南京信息工程大学　　试卷答案

2018－2019 学年 第二学期 线性代数 课程期中试卷

一、填空题 （每题 3 分，共 15 分）

1. 计算$\begin{vmatrix} 2 & 201 & -2 \\ 3 & 292 & 8 \\ -1 & -95 & -5 \end{vmatrix}=$____________.

答：-7.

2. 若$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$的代数余子式 $A_{12}=-1$，则代数余子式 $A_{21}=$____________.

答：2.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 5×4 矩阵， $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})=$______________.

答：3.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵，则 $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}\right)^{-1}=$____________.

答：$\dfrac{\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}}{2}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 为其伴随矩阵，且 $\left|\boldsymbol{A}\right|=-2$，则$\left|\left(\dfrac{1}{12}\boldsymbol{A}\right)^{-1}+\left(3\boldsymbol{A}\right)^*\right|=$________.

答：108.

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 设 D 是 n 阶行列式，则下列各式中正确的是(B).

(A) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}=0$，$j=1,2,\cdots,n$；　　(B) $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}=D$，$j=1,2,\cdots,n$；

(C) $\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k}=D$；　　(D) $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}=0$，$i=1,2,\cdots,n$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶矩阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 列加到第 2 列得 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行的 (-1) 倍加到第 1

行得$\boldsymbol{C}$，记$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　A　）

(A) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$；　(B) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{-1}$；　(C) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$；　(D) $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{PAP}^{\mathrm{T}}$.

3. 下述命题不正确的是(　D　)

(A) $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}_{m\times n})\leqslant\min\{m,n\}$;

(B) 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$;

(C) 若 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$ 可逆，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{PAQ})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$;

(D) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有某个 k 阶子式不为 0，则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})>k$.

4. 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知数个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则(　A　)

(A) $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解;　(B) $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;

(C) $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解;　(D) $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解.

5. 已知 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶的对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 n 阶的反对称矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^2$ 是(　A　)

(A) 对称矩阵;　(B) 反对称矩阵;

(C) 可逆矩阵;　(D) 对角矩阵.

三、计算下列各题（每题 6 分 ，共 18 分）

1．计算行列式$\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&0&0\\1&0&a&0\\1&0&0&a\end{vmatrix}$**，其中**$a\neq0$**；**

解：$\begin{vmatrix}a&1&1&1\\1&a&0&0\\1&0&a&0\\1&0&0&a\end{vmatrix}\overset{c_1-\frac{1}{a}c_i}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}a-\frac{3}{a}&1&1&1\\0&a&0&0\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{vmatrix}=a^3\left(a-\frac{3}{a}\right)=a^4-3a^2$.

2．行列式$D=\begin{vmatrix}1&3&5&7\\2&4&6&8\\1&3&-3&0\\1&1&1&1\end{vmatrix}$**，求**$2\boldsymbol{A}_{11}+4\boldsymbol{A}_{12}-2\boldsymbol{A}_{13}+\boldsymbol{A}_{14}$.

解：$2A_{11}+4A_{12}-2A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0$$

3. 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^2， A^4.

解： $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$，……………………..……………………………………………..3 分

$A^4=\begin{pmatrix} 7 & 10 & 0 & 0 \\ 15 & 22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 22 \end{pmatrix}$. ………………….…………………………………………….6 分

四、设 $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$，$AP=P\Lambda$，求 A^{100}.（10 分）

解： 因为$|P|=2\neq 0$，所以 P 可逆，且 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$， ………………………….3 分

又因为 $AP=P\Lambda$，故 $A=P\Lambda P^{-1}$，因而 $A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}$. ……………………….5 分

$A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1-2^{100} \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}$……………………10 分

五、已知 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，求 B.（10 分）

解： 因为 $AB=A+2B$， 则$(A-2E)B=A$，所以 $B=(A-2E)^{-1}A$，………….3 分

又因为$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -8 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$，………7 分

所以$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}\right)^{-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 3 & -8 & -6 \\ 2 & -9 & -6 \\ -2 & 12 & 9 \end{pmatrix}$. …………………………………………..10 分

六、设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的秩，并求$\boldsymbol{A}$的一个最高阶非零子式.（12 分）

解：因为$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$， ………………………………8 分

所以$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{A}\right)=3$，

$\boldsymbol{A}$的一个最高阶非零子式为$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. ……………………………12 分

七、当λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$（1）有唯一解（2）无解；（3）有无穷多个解？在无穷多解时，求解.（12 分）

解：因为$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3\left(\lambda+1\right) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda\left(\lambda-1\right)$ ……………………………4 分

(1) 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq1$时，方程组有唯一解；

(2) 当$\lambda=0$时，方程组无解； ……………………………8 分

(3) 当 $\lambda=1$ 时，其通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 $k \in \mathbf{R}$. ……………………………12 分

八、设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $n\times 1$ 阶非零矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$．（8 分）

证明： $\boldsymbol{A}^2=\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)$

$=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\left(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，………………………………..4 分

必要性：当 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 时，即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-\left(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，故 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ ……………….6 分

充分性：当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1$ 时，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}-\left(2-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\right)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ ……………….…………8 分

注：有的题目有多种解法，以上解答和评分标准仅供参考.