练习一参考答案

一、填空题

(1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-2x+k}{x-3}=4$，则 $k=$______.

【答案】-3；

(2) $x=1$ 为 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的______ 间断点

【答案】第一型可去；

(3) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{3x}$，则 $f^{(n)}(x)=$__________

【答案】$3^n\mathrm{e}^{3x}$；

(4) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$______________

【答案】$2x\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+x^2}$；

(5) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x(\ln x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的范围______________

【答案】 $p>1$；

二、选择题

(1) 下列命题正确的是（　　）

(A) 有界数列必定收敛；　　(B) 无界数列必定发散；

(C) 发散数列必定无界；　　(D) 单调数列必有极限.

【答案】（B ）.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则由 $y=f(x)$、x 轴、$x=a$、$x=b$ 所围成的图形面积为（　　）

(A) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$；　(B) $\int_b^a |f(x)|\mathrm{d}x$；　(C) $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$；　(D) $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

【答案】（D ）.

(3) 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0), f'(1), f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是（　）

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$；　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$；

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$；　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

【答案】（ B ）.

(4) 曲线 $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ 的垂直渐近线是（　　）

(A) $y=\pm 1$；　　(B) $x=0$；　　(C) $x=\pm 1$；　　(D) $y=0$.

【答案】（ C ）.

(5) 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int f'(x)\mathrm{d}x=$（　　）

(A) $\sin x+C$；　(B) $\cos x+C$；　(C) $-\sin x+C$；　(D) $-\cos x+C$.

【答案】（ B ）.

三、计算题

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

【解】原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\ln x+2}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 设由 $\mathrm{e}^{-y}+x(y-x)=1+x$ 确定函数 $y=y(x)$，求 $y'(0)$

【解】方程两边同时对 x 求导，得　$-\mathrm{e}^{-y}y'+y+xy'-2x=1$

解得 $y'=\dfrac{1+2x-y}{x-\mathrm{e}^{-y}}$，将 $x=0, y=0$ 代入，得 $y'(0)=-1$

(3) $\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$

【解】原式 $=\int\dfrac{1+\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}\left(1+\mathrm{e}^x\right)=x-\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+C$

(4) $\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

【解】原式 $=x\cos(\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}+\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}\cos 1-1+x\sin(\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$

移项得到 $2\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}\cos 1-1+\mathrm{e}\sin 1$，

故 $\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}\cos 1+\mathrm{e}\sin 1-1)$.

四、证明：当 $x\neq 0$ 时，有不等式 $\mathrm{e}^x>1+x$.

【证明】设 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x$，由 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1=0$ 解得 $x_0=0$

当 $x<0$ 时 $f'(x)<0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$；

故 $f(0)=0$ 为 $f(x)$ 的最小值，所以 $f(x)>0$ 即原不等式成立.

五、设 $f(x)$ 对任意 x 有 $f(x+1)=2f(x)$，且 $f'(0)=\frac{1}{2}$，求 $f'(1)$.

【解】由 $f\left(x+1\right)=2f\left(x\right)$ 可得 $f\left(1\right)=2f\left(0\right)$

$$f'\left(1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f\left(1+x\right)-f\left(1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f\left(x\right)-2f\left(0\right)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x}=2f'\left(0\right)=1.$$

六、求函数 $y=\frac{2x-1}{\left(x-1\right)^2}$ 的凹凸区间及拐点.

【解】$y'=\frac{-2x}{\left(x-1\right)^3}$，$y''=\frac{4x+2}{\left(x-1\right)^4}$，令 $y''=0$ 解得 $x_0=-\frac{1}{2}$，

当 $x<-\frac{1}{2}$ 时 $y''<0$，当 $-\frac{1}{2}<x<1$ 或 $x>1$ 时 $y''>0$，

故凸区间为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，凹区间为 $\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$，拐点 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9}\right)$.

七、设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 上连续，在 $\left(0,1\right)$ 内可微，且 $8\int_{\frac{7}{8}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f\left(0\right)$，

证明：存在 $\xi\in\left(0,1\right)$，使得 $f'\left(\xi\right)=0$.

【证明】由 $8\int_{\frac{7}{8}}^{1}f(x)\mathrm{d}x=f(0)$ 可得存在 $\eta\in\left(\frac{7}{8},1\right)$，使得 $8f\left(\eta\right)\cdot\frac{1}{8}=f\left(0\right)$ 即 $f\left(\eta\right)=f\left(0\right)$，

又 $f(x)$ 在 $\left[0,\eta\right]$ 上连续，在 $\left(0,\eta\right)$ 内可微，由罗尔中值定理可知，存在 $\xi\in\left(0,\eta\right)\subset\left(0,1\right)$，

使得 $f'\left(\xi\right)=0$.

八、设连续函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f(x)+f(-x)=\sin^2 x$，求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^6 x\mathrm{d}x$.

【解】令 $t=-x$ 则 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^6 x\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}f(-t)\sin^6 t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-t)\sin^6 t\mathrm{d}t$

又 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-t)\sin^6 t\mathrm{d}t+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-t)\sin^6 t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sin^6 t\mathrm{d}t=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 t\mathrm{d}t=\frac{35}{128}\pi$，

所以 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\sin^6 x\mathrm{d}x=\frac{35}{256}\pi$.