第3节

函数的极限

一、函数在有限点处的极限

一、函数在无穷远处的极限

三、函数极限的性质

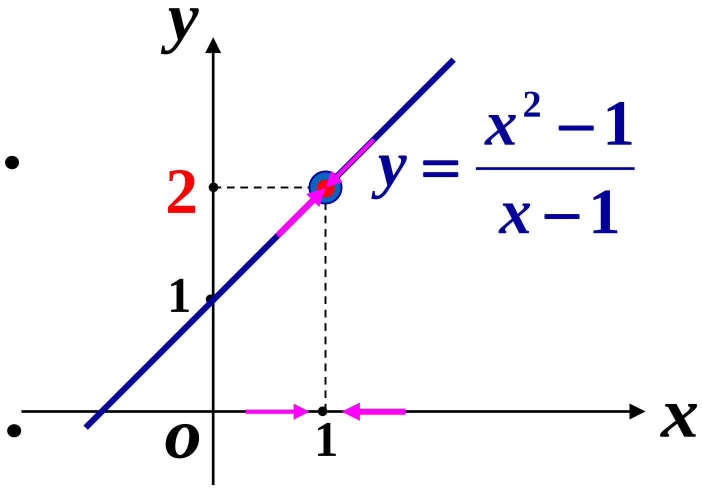
一. 函数在有限点处的极限

设 $f(x)$ 在 $U^{O}(x_0)$ 有定义，讨论当自变量 x 无限趋近于定点 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 的变化趋势. 即 $x \to x_0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极限.

例：$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$x \neq 1$.

当 $x \to 1(x \neq 1)$，$f(x) \to 2$.

把 2 称为当 $x \to 1$ 时，$f(x)$ 的极限，记为 $\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

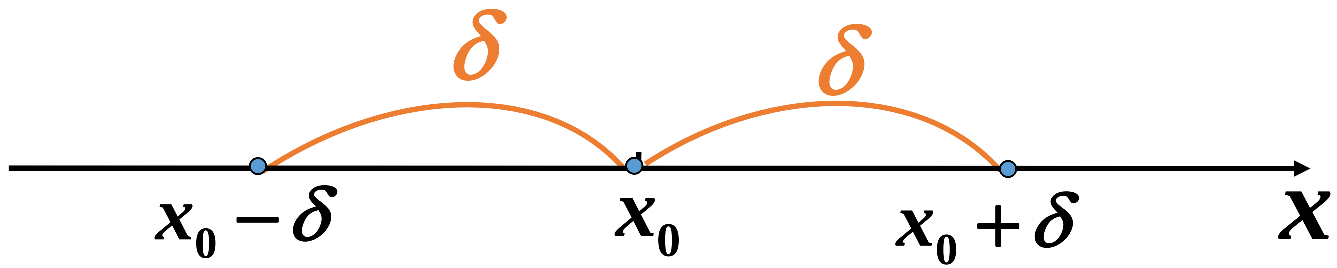


一般地有

问题:函数$y=f(x)$在$x\to x_0$的过程中,对应函数值 $f(x)$ 是否无限趋近于确定值 A?

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示$|f(x)-A|$任意小;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示$x\to x_0$的过程.



点 x_0 的去心δ邻域, δ体现x接近x_0程度.

定义1$(\varepsilon-\delta)$设 $f(x)$ 在 $U^{o}(x_0)$ 有定义，A 为常数.

若 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$,

$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

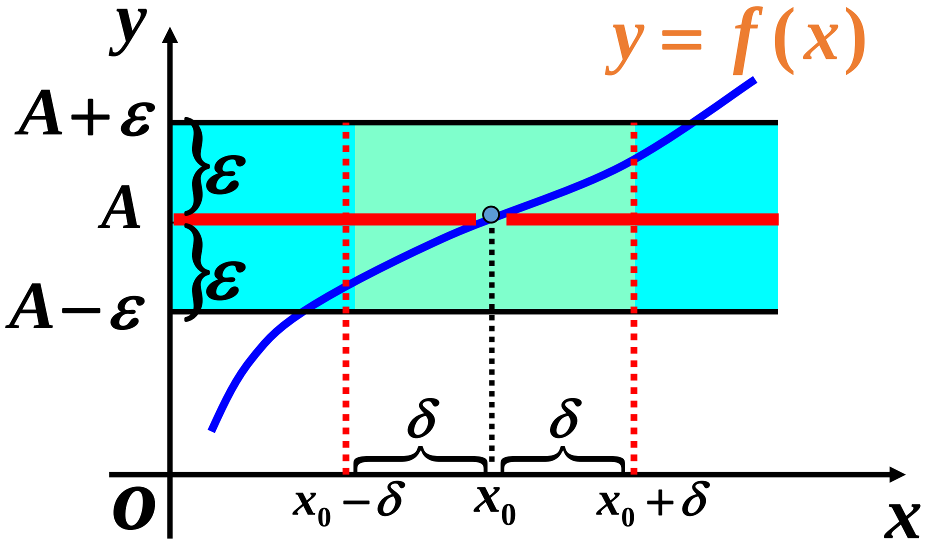
则称 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时存在极限，其极限为A.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或 $f(x)\to A\ (x\to x_0)$.

几何解释： $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \underline{\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,}$

$$\forall x: 0<|x-x_0|<\delta, \Rightarrow \underline{A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon}.$$

当 x 在 $U^{O}(x_0,\delta)$ 时，$y=f(x)$ 的图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线，宽为 2ε 的带形区域内.

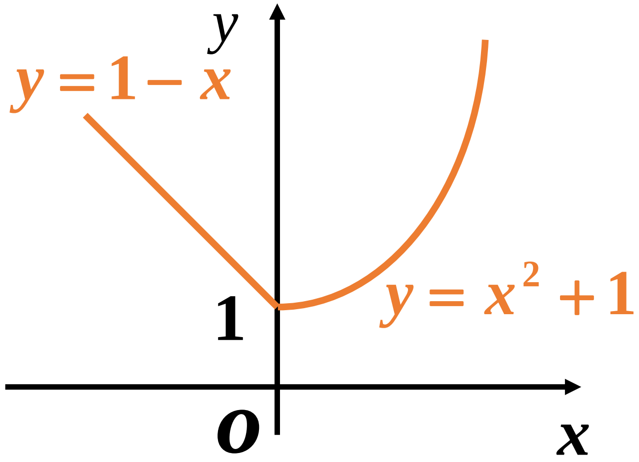


单侧极限:

例如,

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.



分 $x>0$ 和 $x<0$ 两种情况分别讨论

x从左侧无限趋近x_0, 记作$x\to x_0^-$;

x从右侧无限趋近x_0, 记作$x\to x_0^+$.

左极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x: \underline{x_0-\delta<x<x_0},$

$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon. \quad (0<x_0-x<\delta)$$

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^-\\(x\to x_0-0)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0^-)=f(x_0-0)=A.$

右极限 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x: \underline{x_0<x<x_0+\delta},$

$$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon. \quad (0<x-x_0<\delta)$$

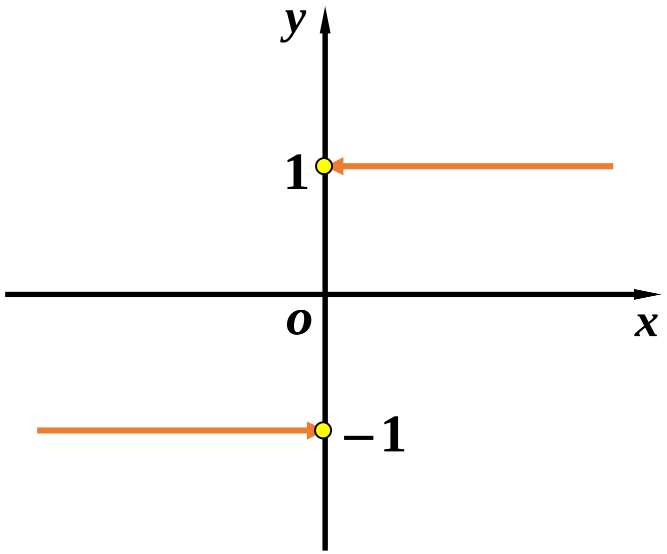
记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x\to x_0+0)}} f(x)=A$ 或 $f(x_0^+)=f(x_0+0)=A.$

注意:$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$

$$=\{x \mid x_0<x<x_0+\delta\}\cup\{x \mid x_0-\delta<x<x_0\}$$

定理 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

例1 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在



证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to -0}(-1)=-1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +0}1=1$

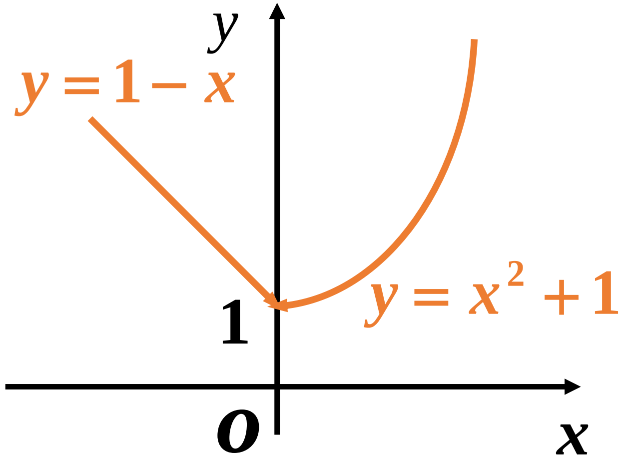
左右极限存在但不相等, $\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

例2 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

解 $x=0$是函数的分段点,两个单侧极限为

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1-x)=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1,$$



左右极限存在且相等,

$$故\ \lim_{x\to 0} f(x)=1.$$

用“$\varepsilon-\delta$定义”验证函数极限:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,\ \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A)$$

关键是如何由 $\forall\varepsilon>0$,寻找 δ?

具体方法: 从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发，解不等式

得: $0<|x-x_0|<$关于ε的式子,

(或: $0<x-x_0<$关于ε的式子,

: $0<x_0-x<$关于ε的式子)

则$\delta=$关于ε的式子.

例3 证明下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (C为常数); (2) $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;

证 (1) $\forall\varepsilon>0$, 由$|f(x)-A|=|C-C|<\varepsilon$ 恒成立,

可任取一个$\delta>0$, $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$,

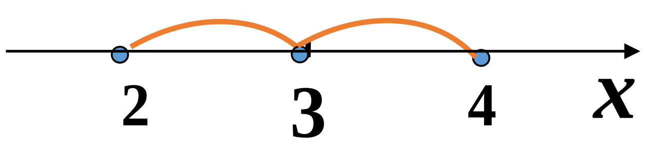
有$|f(x)-A|=|C-C|<\varepsilon$. $\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$.

(2) $\forall\varepsilon>0$, 由$|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$,

取$\delta=\varepsilon>0$, $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta$,

有$|f(x)-A|=|x-x_0|<\varepsilon$. $\therefore$ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$;



证 $\forall\varepsilon>0$,

由 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}\right|$ 　　限制 $0<|x-3|<1$,

$(2<x<3<x<4)$

$=\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|<\dfrac{1}{6}\left|\dfrac{x-3}{2+3}\right|=\dfrac{1}{30}|x-3|<\varepsilon$, 　$\Rightarrow |x-3|<30\varepsilon$,

取 $\delta=\min\{1,\ 30\varepsilon\}$, 　$\forall x: 0<|x-3|<\delta$,

有 $\left|\dfrac{x-3}{x^2-9}-\dfrac{1}{6}\right|<\varepsilon$ ， $\therefore \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{1}{6}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=0$. $\Rightarrow 0<x-2<\varepsilon^2$.

证 $\forall\varepsilon>0$，由 $\left|\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}-0\right|=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$

$$=\frac{x-2}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x}+\sqrt{2})}<\frac{x-2}{\sqrt{2}\,\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}$$

$<\sqrt{x-2}<\varepsilon$. 取 $\delta=\varepsilon^2>0$, $\forall x: 0<x-2<\delta$,

有 $\left|\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}-0\right|<\varepsilon$. $\therefore \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=0$.

二. 函数在无穷远处的极限

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 有定义，A 为定常数.

当 $x \to +\infty$ 时，　$f(x) \xrightarrow{?} A$.

一般地，如果当自变量 x 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 无限地趋近于某个确定常数 A，则称函数 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时存在极限 A.

问题：如何用数学语言刻划两个“无限趋近”.

$|f(x)-A|<\varepsilon$，表示 $|f(x)-A|$ 任意小;

$\exists X>0, \forall x>X$，表示 $x \to +\infty$ 的过程.

定义2 ($\varepsilon - X$)设 $f(x)$ 在 $x \geq a$ 有定义，A 为常数.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，$\forall x > X$，$\Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$.

则称 $f(x)$ 在 $x \to +\infty$ 时存在极限 A.

记作 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A \, (x \to +\infty)$.

类似地，有 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x < -X, \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

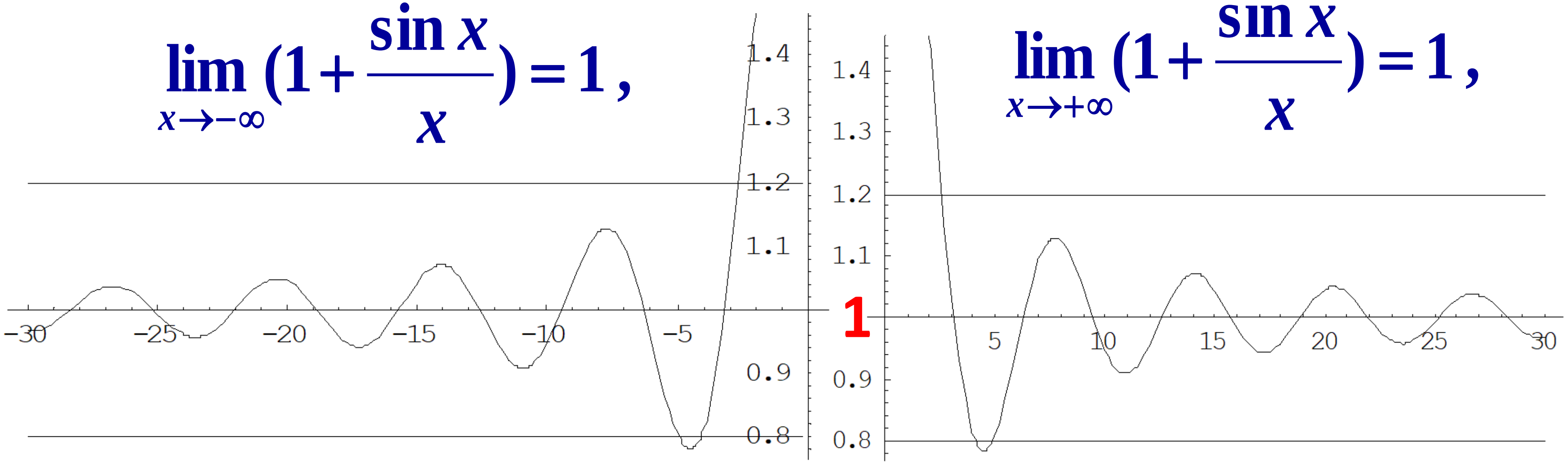
$$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x : |x| > X, \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

三者之间的关系

定理 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x).$

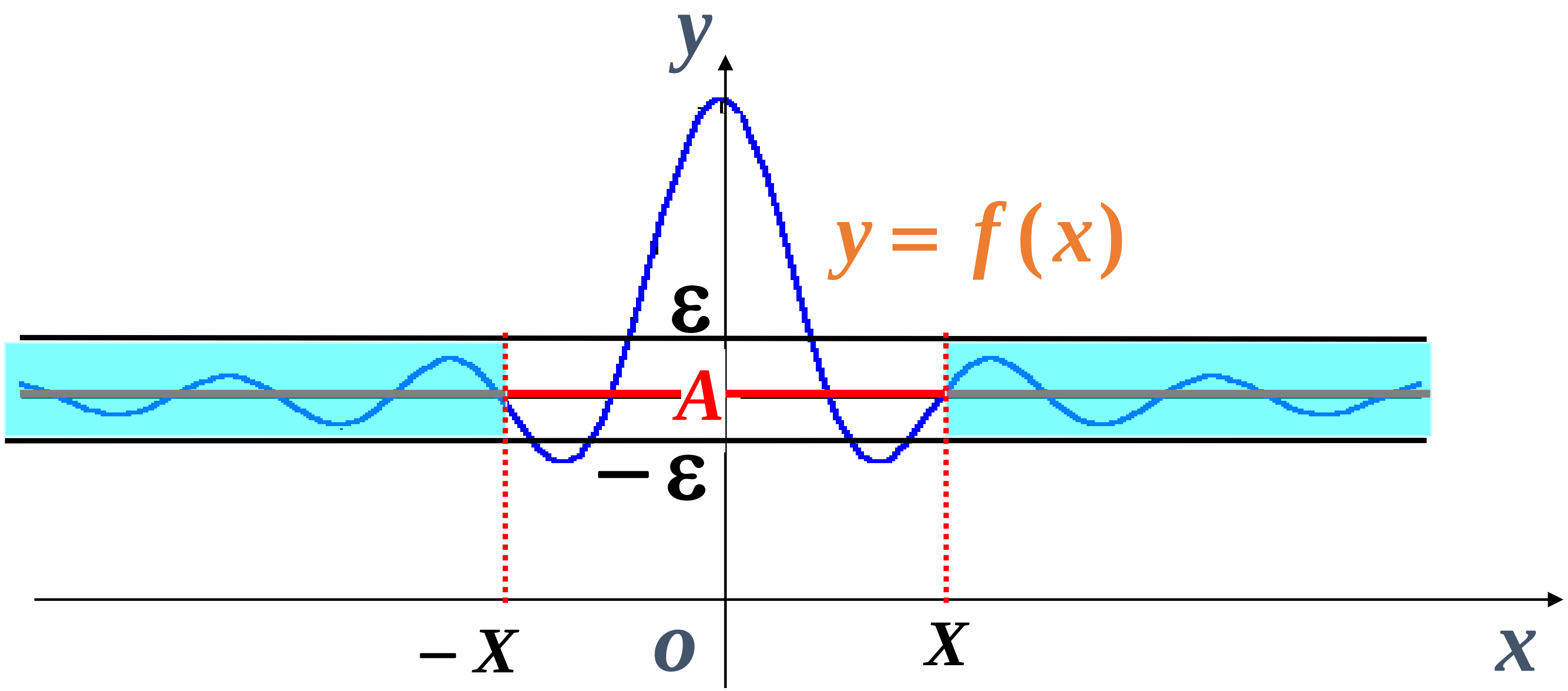
例如： $\therefore\ f(x)=1+\dfrac{\sin x}{x}\to 1\,(x\to\infty).$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1,$ $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{\sin x}{x})=1,$



几何解释: 以 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 为例 $\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,\forall x:|x|>X,\Rightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$



当 $x<-X$ 或 $x>X$ 时, 函数 $y=f(x)$ 的图形完全落在以直线 $y=A$ 为中心线, 宽为 2ε 的带形区域内

用“$\varepsilon - X$定义”验证函数极限:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad (\text{或} \lim_{x\to-\infty} f(x)=A, \ \lim_{x\to\infty} f(x)=A)$$

关键是如何由 $\forall\varepsilon>0$,寻找 X?

具体方法: 从 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 出发,解不等式

得: $x>$ 关于ε的式子,

(或: $x<-$ 关于ε的式子,

: $|x|>$ 关于ε的式子)

则 $X=$ 关于ε的式子.

例4 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x+6}{x^3-5x+1}=1.$ $\Rightarrow x>\sqrt{5+3/\varepsilon}\,,$

证 $\forall\varepsilon>0,$ 由 $\left|\dfrac{x^3-3x+6}{x^3-5x+1}-1\right|=\left|\dfrac{2x+5}{x^3-5x+1}\right|$

(若 $x>5$) $<\dfrac{3x}{x^3-5x}=\dfrac{3}{x^2-5}<\varepsilon.$

取 $X=\max\{5,\sqrt{5+3/\varepsilon}\}>0,\quad \forall x>X,$

有 $\left|\dfrac{x^3-3x+6}{x^3-5x+1}-1\right|<\varepsilon.$ $\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-3x+6}{x^3-5x+1}=1.$

例5 证明 $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \quad (a>1)$.

证 $\forall \varepsilon > 0\ (\varepsilon < 1)$, $\exists X = -\log_a \varepsilon > 0$,

$\forall x < -X$, $\quad \left|a^x - 0\right| = a^x < \varepsilon$.

$$\left[\ \Rightarrow x < \log_a \varepsilon = -(\underbrace{-\log_a \varepsilon}_{X})\ \right]$$

$\therefore \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

例6 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0 \quad (k>0\text{是常数})$.

证 $\forall\varepsilon>0,\ \exists X=\max\{1,\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}\}>0,$

$\forall|x|>X,\ \left|\frac{1}{x^k}-0\right|=\frac{1}{|x|^k}<\varepsilon.$

(不妨设 $|x|>1$) $\Rightarrow|x|>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}},$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^k}=0.$

三. 函数极限的性质

函数极限有六种形式,它们具有与数列极限完全平行的性质,以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 为例给出:

性质1（唯一性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则它必唯一.

（证明略）

性质2（局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，则$\exists M>0,$ $\exists\delta>0,\ \forall x: 0<|x-x_0|<\delta,$ 有 $|f(x)|\le M.$

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,$ 对 $\varepsilon=1,$ $\exists\delta>0,$ $\forall x: 0<|x-x_0|<\delta,$ 有 $|f(x)-A|<1.$

$\therefore |f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|\le 1+|A|.$

取 $M=1+|A|$，有 $|f(x)|\le M.$ **证毕**

性质3（局部保号性）若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0 \ (<0)$，

则 $\exists \delta > 0, \forall x \in U^0(x_0, \delta)$, 有 $f(x) > 0 \ (f(x) < 0)$.

证 $\because \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$，对 $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0,$

$\underline{\exists \delta > 0,}$ $\underline{\forall x : 0 < |x - x_0| < \delta,}$

有 $|f(x) - A| < \varepsilon,$

$$\Rightarrow \underline{f(x)} > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} \underline{> 0.}$$

证毕

作业：

习题1-3中 1，2，3，4