

练习一

一、填空题

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x + k}{x - 3} = 4$, 则 $k =$ _____.

(2) $x = 1$ 为 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 的_____间断点.

(3) 设 $f(x) = e^{3x}$, 则 $f^{(n)}(x) =$ _____.

(4) $\frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt =$ _____.

(5) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ 收敛, 则 p 的范围_____.

二、选择题

(1) 下列命题正确的是 ()

(A) 有界数列必定收敛;

(B) 无界数列必定发散;

(C) 发散数列必定无界;

(D) 单调数列必有极限.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由 $y = f(x)$ 、 x 轴、 $x = a$ 、 $x = b$ 所围成的图形面积为 ()

(A) $\int_a^b f(x) dx$; (B) $\int_b^a |f(x)| dx$; (C) $\left| \int_a^b f(x) dx \right|$; (D) $\int_a^b |f(x)| dx$.

(3) 设在 $[0, 1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0), f'(1), f(1) - f(0)$ 或 $f(0) - f(1)$ 的大小顺序是 ()

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$;

(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$;

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$;

(D) $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$.

(4) 曲线 $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$ 的垂直渐近线是 ()

(A) $y = \pm 1$;

(B) $x = 0$;

(C) $x = \pm 1$;

(D) $y = 0$.

(5) 若 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$, 则 $\int f'(x) dx =$ ()

(A) $\sin x + C$;

(B) $\cos x + C$;

(C) $-\sin x + C$;

(D) $-\cos x + C$.

三、计算题

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$(2) \text{ 设由 } e^{-y} + x(y-x) = 1+x \text{ 确定函数 } y = y(x), \text{ 求 } y'(0).$$

$$(3) \int \frac{1}{1+e^x} dx.$$

$$(4) \int_1^e \cos(\ln x) dx.$$

四、证明：当 $x \neq 0$ 时，有不等式 $e^x > 1+x$ 。

五、设 $f(x)$ 对任意 x 有 $f(x+1) = 2f(x)$ ，且 $f'(0) = \frac{1}{2}$ ，求 $f'(1)$ 。

六、求函数 $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ 的凹凸区间及拐点。

七、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $8\int_{\frac{7}{8}}^1 f(x)dx = f(0)$ ，

证明：存在 $\xi \in (0,1)$ ，使得 $f'(\xi) = 0$. (本题满分 8 分)

八、设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + f(-x) = \sin^2 x$ ，求 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin^6 x dx$.