高等数学（下）

南京信息工程大学 数学与统计学院
大学数学部 高等数学教学团队

第六节 曲面及其方程

曲面及其方程

教学目标

- 掌握曲面的概念及基本问题
- 掌握旋转曲面，柱面方程
- 掌握常用二次曲面
- 了解截痕法、伸缩法

重难点

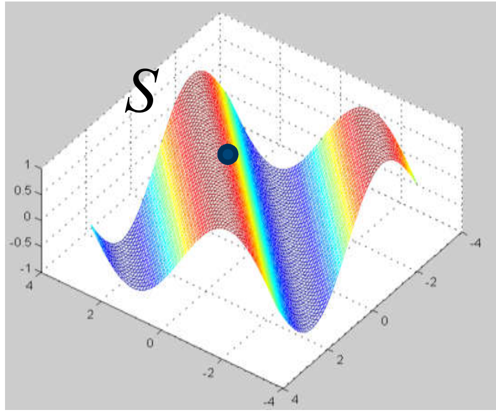
重点： 旋转曲面

- 柱面方程

难点： 旋转曲面方程

- 截痕法，伸缩法

一、曲面的基本问题



复习：空间曲面方程的定义

三元方程 $F(x,y,z)=0$ 与曲面 S 的关系

（1） 曲面 S 上的任意点的坐标都满足方程$F(x,y,z)=0$；

（2） 不在曲面S 上的点的坐标不满足方程$F(x,y,z)=0$，

则 $F(x,y,z)=0$ 叫做曲面S 的方程，

曲面S 叫做方程$F(x,y,z)=0$的图形.

提出问题：空间解析几何中曲面研究哪些**基本问题**?

球心为 $p_0(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 r 的球面方程为：

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2.$$

将球面方程展开可得

$$\boxed{x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0}$$

它是无 xy, yz, xz项且平方项系数相等的三元二次方程.

例1. 方程$x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$,

表示球心为$p_0(1,-2,0)$, 半径为$r=\sqrt{5}$的球面.

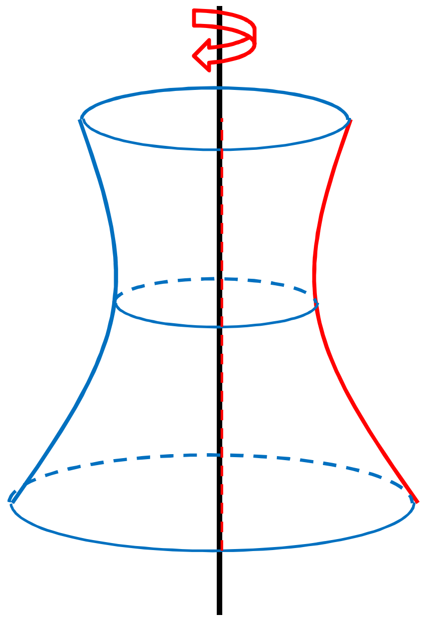
空间解析几何中研究曲面有**两个基本问题**:

(1) 已知曲面作为点的几何轨迹时，建立曲面的方程;

(2) 已知x,y,z的一个方程时，研究所表示的曲面形状.

二、旋转曲面

以一条平面曲线绕平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做**旋转曲面**.



旋转曲线称为**母线**，

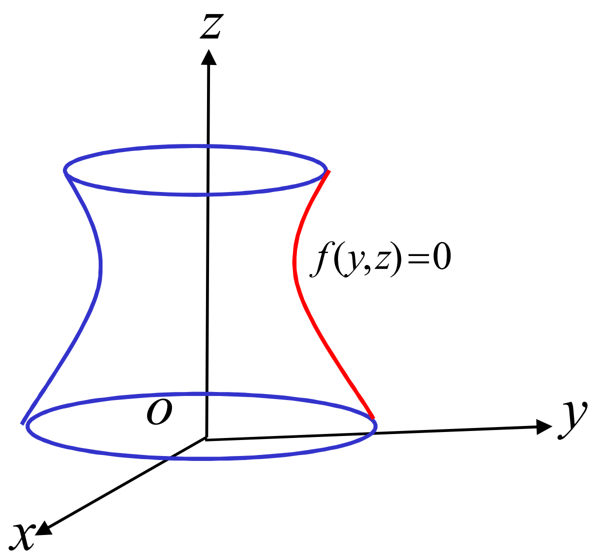
定直线称为**旋转轴**.

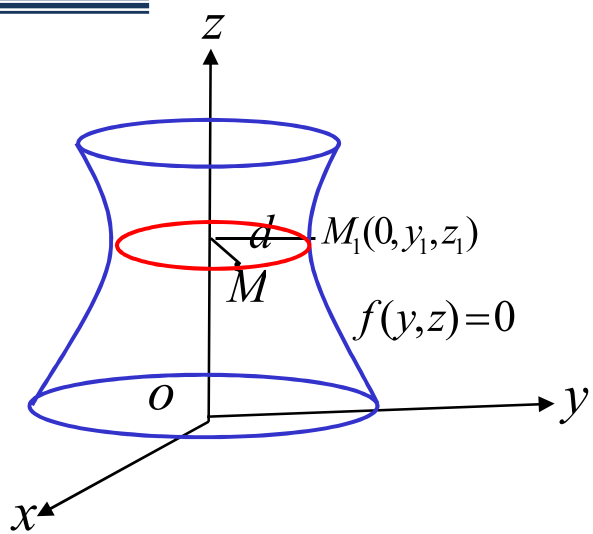
旋转曲面的特点：

任何一个与旋转轴垂直的平面与该曲面的交线为一个圆.

讨论以坐标轴为旋转轴，母线在坐标平面上的**旋转曲面**方程：

设在 yOz 坐标面上有一已知曲线 $C : f(y,z)=0$，将 C 绕 z 轴旋转一周，就得到旋转曲面，求其方程？





解 任取旋转曲面上一点$M(x,y,z)$，

必存在点$M_1(0,y_1,z_1)\in C$， 使得

M是由点 M_1绕 z 轴旋转而来, 则

$$\begin{cases} f(y_1,z_1)=0 \\ z=z_1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=|y_1| \end{cases}$$ ，消去y_1,z_1 得 $$\boxed{f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0}$$

——旋转曲面方程

同理可得，yOz面上曲线C：$f(y,z)=0$

绕 y轴旋转所成的**旋转曲面**方程为：$f\left(y,\pm\sqrt{x^2+z^2}\right)=0$

xOy面上曲线C：$g(x,y)=0$

绕 x轴旋转所成的**旋转曲面**方程为：$g\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕 y轴旋转所成的**旋转曲面**方程为：$g\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$

xOz面上曲线C：$h(x,z)=0$

绕 x轴旋转所成的**旋转曲面**方程为：$h\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$

绕 z轴旋转所成的**旋转曲面**方程为：$h\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$

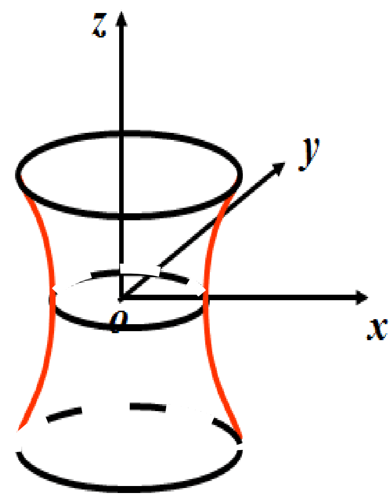
例2 将下列曲线绕对应轴旋转一周，求旋转曲面方程.

（1）将 xOz 坐标面上的曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周；

解 (1) xOz坐标面上双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

绕 z 轴旋转的旋转曲面方程：

$$\boxed{\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$ ——旋转单叶双曲面



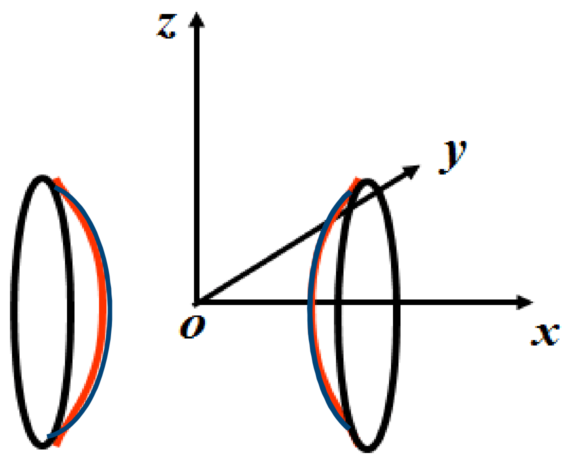
例2 将下列曲线绕对应轴旋转一周，求旋转曲面方程.

（1）将 xOz 坐标面上的曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转一周；

解 (1) xOz 坐标面上双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

绕 x 轴旋转的旋转曲面方程：

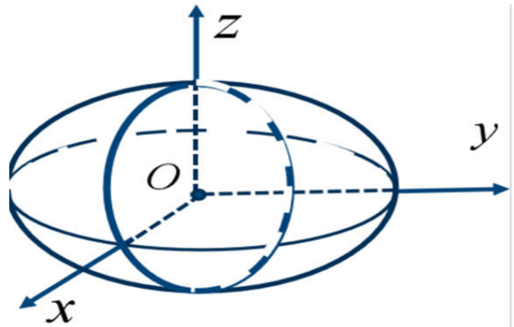
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1}$$ ——旋转双叶双曲面



例2　将下列曲线绕对应轴旋转一周，求旋转曲面方程.

（2）椭圆$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$分别绕$y$轴和$x$轴旋转一周；

解 (2) xOy 坐标面上椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$



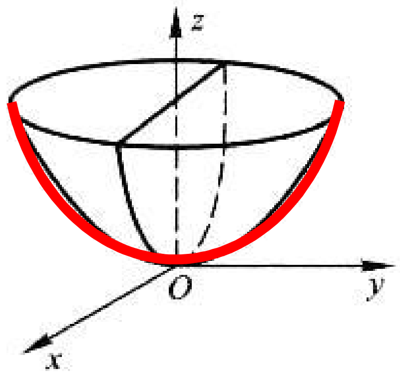
绕 y轴旋转的旋转曲面方程：$\boxed{\dfrac{x^2+z^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1}$

绕x轴旋转的旋转曲面方程：$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2+z^2}{b^2}=1}$ 旋转椭球面

例2 将下列曲线绕对应轴旋转一周，求旋转曲面方程.

（3）抛物线 $\begin{cases} y^2 = 2z \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周.

解 (3) yOz坐标面上抛物线 $y^2 = 2z$

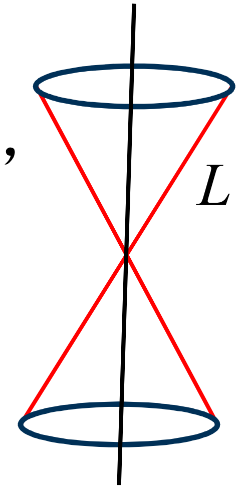


绕 z 轴旋转的旋转曲面方程:

$\boxed{x^2 + y^2 = 2z}$ ——旋转抛物面

一般圆锥面的方程

定义: 直线 L 绕另一条与 L 相交的直线旋转一周，所得旋转曲面叫做**圆锥面**.



其中，直线的交点称为**圆锥面的顶点**；

两直线的夹角 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 称为**圆锥面的半顶角**.

例3 试建立顶点在坐标原点 O, 旋转轴为 z 轴, 半顶角为 α 的**圆锥面**的方程.

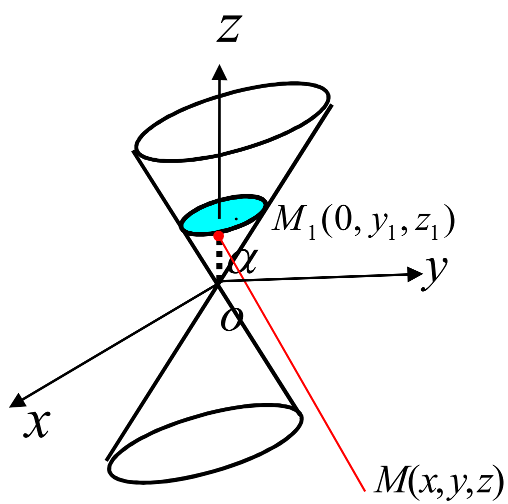
解 yOz 坐标面内直线 $L: z = y\cot\alpha$,

旋转轴为 z 轴.

故圆锥面方程 $z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$

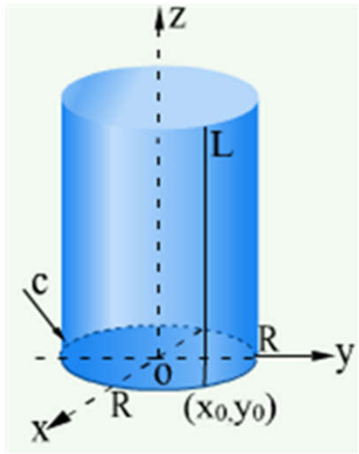
即 $z^2 = \left(x^2+y^2\right)\cdot\cot^2\alpha$ $\quad a = \cot\alpha$

即 $\boxed{z^2 = a^2\left(x^2+y^2\right)}$ ——**圆锥面**



三、柱面

引例 方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面?



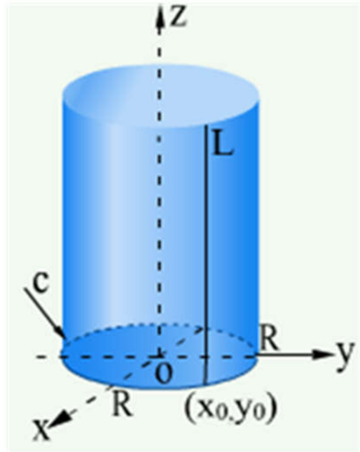
解 方程 $x^2+y^2=R^2$ 在 xOy 面上表示圆心在原点、半径为 R 的圆.

在直角坐标系中，通过 xOy 面内圆 $x^2+y^2=R^2$ 上一点 $M(x_0,y_0,0)$ 平行于 z 轴的直线 L 都在曲面上.

则直线 L 沿 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 平行移动而形成的曲面叫做**圆柱面**，

xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 称为**准线**，

平行于 z 轴的直线 L 称为**母线**.

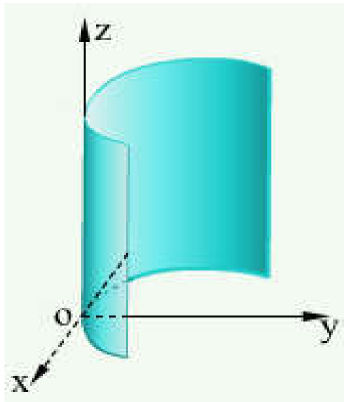


类似地就可得到**一般柱面**的定义如下：

定义：平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的曲面称为**柱面**.

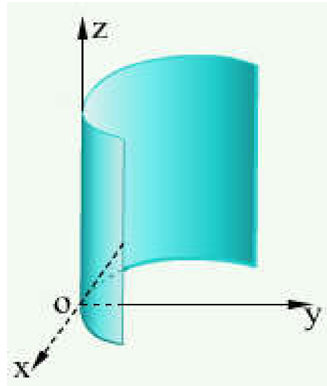
定曲线 C 称为柱面的**准线**；

动直线 L 称为柱面的**母线**.

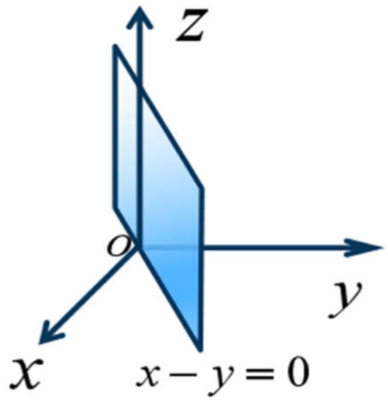


例 空间中方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面，其母线平行于 z 轴，其准线是 xOy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$.

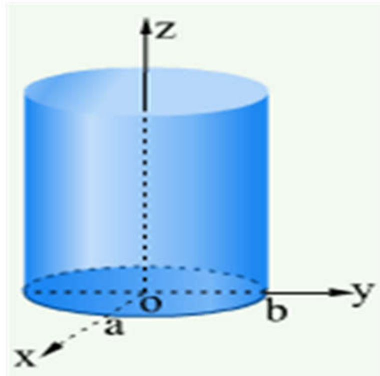
类似地，方程 $y^2=2x$ 为**抛物柱面**，母线平行于z 轴，准线是xoy 面上的抛物线 $y^2=2x$.



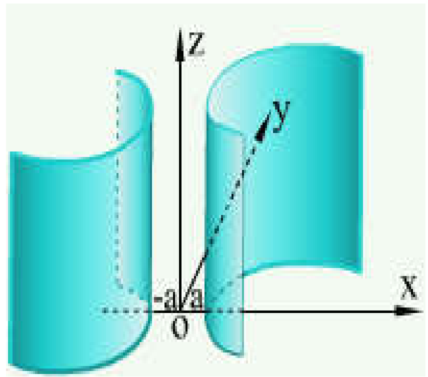
方程$x-y=0$表示母线平行于 z 轴的柱面，其准线是xoy 面上的直线 $x-y=0$，是一个过 z 轴的**平面**.



方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示母线平行于z轴的**椭圆柱面**，其准线是xoy面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$



方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$表示母线平行于$z$ 轴的**双曲柱面**，其准线是 xoy 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$



结论：从柱面方程看柱面的特征：

(1) 柱面方程 $F(x, y)=0$，母线是平行于 z 轴的直线，

准线是 xoy 面上的曲线 $C: F(x, y)=0$.

(2) 柱面方程 $G(x, z)=0$ ，母线是平行于 y 轴的直线，

准线是 xoz 面上的曲线 $C: G(x, z)=0$.

(3) 柱面方程 $H(y, z)=0$，母线是平行于 x 轴的直线，

准线是 yoz 面上的曲线 $C: H(y, z)=0$.

四、二次曲面

三元二次方程$F(x,y,z)=0$所表示的曲面称为二次曲面.

判断方程 $F(x,y,z)=0$ 所表示曲面的形状方法总结：

- 方法一：截痕法

用坐标面和平行于坐标面的平面与曲面相截，

考察其交线的形状，综合判断曲面的全貌.

➢ 方法二：伸缩变形法

设 S 是一曲面, 方程为 $F(x,y,z)=0$, S' 是将曲面 S 沿 x 轴方向伸缩 λ 倍所得的曲面.

若 $(x,y,z)\in S$, 则 $(\lambda x,y,z)\in S'$；

若 $(x,y,z)\in S'$, 则 $\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)\in S$ ⇨

曲面 S' 的方程

$$F\left(\frac{1}{\lambda}x,y,z\right)=0,$$

$$\forall\,(x,y,z)\in S'$$

例如 圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ **倍**，变成椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

常见的二次曲面有以下九种：

(1) 椭球面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$

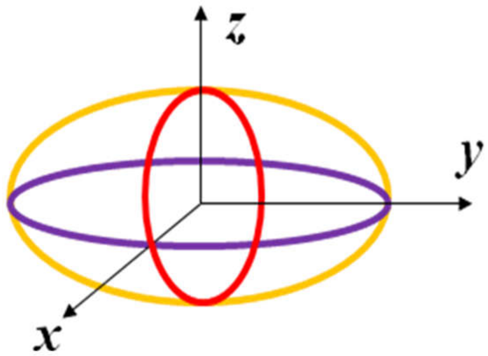
➢ 伸缩变形法：

球面在x轴、y轴或z轴方向伸缩而得的曲面.

$$x^2+y^2+z^2=a^2 \xrightarrow[\text{沿 }z\text{ 轴方向}]{\text{伸缩 }\frac{c}{a}\text{ 倍}} \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \xrightarrow[\text{沿 }y\text{ 轴方向}]{\text{伸缩 }\frac{b}{a}\text{ 倍}} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

球面　　旋转椭球面　　椭球面

- **截痕法：**

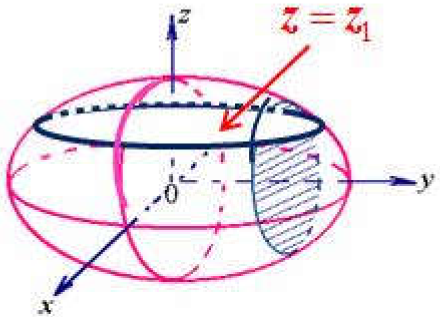


椭球面与三个坐标面的交线为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0\end{cases}$$

椭球面与平面 $z = z_1 \left(0 < |z_1| < c\right)$ 的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}\left(c^2 - z_1^{\ 2}\right)} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}\left(c^2 - z_1^{\ 2}\right)} = 1 \\ z = z_1 \end{cases},$$



随 $|z_1|$ 从 0 变到 c，椭圆长短半轴从大变小，最后椭圆缩为一点.

同理，椭球面与平面 $x = x_1 \left(0 < |x_1| < a\right)$ 或 $y = y_1 \left(0 < |y_1| < b\right)$ 交线也为椭圆.

椭球面的几种特殊情况：

1) 当 $a=b$ 时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 称为**旋转椭球面**，

可看作由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

旋转椭球面与椭球面的区别：

与平面 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为圆：$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2) \\ z=z_1 \end{cases}$.

2) 当 $a=b=c$ 时，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ 即 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 为球面.

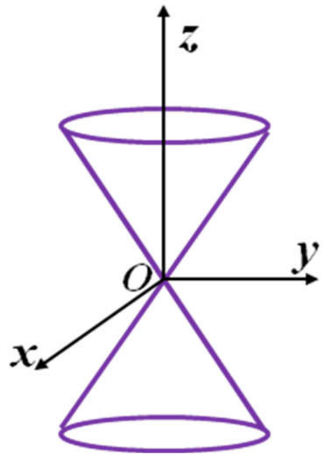
(2) 椭圆锥面： $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

空间中圆锥面$x^2+y^2=a^2z^2$沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍，

所得曲面的方程为 $x^2+\left(\dfrac{a}{b}y\right)^2=a^2z^2$

即为**椭圆锥面**

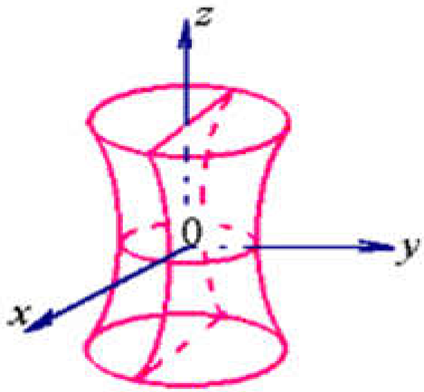
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2}$$



(3) 单叶双曲面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把 xOz 面双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转, 得**旋转单叶双曲面** $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$; 再沿 y 轴伸缩 $\dfrac{b}{a}$ 倍, 得**单叶双曲面**.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1}$$



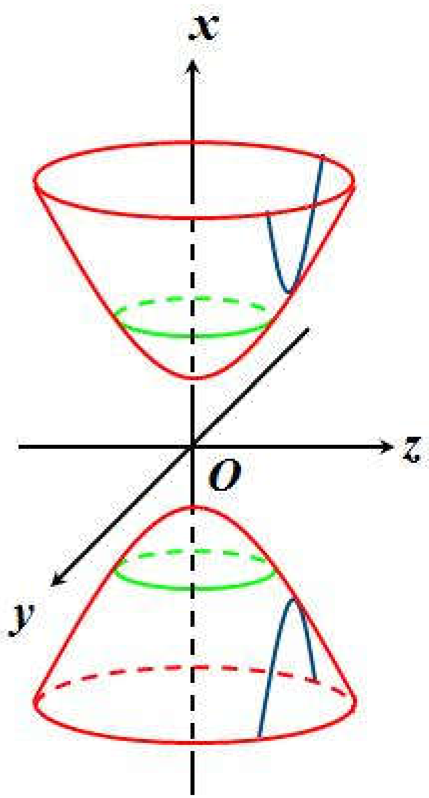
（4）双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

把 xOz 面上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 x 轴

旋转得旋转双叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$

再沿 y 轴方向伸缩 $\dfrac{b}{c}$ 倍得双叶双曲面.

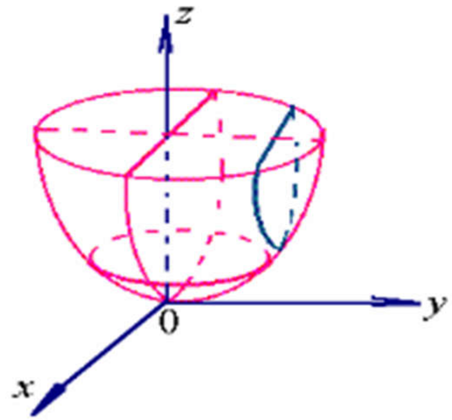
$$\boxed{\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1}$$



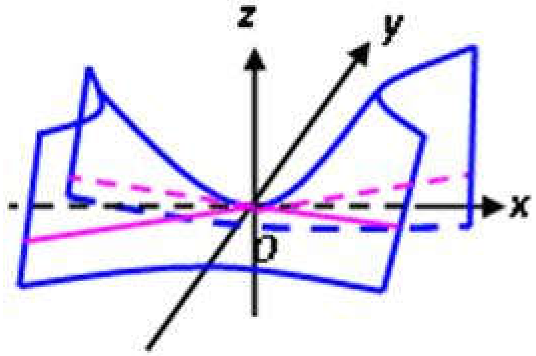
(5) 椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

把 xOz 面上的抛物线 $\frac{x^2}{a^2}=z$ 绕 z 轴旋转，得旋转抛物面 $\frac{x^2+y^2}{a^2}=z$，再沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍得椭圆抛物面.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z}$$



(6) 双曲抛物面(马鞍面)：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$



用截痕法来讨论它的形状.

用平面 $x=t$ 截曲面，截痕l 为

平面 $x=t$上的抛物线$-\dfrac{y^2}{b^2}=z-\dfrac{t^2}{a^2}$,

顶点坐标为$\left(t,0,\dfrac{t^2}{a^2}\right)$, 当 t 变化时, 顶点轨迹 L为平面 $y=0$

上的抛物线$z=\dfrac{x^2}{a^2}$. 从而以l为母线, L为准线母线l 的顶点

在准线L 上平行移动得到双曲抛物面.

还有三种二次曲面是以三种二次曲线为准线的柱面：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad x^2=ay$$

依次称为**椭圆柱面**、**双曲柱面**、**抛物柱面.**

（前面已经讨论过）

五、内容小结

- 旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

- 常用二次曲面的方程及其图形.

这世上

可能确实没有超级英雄，

不过是

无数人都在发一分光，

然后萤火汇成星河。