南京信息工程大学 2018-2019 学年第一学期

《线性代数》期末试卷 A 卷参考答案及评分标准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分．请将答案填在题中的横线上）

（1）若 $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & x \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$，则 $x =$ ____________.

【答案】5.

（2）若 $\boldsymbol{A}^2 + 3\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^{-1} =$ ____________________.

【答案】$-\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{E}$.

（3）已知 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{ij}\,(i,j=1,2,3,4)$ 为 D 的代数余子式，则

$3\boldsymbol{A}_{31} + 4\boldsymbol{A}_{32} - \boldsymbol{A}_{33} + 7\boldsymbol{A}_{34} =$ ____________.

【答案】0.

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，且 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}) = 3$，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系列向量的个数为__________.

【答案】3.

（5）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda, 2, 4$，且 $|2\boldsymbol{A}| = 128$，则 $\lambda =$ _________.

【答案】2.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分．请将所选项前的字母填在题后的括号内）

（1）一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\,(s>1)$ 线性相关的充要条件的是（　　　　）

（A）含有零向量；　　（B）有两个向量的对应分量成比例；

（C）有一个向量是其余向量的线性组合；　　（D）每一个向量都是其余向量的线性组合.

【答案】C.

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则必有（　　　）

（A）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$；　（B）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$；　（C）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}$；　（D）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}$.

【答案】C.

（3）设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，则分块矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 的逆 $\boldsymbol{X}^{-1}=$（　　　）

（A）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$；　（B）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$；　（C）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \end{pmatrix}$；　（D）$\begin{pmatrix} \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{pmatrix}$.

【答案】C.

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是（　　　）

（A）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均可对角化；　　（B）存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PB}=\boldsymbol{AP}$；

（C）$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|$；　　（D）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

【答案】A.

（5）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，下列命题正确是（ B 　）

（A）对 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$，则 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值；

（B）对 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$；

（C）对 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$；

（D）对任意的非零向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$.

【答案】B.

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，请直接在题下空白处作答）

（1）计算 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 10 \\ 4 & 1 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

解： 原式$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&2&3\\2&0&5&9\\3&0&9&19\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&9\\3&9&19\end{vmatrix}$ ……………4 分

$$=-\begin{vmatrix}1&2&3\\0&1&3\\0&3&10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3\\3&10\end{vmatrix}=-1.$$ ……………8 分

(2) 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&0&2\\0&0&5&1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2,\left|\boldsymbol{A}^5\right|$.

解： 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1&0\\0&\boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}$

$\boldsymbol{A}_1{}^2=\begin{pmatrix}5&4\\4&5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2{}^2=\begin{pmatrix}10&2\\5&11\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1{}^2&0\\0&\boldsymbol{A}_2{}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4&0&0\\4&5&0&0\\0&0&10&2\\0&0&5&11\end{pmatrix}$$ ……………4 分

$$\left|\boldsymbol{A}^5\right|=\left|\boldsymbol{A}\right|^5=\left|\boldsymbol{A}_1\right|^5\left|\boldsymbol{A}_2\right|^5=3^5\times(-10)^5=-30^5=-24300000.$$ ……………8 分

四、解矩阵方程 $\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}$. **(本题满分 10 分)**

解：$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&2\\5&-3\end{pmatrix}^{-1}$ ……………2 分

$$=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}$$ ……………6 分

$$=\begin{pmatrix}-7&9\\12&-14\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2\\5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24&13\\-34&-18\end{pmatrix}.$$ ……………10 分

五、设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-8\\2\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\3\\-7\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\-6\end{pmatrix}$，求此向量组的秩和一个最大线性无关组，并把其余向量用这个最大线性无关组线性表示. **(本题满分 10 分)**

解： $\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)\to\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\9&2&3&4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ……………6 分

所以 $\mathrm{R}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4\right)=3$ ，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是一个最大线性无关组，

其中 $\boldsymbol{\alpha}_4=-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. ……………10 分

六、求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+2x_4=2\\2x_1+4x_2+3x_3-x_4=-6\\-x_1-2x_2+3x_3-4x_4=-6\end{cases}$ 的通解. **(本题满分 10 分)**

解：对增广矩阵进行初等变换

$\bar{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&2&-1&2&2\\2&4&3&-1&-6\\-1&-2&3&-4&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&2&2\\0&0&5&-5&-10\\0&0&2&-2&-4\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&2&2\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&1&0\\0&0&1&-1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ ……………5 分

所以同解方程组为：$\begin{cases}x_1+2x_2+x_4=0\\x_3-x_4=-2\end{cases}$

通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\end{pmatrix}$. ……………10 分

七、已知二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(1-a\right)x_1^{\,2}+\left(1-a\right)x_2^{\,2}+2x_3^{\,2}+2\left(1+a\right)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，把 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 化成标准形. **(本题满分 12 分)**

解：(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=2$，

因此 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$，得 $a=0$. ……………4 分

(2) $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(2-\lambda)^2\lambda$

故 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=0$； ……………6 分

当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解 $\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系： $x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，

即 $p_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，$p_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$； ……………9 分

当 $\lambda_3=0$ 时，解 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得基础解系： $x_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$，即 $p_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix}$，

作 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，其中 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，

则 $f(x_1,x_2,x_3)=2{y_1}^2+2{y_2}^2$. ……………12 分

八、证明下列命题： **(每小题 6 分，共 12 分)**

（1）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似；

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明：（1）$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似， 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$，$|\boldsymbol{P}^{-1}||\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{B}|$，

已知 $\boldsymbol{A}$ 可逆，故 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$，$\boldsymbol{B}$ 也可逆，$\boldsymbol{B}^{-1}=\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\right)^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$，

即 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 相似， ……………3 分

又 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{B}^*=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}$，

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}=|\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^*$，

故 $\boldsymbol{A}^*$ 与 $\boldsymbol{B}^*$ 相似. ……………6 分

（2）设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，只要证明 $\lambda>0$ 即可，$\boldsymbol{x}$ 为对应 λ 的特征向量，即 $\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$，

因此 $\left(\boldsymbol{A}^3-6\boldsymbol{A}^2+11\boldsymbol{A}-6\boldsymbol{E}\right)\boldsymbol{x}=\left(\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6\right)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$， …………3 分

故 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$，

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值只可能是 1, 2, 3，均大于 0，

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵. ……………6 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.