

南京信息工程大学 试卷

2019—2020 学年 第一学期 线性代数 课程期末试卷 (B 卷)

本试卷共 3 页; 考试时间 120 分钟; 出卷时间 2019 年 12 月

请将所有答案(含填空、选择)写到《试卷答题册》上相应位置!

一、填空题(每小题 3 分, 共 15 分. 请将答案填在答题册上对应题号后面的横线上)

(1) 已知 $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 且 A 的秩为 2, 则 $a =$ _____.

(3) 已知三维向量空间 R^3 的基为 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_3 = (0, 1, 1)^T$, 则向量 $\beta = (1, 1, 1)^T$ 在此基下的坐标是_____.

(4) 设 3 阶矩阵 A 的特征值分别为 1, 2, 3, 则 $|A^2 - 3E| =$ _____.

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, 且 $A + kE$ 是正定矩阵, 则 k 的取值范围是_____.

二、选择题(每小题 3 分, 共 15 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个符合题目要求, 请将所选项前的字母填在答题册上对应题号后面的横线上)

(1) 下列等式正确的是().

(A) $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix};$ (B) $\begin{vmatrix} a & 2a \\ 3a & 4a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$

(C) $\begin{vmatrix} x & y \\ z & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \\ z & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & -a \end{vmatrix};$ (D) $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 3a & 4 \end{vmatrix} = -a \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$

(2) 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则下列向量组中线性无关的是().

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$; (B) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$;
 (C) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$; (D) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_4 - \alpha_1$.

(3) 设 A 为 3 阶矩阵, 且 $B = A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 关于 A^T, B^T 的说法, 正确的是 ().

- (A) A^T 的第 2 行乘以 2 得到 B^T ; (B) A^T 的第 2 列乘以 2 得到 B^T ;
 (C) A^T 的第 2 行乘以 $\frac{1}{2}$ 得到 B^T ; (D) A^T 的第 2 列乘以 $\frac{1}{2}$ 得到 B^T .

(4) 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, A 的秩 $R(A) = r$, 则齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充要条件是 ().

- (A) $r > n$; (B) $r < n$; (C) $r > m$; (D) $r < m$.
 (5) n 阶方阵 A 有 n 个不同的特征值是与对角阵相似的 ().

- (A) 充分必要条件; (B) 充分非必要条件;
 (C) 必要非充分条件; (D) 既非充分也非必要条件.

三、计算题 (每小题 6 分, 共 18 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤, 请直接在答题册对应题号下面的空白处作答)

(1) 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & -8 & 2 \end{vmatrix}$, M_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的余子式, 求 $M_{21} + M_{22} + M_{23} + M_{24}$.

(2) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, 求 A^2 , A^n ($n \geq 3$ 为正整数).

(3) 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值分别为 1, -1, 0, 对应于 1, -1 的特征向量依次为 $p_1 = (1, 2, 2)^T$, $p_2 = (2, 1, -2)^T$, 求 A 的属于特征值 0 的特征向量.

四、(本题满分 10 分) 设 $A + B = AB$, 且 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵 B .

五、(本题满分 10 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, 求该矩阵的秩以及列向量组的一个极大无关组, 并把其余列向量用该极大无关组线性表示.

六、(本题满分 10 分) 当 λ 取何值时, 线性方程组
$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$$
 有

唯一解、无解、无穷多解? 当方程组有无穷多解时求出它的通解.

七、(本题满分 12 分) 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 9x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$,

(1) 求正交变换 $x = Qy$ 化二次型为标准形;

(2) 判断此二次型是否正定.

八、(本题满分 10 分) 已知 A 为 n 阶矩阵.

(1) 若 A 满足 $A^2 = E$, 证明: $R(A+E) + R(A-E) = n$.

(2) 若 $|A| = -1$ 且 $AA^T = E$, 证明: $|A+E| = 0$.