一、填空题

1. $x=1或x>2$； 2. $f(x)=\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{ac}{x}-bcx\right)$； 3. $\dfrac{1}{3}$； 4. $e^{-\frac{1}{3}}$；

5. $-\dfrac{3}{2}$； 6. $\ln 2,\ 1$； 7. e^{2a}； 8. $\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

二、选择题

1 . A 2. C 3. D 4. B 5. B 6. D 7. C 8. A

三、证明题

1. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+1}=0$.

证：$\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+1}-0\right|<\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. $\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时，有 $\left|\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+1}-0\right|<\varepsilon$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}+1}=0$.

2. 用函数极限的定义证明 $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x}=\sqrt{5}$.

证：为了保证 $\sqrt{x}$ 有意义，需要 $x\geq 0$，即 $x-5\geq -5$. 不妨要求 $|x-5|<5$.

当 $x\to 5$ 时，有 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{5}\right|=\dfrac{|x-5|}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}<\dfrac{1}{\sqrt{5}}|x-5|$. 对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{\sqrt{5}\varepsilon,5\right\}$，

当 $0<|x-5|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt{x}-\sqrt{5}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{x}=\sqrt{5}$.

四、计算题

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+x^2+x-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)}{(1+x+x^2)}=-1$

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+x)}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2}=0$

3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^n(-2)+3^n\cdot 3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\cdot(-2)+3}=\dfrac{1}{3}$

4. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{2n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{2n+\sqrt{n}}\right)$.

解：因为$\frac{n}{2n+\sqrt{n}} \le \frac{1}{2n+\sqrt{1}}+\frac{1}{2n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2n+\sqrt{n}} \le \frac{n}{2n+\sqrt{1}}$，

又有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+\sqrt{1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+\sqrt{\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$，

所以由夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+\sqrt{1}}+\frac{1}{2n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{2n+\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}$.

五、设$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，求常数$a$和$b$.

解：$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}=5$，则$a+b+1=\lim\limits_{x\to1}(x^2+ax+b)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{1-x}(1-x)=0$.

将$b=-a-1$代入，有$5=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{1-x}=-\lim\limits_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)+a(x-1)}{x-1}$

$=-\lim\limits_{x\to1}(x+1+a)=-(2+a)$. 所以$a=-7$，$b=6$.

六、已知$x_1>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$，$n\in N^+$。证明：数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限值。

解：因为$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\ge\sqrt{2}$，所以数列$\{x_n\}$有下界.

又$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})-x_n=-\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{x_n}=\frac{-x_n^2+2}{2x_n}\le0$，所以$x_{n+1}\le x_n$. 因此$\{x_n\}$单调减少.

故由单调有界准则知，数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$，两边同时取极限可得$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$，所以$a=\pm\sqrt{2}$.

又因为$x_n>0$，所以$a=\sqrt{2}$.