$ 符合右手规则.

2、向量积的定义 向量！



称向量 $\vec{c}$ 为 $\vec{a},\vec{b}$ 的向量积（外积、叉积），

记作 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$. 它满足：

(1) $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$，其中 θ 为 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角.

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合右手规则，且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.

注：$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ 表示以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积.

3、向量积的性质

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\theta$$

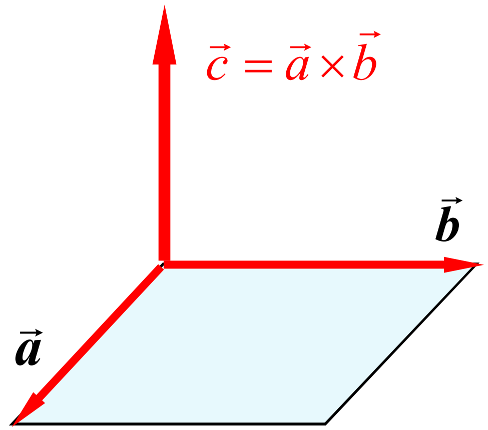
(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}.$

(2) 非零向量 $\boxed{\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.}$

(3) $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.}$

(4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ （顺次分配律）

(5) $\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\overrightarrow{\lambda b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$，$\lambda$ 为数.



4、用坐标进行向量积运算

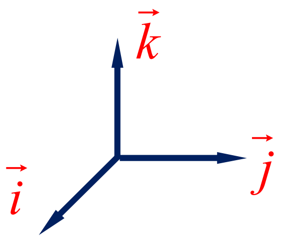
$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$

$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

设 $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right),\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$，则

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}}$$

证明： $\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)$



$$=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}$$

$$+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

注：➢ 为便于记忆，常用**行列式**计算向量积.

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}}$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\ \boxed{=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}}$$

➢ 非零 $\vec{a}\,//\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

向量的数量积、向量积与混合积

数量积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,.$$

$$=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

向量积

$$\boxed{=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}$$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ $\boxed{(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}}$

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.}$

垂直

平行

例4 已知 $\vec{a}=(2,2,2), \vec{b}=(1,2,4)$，求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 及 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解 $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times1+2\times2+2\times4=14.}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

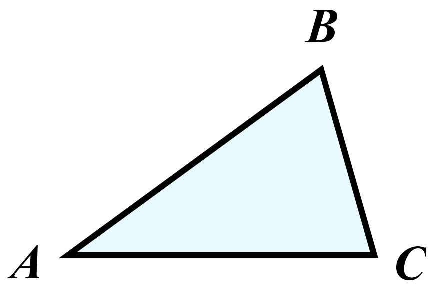
$$=(2\times4-2\times2)\vec{i}-(2\times4-1\times2)\vec{j}+(2\times2-1\times2)\vec{k}$$

$$\boxed{=(4,-6,2).}$$

例5 已知ΔABC的顶点分别是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$，$C(2,4,7)$，求此三角形的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=(2,2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(1,2,4)$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$$



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\boxed{=\sqrt{14}.}$$

例6 求与 $\vec{a}=(3,-2,4),\vec{b}=(1,1,-2)$ 都垂直的单位向量.

解 $\vec{c}=\pm\vec{a}\times\vec{b}=\pm\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=\pm(0,10,5)$,

$|\vec{c}|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5}$, $\boxed{\overrightarrow{c^o}=\dfrac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\pm\left(0,\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right).}$

例7 设向量 $\vec{m},\vec{n},\vec{p}$ 两两垂直，符合右手规则，

且 $|\vec{m}|=4,|\vec{n}|=2,|\vec{p}|=3$ ，求 $(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

解 $|\vec{m}\times\vec{n}|=|\vec{m}||\vec{n}|\sin\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=4\times2\times1=8.$

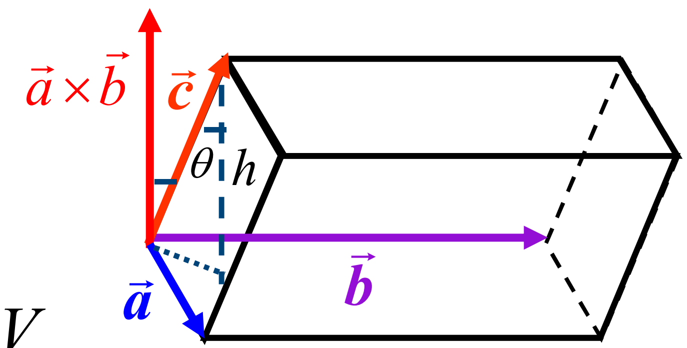
又$\vec{m}\times\vec{n}$与$\vec{p}$ 同向，则 $\theta=\left(\widehat{\vec{m}\times\vec{n},\vec{p}}\right)=0.$

$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}=|\vec{m}\times\vec{n}||\vec{p}|\cos\theta\boxed{=8\times3\times1=24.}$

三、向量的混合积　　数！

1、定义　称 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 为向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积.

记作 $[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]$ 或 $(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.



2、几何意义　以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的平行六面体

$$\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right| = Sh = V$$

注：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为右手系，混合积为正，否则为负.

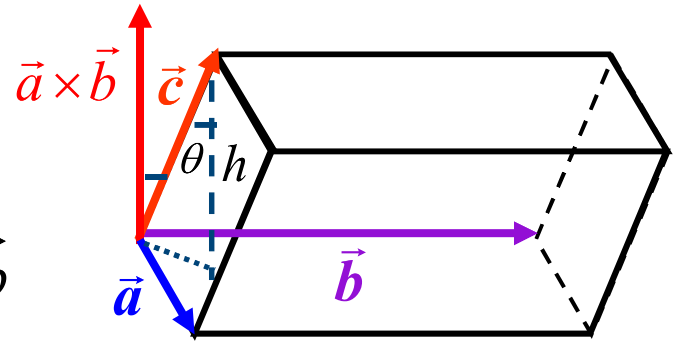
3、混合积的性质

由混合积的几何意义，可得

(1)非零向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0.$

(2) 轮换性

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$$



4、用坐标进行混合积运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则 $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$

$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$,

分析: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$. $\boxed{\text{换 } \vec{i},\vec{j},\vec{k} \text{ 为 } c_x,c_y,c_z \text{ .}}$

4、用坐标进行混合积运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$,

$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$, 则 $\boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.}$

$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$,

分析： $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$

换 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为 c_x,c_y,c_z.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$$

例8 试证 $A(0,1,-\frac{1}{2}), B(-3,1,1), C(-1,0,1), D(1,-1,1)$ 四点共面.

解 $\overrightarrow{AB}=(-3,0,\frac{3}{2})$， $\overrightarrow{AC}=(-1,-1,\frac{3}{2})$， $\overrightarrow{AD}=(1,-2,\frac{3}{2})$，

$$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}-3 & 0 & \frac{3}{2}\\ -1 & -1 & \frac{3}{2}\\ 1 & -2 & \frac{3}{2}\end{vmatrix}=0.$$

三向量共面，得证.

四、内容小结

- 向量的**数量积** $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$
- 向量的**向量积**

(1) $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=S_{\square}$.

(2) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合**右手规则**，

且 $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$，$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$.

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}$$

- 向量的**混合积** $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\left|\cos\theta\right| = Sh = V$

  V 为以 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为棱的**平行六面体的体积**.

  若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 为**右手系**，混合积为**正**，否则为负.

- 三向量共面 $\Longleftrightarrow$ $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0.$

- 非零 $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0.$

- 非零 $\vec{a}/\!/\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

这世上

可能确实没有超级英雄，

不过是

无数人都在发一分光，

然后萤火汇成星河。