南京信息工程大学第一学期

《高等数学》I-1 期中考试样卷

一、填空题(每题 3 分，共 15 分)

1、函数 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ 的定义域 $\underline{\{x\mid x>-1,且x\neq 0\}}$.

2、$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2+n}\right)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$.

3、已知 $f'(3)=2$，那么 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3+h)}{2h}=$ $\underline{-2}$.

4、若当 $x\to 0$ 时，有 $\ln\dfrac{1-ax^2}{1+ax^2}\sim\sin^2(\sqrt{6}x)$，则 $a=$ $\underline{-3}$.

5、已知 $f(x)=\sin x+\cos x$，则 $f^{(n)}(x)=$ $\underline{\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{n\pi}{2}\right)}$.

二、选择题(每题 3 分，共 15 分)

1、$f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处（ C ）

(A) 有定义　（B）极限存在　（C）左极限存在　（D）右极限存在

2、数列 $\{x_n\}$ 有界是它收敛的（ B ）

（A) 充分但不必要条件　（B）必要但不充分　（C）充要条件　（D）不充分也不必要条件

3、当 $x\to 1$ 时，$1-x$ 是比 $1-x^2$（ D ）

A、 高阶的无穷小;　B、 低阶的无穷小;

C、 等价无穷小;　D、 同阶但不等价无穷小.

4、设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\cos(xy)=e-1$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为(A)

A、 $x+y-1=0$　B、 $x-y-1=0$

C、 $-x+y-1=0$　D、 $x+y+1=0$

5、由 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f'(0)\neq 0$， $f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（ C ）

（A）连续点　（B）第二类间断点　（C）第一类间断点　（D）连续点或间断点不能由此决定

三、计算题(每题 6 分，共 30 分)

1、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

2、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\sin 2x^3}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{6(1+x^2)}=-\frac{1}{6}\ .$$

3、设 $f(x)=(x^2-a^2)g(x)$，其中 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续，求 $f'(a)$.

解： $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x^2-a^2)g(x)}{x-a}=2ag(a).$$

4、$y=f(x^2)$， $f'(x)=\arctan x^2$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x^2)\cdot 2x=\arctan(x^4)\cdot 2x$，

代入 $x=1$，得 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=2\arctan 1=\dfrac{\pi}{2}$.

5、求由参数方程 $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的二阶导数.

解： $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\cos t}{-2\sin t}=-\dfrac{1}{2}\cot t$，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(-\frac{1}{2}\cot t\right)'\cdot\frac{1}{(2\cos t)'}$$

$$=\frac{1}{2}\csc^2 t\cdot\frac{1}{-2\sin t}=-\frac{1}{4}\csc^3 t.$$

四、 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-bx+2\right)=0$，求 a,b．（8 分）

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-bx+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}\right)^2-(bx-2)^2}{\sqrt{x^2+ax+1}+bx-2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-b^2\right)x^2+\left(a+4b\right)x-3}{\sqrt{x^2+ax+1}+bx-2}=0,$$

所以

$$\begin{cases}1-b^2=0,\\ a+4b=0,\end{cases}\quad 解得\ \begin{cases}b=1.\\ a=-4.\end{cases}\qquad (b=-1舍去)$$

五、(**本题 8 分**) 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与 $y=\sin x$ 相切，a，b 为常数，且 $ab\neq 0$，试求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)+f(bx)}{\sin x}$.

解：由题设 $f(0)=\sin 0=0$，$f'(0)=(\sin x)'\big|_{x=0}=1$，

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)+f(bx)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)+f(bx)}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[a\cdot\frac{f(ax)-f(0)}{ax}+b\cdot\frac{f(bx)-f(0)}{bx}\right]=af'(0)+bf'(0)=a+b$$

六、设 $f(x)=\begin{cases}e^{x^3},x\le 1,\\ ax+b,x>1,\end{cases}$ 问 a,b 取何值时 $f'(1)$ 存在. （8 分）

解： $f'(1)$ 存在，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续. 又因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}e^{x^3}=e=f(1),$$

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(ax+b)=a+b,$$

所以 $a+b=e$.

因为
$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x^3}-e}{x-1}=3e,$$
$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-e}{x-1}=a,$$

所以 $a=3e$. 从而 $b=-2e$.

七、设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f''(0)=4$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$. （8 分）

解： 由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，可得 $f(0)=0$，且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0,$$

故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)=2.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{x}{f(x)}\cdot\frac{f(x)}{x^2}}=e^2.$$

八、已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$.

（2）存在两个不同的点 η，$\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.（8 分）

证明：（1）令 $F(x)=f(x)+x-1$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，又

$$F(0)=f(0)-1=-1<0,\quad F(1)=f(1)=1>0,$$

所以由零点定理，得：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

（2）在区间 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别对 $f(x)$ 用 Lagrange 中值定理得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi},\qquad \eta\in[0,\xi],$$

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi},\qquad \zeta\in[\xi,1],$$

则

$$f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}\cdot\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-(1-\xi)}{f(\xi)}=1.$$