一、填充题（每小题 3 分，共 21 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1-2n}=$ ________.

2. 设 $y=x^{\sin x}$，则 $\mathrm{d}y=$ ________.

3. 当 $x\to 0$ 时，$\sin x-\tan x$ 是 $2x$ 的________阶无穷小（填写阶数).

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+7x)}{\sqrt{1+4x}-1}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

5. 已知 $f'(5)=11$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(5-h)-f(5+h)}{4h}=$ ________.

6. 抛物线 $y=x^2$ 上与直线 $x+4y=1$ 垂直的切线方程为________.

7. 设 $f(x)=(3x^2+1)e^x$，则 $f^{(20)}(0)=$ ________.

二、 选择题（每小题 3 分，共 21 分）

1. 设函数 $f(x)$ 可导，则 $y=f\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ （

（A） $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ （B） $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

（C） $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　　（D） $f'\left(\sqrt{x^2+1}\right)\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

2．下列各组函数中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是相同函数的组是　　（　　）

（A） $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$， $g(x)=1$　　（B） $f(x)=x$， $g(x)=\sqrt{x^2}$

（C） $f(x)=x$， $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$　　（D） $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x+1}$， $g(x)=x$

3． $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\right]=$　　（　　）

（A） -1　　（B） 1　　（C） 0　　（D） ∞

4．关于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5}{2+e^{\frac{1}{x}}}$ 的值，结论正确的是　　（　　）

（A） $\dfrac{5}{2}$　　（B） 0　　（C） $\dfrac{5}{3}$　　（D）不存在

5．设函数 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，则 $y^{(100)}=$　　（　　）

（A） $\dfrac{100!}{2}\dfrac{1}{(x^2-1)^{101}}$　　（B） $\dfrac{100!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{101}}-\dfrac{1}{(x+1)^{101}}\right]$

（C） $\dfrac{100!}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^{101}}+\dfrac{1}{(x+1)^{101}}\right]$　　（D） $\dfrac{2^{100}100!\ x^{100}}{(x^2-1)^{101}}$

6．若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$， $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$　　（　　）

（A）必为无穷大量　　（B）必为无穷小量

（C）必为非零常数　　（D）极限值不确定

7． $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{\sqrt{2-2\cos x^2}}{x^2}$ 的　　（　　）

（A）连续点　　（B）可去间断点

（C）跳跃间断点　　（D）无穷间断点

三、计算下列极限（每小题 6 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan x\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{3n^2+\pi}+\dfrac{n}{3n^2+2\pi}+\cdots+\dfrac{n}{3n^2+n\pi}\right)$.

四、计算下列导数（每小题 6 分，共 18 分）

1．设 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ \ln(1-x^3), & x\le 0 \end{cases}$，求 $f'(x)$．

2．设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\ln\sqrt{1+t^2} \\ y=t-\arctan t \end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

3．设 $y=y(x)$ 是由 $e^{xy}+y^3-5x=0$ 所确定的隐函数，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$．

五、（本题满分 8 分）设$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-ax+b}{x^2-9}=-\dfrac{1}{6}$，求常数$a$和$b$．

六、（本题满分 8 分）设$x_1=6$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$．证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限值．

七、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(1)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0$．

证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=2$．