Fisica

Note di corso

Università degli Studi di Catania
Dipartimento di Matematica e Informatica
Anno Accademico 2025/2026

Autori
Emanuele Galiano
Andrea Leone
Sofia Lo Vecchio

Anno accademico

Anno Accademico 2025/2026

Versione: 30 gennaio 2026

Prefazione

Queste dispense sono nate come appunti personali per il corso di Fisica tenuto presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Catania tenuto dal Prof. Marco Ruggieri nell'anno accademico 2025/2026. L'obiettivo principale di questo materiale è stato fornire una risorsa personale di studio sulla parte teorica del corso, raggruppando concetti chiave, definizioni, teoremi, immagini ed esempi in unico documento.

Questo file non deve essere visto come un testo ufficiale o completo sull'argomento, in quanto potrebbero esserci errori, omissioni o imprecisioni. Invito pertanto chi legge questo documento a consultare le dispense ufficiali del corso proposte dal docente ed eventuali testi di riferimento consigliati. Inoltre, invito chiunque noti errori o abbia suggerimenti a contattarmi via email:

- **Email personale**: galianoo.emanuele@gmail.com,
- **Email universitaria**: emanuele.galiano@studium.unict.it;

oppure se ancora presente online, aprire una **issue** o una **pull request** nel repository GitHub associato a queste dispense:

`https://github.com/emanuelegaliano/Fisica`

In particolare, all'interno del repository GitHub sono presenti il codice open-source dei sorgenti LaTeX utilizzati per generare queste dispense, oltre a tutti i file di supporto come immagini, bibliografia e altro materiale utile.

Licenza

Questo documento, intitolato Fisica, è distribuito sotto licenza **Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International (CC BY-SA 4.0)**.

La presente licenza è stata scelta con l'obiettivo di favorire la diffusione, la condivisione e il riutilizzo del materiale didattico, garantendo al contempo il riconoscimento dell'autore originale e la preservazione della natura open delle opere derivate.

Diritti concessi

In conformità con i termini della licenza Creative Commons BY-SA 4.0, è consentito a chiunque di:

- copiare e ridistribuire il materiale in qualsiasi mezzo o formato;
- adattare, modificare e trasformare il materiale;
- utilizzare il materiale anche per scopi commerciali.

Tali diritti sono concessi a titolo gratuito e non possono essere revocati, purché siano rispettate le condizioni indicate nella sezione seguente.

Condizioni

L'utilizzo del materiale è subordinato al rispetto delle seguenti condizioni:

- **Attribuzione (BY):** deve essere fornita un'adeguata attribuzione dell'opera, citando l'autore originale, il titolo del documento e la fonte. L'attribuzione deve essere effettuata in modo ragionevole e non tale da suggerire che l'autore originale approvi l'uso o le modifiche apportate.
- **Condividi allo stesso modo (SA):** nel caso in cui il materiale venga modificato, trasformato o utilizzato per creare opere derivate, tali opere devono essere distribuite sotto la *stessa licenza* Creative Commons Attribution–ShareAlike 4.0 International.

Indice

Capitolo 1

Cinematica

La **cinematica** è il ramo della meccanica che si occupa dello studio del **moto dei corpi**, descrivendone le caratteristiche geometriche e temporali *senza analizzare le cause fisiche* che lo producono. In altre parole, la cinematica si concentra sullo studio di *come* un corpo si muove, prescindendo dalle forze o dalle interazioni responsabili del moto stesso.

Per poter descrivere quantitativamente il movimento di un corpo è necessario introdurre alcuni **concetti fondamentali**, quali il **sistema di riferimento**, la **posizione**, la **traiettoria**, la **velocità** e l'**accelerazione**. Tali grandezze permettono di costruire una descrizione matematica completa del moto, valida indipendentemente dalla natura fisica del corpo considerato.

Nello studio della cinematica, i corpi reali vengono spesso schematizzati come *punti materiali*, ovvero oggetti dotati di massa ma privi di estensione spaziale. Questa approssimazione risulta lecita quando le dimensioni del corpo sono trascurabili rispetto alle distanze percorse o quando la forma e la rotazione del corpo non influenzano in modo significativo il moto analizzato.

In questo capitolo verranno introdotti i concetti fondamentali della **cinematica del punto materiale**, partendo dalla definizione di sistema di riferimento e di posizione, per poi analizzare le grandezze cinematiche principali e le loro relazioni matematiche.

1.1 Sistema di riferimento e posizione

1.1.1 Vettori

Un vettore è caratterizzato da **modulo**, **direzione** e **verso**. Il **modulo** del vettore posizione $\vec{r}$, indicato con $|\vec{r}|$, rappresenta la distanza del punto materiale dall'origine del sistema di riferimento ed è dato da:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Tra le operazioni fondamentali sui vettori si ricordano:

- **Somma vettoriale**: $\vec{a} + \vec{b}$
- **Differenza vettoriale**: $\vec{a} - \vec{b}$
- **Moltiplicazione per uno scalare**: $\lambda\vec{a}$
- **Prodotto scalare**:
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$$

Il prodotto scalare è una grandezza *scalare* e risulta particolarmente utile nello studio delle grandezze cinematiche e dinamiche.

1.1.2 Sistema di riferimento

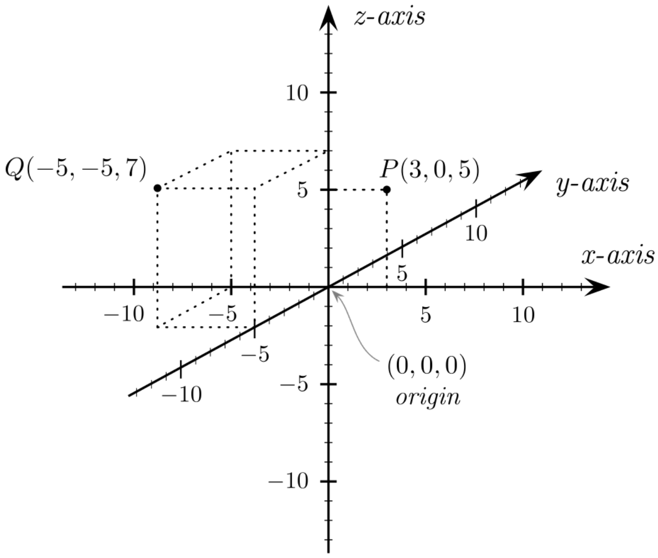

Figura 1.1: Esempio di sistema di riferimento cartesiano tridimensionale.

La descrizione del moto di un corpo non può prescindere dalla scelta di un **sistema di riferimento**. Un sistema di riferimento è costituito da:

- un **osservatore**;
- un **sistema di coordinate spaziali**;
- un **orologio** per la misura del tempo.

Ogni misura di posizione, velocità o accelerazione è sempre *relativa al sistema di riferimento adottato*. Di conseguenza, lo stesso fenomeno fisico può essere descritto in modo differente se osservato da sistemi di riferimento diversi.

Nel caso più semplice si utilizza un **sistema di riferimento cartesiano**. Nel moto unidimensionale è sufficiente introdurre un solo asse orientato, generalmente indicato con l'asse x, dotato di un'origine e di un verso positivo.

1.1.3 Posizione e vettore posizione

La **posizione** di un punto materiale è individuata, in generale, da un *vettore*, detto **vettore posizione**. Esso è definito come il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento con la posizione occupata dal punto materiale all'istante di tempo considerato.

Indicando con $\vec{r}(t)$ il vettore posizione, si ha:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Nel caso tridimensionale, il vettore posizione può essere espresso in coordinate cartesiane come:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{\imath} + y(t)\,\hat{\jmath} + z(t)\,\hat{k}$$

dove $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$ sono le coordinate del punto materiale lungo i tre assi cartesiani, mentre $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ sono i **versori** associati agli assi.

1.2 Traiettoria, legge oraria e velocità

1.2.1 Traiettoria

La **traiettoria** di un punto materiale è il *luogo geometrico* dei punti occupati dal corpo durante il suo moto in un dato sistema di riferimento. Essa rappresenta l'insieme delle posizioni assunte dal vettore posizione $\vec{r}(t)$ al variare del tempo.

Se la traiettoria è una linea retta si parla di *moto rettilineo*, mentre se è una curva il moto è detto *curvilineo*. La forma della traiettoria dipende dalla scelta del sistema di riferimento.

1.2.2 Legge oraria del moto

Per descrivere completamente un moto non è sufficiente conoscere la traiettoria, ma è necessario sapere *come la posizione varia nel tempo*. A tal fine si introduce la **legge oraria del moto**, definita come la relazione matematica:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse x, la legge oraria si riduce a:

$$x = x(t)$$

1.2.3 Velocità media e velocità istantanea

La **velocità media** è definita come il rapporto tra lo spostamento del punto materiale e l'intervallo di tempo impiegato:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Nel limite in cui l'intervallo di tempo tende a zero si ottiene la **velocità istantanea**, definita come:

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

La velocità istantanea è un vettore tangente alla traiettoria in ogni punto e rappresenta una delle grandezze fondamentali della cinematica.

1.3 Spostamento e accelerazione

1.3.1 Spostamento

Nel descrivere il moto di un punto materiale è importante distinguere tra **posizione** e **spostamento**. Lo **spostamento** è una grandezza vettoriale che descrive la variazione della posizione del punto materiale tra due istanti di tempo t_1 e t_2.

Indicando con $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$ i vettori posizione agli istanti iniziale e finale, il vettore spostamento $\Delta\vec{r}$ è definito come:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

Lo spostamento dipende *solo* dalla posizione iniziale e finale del punto materiale e non dal percorso seguito durante il moto. Per questo motivo, due moti differenti possono avere lo stesso spostamento.

Nel caso di un moto unidimensionale lungo l'asse x, lo spostamento si riduce a una grandezza scalare:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$$

È importante non confondere lo spostamento con la **distanza percorsa**, che rappresenta invece la lunghezza totale della traiettoria seguita dal punto materiale ed è una grandezza *scalare*.

1.3.2 Accelerazione media

Così come la velocità descrive la variazione della posizione nel tempo, l'**accelerazione** descrive la variazione della velocità nel tempo. L'**accelerazione media** è definita come il rapporto tra la variazione della velocità e l'intervallo di tempo in cui tale variazione avviene:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

dove:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)$$

L'accelerazione media è una grandezza **vettoriale** e può essere diversa da zero anche quando il modulo della velocità rimane costante, come accade nel moto circolare.

1.3.3 Accelerazione istantanea

Nel limite in cui l'intervallo di tempo tende a zero, si definisce l'**accelerazione istantanea** come:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Poiché la velocità è a sua volta la derivata temporale del vettore posizione, l'accelerazione può essere espressa anche come:

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}}$$

L'accelerazione istantanea fornisce una descrizione completa delle variazioni del moto, poiché tiene conto sia delle variazioni del *modulo* della velocità sia delle variazioni della sua *direzione*. Essa rappresenta una delle grandezze fondamentali della cinematica ed è alla base dello studio della dinamica.

1.4 Moti rettilinei

I **moti rettilinei** sono quei moti in cui la traiettoria del punto materiale è una *linea retta*. In questi casi, il moto può essere descritto completamente mediante una sola coordinata spaziale, generalmente indicata con x.

Tra i moti rettilinei rivestono particolare importanza il **moto rettilineo uniforme** e il **moto rettilineo uniformemente accelerato**, che rappresentano modelli fondamentali della cinematica.

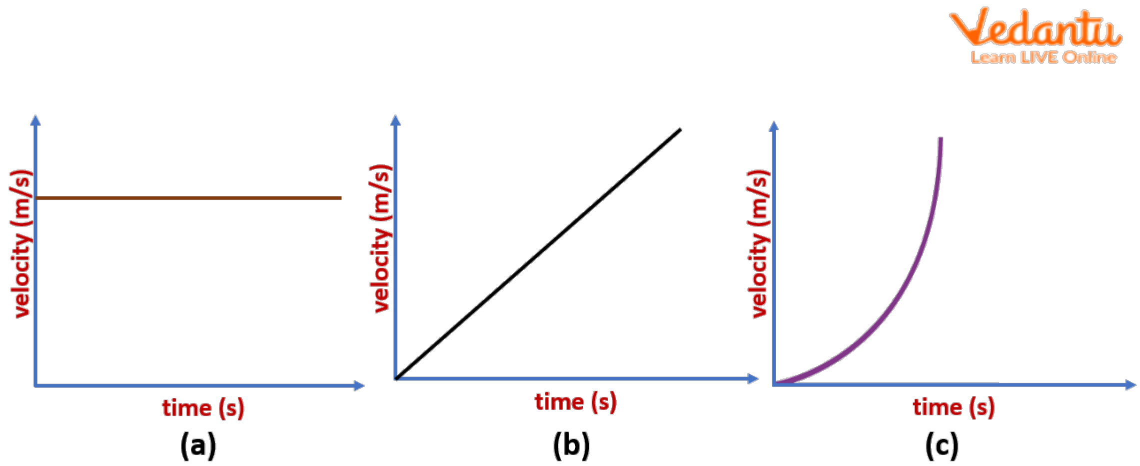

Figura 1.2: Grafici velocità–tempo per diversi tipi di moto: (a) **moto rettilineo uniforme**, caratterizzato da velocità costante nel tempo e accelerazione nulla; (b) **moto rettilineo uniformemente accelerato**, in cui la velocità varia linearmente nel tempo a causa di un'accelerazione costante; (c) **moto con accelerazione variabile**, nel quale la velocità cresce in modo non lineare nel tempo.

1.4.1 Moto rettilineo uniforme (MRU)

Il **moto rettilineo uniforme** è caratterizzato da una **velocità costante nel tempo**. Di conseguenza:

- l'accelerazione è nulla;
- il corpo percorre spazi uguali in tempi uguali.

Derivazione della legge oraria. Nel moto rettilineo uniforme la velocità è costante nel tempo. In forma differenziale, il legame tra posizione e velocità è espresso dalla relazione:

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

Integrando entrambi i membri tra un istante iniziale t_0 e un generico istante t, si ottiene:

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt$$

Poiché la velocità $\vec{v}$ è costante, essa può essere portata fuori dall'integrale:

$$\int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \vec{v}\int_{t_0}^{t} dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \vec{v}(t - t_0)$$

Da cui segue l'espressione della legge oraria vettoriale del moto rettilineo uniforme:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t - t_0)$$

Nel caso di moto unidimensionale lungo l'asse x, ponendo $t_0 = 0$ e indicando con x_0 la posizione iniziale, la legge oraria assume la forma scalare:

$$\boxed{x(t) = x_0 + vt}$$

dove:

- x_0 è la posizione iniziale;
- v è la velocità costante;
- t è il tempo.

Nel moto rettilineo uniforme la velocità istantanea coincide in ogni istante con la velocità media, infatti:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

poiché lo spostamento è direttamente proporzionale all'intervallo di tempo considerato.

Esempio: MRU

Un punto materiale si muove con velocità costante $v = 2\,\mathrm{m/s}$ e posizione iniziale $x_0 = 1\,\mathrm{m}$. Determinare la posizione al tempo $t = 4\,\mathrm{s}$.

Soluzione. Applicando la legge oraria:

$$x(4) = 1 + 2 \cdot 4 = 9\,\mathrm{m}$$

1.4.2 Moto rettilineo uniformemente accelerato (MRUA)

Il **moto rettilineo uniformemente accelerato** è caratterizzato da una **accelerazione costante**. In questo tipo di moto la velocità varia linearmente nel tempo, mentre la posizione varia quadraticamente.

Le equazioni fondamentali del MRUA sono:

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \end{aligned}$$

dove:

- x_0 è la posizione iniziale;
- v_0 è la velocità iniziale;
- a è l'accelerazione costante.

Derivazione della legge oraria. Nel moto rettilineo uniformemente accelerato l'accelerazione è costante. La relazione fondamentale tra velocità e accelerazione è:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Scritta in forma differenziale, essa diventa:

$$dv = a\,dt$$

Integrando tra un istante iniziale t_0 e un generico istante t, si ottiene:

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a\,dt$$

Poiché l'accelerazione a è costante:

$$v(t) - v(t_0) = a(t - t_0)$$

Indicando con $v_0 = v(t_0)$ la velocità iniziale e ponendo, senza perdita di generalità, $t_0 = 0$, si ricava la legge oraria della velocità:

$$\boxed{v(t) = v_0 + at}$$

Per ottenere la legge oraria della posizione, si utilizza la relazione fondamentale:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ovvero, in forma differenziale:

$$dx = v(t)\,dt = (v_0 + at)\,dt$$

Integrando tra $t_0 = 0$ e t, si ottiene:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t (v_0 + at)\,dt$$

da cui:

$$x(t) - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

e quindi la legge oraria del MRUA:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

Esempio: MRUA

Un punto materiale parte dalla posizione $x_0 = 0$ con velocità iniziale $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ ed è soggetto a un'accelerazione costante $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$. Determinare la posizione al tempo $t = 3\,\mathrm{s}$.

Soluzione. Utilizzando la legge oraria:

$$x(3) = 0 + 2 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 = 6 + 4.5 = 10.5\,\mathrm{m}$$

1.5 Moto balistico e moto parabolico

Il **moto balistico**, detto anche **moto parabolico**, è un caso di *moto curvilineo nel piano.* Esso descrive il movimento di un punto materiale soggetto unicamente alla forza di gravità, trascurando la resistenza dell'aria. In tali condizioni l'accelerazione è costante e diretta verticalmente verso il basso.

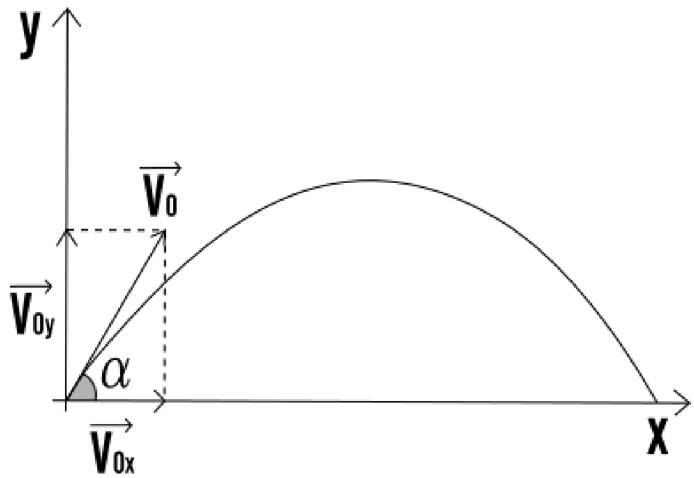

Figura 1.3: Moto balistico: un punto materiale viene lanciato con velocità iniziale $\vec{v}_0$ che forma un angolo α con l'orizzontale. La traiettoria seguita è una parabola.

Il moto balistico può essere interpretato come la **composizione di due moti indipendenti**:

- un moto rettilineo uniforme lungo la direzione orizzontale;
- un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la direzione verticale.

1.5.1 Sistema di riferimento e condizioni iniziali

Si consideri un sistema di riferimento cartesiano con asse x orizzontale e asse y verticale, con origine nel punto di lancio. La velocità iniziale $\vec{v}_0$ forma un angolo α con l'orizzontale ed è scomposta nelle componenti:

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}) = (v_0 \cos\alpha,\ v_0 \sin\alpha)$$

L'unica accelerazione agente è quella di gravità:

$$\vec{a} = (0,\ -g), \qquad g \simeq 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$$

1.5.2 Derivazione delle leggi orarie

Le componenti dell'accelerazione sono:

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g$$

Dalla relazione fondamentale della cinematica:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

si ottengono, separatamente lungo i due assi:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

Integrando rispetto al tempo:

$$v_x(t) = v_{0x}$$
$$v_y(t) = v_{0y} - gt$$

Per determinare le leggi orarie della posizione si utilizza la relazione:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

che lungo i due assi diventa:

$$\frac{dx}{dt} = v_{0x}$$
$$\frac{dy}{dt} = v_{0y} - gt$$

Integrando e ponendo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$, si ottengono le leggi orarie del moto balistico:

$$\boxed{\begin{aligned} &x(t) = v_{0x}\, t \\ &y(t) = v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}}$$

1.5.3 Equazione della traiettoria

Dalla legge oraria del moto orizzontale si ricava:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Sostituendo nella legge oraria verticale:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\, x - \frac{g}{2v_{0x}^2}\, x^2$$

Esplicitando le componenti della velocità iniziale:

$$\boxed{y = x \tan\alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2}$$

Tale equazione rappresenta una **parabola** con concavità rivolta verso il basso, da cui il nome di *moto parabolico*.

1.5.4 Tempo di volo, gittata e altezza massima

Il tempo di volo t_f si ottiene imponendo $y(t_f) = 0$:

$$v_{0y}t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_f = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$$

La **gittata** del moto è:

$$R = x(t_f) = v_{0x}t_f = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

L'**altezza massima** raggiunta dal punto materiale è:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

La gittata risulta massima per un angolo di lancio:

$$\alpha = 45°$$

Quota massima come caso di MRUA. Il moto verticale del punto materiale è un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $-g$. La legge oraria della velocità lungo l'asse y è:

$$v_y(t) = v_0 - gt$$

La quota massima viene raggiunta quando $v_y = 0$:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Sostituendo nella legge oraria della posizione:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

si ottiene:

$$\boxed{y_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

1.5.5 Esempio: lancio parabolico

Un punto materiale viene lanciato dal suolo con velocità iniziale $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$ e angolo $\alpha = 30°$. Determinare la gittata del moto.

Soluzione. Applicando la formula della gittata:

$$R = \frac{20^2}{9{,}81}\sin(60°) \approx 35{,}3\,\mathrm{m}$$

1.6 Moto circolare uniforme

Il **moto circolare uniforme** è un particolare caso di *moto curvilineo* in cui un punto materiale si muove lungo una **circonferenza** di raggio costante R con **velocità di modulo costante**.

Sebbene il modulo della velocità rimanga costante, il moto non è uniforme in senso vettoriale, poiché la *direzione* della velocità cambia continuamente nel tempo. Ne segue che l'accelerazione del punto materiale non è nulla.

1.6.1 Descrizione geometrica del moto

Si consideri un punto materiale che si muove su una circonferenza di raggio R e centro O. La posizione del punto è individuata dall'angolo $\theta(t)$ formato dal raggio vettore con un asse di riferimento fissato.

La lunghezza dell'arco di circonferenza percorso è legata all'angolo dalla relazione geometrica:

$$s = R\theta$$

1.6.2 Velocità angolare

Si definisce **velocità angolare** ω come la derivata temporale dell'angolo:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Nel moto circolare uniforme la velocità angolare è **costante**. L'equazione differenziale:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

integrata tra t_0 e t fornisce:

$$\theta(t) - \theta(t_0) = \omega(t - t_0)$$

Indicando con $\theta_0 = \theta(t_0)$ l'angolo iniziale, si ottiene la legge oraria angolare:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)}$$

Ponendo $t_0 = 0$:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 + \omega t}$$

La velocità angolare è legata al **periodo** T del moto (tempo necessario per compiere un giro completo) dalla relazione:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

1.6.3 Velocità tangenziale

La **velocità tangenziale** $\vec{v}$ è sempre tangente alla traiettoria circolare e perpendicolare al raggio vettore.

Il suo modulo si ottiene derivando l'arco di circonferenza rispetto al tempo:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Usando la relazione $s = R\theta$:

$$v = R\frac{d\theta}{dt}$$

Poiché $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, segue:

$$\boxed{v = R\omega}$$

Il modulo della velocità è costante, mentre la direzione varia continuamente.

1.6.4 Accelerazione centripeta

Nel moto circolare uniforme l'accelerazione è dovuta esclusivamente al cambiamento di direzione della velocità. Consideriamo due istanti molto vicini t_1 e t_2 e le corrispondenti velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, di uguale modulo v ma direzione diversa.

La variazione di velocità è:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

Dal triangolo delle velocità si ricava, per piccoli angoli $\Delta\theta$:

$$|\Delta\vec{v}| \simeq v\,\Delta\theta$$

Il modulo dell'accelerazione è definito come:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$$

Sostituendo:

$$|\vec{a}| = \lim_{\Delta t\to 0} v\,\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Nel limite $\Delta t \to 0$:

$$|\vec{a}| = v\,\frac{d\theta}{dt} = v\omega$$

Usando la relazione $v = R\omega$, si ottiene:

$$\boxed{a_c = R\omega^2 = \frac{v^2}{R}}$$

L'accelerazione è detta **centripeta** ed è sempre diretta verso il centro della circonferenza.

Poiché la velocità angolare è costante, l'**accelerazione tangenziale è nulla**.

1.6.5 Esempio: moto circolare uniforme

Un punto materiale si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $R = 2\,\mathrm{m}$ con velocità angolare $\omega = 3\,\mathrm{rad/s}$.

Determinare il modulo della velocità e dell'accelerazione centripeta.

Soluzione. La velocità tangenziale vale:

$$v = R\omega = 2\cdot 3 = 6\,\mathrm{m/s}$$

L'accelerazione centripeta risulta:

$$a_c = R\omega^2 = 2\cdot 3^2 = 18\,\mathrm{m/s^2}$$

Riferimenti

- Capitolo 1 del libro *Fisica. Meccanica e Termodinamica* [1].
- Materiale visto a lezione.
- Figura 1.1 da Wikipedia Commons: `https://commons.wikimedia.org/wiki/Main_Page`.
- Figura 1.2: `https://seo-fe.vedantu.com/physics/velocity-time-graph`.
- Figura 1.3 da Youmath: `https://www.youmath.it/lezioni/fisica/cinematica/2956-moto-parabolico-moto-del-proiettile.html`.

Capitolo 2

Dinamica del punto materiale

La dinamica del punto materiale studia il moto dei corpi materiali sotto l'azione di forze esterne. A differenza della cinematica, che descrive il movimento prescindendo dalle cause che lo generano, la dinamica si propone di individuare e analizzare le *interazioni fisiche* responsabili delle variazioni dello stato di moto dei corpi.

Nello studio della dinamica, i corpi reali vengono spesso schematizzati come **punti materiali**, ossia oggetti dotati di massa ma privi di dimensioni spaziali apprezzabili rispetto al fenomeno considerato. Tale modello consente di semplificare l'analisi del moto, concentrandosi esclusivamente sugli effetti delle forze applicate al corpo.

L'obiettivo fondamentale della dinamica è stabilire una relazione quantitativa tra le **forze agenti** su un corpo e il suo **moto**, in particolare attraverso lo studio delle variazioni della velocità nel tempo. Questo legame è formalizzato dai *principi della dinamica*, enunciati da Newton, che costituiscono il fondamento della meccanica classica.

2.1 Il concetto di forza

In dinamica, il concetto centrale è quello di **forza**. In modo intuitivo, una forza rappresenta un'interazione tra corpi capace di modificare lo stato di moto di un corpo oppure di deformarlo. Dal punto di vista fisico, una forza è dunque la causa delle variazioni del moto osservate sperimentalmente.

La forza è una **grandezza vettoriale**, caratterizzata da:

- un **modulo**, che ne misura l'intensità;
- una **direzione**;
- un **verso**;
- un **punto di applicazione**.

Per descrivere correttamente l'azione di una forza su un corpo è necessario specificare tutte queste caratteristiche.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della forza è il **newton** (N), definito come la forza che, applicata a un corpo di massa pari a 1 kg, gli imprime un'accelerazione di $1\ \mathrm{m/s^2}$.

Quando su un corpo agiscono più forze contemporaneamente, l'effetto complessivo sul moto è determinato dalla **forza risultante**, ottenuta come somma vettoriale di tutte le forze applicate:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \sum_i \vec{F}_i$$

È la forza totale agente sul corpo a determinare le eventuali variazioni del suo stato di moto.

2.2 I principi della dinamica

I principi della dinamica, formulati da Isaac Newton, costituiscono il fondamento della meccanica classica. Essi stabiliscono le leggi che governano il moto dei corpi in relazione alle forze che agiscono su di essi e risultano validi, con ottima approssimazione, per sistemi macroscopici che si muovono a velocità molto inferiori a quella della luce.

2.2.1 Primo principio della dinamica

Il primo principio della dinamica, noto anche come **principio di inerzia**, afferma che:

> Un corpo permane nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché una forza esterna risultante non interviene a modificarne lo stato.

Questo principio introduce il concetto di **inerzia**, ossia la tendenza dei corpi a opporsi alle variazioni del proprio stato di moto. In assenza di forze esterne, oppure quando la forza risultante agente su un corpo è nulla, il corpo non subisce alcuna accelerazione.

*Il primo principio permette di identificare i sistemi di riferimento **inerziali**: sono tali quei sistemi nei quali un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme.*

2.2.2 Secondo principio della dinamica

Il secondo principio della dinamica stabilisce una relazione quantitativa tra la forza risultante applicata a un corpo e l'accelerazione che esso acquista. Esso afferma che:

> L'accelerazione di un corpo è direttamente proporzionale alla forza risultante che agisce su di esso ed è inversamente proporzionale alla sua massa.

In forma matematica, il secondo principio si esprime come:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = m\vec{a}$$

dove $\vec{F}_{\text{tot}}$ è la forza risultante agente sul corpo, m è la massa del corpo e $\vec{a}$ è l'accelerazione prodotta.

La massa rappresenta una misura dell'inerzia del corpo: a parità di forza applicata, un corpo di massa maggiore subisce un'accelerazione minore. In generale, il problema fondamentale della dinamica consiste nel determinare il **moto di un corpo**, ossia la sua legge oraria $\vec{x}(t)$, a partire dalla conoscenza delle forze agenti su di esso. Poiché l'accelerazione è la derivata seconda della posizione rispetto al tempo, il secondo principio della dinamica conduce, in generale, a un'equazione differenziale del secondo ordine. La determinazione del moto richiede quindi la risoluzione di tale equazione, una volta assegnate le condizioni iniziali.

Il secondo principio della dinamica mette in relazione le grandezze fondamentali della meccanica classica: forza, massa e accelerazione. Esso costituisce la base per l'analisi quantitativa del moto dei corpi sotto l'azione di forze esterne.

2.2.3 Terzo principio della dinamica

Il terzo principio della dinamica, detto **principio di azione e reazione**, afferma che:

> Se un corpo A esercita una forza su un corpo B, allora il corpo B esercita simultaneamente su A una forza uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso.

Le due forze di azione e reazione costituiscono una coppia e agiscono sempre su *corpi diversi.* Per questo motivo, esse non si annullano a vicenda e non violano il secondo principio della dinamica.

Il terzo principio evidenzia che le forze sono sempre il risultato di un'interazione reciproca tra corpi e che non esistono forze isolate.

2.3 Forze nella meccanica classica

In generale, la forza agente su un punto materiale può dipendere dalla posizione del corpo nello spazio. In tal caso, il secondo principio della dinamica assume la forma di un'equazione differenziale in cui la forza non è costante, rendendo la determinazione analitica della legge oraria più complessa. Nei casi più semplici, come quello della forza peso, la forza può essere invece considerata costante, permettendo una integrazione diretta delle equazioni del moto.

Nello studio della dinamica del punto materiale, alcune forze compaiono in modo ricorrente e permettono di costruire modelli semplici ma molto efficaci. In questa sezione introduciamo le forze fondamentali e, quando possibile, ricaviamo le corrispondenti **leggi orarie** a partire dal secondo principio della dinamica.

2.3.1 Forza peso

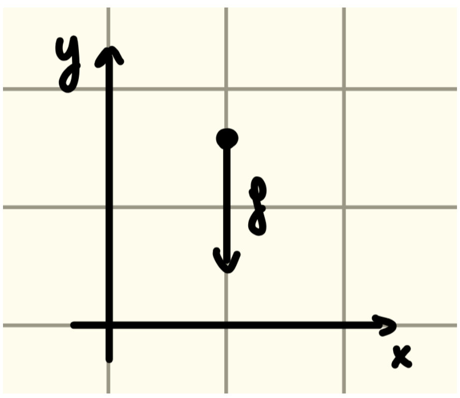

Figura 2.1: Rappresentazione della forza peso $\vec{P}$ agente su un punto materiale di massa m.

La **forza peso** è la forza gravitazionale esercitata dalla Terra su un corpo di massa m. In prossimità della superficie terrestre può essere considerata costante in modulo e direzione:

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

dove $\vec{g}$ è l'accelerazione di gravità che vale $\approx 9.81 m/s^2$ (diretta verticalmente verso il basso).

Applicando il secondo principio della dinamica:

$$m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{a} = \vec{g}.$$

Si ottiene quindi un risultato fondamentale: L'accelerazione di un corpo soggetto alla sola forza peso è **costante** ed è **indipendente dalla massa** del corpo.

2.3.1.1 Derivazione delle leggi orarie

Scegliamo un sistema di riferimento con asse y verticale e verso positivo verso l'alto. Consideriamo un punto materiale soggetto unicamente alla forza peso. In prossimità della superficie terrestre, tale forza può essere considerata costante e diretta verso il basso:

$$\vec{P} = (0, -mg, 0).$$

Applicando il secondo principio della dinamica,

$$\sum \vec{F} = m\vec{a},$$

si ottiene che l'accelerazione del punto materiale è costante e pari a:

$$\vec{a} = (0, -g, 0),$$

dove g è il modulo dell'accelerazione di gravità. Dividendo in componenti si ha:

$$\begin{cases} m\,\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0, \\ m\,\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -mg, \\ m\,\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = 0. \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = 0, \\ \dfrac{d^2y(t)}{dt^2} = -g, \\ \dfrac{d^2z(t)}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Componente x (moto rettilineo uniforme).

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_x(t) = v_{x0} \quad \Longrightarrow \quad x(t) = x_0 + v_{x0}\,t.$$

Componente z (moto rettilineo uniforme).

$$\frac{d^2z(t)}{dt^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz(t)}{dt} = v_z(t) = v_{z0} \quad \Longrightarrow \quad z(t) = z_0 + v_{z0}\,t.$$

Componente y (moto uniformemente accelerato).

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -g \quad\Longrightarrow\quad \frac{dy(t)}{dt} = v_y(t) = v_{y0} - g\,t$$

e integrando ulteriormente:

$$y(t) = y_0 + v_{y0}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2.$$

In forma vettoriale, le leggi orarie del moto possono essere raccolte come:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix} t^2.$$

Caso particolare: forza costante lungo un asse

Consideriamo un punto materiale soggetto a una forza costante diretta lungo l'asse x:

$$\vec{F} = (F, 0, 0) = \text{costante}.$$

Applicando il secondo principio della dinamica si ha:

$$F_x = F = ma_x = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}.$$

Integrando rispetto al tempo:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{dv_x(t)}{dt} = \frac{F}{m} \quad\Longrightarrow\quad \int_{v_{x0}}^{v_x(t)} dv_x = \int_0^t \frac{F}{m}\,dt$$

$$v_x(t) - v_{x0} = \frac{F}{m}\,t \quad\Longrightarrow\quad v_x(t) = v_{x0} + \frac{F}{m}\,t.$$

Poiché $v_x(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, integrando nuovamente:

$$\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t \left(v_{x0} + \frac{F}{m}\,t\right) dt$$

$$x(t) - x_0 = v_{x0}t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2 \quad\Longrightarrow\quad x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2.$$

Questo risultato mostra esplicitamente che, nel caso di forza costante, il moto è **uniformemente accelerato** e che le leggi del moto derivano direttamente dal secondo principio della dinamica.

2.3.2 Forza elastica (legge di Hooke)

La **forza elastica** è una **forza di richiamo**: tende a riportare il punto materiale verso la **posizione di equilibrio**. Essa è la forza esercitata dalla molla quando questa viene deformata (allungata o compressa).

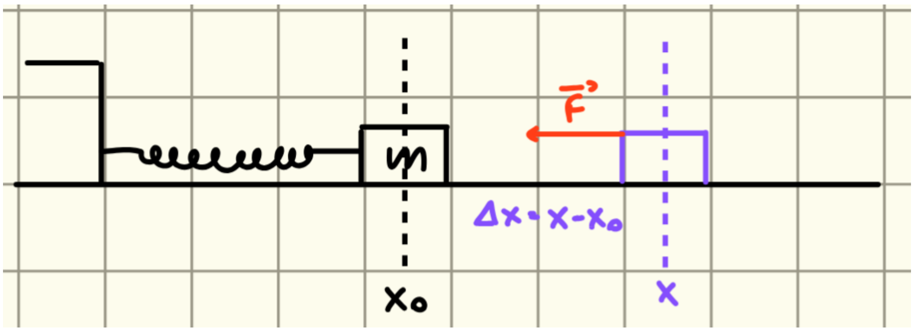

Figura 2.2: Sistema massa–molla su piano orizzontale: una massa m è collegata a una molla ideale e può muoversi lungo l'asse x. La posizione di equilibrio è indicata con x_0; per uno spostamento $\Delta x = x - x_0$ la molla esercita una forza elastica diretta verso la posizione di equilibrio.

Nel caso unidimensionale (moto lungo l'asse x), indicando con x_0 la posizione di equilibrio e con $\Delta x = x - x_0$ lo spostamento dall'equilibrio, la legge di Hooke afferma che:

$$F_e = -k\,\Delta x = -k(x - x_0),$$

dove k è la **costante elastica** della molla. Il segno meno indica che la forza è sempre opposta allo spostamento: se $\Delta x > 0$ la forza è diretta verso sinistra, se $\Delta x < 0$ è diretta verso destra.

Derivazione della legge oraria (moto armonico). Applichiamo il secondo principio della dinamica lungo l'asse x:

$$\sum F_x = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Se l'unica forza lungo x è la forza elastica, allora:

$$-k(x(t) - x_0) = m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2}.$$

Portando tutto a primo membro:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}\big(x(t) - x_0\big) = 0.$$

È spesso comodo riscrivere l'equazione in termini dello spostamento dall'equilibrio $\Delta x(t) = x(t) - x_0$:

$$\frac{d^2\Delta x(t)}{dt^2} + \omega^2\,\Delta x(t) = 0, \qquad \text{con } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Questa è l'equazione del moto **armonico** (moto periodico).

Una soluzione generale può essere scritta come:

$$\Delta x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

dove A è l'ampiezza dell'oscillazione e φ è la fase iniziale. Di conseguenza:

$$x(t) = x_0 + A\cos(\omega t + \varphi).$$

Il moto è periodico con periodo:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Caso particolare: se il corpo viene lasciato da fermo con elongazione iniziale L rispetto all'equilibrio, cioè $\Delta x(0) = L$ e $v(0) = 0$, allora $\varphi = 0$ e:

$$\Delta x(t) = L\cos(\omega t), \qquad x(t) = x_0 + L\cos(\omega t).$$

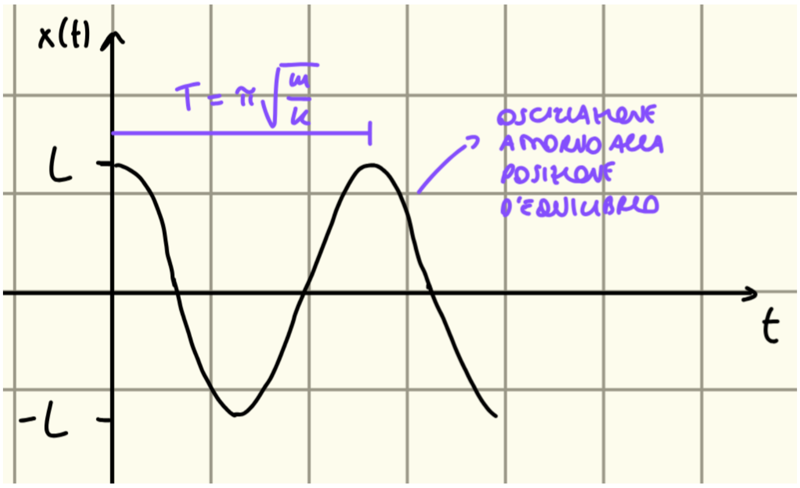

Figura 2.3: Andamento temporale dello spostamento $\Delta x(t)$ nel moto armonico: l'oscillazione è periodica attorno alla posizione di equilibrio, con ampiezza L e periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

2.3.3 Forza viscosa

La **forza viscosa** è una forza dissipativa che si manifesta quando un corpo si muove all'interno di un fluido (aria, acqua, ecc.). Essa è diretta in verso opposto alla velocità del corpo e, nel regime di basse velocità, è proporzionale al modulo della velocità stessa:

$$\vec{F}_v = -\beta\,\vec{v},$$

dove β è una costante positiva che dipende dalle proprietà del fluido e dalle dimensioni del corpo.

Velocità limite. Consideriamo un corpo che si muove verticalmente sotto l'azione della forza peso e della forza viscosa. Scegliamo l'asse y orientato verso il basso. Le forze agenti lungo y sono:

$$\vec{P} = m\vec{g}, \qquad \vec{F}_v = -\beta\vec{v}.$$

Dopo un certo intervallo di tempo, il corpo raggiunge una **velocità limite** v_L, che rimane costante. In tale condizione l'accelerazione è nulla e la forza risultante si annulla:

$$\vec{a} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \vec{P} + \vec{F}_v = 0.$$

Proiettando lungo l'asse y:

$$mg - \beta v_L = 0 \implies v_L = \frac{mg}{\beta}.$$

La velocità limite non dipende dalla quota iniziale del corpo, ma solo dai parametri fisici del sistema.

Equazione del moto e legge della velocità. Prima di raggiungere la velocità limite, il corpo è accelerato. Applicando il secondo principio della dinamica lungo l'asse y si ottiene:

$$m\frac{dv_y(t)}{dt} = mg - \beta v_y(t).$$

Questa è un'equazione differenziale del primo ordine. La sua soluzione, imponendo la condizione iniziale $v_y(0) = 0$, è:

$$v_y(t) = v_L \left(1 - e^{-\alpha t}\right), \qquad \text{con } \alpha = \frac{\beta}{m}.$$

Il parametro α indica la rapidità con cui il corpo raggiunge la velocità limite:

$$\lim_{t\to\infty} v_y(t) = v_L, \qquad v_y(0) = 0.$$

La presenza della forza viscosa modifica profondamente il moto rispetto al caso della sola forza peso: l'accelerazione non è costante e il moto non è uniformemente accelerato. La forza viscosa introduce inoltre una dissipazione di energia meccanica.

2.3.4 Forza normale

La **forza normale** $\vec{N}$ è una forza vincolare esercitata da una superficie su un corpo a contatto con essa. Essa è diretta perpendicolarmente alla superficie di contatto e impedisce al corpo di attraversarla.

In molte situazioni di interesse, come nel caso di un corpo appoggiato su un piano orizzontale, l'accelerazione lungo la direzione verticale è nulla. Applicando il secondo principio della dinamica lungo l'asse verticale si ha:

$$\sum F_y = 0 \implies N - mg = 0 \implies N = mg.$$

2.3.5 Forza di attrito

La **forza di attrito** si oppone al moto relativo, o alla tendenza al moto, tra due superfici a contatto. Essa agisce lungo la superficie di contatto ed è diretta in verso opposto alla velocità relativa o alla forza che tende a mettere il corpo in movimento.

2.3.5.1 Attrito statico

Quando il corpo è fermo rispetto alla superficie di contatto, l'attrito è di tipo statico. Il modulo della forza di attrito statico si adatta al valore necessario a mantenere il corpo in quiete, fino a un valore massimo:

$$|\vec{F}_s| \leq \mu_s N,$$

dove μ_s è il coefficiente di attrito statico e N è il modulo della forza normale.

2.3.5.2 Attrito dinamico

Quando il corpo è in movimento rispetto alla superficie, l'attrito è di tipo dinamico. In questo caso il modulo della forza di attrito è costante e vale:

$$|\vec{F}_d| = \mu_d N,$$

dove μ_d è il coefficiente di attrito dinamico, in genere minore del coefficiente di attrito statico ($\mu_d < \mu_s$). La forza di attrito dinamico è sempre diretta in verso opposto alla velocità del corpo.

Esempio: piano inclinato

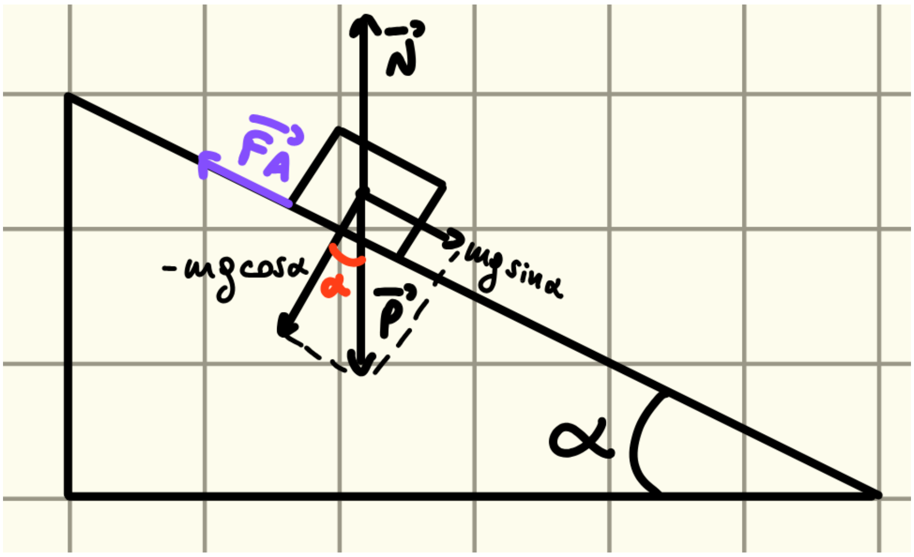

Figura 2.4: Punto materiale di massa m su un piano inclinato di angolo α. Sono rappresentate la forza peso, la reazione normale e la componente tangenziale della forza peso lungo il piano.

Consideriamo un punto materiale di massa m appoggiato su un piano inclinato di angolo α rispetto all'orizzontale. Sul corpo agiscono la forza peso $\vec{P}$, la forza normale $\vec{N}$ e la forza di attrito.

Scomponiamo la forza peso nelle componenti perpendicolare e parallela al piano. Lungo la direzione perpendicolare al piano il corpo non accelera, quindi vale la condizione di equilibrio:

$$N - mg\cos\alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad N = mg\cos\alpha.$$

La componente della forza peso parallela al piano vale invece:

$$P_{\parallel} = mg\sin\alpha,$$

ed è la forza responsabile del moto lungo il piano.

Condizione di distacco. La forza di attrito statico può assumere valori fino a un massimo:

$$F_s^{\max} = \mu_s N = \mu_s mg\cos\alpha.$$

Il corpo rimane in quiete se la componente tangenziale della forza peso non supera tale valore, cioè se:

$$mg\sin\alpha \leq \mu_s mg\cos\alpha \quad \Longrightarrow \quad \tan\alpha \leq \mu_s.$$

L'angolo α_c tale che $\tan\alpha_c = \mu_s$ prende il nome di **angolo critico di distacco**. Per $\alpha > \alpha_c$ il corpo inizia a muoversi lungo il piano.

Calcolo dell'accelerazione (attrito dinamico). Supponiamo ora che il corpo sia in moto lungo il piano e che agisca l'attrito dinamico. Il modulo della forza di attrito dinamico è:

$$F_d = \mu_d N = \mu_d mg\cos\alpha,$$

diretta in verso opposto al moto.

Applicando il secondo principio della dinamica lungo la direzione del piano inclinato si ottiene:

$$mg\sin\alpha - \mu_d mg\cos\alpha = ma.$$

Da cui segue l'accelerazione del corpo:

$$a = g\sin\alpha - \mu_d g\cos\alpha = g\sin\alpha\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right).$$

Legge oraria del moto. Poiché l'accelerazione è costante, il moto lungo il piano è uniformemente accelerato. Supponendo che il corpo parta da fermo, la legge oraria lungo la direzione del piano è:

$$x(t) = x_0 - \frac{1}{2}at^2 = x_0 - \frac{1}{2}g\sin\alpha\left(1 - \frac{\mu_d}{\tan\alpha}\right)t^2.$$

Questo esempio mostra come, una volta individuate correttamente le forze agenti sul corpo e le loro componenti lungo la direzione del moto, il secondo principio della dinamica permetta di determinare completamente l'evoluzione temporale del sistema.

2.4 Pendolo semplice

Il **pendolo semplice** è un sistema costituito da un punto materiale di massa m collegato a un filo ideale (inesistente massa e inestensibile) di lunghezza ℓ, fissato a un estremo. Il moto del punto materiale avviene su un arco di circonferenza in un piano verticale.

Sul corpo agiscono due forze:

- la forza peso $\vec{P}$;
- la tensione del filo $\vec{T}$, che rappresenta una forza vincolare.

Indichiamo con θ l'angolo che il filo forma con la verticale. Per convenzione, $\theta > 0$ se il corpo si trova a destra della verticale e $\theta < 0$ se si trova a sinistra.

2.4.1 Forze agenti e direzione del moto

La tensione del filo è sempre diretta lungo il filo e impedisce al corpo di allontanarsi dal centro della traiettoria. Di conseguenza, essa non contribuisce al moto lungo la direzione tangenziale.

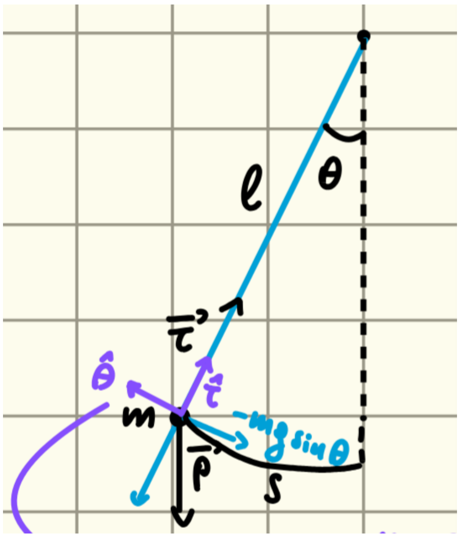

Figura 2.5: Pendolo semplice: un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi lungo una circonferenza di raggio ℓ, collegato a un filo inestensibile. Sono indicati l'angolo θ rispetto alla verticale, la tensione del filo e la forza peso.

Il moto del pendolo è quindi dovuto esclusivamente alla **componente tangenziale della forza peso**. Scomponendo $\vec{P}$ lungo le direzioni radiale e tangenziale si ottiene che:

$$P_{\mathrm{t}} = -mg\sin\theta,$$

dove il segno meno indica che la forza è diretta in verso opposto all'aumento di θ.

2.4.2 Equazione del moto

Poiché il corpo si muove lungo una circonferenza di raggio ℓ, la coordinata naturale del moto è l'arco $s = \ell\theta$. L'accelerazione tangenziale vale:

$$a_{\mathrm{t}} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ell\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}.$$

Applicando il secondo principio della dinamica lungo la direzione tangenziale:

$$-mg\sin\theta = ma_{\mathrm{t}} = m\ell\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}.$$

Dividendo per m e riordinando si ottiene l'equazione del moto del pendolo:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta(t) = 0.$$

Questa equazione differenziale è non lineare e, in generale, non ammette una soluzione analitica semplice.

2.4.3 Approssimazione per piccole oscillazioni

Se l'angolo θ è sufficientemente piccolo (tipicamente $|\theta| \lesssim 10°$), è possibile utilizzare l'approssimazione:

$$\sin\theta \simeq \theta.$$

In questo caso l'equazione del moto diventa:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\,\theta(t) = 0,$$

che è l'equazione del **moto armonico semplice**.

Nota sull'approssimazione. *L'approssimazione nasce dal fatto che la serie di Taylor di* $\sin\theta$ *attorno a* $\theta = 0$ *può essere approssimata come* $\sin\theta \approx \theta$ *per angoli piccoli, poiché i termini di ordine superiore diventano trascurabili. Per angoli maggiori, l'errore introdotto dall'approssimazione aumenta, rendendo la soluzione meno accurata.*

2.4.4 Soluzione dell'equazione del moto

Poiché il moto è oscillatorio, cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi).$$

Derivando due volte rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi).$$

Sostituendo nell'equazione del moto si ottiene:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{g}{\ell}A\cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

da cui segue la condizione:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

La pulsazione ω determina il periodo del moto:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

2.4.5 Condizioni iniziali e leggi orarie

Se il pendolo viene lasciato da fermo con angolo iniziale $\theta_{\max}$, si ha:

$$\theta(0) = \theta_{\max}, \qquad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0.$$

In questo caso la legge oraria diventa:

$$\theta(t) = \theta_{\max}\cos(\omega t).$$

È possibile anche scegliere condizioni iniziali diverse, ad esempio angolo iniziale nullo e velocità angolare iniziale Ω:

$$\theta(0) = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt}(0) = \Omega.$$

La soluzione risulta allora:

$$\theta(t) = \frac{\Omega}{\omega}\sin(\omega t).$$

Il pendolo semplice, per piccole oscillazioni, rappresenta quindi un esempio fondamentale di moto armonico, del tutto analogo al sistema massa–molla.

2.5 Lavoro

Il **lavoro** di una forza misura l'effetto della forza quando il punto materiale subisce uno spostamento. Nel caso in cui la forza $\vec{F}$ sia **costante** e lo spostamento complessivo sia $\Delta\vec{s}$, il lavoro si definisce come prodotto scalare:

$$L = \vec{F}\cdot\Delta\vec{s} = F\,\Delta s\cos\alpha,$$

dove α è l'angolo tra la direzione della forza e quella dello spostamento.

Da questa definizione seguono alcuni casi importanti:

- L è **massimo** se $\vec{F}$ è parallela a $\Delta\vec{s}$ ($\alpha = 0$);
- $L = 0$ se $\vec{F}$ è perpendicolare a $\Delta\vec{s}$ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$);
- L è **minimo** (negativo) se $\vec{F}$ e $\Delta\vec{s}$ sono antiparalleli ($\alpha = \pi$).

2.5.1 Esempi qualitativi: peso e attrito

La forza peso può compiere lavoro positivo o negativo a seconda del verso dello spostamento (verso il basso o verso l'alto). La forza di attrito, essendo diretta in verso opposto al moto, compie invece **lavoro negativo**:

$$L_{\text{attr}} < 0.$$

2.5.2 Generalizzazione: forze non costanti

Se la forza non è costante, la definizione si estende considerando uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$. Si definisce il **lavoro elementare**:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{s}.$$

Il **lavoro totale** compiuto dalla forza nello spostamento da un punto A a un punto B è:

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s}.$$

Questa quantità rappresenta il lavoro complessivo compiuto dalla forza per portare il punto materiale da A a B lungo una certa traiettoria.

2.5.3 Lavoro della forza peso: lancio verso l'alto e caduta verso il basso

Consideriamo un moto verticale e scegliamo l'asse y verso l'alto. La forza peso vale:

$$\vec{P} = (0, -mg, 0).$$

Lancio verso l'alto. Durante lo spostamento verso l'alto, $d\vec{s}$ è diretto verso l'alto mentre $\vec{P}$ è verso il basso: sono antiparalleli e dunque il lavoro è negativo. Scrivendo in forma scalare lungo y:

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = P_y \, dy = (-mg) \, dy.$$

Integrando da $y = 0$ a $y = h$:

$$L_{0 \to h} = \int_0^h (-mg) \, dy = -mgh < 0.$$

Caduta verso il basso. Durante la caduta, lo spostamento è verso il basso e quindi è parallelo alla forza peso: il lavoro è positivo. Se il corpo scende di un dislivello h:

$$L_{h \to 0} = +mgh > 0.$$

In sintesi, per la forza peso vale:

$$L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B),$$

cioè il lavoro dipende solo dalle quote iniziale e finale.

2.5.4 Ricavare il lavoro usando la legge oraria

Nel moto verticale, $d\vec{s}$ è lungo y e vale $dy = v_y(t) \, dt$. Pertanto:

$$dL = P_y \, dy = (-mg) \, v_y(t) \, dt.$$

Nel caso di lancio verso l'alto, con $v_y(t) = v_0 - gt$, si integra fino all'istante t_f in cui $v_y(t_f) = 0$:

$$L = \int_0^{t_f} (-mg) \, v_y(t) \, dt.$$

Il risultato coincide con $L = -mgh$, dove h è la quota massima raggiunta. Questo mostra che il lavoro della forza peso può essere espresso in funzione del dislivello.

2.5.5 Lavoro della forza peso nel pendolo

Nel pendolo semplice il punto materiale si muove lungo un arco di circonferenza. La tensione del filo è radiale e dunque è perpendicolare allo spostamento tangenziale: **non compie lavoro**. Il lavoro lungo la traiettoria è quindi dovuto alla sola componente tangenziale del peso.

Indicando con θ l'angolo rispetto alla verticale e con s l'arco, vale:

$$ds = \ell \, d\theta.$$

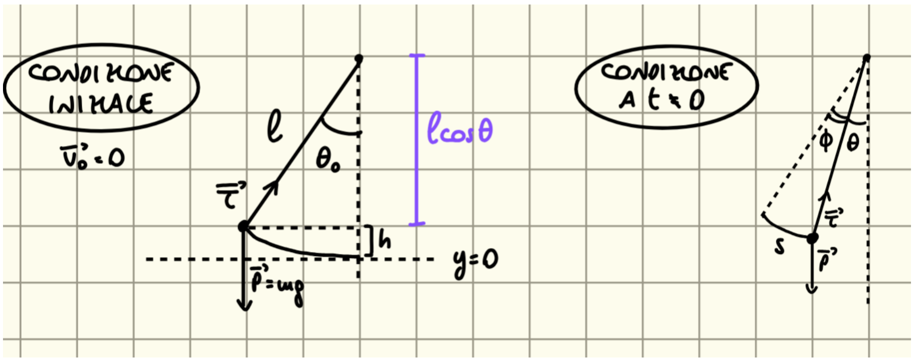

Figura 2.6: Pendolo: la tensione non compie lavoro lungo la traiettoria; il lavoro è dovuto alla componente tangenziale del peso.

La componente tangenziale della forza peso (opposta all'aumento di θ) ha modulo $mg \sin\theta$, quindi:

$$dL = \vec{P} \cdot d\vec{s} = (mg \sin\theta)\, ds = mg \sin\theta\, \ell\, d\theta.$$

Integrando, ad esempio, dalla posizione iniziale $\theta = \theta_0$ alla posizione finale $\theta = 0$:

$$L_{\theta_0 \to 0} = mg\ell \int_{\theta_0}^{0} \sin\theta\, d\theta = mg\ell\big(\cos 0 - \cos\theta_0\big) = mg\ell\,(1 - \cos\theta_0) > 0.$$

Poiché la variazione di quota tra le due posizioni è $h = \ell(1 - \cos\theta_0)$, si ottiene ancora:

$$L_{\text{peso}} = mgh.$$

Questo evidenzia un fatto importante: il lavoro della forza peso **non dipende dalla traiettoria**, ma solo dai punti iniziale e finale (cioè dal dislivello).

2.6 Teorema del lavoro e dell'energia cinetica

2.6.1 Energia cinetica

Quando un punto materiale di massa m si muove con velocità di modulo v, gli associamo una grandezza che misura "quanto moto" possiede: l'**energia cinetica**. Essa è definita come

$$K = \frac{1}{2} m v^2.$$

Se il corpo aumenta la propria velocità, allora K aumenta; se invece rallenta, K diminuisce.

2.6.2 Enunciato del teorema

Il **teorema del lavoro e dell'energia cinetica** afferma che:

> Il lavoro totale compiuto dalla forza risultante su un punto materiale nello spostamento da una posizione iniziale A a una posizione finale B è uguale alla variazione della sua energia cinetica.

In formule:

$$L_{A\to B} = K_B - K_A.$$

Di conseguenza:

- se $L_{A\to B} > 0$, allora K aumenta (il corpo accelera);
- se $L_{A\to B} < 0$, allora K diminuisce (il corpo rallenta);
- se $L_{A\to B} = 0$, allora K resta costante.

Dimostrazione. Consideriamo un lavoro elementare dL compiuto dalla forza risultante $\vec{F}$ durante uno spostamento infinitesimo $d\vec{s}$:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Poiché la velocità è

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad d\vec{s} = \vec{v}\,dt,$$

si ottiene:

$$dL = \vec{F} \cdot \vec{v}\,dt.$$

Usando il secondo principio della dinamica $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$:

$$dL = m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\,dt = m\,\vec{v} \cdot d\vec{v}.$$

Ora osserviamo che:

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = 2\,\vec{v} \cdot d\vec{v} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\,d(v^2).$$

Quindi:

$$dL = m\left(\frac{1}{2}\,d(v^2)\right) = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dK.$$

Integrando tra A e B:

$$L_{A\to B} = \int_A^B dL = \int_A^B dK = K_B - K_A,$$

che è esattamente il teorema del lavoro e dell'energia cinetica.

Osservazioni. Il teorema del lavoro e dell'energia cinetica mette in evidenza un fatto molto intuitivo: il lavoro della forza risultante misura quanto cambia la velocità del corpo. Infatti, se il lavoro totale nello spostamento $A \to B$ è positivo ($L_{A\to B} > 0$), allora l'energia cinetica aumenta e quindi aumenta anche il modulo della velocità; viceversa, se il lavoro è negativo ($L_{A\to B} < 0$), l'energia cinetica diminuisce e il corpo rallenta. Nel caso limite $L_{A\to B} = 0$ l'energia cinetica resta costante: ciò significa che il modulo della velocità non cambia.

Un aspetto importante è che il teorema vale per *qualunque tipo di forza*: non è necessario che la forza sia costante, né che il moto sia rettilineo. L'unica cosa che cambia da un problema all'altro è il modo in cui si calcola il lavoro $L_{A\to B}$, cioè l'integrale del prodotto scalare $\vec{F} \cdot d\vec{s}$ lungo la traiettoria. Per questo motivo, il teorema è uno strumento molto potente: permette di collegare direttamente le forze al cambiamento di velocità, spesso evitando di risolvere esplicitamente le equazioni del moto.

Esempio 1: lavoro della forza peso. Considerando il lavoro della forza peso calcolato in precedenza:

$$L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B),$$

il teorema del lavoro e dell'energia cinetica si traduce in:

$$mg(y_A - y_B) = K_B - K_A.$$

Questo risultato mostra che, quando un corpo si sposta verticalmente sotto l'azione della forza peso, la variazione della sua energia cinetica dipende solo dalla differenza di quota tra i punti iniziale e finale.

2.7 Legge di conservazione dell'energia meccanica

2.7.1 Forze conservative

Una forza si dice **conservativa** se il lavoro da essa compiuto nello spostamento di un punto materiale dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dalla traiettoria seguita.

In questo caso, il lavoro della forza nello spostamento da A a B può essere scritto come:

$$L_{A\to B} = U_A - U_B,$$

dove U è detta **energia potenziale** associata alla forza. L'energia potenziale è una misura del lavoro che la forza può compiere in un certo punto dello spazio. Questa relazione *può essere assunta come definizione di forza conservativa.*

2.7.2 Energia meccanica

Dal teorema del lavoro e dell'energia cinetica si ha:

$$K_B - K_A = L_{A\to B}.$$

Se la forza è conservativa, allora:

$$K_B - K_A = U_A - U_B.$$

Riordinando i termini:

$$K_B + U_B = K_A + U_A.$$

Definendo l'**energia meccanica** come:

$$E = K + U,$$

si ottiene la **legge di conservazione dell'energia meccanica**:

$$E_B = E_A,$$

ovvero l'energia meccanica di un sistema soggetto a sole forze conservative rimane costante durante il moto.

2.7.3 Energia potenziale della forza peso

In prossimità della superficie terrestre, la forza peso è una forza conservativa. Il lavoro della forza peso nello spostamento verticale da una quota y_A a una quota y_B vale:

$$L_{\text{peso}} = mg(y_A - y_B).$$

Per definizione di energia potenziale:

$$L_{\text{peso}} = U_A - U_B.$$

Ne segue che l'energia potenziale associata alla forza peso può essere scritta come:

$$U(y) = mgy + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Ponendo come riferimento $U(0) = 0$, si ottiene:

$$U(y) = mgy.$$

2.7.4 Energia potenziale della forza elastica

Anche la forza elastica è una forza conservativa. In una dimensione, la forza elastica è data da:

$$F_e = -kx.$$

Il lavoro della forza elastica nello spostamento dalla posizione 0 alla posizione x è:

$$L_{0\to x} = \int_0^x \vec{F}_e \cdot d\vec{x} = \int_0^x (-kx)\, dx = -\frac{1}{2}kx^2.$$

Poiché:

$$L_{0\to x} = U(0) - U(x),$$

ponendo $U(0) = 0$ si ottiene:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

2.7.5 Applicazioni della conservazione dell'energia meccanica

Lancio verticale verso l'alto. Consideriamo un punto materiale lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e il punto di massima quota:

$$E_i = E_f \quad \Longrightarrow \quad K_i + U_i = K_f + U_f.$$

Poiché nel punto più alto la velocità è nulla:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh,$$

da cui:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Caduta libera. Consideriamo un punto materiale che cade da un'altezza h. All'istante iniziale:

$$K_i = 0, \qquad U_i = mgh,$$

mentre al suolo:

$$U_f = 0, \qquad K_f = \frac{1}{2}mv_f^2.$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad \Longrightarrow \qquad v_f = \sqrt{2gh}.$$

Moto parabolico. Nel moto parabolico, se si trascurano gli attriti, agisce solo la forza peso, che è conservativa. Pertanto l'energia meccanica si conserva.

Se il punto materiale parte e arriva alla stessa quota:

$$U_i = U_f \quad \Longrightarrow \quad K_i = K_f \quad \Longrightarrow \quad |v_i| = |v_f|.$$

Pendolo semplice. Consideriamo un pendolo semplice di lunghezza ℓ, lasciato partire da un angolo iniziale θ_0. Applicando la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale e la posizione più bassa della traiettoria:

$$E_i = E_f.$$

L'energia potenziale iniziale è:

$$U_i = mgh, \qquad h = \ell(1 - \cos\theta_0),$$

mentre l'energia cinetica iniziale è nulla. Nella posizione più bassa:

$$U_f = 0, \qquad K_f = \frac{1}{2}mv^2.$$

Dalla conservazione dell'energia:

$$mg\ell(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv^2,$$

da cui:

$$v = \sqrt{2g\ell(1 - \cos\theta_0)}.$$

Questo risultato è valido per qualunque valore dell'angolo iniziale θ_0 e mostra che, durante il moto, l'energia cinetica viene continuamente convertita in energia potenziale e viceversa, in modo tale che la loro somma rimanga costante.

2.8 Impulso della forza e quantità di moto

2.8.1 Quantità di moto

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale la grandezza vettoriale:

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

La quantità di moto è direttamente proporzionale alla massa del corpo e alla sua velocità e rappresenta una misura dello stato di moto del punto materiale.

2.8.2 Impulso della forza

Partendo dal secondo principio della dinamica, nella forma:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt},$$

si moltiplica entrambi i membri per dt:

$$\vec{F}\,dt = m\,d\vec{v}.$$

Integrando tra un istante iniziale t_i e un istante finale t_f:

$$\int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} d\vec{v} = m(\vec{v}_f - \vec{v}_i).$$

Si definisce **impulso della forza** la grandezza:

$$\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt.$$

Pertanto si ottiene:

$$\vec{I} = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}.$$

Questo risultato prende il nome di **teorema dell'impulso e della quantità di moto** (o teorema dell'impulso della forza) e afferma che:

> L'impulso della forza risultante agente su un punto materiale è uguale alla variazione della sua quantità di moto.

2.8.3 Forma generale del secondo principio della dinamica

Poiché la quantità di moto è definita come $\vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \vec{p}/m$, il secondo principio della dinamica può essere riscritto nella forma:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{p}}{m}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Questa espressione rappresenta la forma più generale del secondo principio della dinamica ed è valida anche nel caso in cui la massa del corpo non sia costante.

2.8.4 Conservazione della quantità di moto

Se la forza risultante agente su un punto materiale è nulla, si ha:

$$\vec{F} = 0 \implies \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \implies \vec{p} = \text{costante}.$$

In un sistema di più punti materiali, la quantità di moto totale è definita come:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i.$$

Se il sistema è **isolato**, cioè se la risultante delle forze esterne è nulla ($\vec{F}_{\text{ext}} = 0$), allora:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = \text{costante}.$$

La quantità di moto totale di un sistema isolato si conserva. Questa legge di conservazione è una conseguenza diretta dell'invarianza delle leggi fisiche per traslazioni nello spazio.

2.8.5 Urto di una biglia contro una parete

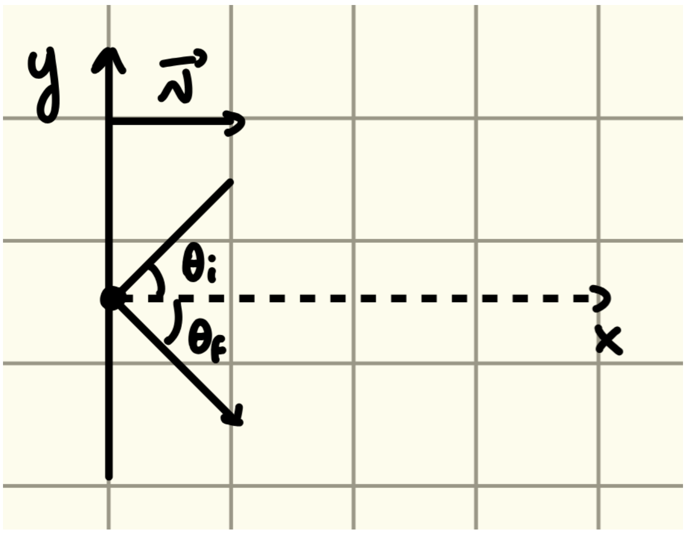

Figura 2.7: Urto di una biglia contro una parete rigida: gli angoli di incidenza e riflessione sono uguali.

Consideriamo l'urto di una biglia contro una parete rigida. Indichiamo con θ_i l'angolo di incidenza e con θ_f l'angolo di riflessione, entrambi misurati rispetto alla normale alla parete.

Si assume che la parete abbia massa infinita e sia priva di attrito. Di conseguenza, la forza esercitata dalla parete sulla biglia è diretta esclusivamente lungo la direzione perpendicolare alla parete (direzione normale), mentre non sono presenti componenti parallele alla parete.

Quantità di moto prima e dopo l'urto. Indichiamo con $\vec{p_i} = m\vec{v_i}$ la quantità di moto della biglia prima dell'urto e con $\vec{p_f} = m\vec{v_f}$ la quantità di moto dopo l'urto.

Poiché non agiscono forze di attrito, la componente parallela alla parete della forza esercitata sulla biglia è nulla. In particolare, lungo la direzione y:

$$F_y = 0 \implies \Delta p_y = 0 \implies p_{y,f} = p_{y,i} \implies v_{y,f} = v_{y,i}.$$

Urto elastico. Sperimentalmente si osserva che, nell'urto di una biglia contro una parete rigida, l'energia cinetica si conserva:

$$K_i = K_f \implies \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \implies v_i = v_f.$$

Scrivendo il modulo della velocità in termini delle componenti:

$$v_i^2 = v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2, \qquad v_f^2 = v_{x,f}^2 + v_{y,f}^2,$$

e usando il fatto che $v_{y,f} = v_{y,i}$, si ottiene:

$$v_{x,f}^2 = v_{x,i}^2 \implies v_{x,f} = -v_{x,i}.$$

La componente della velocità perpendicolare alla parete cambia segno, mentre quella parallela resta invariata.

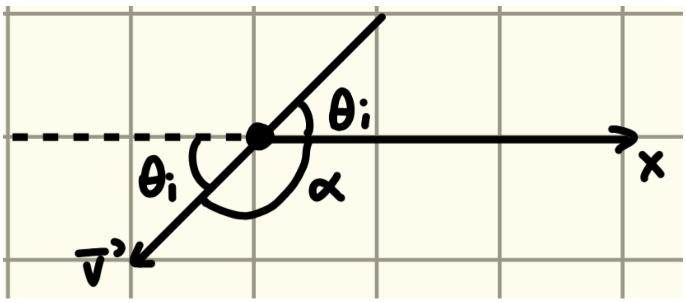

Figura 2.8: Schema dell'urto elastico di una biglia contro una parete liscia: sono indicati l'angolo di incidenza θ_i, l'angolo di riflessione θ_f (uguale a θ_i), l'asse x perpendicolare alla parete e le direzioni delle velocità prima e dopo l'urto.

Angoli di incidenza e riflessione. Dalla definizione di angolo di incidenza e riflessione si ha:

$$\cos\theta_i = \frac{v_{x,i}}{v_i}, \qquad \cos\theta_f = \frac{v_{x,f}}{v_f}.$$

Poiché $v_f = v_i$ e $v_{x,f} = -v_{x,i}$:

$$\cos\theta_f = -\cos\theta_i = \cos(\pi - \theta_i).$$

Ne segue che:

$$\theta_f = \theta_i.$$

Questo risultato mostra che, nell'urto elastico contro una parete liscia, l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza.

Impulso della forza esercitata dalla parete. L'urto avviene in un intervallo di tempo molto breve τ. L'impulso della forza esercitata dalla parete sulla biglia è:

$$\vec{I} = \vec{p}_f - \vec{p}_i.$$

Lungo la direzione perpendicolare alla parete si ha:

$$I_x = p_{x,f} - p_{x,i} = mv_{x,f} - mv_{x,i} = -2mv_{x,i} = 2mv\cos\theta_i.$$

Per definizione di impulso:

$$I_x = \int_0^\tau F_x\, dt.$$

Definendo la forza media lungo x come:

$$\langle F_x \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau F_x\, dt,$$

si ottiene:

$$\langle F_x \rangle = \frac{2mv\cos\theta_i}{\tau}.$$

La forza media esercitata dalla parete sulla biglia è quindi diretta perpendicolarmente alla parete.

Urti impulsivi e conservazione della quantità di moto. L'urto di una biglia contro una parete è un **processo impulsivo**, cioè un processo in cui la quantità di moto del punto materiale viene modificata per effetto di una forza molto intensa agente per un tempo molto breve.

Durante un processo impulsivo è possibile trascurare l'effetto delle forze esterne (come la forza peso) e considerare il sistema isolato. In tal caso:

$$\vec{F}_{\text{ext}} \simeq 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{P}_{\text{tot}} = \text{costante}.$$

Urti elastici e anelastici. Gli urti si classificano in:

- **urti elastici**, nei quali si conserva l'energia cinetica totale del sistema;
- **urti anelastici**, nei quali l'energia cinetica totale non si conserva.

2.8.6 Urto elastico tra due particelle

Consideriamo un urto elastico unidimensionale tra due particelle di masse m_1 e m_2. La particella 1 si muove inizialmente lungo l'asse x con velocità v_1, mentre la particella 2 è inizialmente ferma:

$$v_2 = 0.$$

Dopo l'urto, le velocità delle due particelle diventano rispettivamente V_1 e V_2. Vogliamo determinare tali velocità finali.

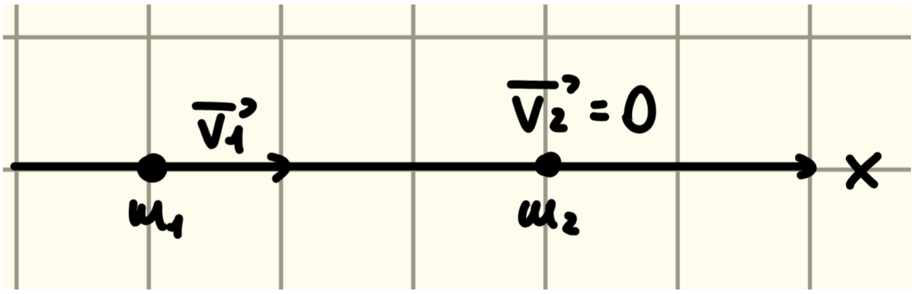

Figura 2.9: Urto elastico unidimensionale tra due particelle: la particella di massa m_1 si muove inizialmente lungo l'asse x con velocità $\vec{v}_1$, mentre la particella di massa m_2 è inizialmente ferma ($\vec{v}_2 = 0$).

Equazioni di conservazione. Poiché il sistema è isolato, la quantità di moto totale si conserva:

$$p_{\text{tot}} = \text{costante} \quad \Longrightarrow \quad m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2.$$

Dato che $v_2 = 0$, si ottiene:

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = V_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2.$$

Essendo l'urto elastico, si conserva anche l'energia cinetica:

$$K_i = K_f \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2.$$

Dividendo per $\frac{1}{2} m_1$:

$$v_1^2 = V_1^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

Risoluzione del sistema. Sostituendo l'espressione di V_1 ricavata dalla conservazione della quantità di moto:

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2,$$

nell'equazione dell'energia, si ottiene:

$$v_1^2 = \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2 \right)^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

Sviluppando:

$$v_1^2 = v_1^2 - 2 v_1 \frac{m_2}{m_1} V_2 + \frac{m_2^2}{m_1^2} V_2^2 + \frac{m_2}{m_1} V_2^2.$$

Semplificando e raccogliendo:

$$\frac{m_2}{m_1} V_2 \left(\frac{m_2}{m_1} V_2 - 2 v_1 + V_2 \right) = 0.$$

La soluzione $V_2 = 0$ corrisponde all'assenza dell'urto e viene scartata. Rimane quindi:

$$\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) V_2 = 2v_1 \quad \Longrightarrow \quad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Sostituendo in V_1:

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1.$$

Risultati finali. Le velocità finali delle due particelle dopo l'urto elastico sono quindi:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \qquad V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Casi limite.

- $m_1 = m_2$:
$$V_1 = 0, \qquad V_2 = v_1.$$
Le due particelle si scambiano la velocità.

- $m_2 \gg m_1$:
$$V_2 \simeq 0, \qquad V_1 \simeq -v_1.$$
La particella 2 rimane praticamente ferma, mentre la particella 1 viene riflessa.

- $m_1 \gg m_2$:
$$V_1 \simeq v_1, \qquad V_2 \simeq 2v_1.$$
La particella 1 trasferisce parte del moto alla particella 2, che viene "lanciata in avanti".

2.8.7 Urto elastico con entrambe le particelle in movimento

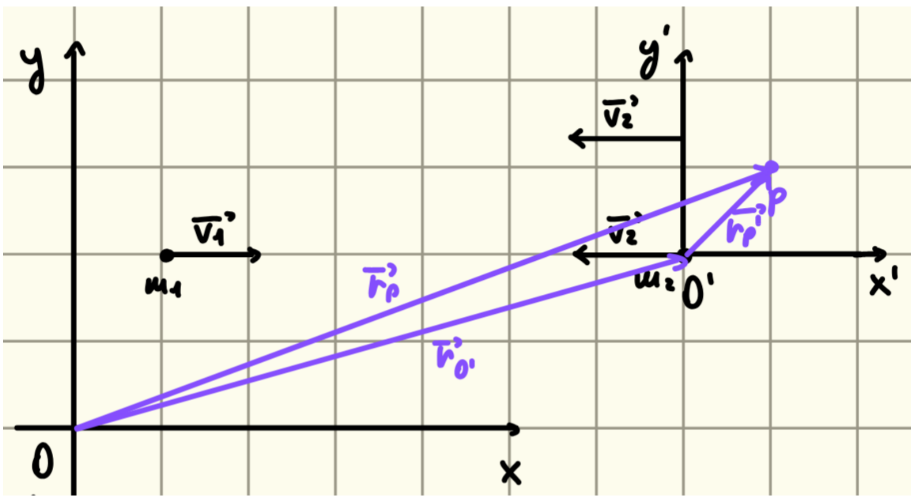

Figura 2.10: Urto elastico tra due particelle osservato in due sistemi di riferimento: a sinistra il sistema dell'osservatore, a destra il sistema solidale con la particella di massa m_2.

Nel caso generale in cui entrambe le particelle siano inizialmente in movimento con velocità v_1 e v_2, è conveniente considerare un sistema di riferimento solidale con la particella 2. In tale sistema, la velocità iniziale della particella 2 è nulla.

Applicando le formule precedenti e tornando poi al sistema di riferimento dell'osservatore, si ottengono le velocità finali:

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2,$$

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2.$$

Queste espressioni descrivono completamente l'urto elastico unidimensionale tra due particelle.

2.8.8 Urto perfettamente anelastico

Si ha un **urto perfettamente anelastico** quando due punti materiali, dopo una collisione, proseguono il moto come se fossero un unico punto materiale. In altre parole, dopo l'urto le due particelle hanno la stessa velocità finale.

In un urto perfettamente anelastico non si conserva l'energia cinetica totale del sistema, mentre si conserva la quantità di moto totale.

Conservazione della quantità di moto. Consideriamo due particelle di masse m_1 e m_2 che si muovono lungo una stessa direzione. Supponiamo che la particella 2 sia inizialmente ferma:

$$v_2 = 0.$$

Poiché il sistema è isolato, la quantità di moto totale si conserva:

$$\vec{p}_{\text{tot}} = \text{costante}.$$

Indicando con V la velocità comune delle due particelle dopo l'urto, si ha:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V + m_2 V.$$

Dato che $v_2 = 0$:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) V \quad \Longrightarrow \quad V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

Osservazioni.

- Se $m_2 \gg m_1$, allora $V \simeq 0$: la particella 1 si arresta quasi completamente dopo l'urto.
- Se $m_1 \gg m_2$, allora $V \simeq v_1$: la velocità della particella 1 rimane praticamente invariata.

Questo tipo di urto rappresenta il caso di massima perdita di energia cinetica compatibile con la conservazione della quantità di moto.

2.9 Legge della gravitazione universale di Newton

La **legge della gravitazione universale** descrive l'interazione attrattiva tra due masse puntiformi. Essa afferma che due corpi di masse m_1 e m_2 si attraggono con una forza diretta lungo la congiungente[1] dei due corpi e di modulo inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

Indicando con $\vec{r}_{12}$ il vettore posizione che va dal corpo 2 al corpo 1, con modulo $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ e versore $\hat{r}$, la forza esercitata da m_2 su m_1 è:

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}.$$

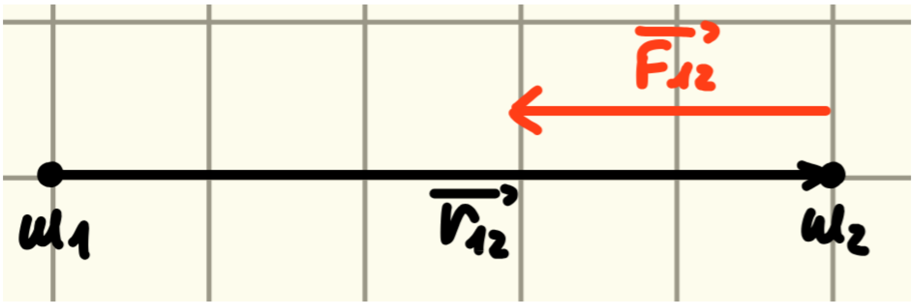

Figura 2.11: Due masse puntiformi m_1 e m_2 separate da una distanza r_{12} si attraggono con una forza di gravitazione universale $\vec{F}_{12}$.

La forza di gravitazione universale presenta le seguenti caratteristiche:

- è sempre **attrattiva**;
- decresce con il **quadrato della distanza**;
- è una **forza conservativa**;
- la formula vale anche per corpi sferici omogenei, purché si consideri la regione esterna ai corpi.

2.9.1 Dimostrazione della conservatività della forza di gravitazione universale

Vogliamo dimostrare che la forza di gravitazione universale è una forza conservativa, cioè che il lavoro da essa compiuto dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso seguito.

Ipotesi.

- Siano m_1 e m_2 le masse di due corpi che si attraggono gravitazionalmente.
- Siano $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ i vettori posizione delle masse m_1 e m_2.
- Sia $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ il vettore posizione relativa, con modulo $r_{12} = |\vec{r}_{12}|$ e versore $\hat{r}$.

[1] La congiungente è la linea immaginaria che unisce i centri di massa dei due corpi

Tesi. Vogliamo dimostrare che la forza di gravitazione universale

$$\vec{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}$$

è una forza conservativa.

Dimostrazione. Dalla legge di gravitazione universale osserviamo che la forza $\vec{F}_{12}$ è sempre diretta lungo il versore $\hat{r}$, cioè lungo la congiungente dei due corpi. Essa è quindi una forza centrale e non possiede componenti perpendicolari allo spostamento radiale.

Per verificare la conservatività della forza, calcoliamo il lavoro elementare compiuto durante uno spostamento infinitesimo $d\vec{r}$. Per definizione:

$$dL = \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Nel nostro caso:

$$dL = \vec{F}_{12}\cdot d\vec{r}.$$

Il vettore posizione può essere scritto come:

$$\vec{r} = r\,\hat{r}.$$

Derivando:

$$d\vec{r} = d(r\hat{r}) = \hat{r}\,dr + r\,d\hat{r}.$$

Sostituendo:

$$dL = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\hat{r}\cdot(\hat{r}\,dr + r\,d\hat{r}) = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,(dr + r\,\hat{r}\cdot d\hat{r})\,.$$

Poiché:

$$\hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \quad\Longrightarrow\quad d(\hat{r}\cdot\hat{r}) = 2\hat{r}\cdot d\hat{r} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \hat{r}\cdot d\hat{r} = 0,$$

segue che:

$$dL = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr.$$

Integrando tra una posizione iniziale r_A e una posizione finale r_B:

$$L_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,dr = -Gm_1 m_2\int_{r_A}^{r_B}\frac{1}{r^2}\,dr.$$

Poiché:

$$\int\frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{1}{r},$$

si ottiene:

$$L_{A\to B} = -Gm_1 m_2\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_A}^{r_B}.$$

Il lavoro dipende esclusivamente dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso seguito. Questo dimostra che la forza di gravitazione universale è una forza conservativa.

2.9.2 Energia potenziale gravitazionale

Poiché la forza di gravitazione universale è conservativa, è possibile associare ad essa un'energia potenziale $U(r)$. Per una forza centrale di tipo gravitazionale si ha:

$$U(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}.$$

L'energia potenziale gravitazionale è definita a meno di una costante additiva; convenzionalmente si sceglie:

$$U(\infty) = 0.$$

Il segno negativo indica che la forza è attrattiva e che l'energia potenziale diminuisce avvicinando i due corpi.

2.9.3 Forza peso come caso particolare

La forza peso può essere ricavata come caso particolare della legge di gravitazione universale. Consideriamo un corpo di massa m posto sulla superficie terrestre. La forza gravitazionale esercitata dalla Terra (di massa M_T) sul corpo vale:

$$F = G\frac{M_T m}{R_T^2},$$

dove R_T è il raggio terrestre.

Ponendo:

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2},$$

si ottiene:

$$F = mg,$$

che coincide con l'espressione della forza peso.

2.9.4 Velocità di fuga

La **velocità di fuga** è la velocità minima che deve essere impressa a un punto materiale affinché esso possa allontanarsi da un corpo celeste fino a distanza infinita con velocità finale nulla.

Consideriamo un corpo di massa m sulla superficie di un corpo celeste di massa M e raggio R. L'energia meccanica iniziale è:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R}.$$

All'infinito si ha:

$$E_f = 0,$$

poiché $v_f = 0$ e $U(\infty) = 0$.

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica:

$$E_i = E_f,$$

si ottiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{Mm}{R} = 0.$$

Da cui:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Questa è l'espressione della velocità di fuga, che dipende solo dalla massa e dal raggio del corpo celeste e non dalla massa del corpo lanciato.

Capitolo 3

Termodinamica

[WIP]

Capitolo 4

Elementi di Onde

[WIP]

Capitolo 5

Cenni di Meccanica Quantistica

[WIP]

Bibliografia

[1] U. Gasparini, M. Margoni e F. Simonetto. *Fisica. Meccanica e Termodinamica.* Padova, Italy: Piccin–Nuova Libraria, 2019. ISBN: 9788829929726.