

MODELAGEM DO ESCOAMENTO DE FLUIDOS EM MEIOS POROSOS COM INTERFACE MAGNÉTICA

Yuri Zeniti Sinzato

Francisco Ricardo Cunha

Universidade de Brasília - Departamento de Engenharia Mecânica - Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos - VORTEX

yzs10@hotmail.com; frcunha@unb.com.br;

Resumo. *Instabilidades podem surgir quando um líquido viscoso em um meio poroso é deslocado por outro fluido menos viscoso (gás ou líquido). Conhecido como “Saffman-Taylor fingers”, é um fenômeno recorrente em métodos de exploração de petróleo, formação de cristais e escoamentos em aquíferos. Estudos recentes mostram que o uso de suspensões magnéticas permitem o controle externo da instabilidade. O problema é não-linear e carece de melhor formulação analítica sobre o comportamento dinâmico da interface. O presente trabalho investiga, com abordagem teórica e experimental, a formação dessas instabilidades quando uma suspensão magnética desloca o fluido mais viscoso, sob ação de um campo magnético oblíquo. Uma análise de estabilidade linear fornece um critério de estabilidade em função de parâmetros adimensionais razões das forças magnética, gravitacional e capilar com a força viscosa e do número de onda dos distúrbios. A tensão interfacial faz um papel estabilizador para pequenas escalas de amplitude dos distúrbios. O campo magnético contribui para a estabilidade em escalas intermediárias quando aplicado numa direção paralela à interface. Para os casos em que a interface é instável, utiliza-se um método assintótico de expansão regular para obter uma solução analítica que caracterize a transição para o regime não linear. Efeitos de segunda ordem do campo magnético aplicado intensificam a amplitude das perturbações na interface e quebram a simetria da penetração das instabilidades no caso de um campo oblíquo com relação a direção principal do escoamento. A permeabilidade e a porosidade de um micro canal poroso bidimensional foram aferidas em uma bancada experimental. Um modelo de rede de tubos capilares foi desenvolvido para comparação com os resultados experimentais.*

Palavras-chave: *Instabilidade hidrodinâmica, meios porosos, interface magnética, tensão superficial, solução assintótica, análise de estabilidade.*

1. INTRODUÇÃO

Quando um fluido de alta viscosidade presente em um meio poroso é bombeado por um outro fluido menos viscoso, a interface entre os fluidos pode se tornar instável. O problema é de importância central em métodos de recuperação de petróleo com base em bombeamento de água. A instabilidade da interface provoca a penetração da água através do petróleo, reduzindo significativamente a produtividade. Fenômenos semelhantes surgem em crescimento de cristais, propagação de chamas e fluxos em aquíferos (Langer, 1990). Saffman and Taylor (1958) foram os primeiros a investigar esse fenômeno, comumente conhecido como “Saffman-Taylor fingers” devido as estruturas semelhantes a dedos. Homsy (1987) fez uma revisão sobre o mecanismo das instabilidades tanto em uma interface imiscível quanto miscível. Utilizando uma análise de estabilidade linear, eles mostraram que a instabilidade predomina para altos comprimentos de onda, em que o efeito da tensão superficial é reduzido. Rosensweig *et al.* (1978) verificaram que mesma interface pode ser estabilizada quando um fluido magnético é utilizado para empurrar o fluido mais viscoso e um campo magnético paralelo a interface é aplicado.

A formação e o crescimento das perturbações é dominado por efeitos não-lineares. O problema ainda precisa de avanços em uma teoria analítica que descreva bem a influência das diversas forças atuantes na instabilidade, em especial, àquelas provenientes da ação de um campo magnético externo. Um método de perturbação regular oferece uma importante abordagem para analisar como efeitos não-lineares afetam a amplitude e a forma da perturbação. Uma explicação instrutiva sobre a teoria e aplicação deste método é dada por Logan (2013). O presente trabalho faz uma investigação analítica da estabilidade e deformações na interface quando uma suspensão magnética desloca um fluido mais viscoso por uma matriz porosa bidimensional, sob ação de um campo magnético oblíquo. Uma análise de estabilidade linear é utilizada para determinar o fator de amplificação em função dos parâmetros adimensionais do problema. São investigados tanto regimes em que a tensão superficial domina as forças viscosas e compete com as forças magnéticas como também regimes em que as forças magnéticas balanceiam as forças viscosas. Para os casos em que a interface é instável,

propõe-se uma solução assintótica regular que caracterize a transição de pequenas para grandes amplitudes de perturbação. Investiga-se como os efeitos não-lineares alteram o comportamento dinâmico em termo da taxa de crescimento ou atenuação das amplitudes de instabilidades na interface fluida. Finalmente, um micro canal que simula uma matriz porosa bidimensional é caracterizado em uma bancada experimental. Adicionalmente, um modelo de rede de tubos capilares foi desenvolvido para comparação com os resultados experimentais

2. MODELAGEM

Uma célula de Hele-Shaw pode ser modelada como uma matriz porosa bidimensional, assumindo um perfil parabólico de velocidade entre as placas (Fig. 1). A permeabilidade é dada por $K_p = b^2/12$, em que b é a distância entre as placas. Consideramos como fluido superior (fluido B) o fluido a ser extraído, sem magnetização. O fluido inferior (fluido A) é a suspensão magnética bombeada na matriz. Em um sistema de referencial estacionário a posição de equilíbrio, a interface entre os fluidos é dada por:

$$y_i = f(x, t) \quad (1)$$

em que $f(x, t)$ é a perturbação na interface. O velocidade da linha de equilíbrio da interface é U/ϵ , em que ϵ é a porosidade da matriz porosa e U é velocidade de filtragem do escoamento. Consideramos um campo magnético externo oblíquo a interface, em que as componentes cartesianas são dadas por:

$$H_x = H \cos(\theta) \quad e \quad H_y = H \sin(\theta) \quad (2)$$

em que H é o módulo do campo magnético e θ é o ângulo com o eixo x .

2.1 Magnetoestática

Na ausência de campo elétrico e com um campo magnético constante, as equações de Maxwell são dadas por (Rosenzweig, 2013):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

em que \mathbf{B} é o campo de indução magnética e \mathbf{H} é o campo magnético, que se relacionam por:

$$\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (4)$$

em que μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo e \mathbf{M} é a magnetização local. Combinando as equações (3) e (4) e escrevendo o campo magnético como $\mathbf{H} = \nabla\psi$, em que ψ é o potencial magnético, obtemos:

$$\nabla^2\psi = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (5)$$

Aqui consideramos a hipótese de super-paramagnetismo:

$$\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H} \quad (6)$$

em que $\chi(H)$ é a suscetibilidade magnética do fluido, que é função da magnitude do campo magnético. Substituindo (8) em (5) e adimensionalizando a equação, resulta em:

$$\begin{cases} \nabla^{*2}\psi_A^* = -\frac{1}{1+\chi} \frac{d\chi}{dH^*} \nabla^*\psi_A^* \cdot \nabla^*|\nabla^*\psi_A^*|, & y < y_i \\ \nabla^{*2}\psi_B^* = 0, & y > y_i \end{cases} \quad (7)$$

em que $\nabla^* = b\nabla$, $H^* = H/M_s$ e $\psi^* = \psi/bM_s$. Note que para o fluido B (não magnetizável), $\chi = 0$. Para suspensões magnéticas diluídas, χ é dado por:

$$\chi = \mathcal{F}(\alpha, \phi) \frac{1}{H^*}, \quad \alpha = \frac{mM_s H^*}{KT} \quad (8)$$

em que \mathcal{F} denota uma função da fração volumétrica de partículas magnéticas ϕ e do parâmetro adimensional α , com M_s a magnetização de saturação do fluido, m é o momento magnético das partículas, K é constante de Boltzman e T é temperatura absoluta do fluido. A susceptibilidade inicial do fluido χ_o corresponde ao valor de χ para $H \rightarrow 0$.

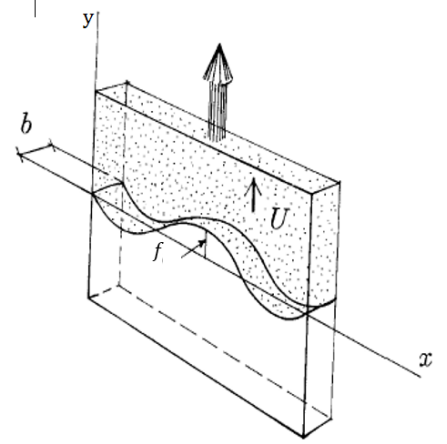


Figura 1: Escoamento de dois fluidos imiscíveis em uma célula de Hele-Shaw.

2.2 Equação de Darcy generalizada

Para escoamentos em meios porosos a baixa velocidade, as forças inerciais podem ser desprezadas em comparação as forças viscosas. Nesse regime, o balanço de forças no fluido é descrito pela Lei de Darcy, acrescida dos termos referentes a força gravitacional e a força magnética:

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K_p} \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} + \mu_o \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} . \quad (9)$$

em que p é a pressão termodinâmica, η é a viscosidade dinâmica, K_p é a permeabilidade da matriz, \mathbf{u} é a velocidade de filtragem, ρ é massa específica, \mathbf{g} é o campo gravitacional, μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo, \mathbf{M} é a magnetização local e \mathbf{H} é o campo magnético. Substituindo (8), resulta em:

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K_p} \mathbf{u} - \rho \mathbf{g} + \mu_o \chi \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (10)$$

Consideramos um meio poroso vertical, de modo que $\mathbf{g} = \nabla(-gy)$, em que g é a aceleração da gravidade local. Utilizando a identidade $\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = 1/2 \nabla(\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H})$ e a condição magneto-estática $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$, temos:

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K_p} \mathbf{u} - \nabla(\rho gy) + \chi \nabla \left(\frac{1}{2} \mu_o H^2 \right) . \quad (11)$$

Podemos reescrever o último termo de (11) e isolando a velocidade, resulta em::

$$\mathbf{u} = \nabla \left[\frac{K_p}{\eta} \left(-p - \rho gy + \mu_o \int_0^H \chi H dH \right) \right] . \quad (12)$$

Portanto, o campo de velocidade é descrito por um potencial de velocidade ϕ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi , \text{ com } \phi = \frac{K_p}{\eta} \left(-p - \rho gy + \mu_o \int_0^H \chi H dH \right) \quad (13)$$

A equação (13) é adimensionalizada por $\phi^* = \phi/Ub$, $p^* = pb/\eta_B U$, $y^* = y/b$, $K_p^* = K_p/b^2$, $H^* = H/M_s$, em que η_B é a viscosidade do fluido superior e M_s é a magnetização de saturação do fluido A. Assim, os potenciais de velocidade adimensionais dos fluidos A e B são dados por:

$$\begin{cases} \phi_A^* = K_p^* \left(-p_A^* - \frac{\rho_A g b^2}{\eta_B U} y^* + R_m \int_0^{H_A^*} \chi H^* dH^* \right) , & y < y_i \\ \phi_B^* = \eta_{A,B} K_p^* \left(-p_B^* - \frac{\rho_B g b^2}{\eta_B U} y^* \right) , & y > y_i . \end{cases} \quad (14)$$

em que $\eta_{A,B}$, C_a e R_m representam os grupos adimensionais η_A/η_B , $\eta_B U/\sigma$ e $\mu_o M_s^2 b/\eta_B U$ e são denominados, respectivamente, razão de viscosidade, número de capilaridade e número de Reynolds magnético. Combinando a condição de incompressibilidade $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ com (13), obtemos que o potencial de velocidade satisfaz a equação de Laplace:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi_A = 0 , & y < y_i \\ \nabla^2 \phi_B = 0 , & y > y_i \end{cases} \quad (15)$$

2.3 Condições de contorno

Considere um referencial na interface: $Y = y - f(x, t)$. Para este referencial, a interface é invariante, logo:

$$\frac{DY}{Dt} = \frac{\partial Y}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla Y = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{Ub}{\epsilon} \nabla \phi \cdot \nabla Y = 0 , \quad (16)$$

com $\nabla \phi = \nabla \phi_A = \nabla \phi_B$ na interface e $\nabla Y = (-f_x, 1)$. Adimensionalizando a expressão, resulta em:

$$\frac{\partial f^*}{\partial t^*} = \left[\frac{\partial \phi_A^*}{\partial y^*} - \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \frac{\partial \phi_A^*}{\partial x^*} \right]_{y=y_i} = \left[\frac{\partial \phi_B^*}{\partial y^*} - \frac{\partial f^*}{\partial x^*} \frac{\partial \phi_B^*}{\partial x^*} \right]_{y=y_i} \quad (17)$$

em que $x^* = x/b$, $t^* = tU/b\epsilon$ e $f^* = f/b$. O campo magnético deve satisfazer as condições de contorno na interface de continuidade da componente tangencial de \mathbf{H}^* e da componente normal de \mathbf{B}^* :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_A^* - \mathbf{B}_B^*) = 0 \\ \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_A^* - \mathbf{H}_B^*) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (18)$$

em que $\mathbf{B}^* = \mathbf{B}/M_o$ e $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor normal unitário a interface, que aponta para o fluido superior. Outra a condição de contorno cinemática é que para $y \rightarrow \pm\infty$ o efeito da perturbação é dissipado, ou seja, a velocidade do fluido é uniforme:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \Rightarrow \lim_{y \rightarrow \infty} \nabla^* \phi_B^* = \lim_{y \rightarrow -\infty} \nabla^* \phi_A^* = \mathbf{0} \quad (19)$$

O mesmo vale para o potencial magnético:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \nabla^* \psi_B^* = \mathbf{H}_B^{o*} \quad e \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \nabla^* \psi_A^* = \mathbf{H}_A^{o*} \quad (20)$$

em que \mathbf{H}^{o*} é o campo magnético adimensional não perturbado.

2.4 Salto de tensões na interface

O tensor de tensões na presença de um campo magnético é dado por (Rosensweig, 2013):

$$\Sigma = -p\mathbf{I} - \frac{1}{2}\mu_o |\mathbf{H}|^2 \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (21)$$

Pela Lei de Young-Laplace, o salto de tensões na interface é:

$$(\Sigma_A - \Sigma_B) \cdot \hat{\mathbf{n}} = (2\bar{\kappa}\sigma)\hat{\mathbf{n}}, \quad (22)$$

em que $\bar{\kappa}$ é a curvatura média da interface e σ é a tensão interfacial entre os fluidos. Substituindo (4), (8) e (18) em (22), resulta em:

$$(p_B - p_A) = 2\bar{\kappa}\sigma + \frac{\mu_o \chi^2 H_{An}^2}{2}. \quad (23)$$

em que $H_{An} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_A$. Adimensionalizando a equação, resulta em:

$$(p_B^* - p_A^*) = \frac{2\bar{\kappa}^*}{C_a} + \frac{R_m \chi^2 H_{An}^{*2}}{2}. \quad (24)$$

em que $\bar{\kappa}^* = \bar{\kappa}b$. Combinando (14) e (24), obtêm-se:

$$-\frac{\phi_B^* - \eta_{A,B}\phi_A^*}{K_p^{*2}} = N_A y^* + \frac{2\bar{\kappa}^*}{C_a} + R_m \left(\int_0^{H_A^*} \chi H^* dH^* + \frac{\chi^2 H_{An}^{*2}}{2} \right) \quad (25)$$

em que N_A é o número de Arquimedes dado por $N_A = (\rho_B - \rho_A)gb^2/\eta_B U$. A curvatura média da interface é dada por $\bar{\kappa} = (\partial^2 f / \partial x^2) / 2(1 + (\partial f / \partial x)^2)^{3/2}$. A curvatura entre as placas foi desconsiderada pois é constante para todo x , portanto não afeta a estabilidade da interface. A condição de contorno deve ser avaliada na interface $y^* = y_i^* = f^*(x, t)$. Reescrevendo a condição de salto de tensões (omitindo o asterisco):

$$-\left[\frac{\phi_B^* - \eta_{A,B}\phi_A^*}{K_p^*} \right]_{y=f} = N_A f^* + \frac{\partial^2 f^* / \partial x^{*2}}{C_a(1 + (\partial f^* / \partial x^*)^2)^{3/2}} + R_m \left[\int_0^{H_A^*} \chi H^* dH^* + \frac{\chi^2 H_{An}^{*2}}{2} \right]_{y=f} \quad (26)$$

O movimento da interface fica totalmente definido pelas equações (7), (15), (17), (18), (19), (20) e (26) associadas à condição inicial. Em todas as condições de contorno na interface existem tanto não-linearidades explícitas quanto implícitas, que aparecem pois o contorno onde as condições são aplicadas é a própria solução procurada.

3. CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO

Na ausência de perturbação, a solução do potencial de velocidade que satisfaz a Equação de Laplace e as condições de contorno cinemáticas é:

$$\begin{cases} \phi_A(x, y, t) = G_A(t) \\ \phi_B(x, y, t) = G_B(t) \end{cases} \quad (27)$$

em que $G_A(t)$ e $G_B(t)$ são funções arbitrárias que satisfazem a condição de salto de tensões. O campo magnético na condição de equilíbrio deve satisfazer (18). Para uma interface plana, o vetor normal é dado por $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_y$. Assim,

$$B_{Ay} - B_{By} = 0 \quad e \quad H_{Ax} - H_{Bx} = 0, \quad \text{para } f(x, t) = 0 \quad (28)$$

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR

A estabilidade da interface é analisada para pequenas perturbações em relação a condição de equilíbrio. Propomos uma perturbação oscilatória da forma:

$$f(x, t) = ae^{\zeta t + ikx} \quad (29)$$

em que k é o número de onda, ζ é a taxa de amplificação e a é a amplitude inicial. A condição de contorno cinemática na interface linearizada e adimensional(omitindo o asterisco) é:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_{y=0}, \quad (30)$$

em que ϕ é avaliado na posição de equilíbrio $y = 0$. Escrevemos o potencial de velocidade adimensional em termos do potencial de equilíbrio ϕ^o e um potencial perturbado ϕ' (omitindo o asterisco):

$$\phi = \phi^o + \phi' \quad (31)$$

Resolvendo a equação de Laplace para ϕ' e aplicando às condições de contorno cinemáticas linearizadas resulta em:

$$\phi'_A(x, y, t) = \frac{a\zeta}{k} e^{\zeta t + ky + ikx} \quad ; \quad \phi'_B(x, y, t) = -\frac{a\zeta}{k} e^{\zeta t - ky + ikx} \quad (32)$$

De maneira análoga, descrevemos o potencial magnético adimensional em termos de uma componente de equilíbrio e uma componente perturbada (omitindo o asterisco):

$$\psi = \psi^o + \psi' \quad (33)$$

A partir da hipótese de pequenas perturbações, podemos simplificar (7). Combinando com as condição (20), (18) e (28), obtemos que os potenciais magnéticos perturbados ψ'_A e ψ'_B são dados por:

$$\psi'_A(x, y, t) = m_A e^{\zeta t + k\beta_2 y + ikx} \quad ; \quad \psi'_B(x, y, t) = m_B e^{\zeta t - ky + ikx} \quad (34)$$

em que β_2 , m_A e m_B são obtidos pelas equações (5) e (18). A condição de contorno de salto de tensões na interface linearizada e adimensional (omitindo o asterisco) é:

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\phi'_B - \eta_{A,B} \phi'_A}{K_p} \right]_{y=0} &= \left(\frac{1 - \eta_{A,B}}{K_p} + N_A \right) f + \frac{1}{C_a} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \\ &R_m \left[\chi \left(H_x \frac{\partial \psi'_A}{\partial x} + H_y \frac{\partial \psi'_A}{\partial y} \right) + \chi^2 \left(H_y \frac{\partial \psi'_A}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} H_x H_y \right) \right]_{y=0} \end{aligned} \quad (35)$$

Aqui denotamos $H = H_A^o$ por simplicidade de notação. Termos constantes em x foram omitidos, pois não afetam a estabilidade da interface. Substituindo as equações (2), (29), (32), (34) em (35) resulta na relação de dispersão para ζ :

$$\zeta = \frac{K_p}{(1 + \eta_{A,B})} \left[kC_1 + k^2 C_2 - \frac{k^3}{C_a} \right] \quad (36)$$

em que:

$$C_1 = \left(\frac{(1 - \eta_{A,B})}{K_p} + N_A \right) \quad ; \quad C_2 = \text{Re} \left\{ R_m \chi^2 H^2 \left[\sin^2(\theta) - \frac{1}{1 + \beta_1(1 + \chi)} \right] \right\} \quad (37)$$

A interface será estável se $\zeta < 0$ e instável se $\zeta > 0$. Foi considerada apenas a parte real de C_2 , visto que sua parte imaginária está relacionada com uma propagação lateral da onda devido a um campo magnético oblíquo. Essa propagação não afeta a estabilidade da interface, portanto foge do interesse dessa análise. A figura 2 mostra o fator de amplificação em função do número de onda para várias condições de campo magnético, susceptibilidade magnética inicial e ângulo de aplicação do campo.

Observe que o fator de amplificação é dado por um polinômio de terceiro grau em k . Para pequenos números de onda (i.e. longos comprimentos de onda), o termo kC_1 é predominante na equação. O coeficiente C_1 expressa o balanço entre a força viscosa e a força gravitacional. Se o fluido inferior for mais denso ($N_A < 0$), a força gravitacional tenderá a estabilizar a interface. Se o fluido superior for mais viscoso ($\eta_{A,B} < 1$), a força viscosa tenderá a intensificar a perturbação. Considerando que $C_1 > 0$, tem-se um regime em que domina a força viscosa e a perturbação cresce exponencialmente (i.e. ‘Viscous fingers’). Para altos números de onda (i.e. curtos comprimentos de onda), a força capilar (proporcional a

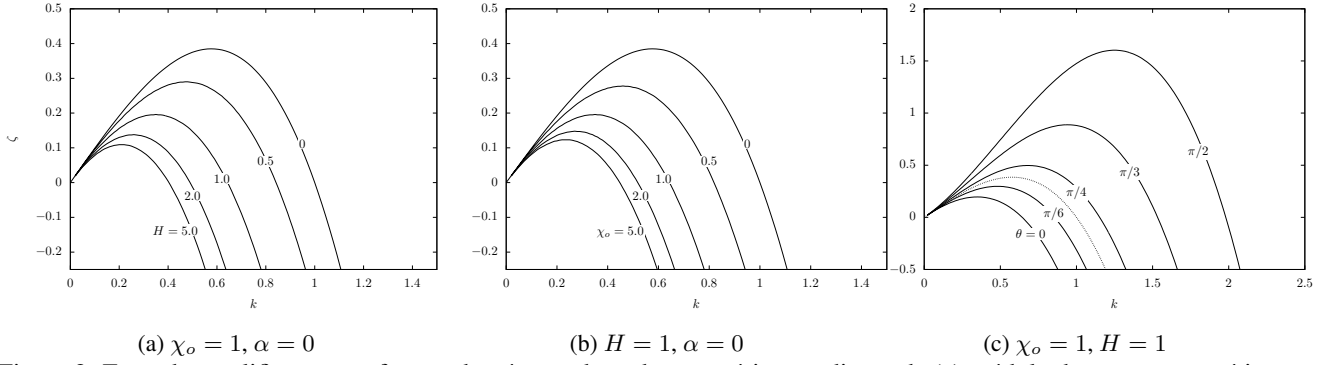


Figura 2: Fator de amplificação em função do número de onda para várias condições de (a) módulo do campo magnético, (b) suscetibilidade magnética inicial e (c) ângulo de aplicação. $C_a = 1, N_A = 0, \eta_{A,B} = 0, K_p = 1, R_m = 5$. - - Ausência de campo magnético. A susceptibilidade na equação (8) foi calculada pela função de Langevin $\mathcal{F}(\alpha, \varphi) = \mathcal{L}(\alpha) = \alpha^{-1} - \coth(\alpha)$.

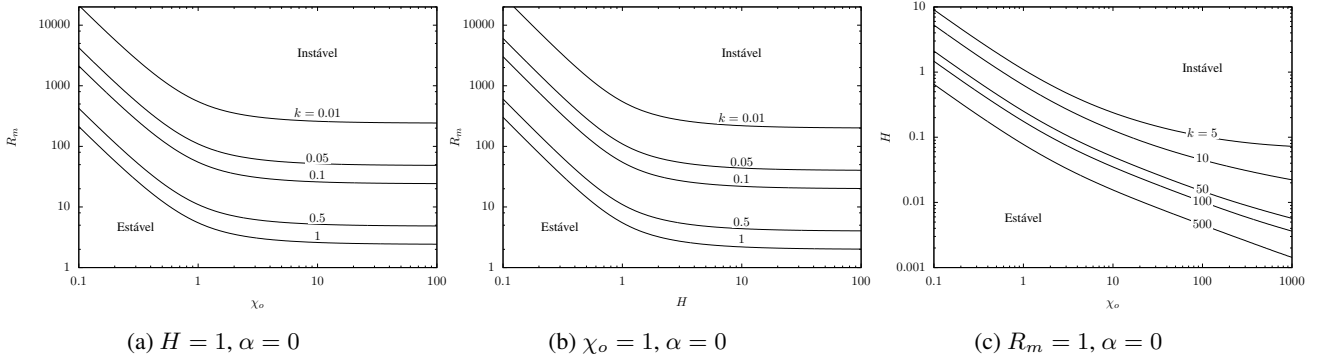


Figura 3: Curvas neutras de estabilidade relacionando o Número de Reynolds magnético, a magnitude do campo magnético e a susceptibilidade inicial do fluido, para vários valores de número de onda. $C_a \rightarrow \infty, N_A = 0, \eta_{A,B} = 0, K_p = 1$. A susceptibilidade na equação (8) foi calculada pela função de Langevin $\mathcal{F}(\alpha, \varphi) = \mathcal{L}(\alpha) = \alpha^{-1} - \coth(\alpha)$.

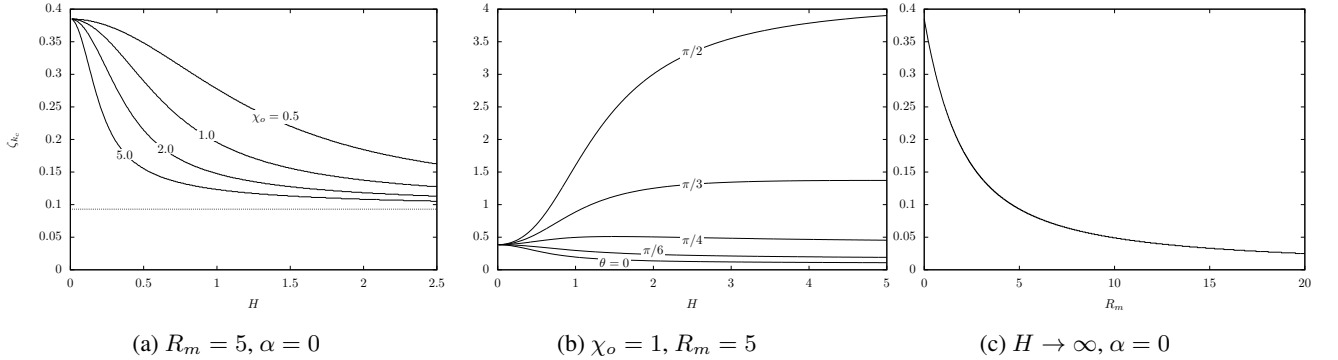


Figura 4: Fator de amplificação em função do (a) módulo do campo magnético para diferentes suscetibilidade magnética, do (b) módulo do campo magnético para diferentes ângulos e do (c) número de Reynolds magnético na condição de saturação do fluido. $C_a = 1, N_A = 0, \eta_{A,B} = 0, K_p = 1$. A linha tracejada em (a) indica a assíntota das curvas. A susceptibilidade na equação (8) foi calculada pela função de Langevin $\mathcal{F}(\alpha, \varphi) = \mathcal{L}(\alpha) = \alpha^{-1} - \coth(\alpha)$.

k^3) domina a força viscosa, estabilizando as perturbações de pequena escala. Para números de onda médios, tem-se um regime em que competem as forças magnética, viscosa (desestabilizante) e capilar (estabilizante). Se o campo magnético aplicado for vertical ($\theta = \pi/2$ ou $-\pi/2$), instabilidade será intensificada, mas se o campo magnético for horizontal ($\theta = 0$ ou π), o fator de amplificação será reduzido. Vamos considerar a situação em que o campo magnético é estabilizante ($C_2 < 0$). Se $C_1 < 0$, a interface será estável para todos os comprimentos de onda. Se $C_1 > 0$, a perturbação será instável para uma faixa de números de onda, cujo máximo número de onda instável é k_o e o número de onda crítico (i. e. mais instável) é k_c , dados por:

$$k_o = \frac{C_a}{2} [C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4\frac{C_1}{C_a}}] ; \quad k_c = \frac{C_a}{3} [C_2 + \sqrt{C_2^2 + 3\frac{C_1}{C_a}}] \quad (38)$$

5. CARACTERIZAÇÃO DE UMA MATRIZ POROSA BIDIMENSIONAL

A figura 3 apresenta as curvas neutras de estabilidade da interface para vários comprimentos de onda na condição de campo horizontal. Analisa-se a estabilidade em função dos parâmetros magnéticos principais (susceptibilidade magnética inicial, magnitude do campo magnético e número de Reynolds magnético). Consideramos o caso limite em que as forças capilares são insignificantes ($C_a \rightarrow \infty$).

Em uma interface de forma arbitrária, em que uma ampla banda de números de onda está presente, aqueles distúrbios com $k \approx k_c$ irão crescer mais rápido e dominar sobre os demais. Portanto, o crescimento da perturbação é determinado pelo fator de amplificação máximo ζ_{k_c} (fator de amplificação para o número de onda crítico). As figuras 4a e 4b mostram ζ_{k_c} em função do módulo do campo magnético para vários valores de ângulo de aplicação e suscetibilidade magnética inicial do fluido. Observe que quando $H \rightarrow \infty$, o fluido magnético atinge a condição de saturação. Nesse caso, o fator de amplificação passa a ser influenciado somente pelo número de Reynolds magnético, conforme indica a figura 4c. Vale ressaltar que o número de Reynolds magnético está associado a magnetização de saturação do fluido.

5. CARACTERIZAÇÃO DE UMA MATRIZ POROSA BIDIMENSIONAL

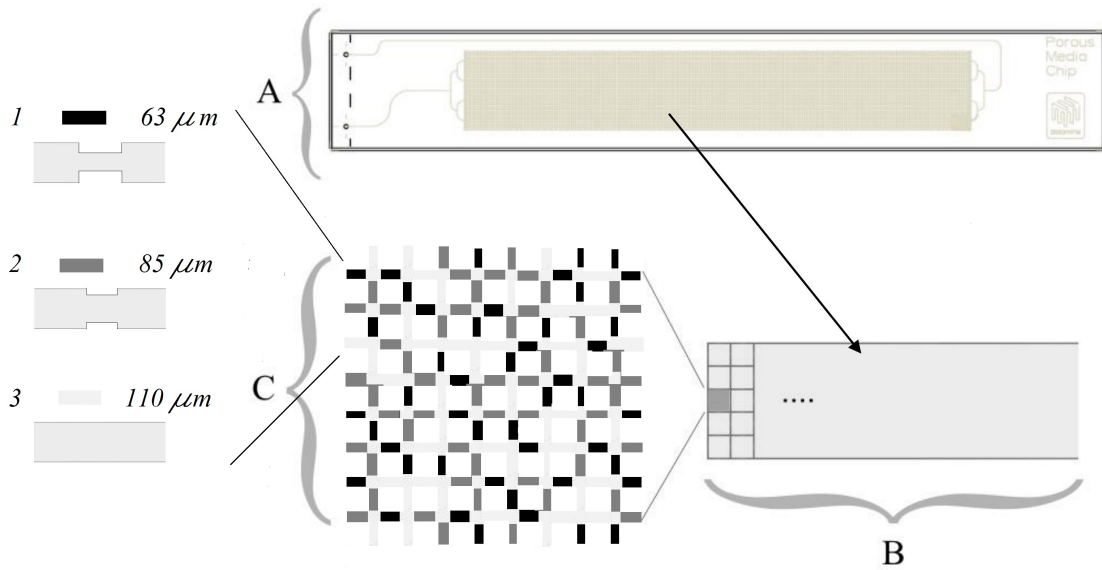


Figura 5: Diagrama da estrutura do micro canal poroso da Dolomite Microfluidic®: (A) Imagem da placa porosa; (B) Área porosa formada por quadrados de 2 x 2 mm; (C) Estrutura dos quadrados, com geometria aproximada das constrições.

Um micro canal poroso bidimensional da Dolomite Microfluidic® foi caracterizado experimentalmente para simular uma matriz rochosa real. O canal consiste de uma placa de vidro com uma área porosa total de 10 x 60 mm. Essa área é formada por 150 quadrados de 2 x 2 mm com 8 x 8 tubos capilares formando uma malha quadrada. Os tubos possuem uma seção aproximadamente circular (100 x 110 μm), sendo que alguns possuem constrições de 63 μm e 85 μm de diâmetro, distribuídas randomicamente. O fluido entra e sai da região porosa por tubos auxiliares de seção aproximadamente circular (100 x 110 μm) e comprimentos 14,3 mm (entrada) e 85,7 mm (saída). A figura 5 mostra a estrutura do micro canal poroso.

A porosidade e permeabilidade do canal foram determinadas em uma bancada composta de bomba de seringa, transdutor de pressão, manômetro digital, balança digital de precisão e microscópio óptico. Para determinar a porosidade, a massa do micro canal foi medida na balança de precisão. Em seguida, o micro canal foi preenchido com água destilada a 25 °C e sua massa foi novamente medida. A diferença de massa foi utilizada para calcular o volume poroso. Dividindo o resultado pelo volume total da região porosa, obteve-se uma porosidade de $\epsilon = (55,8 \pm 1,7)\%$.

A permeabilidade do canal foi determinada a partir da injeção de água destilada utilizando uma bomba de seringa. A diferença de pressão ΔP entre a entrada e a saída é medida por um transdutor de pressão, conectado a uma placa de aquisição de dados. A vazão Q foi variada de 0 a 20 μl/min, e uma curva de diferença de pressão por vazão foi obtida. A partir da lei de Darcy global, a permeabilidade do canal é:

$$K_p = \frac{\eta l_p}{A_p} \frac{Q}{\Delta P} \quad (39)$$

,em que l_p é o comprimento da região porosa e A_p é a área da região porosa. Aqui, o valor utilizado para $Q/\Delta P$ foi o inverso do coeficiente angular da curva de diferença de pressão por vazão, resultando em uma permeabilidade de $K_p = (1,93 \pm 0,07) D$. É importante ressaltar que essa permeabilidade corresponde ao valor total da placa porosa,

incluindo a queda de pressão nos tubos auxiliares. De fato, a queda de pressão apenas da região porosa corresponde a apenas 2,5 % da queda de pressão total, sendo da mesma ordem da incerteza do transdutor de pressão. Portanto, não é possível determinar experimentalmente a permeabilidade apenas da região porosa.

Para determinar a permeabilidade apenas da região porosa, foi desenvolvido um modelo de rede de tubos capilares heterogêneos. A matriz porosa foi modelada como uma malha de nós conectados por tubos. As constrições foram simplificadas por constrições retangulares. Assumi-se o escoamento nos tubos capilares como parabólicos em toda sua extensão, incluindo nas contrações. Essa hipótese é uma boa aproximação pois o número de Reynolds no micro canal é $Re \ll 1$. Assim, a queda de pressão nos tubos é obtida aplicando a lei de Hagen-Poiseuille nos trechos com e sem contração:

$$\Delta P = \Delta P_c + \Delta P_l = Q \frac{128\eta l}{\pi d^4} C_d \quad (40)$$

Aqui, l e d são o comprimento e diâmetro de cada tubo e C_d é um coeficiente que leva em conta o diâmetro da contração. Combinando a equação 40 em cada tubo com a equação da continuidade em cada nó, obtêm-se o seguinte sistema linear:

$$[\mathbf{A}]\{\mathbf{p}\} = \{\mathbf{p}_o\} \quad (41)$$

em que $\{\mathbf{p}\}$ é o vetor das pressões em cada nó, $\{\mathbf{p}_o\}$ é vetor com as pressões impostas em na entrada e na saída e $[\mathbf{A}]$ é uma matriz de conexões que indica quais nós são conectados e com qual diâmetro de contração. Resolvendo (41), obtêm-se o campo de pressão ao longo da placa. Calculando a vazão total na placa e substituindo em (39), resulta em uma permeabilidade de $K_p = 75,6 D$ para a região porosa. O volume da região porosa também foi calculado numericamente, resultando em uma porosidade de $\epsilon = 54,2\%$, em concordância com o valor experimental.

6. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA REGULAR

Quando a interface é instável, é necessário considerar a influência dos efeitos não-lineares na amplitude e na forma da perturbação. É suficiente analisar o comportamento da interface apenas para $k = k_c$, pois é o número de onda mais instável. Um método de perturbação regular é aplicado para um regime fracamente não linear. Primeiramente, os termos não-lineares das condições de contorno na interface são explicitados. Em seguida, as variáveis do problema são reescaladas de modo que a ordem de grandeza dos termos não-lineares seja representada por um parâmetro adimensional. Inicia-se a análise com a equação (17). Os potenciais perturbados de velocidade são avaliados em $y = f$. Para explicitar a dependência com $f(x, t)$, utiliza-se uma série de Taylor de primeira ordem:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right|_{y=f} = \left. \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right|_{y=0} + f \left. \frac{\partial^2 \phi'}{\partial x \partial y} \right|_{y=0} + \dots \\ \left. \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right|_{y=f} = \left. \frac{\partial \phi'}{\partial y} \right|_{y=0} + f \left. \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} \right|_{y=0} + \dots \end{cases} \quad (42)$$

Substituindo a expansão em (17) resulta em:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left[\frac{\partial \phi'_A}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \phi'_A}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \phi'_A}{\partial y^2} \right]_{y=0} + O(f^3) = \left[\frac{\partial \phi'_B}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \phi'_B}{\partial x} + f \frac{\partial^2 \phi'_B}{\partial y^2} \right]_{y=0} + O(f^3) \quad (43)$$

Considerando uma perturbação inicial da forma $f(x, 0) = a \cos(k_c x)$ e definindo $\lambda_c = 2\pi/k_c$ como o comprimento de onda crítico (mais instável), têm-se que $f, \phi'_A, \phi'_B \sim a$, $y, x, t \sim \lambda_c$. Definindo as variáveis reescaladas $\tilde{f} = f/a$, $\tilde{\phi}'_A = \phi'_A/a$, $\tilde{\phi}'_B = \phi'_B/a$, $\tilde{x} = x/\lambda_c$, $\tilde{y} = y/\lambda_c$, $\tilde{t} = t/\lambda_c$ resulta-que:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} = \left[\frac{\partial \tilde{\phi}'_A}{\partial \tilde{y}} - \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\phi}'_A}{\partial \tilde{x}} - \tilde{f} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}'_A}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right]_{\tilde{y}=0} + O(\varepsilon^2) = \left[\frac{\partial \tilde{\phi}'_B}{\partial \tilde{y}} - \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \tilde{\phi}'_B}{\partial \tilde{x}} - \tilde{f} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}'_B}{\partial \tilde{y}^2} \right) \right]_{\tilde{y}=0} + O(\varepsilon^2) \quad (44)$$

em que o parâmetro adimensional $\varepsilon = a/\lambda_c$ contém a ordem de grandeza dos termos não-lineares. A análise foi repetida para as equações (18), (7) e (26). Se $\varepsilon \ll 1$, os termos não-lineares são de pequena ordem e pode se propor uma solução assintótica regular da forma:

$$\tilde{f}(x, t) = \tilde{f}_0(x, t) + \varepsilon \tilde{f}_1(x, t) + O(\varepsilon^2) \quad (45)$$

Do mesmo modo, os potenciais perturbados magnético e de velocidade são dados por soluções assintóticas:

$$\begin{cases} \tilde{\phi}'(x, y, t) = \tilde{\phi}'_0(x, y, t) + \varepsilon \tilde{\phi}'_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2) , & \phi' = \phi'_A, \phi'_B \\ \tilde{\psi}'(x, y, t) = \tilde{\psi}'_0(x, y, t) + \varepsilon \tilde{\psi}'_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2) , & \psi' = \psi'_A, \psi'_B \end{cases} \quad (46)$$

6. SOLUÇÃO ASSINTÓTICA REGULAR

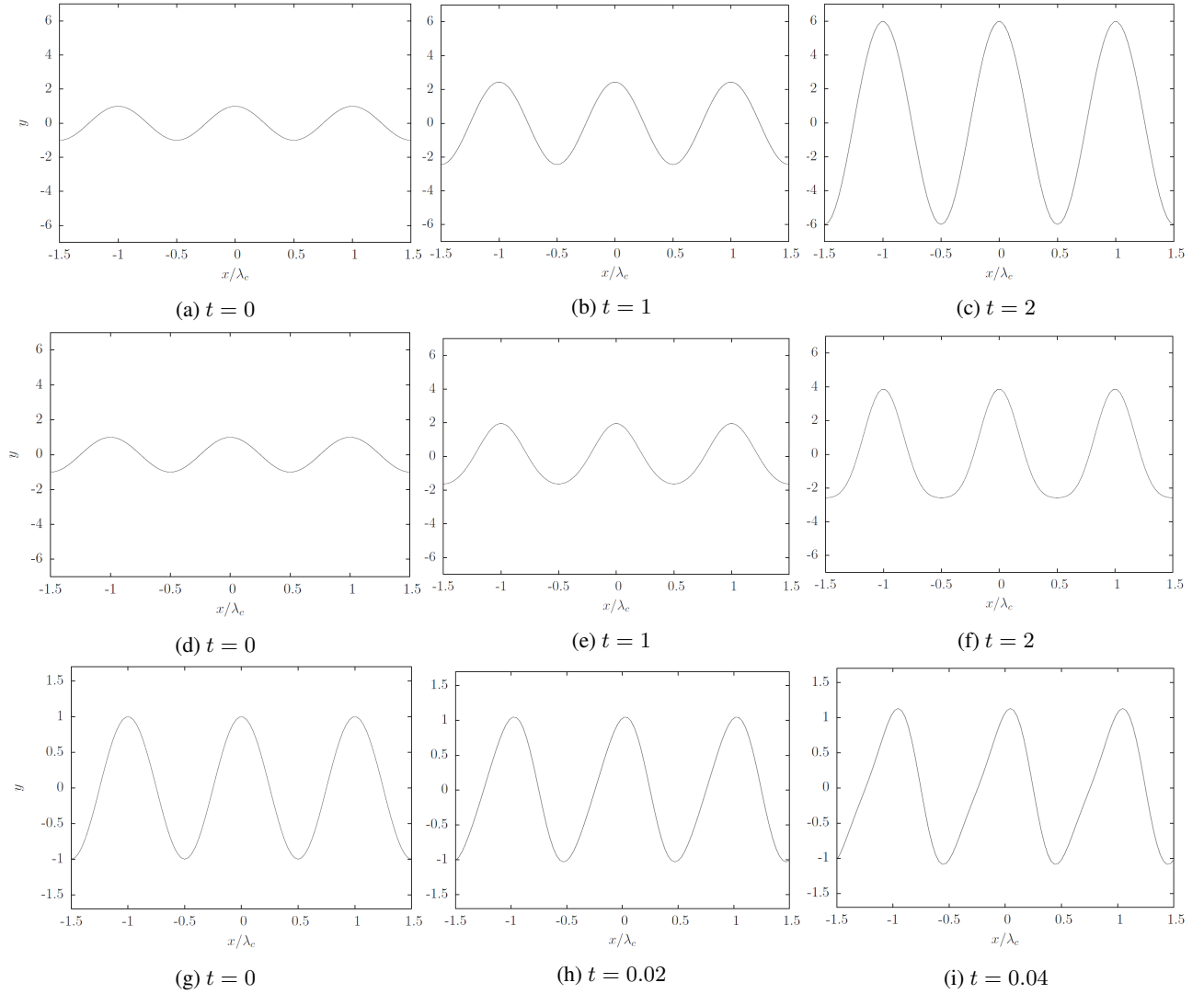


Figura 6: Evolução temporal da perturbação de comprimento de onda crítico: (a) a (c) ausência de campo magnético; (d) a (f) aplicação campo magnético horizontal ($\alpha = 0$, $H = 1$); (g) a (i) aplicação campo magnético oblíquo ($\alpha = \pi/4$, $H = 1$). $C_a = 1$, $N_A = -1$, $\eta_{A,B} = 0$, $K_p = 1/12$, $a = 1$, $R_m = 5$, $\chi = 1$.

em que $\phi'_0, \phi'_1, \psi'_0, \psi'_1$ devem satisfazer individualmente as equações (7), (15), (19) e (20). Substituindo as soluções assintóticas em equações perturbadas e igualando os coeficientes em ε , resulta em dois sistemas de equações lineares não-homôgeneas para $\tilde{f}_0(x, t)$ e $\tilde{f}_1(x, t)$. A condição inicial do problema é:

$$\tilde{f}(x, 0) = \cos(2\pi\tilde{x}) \quad (47)$$

de modo que as condições iniciais para os termos da solução assintótica são:

$$\tilde{f}_0(x, 0) = \cos(2\pi\tilde{x}) \quad \text{e} \quad \tilde{f}_1(x, 0) = 0 \quad (48)$$

O sistema para $\tilde{f}_0(x, t)$ corresponde ao problema quando $\varepsilon = 0$, e sua solução equivale àquela encontrada na análise de estabilidade linear. O sistema para $\tilde{f}_1(x, t)$ fornece as primeiras deformações na forma da interface. Substituindo a solução em (45) e retornando as variáveis não escalonadas, resulta em:

$$f(x, t) = ae^{\zeta_{k_c} t} \cos(k_c x) + \frac{a^2 k_c^3 K_p (e^{2\zeta_{k_c} t} - e^{\zeta_{2k_c} t})}{(2\zeta_{k_c} - \zeta_{2k_c})(1 + \eta_{A,B})} R_m H^2 \chi^2 (\Re\{\beta_3\} \cos(2k_c x) - \Im\{\beta_3\} \sin(2k_c x)) \quad (49)$$

em que ζ_{k_c} e ζ_{2k_c} são os fatores de amplificação para $k = k_c$ e $2k_c$, respectivamente, calculados por (36), e β_3 , obtido por (5), é função dos parâmetros magnéticos (H, χ e θ). Esta solução é válida para tempos suficientemente pequenos, em que $\varepsilon|\tilde{f}_1| \ll |\tilde{f}_0|$. O termo de segunda ordem está associado ao campo magnético e fornece as primeiras deformações na forma cossenoidal da perturbação. O termo de $\Re\{\beta_3\}$ (parte real) é positivo para qualquer orientação do campo magnético

e máximo para $\alpha = \pi/2$ (Campo vertical). Este termo contribui para a amplitude da perturbação, pois torna a penetração mais estreita. O termo de $\Im\{\beta_3\}$ (parte imaginária) distorce a simetria da interface com respeito ao eixo y , e é não-nulo para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pi/2$. Este termo indica que a aplicação de um campo magnético oblíquo tende a orientar a perturbação na direção do campo. A figura 6 mostra a evolução temporal da interface instável na ausência de campo magnético, com um campo magnético horizontal e com um campo magnético oblíquo.

7. CONCLUSÕES

Este estudo averiguou o problema da estabilidade da interface entre dois fluidos escoando em um meio poroso. Foi considerada uma suspensão magnética empurrando um fluido mais viscoso, sob ação de um campo magnético. Um critério de estabilidade foi definido em função dos parâmetros físicos do problema em regimes de comprimentos de ondas em que efeitos viscosos dominam forças de tensão interfacial e competem com forças magnéticas. A tensão interfacial limita a faixa de comprimento de onda que provocam instabilidade, fazendo um papel estabilizador para pequenas escalas de amplitude dos distúrbios. A aplicação de um campo magnético externo permite o controle da estabilidade da interface. Quando a perturbação é instável, o problema rapidamente evolui para um regime não-linear. O método assintótico de perturbações regulares forneceu uma solução analítica de segunda ordem do escoamento a qual caracterizou a transição, dominada por efeitos não-lineares, resultante dos efeitos da aplicação de um campo magnético externo ao escoamento. Os efeitos de segunda distorcem a forma da perturbação e intensificam sua amplitude. Para o caso de um campo magnético oblíquo, a perturbação tende a se orientar com o campo. As propriedades de um micro canal poroso foram determinadas em uma bancada experimental. Um modelo de tubos capilares forneceu boa estimativa teórica da permeabilidade e porosidade do canal.

8. AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos ao FAP/DF, ao CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro durante o desenvolvimento do trabalho.

9. REFERÊNCIAS

- Bashtovoi, V., 1978. "Instability of a stationary thin layer of a magnetizable liquid". *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, Vol. 19, No. 1, pp. 65–69.
- Bohlius, S., Brand, H.R. and Pleiner, H., 2006. "Surface waves and rosensweig instability in isotropic ferrogels". *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, Vol. 220, No. 1/2006, pp. 97–104.
- Casademunt, J. and Magdaleno, F., 2000. "Dynamics and selection of fingering patterns. recent developments in the saffman–taylor problem". *Physics Reports*, Vol. 337, No. 1, pp. 1–35.
- Chevalier, C., Ben Amar, M., Bonn, D. and Lindner, A., 2006. "Inertial effects on saffman–taylor viscous fingering". *Journal of fluid mechanics*, Vol. 552, pp. 83–97.
- Combescot, R., Dombre, T., Hakim, V., Pomeau, Y. and Pumin, A., 1986. "Shape selection of saffman–taylor fingers". *Physical review letters*, Vol. 56, No. 19, p. 2036.
- Cunha, F. and Sobral, Y., 2004. "Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure-driven flow of a magnetic fluid". *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Vol. 343, pp. 36–64.
- Daripa, P. and Paşa, G., 2005. "New bounds for stabilizing hele–shaw flows". *Applied mathematics letters*, Vol. 18, No. 11, pp. 1293–1303.
- Guo, H., Hong, D.C. and Kurtze, D.A., 1995. "Dynamics of viscous fingers and threshold instability". *Physical Review E*, Vol. 51, No. 5, p. 4469.
- Hansen, E.B. and Rasmussen, H., 1999. "A numerical study of unstable hele–shaw flow". *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 38, No. 5, pp. 217–230.
- Homsy, G.M., 1987. "Viscous fingering in porous media". *Annual review of fluid mechanics*, Vol. 19, No. 1, pp. 271–311.
- Hong, D. and Langer, J., 1986. "Analytic theory of the selection mechanism in the saffman–taylor problem". *Physical review letters*, Vol. 56, No. 19, p. 2032.
- Langer, J., 1990. "Dendrites, viscous fingers, and the theory of pattern formation". In *Dynamics and Patterns in Complex Fluids*, Springer, pp. 190–193.
- Logan, J.D., 2013. *Applied mathematics*. John Wiley & Sons.
- Oliveira, R.M. and Miranda, J.A., 2006. "Stretching of a confined ferrofluid: Influence of viscous stresses and magnetic field". *Physical Review E*, Vol. 73, No. 3, p. 036309.
- Pettigrew, M. and Rasmussen, H., 1993. "Numerical solutions for unstable hele–shaw flows". *Journal of computational and applied mathematics*, Vol. 47, No. 2, pp. 253–266.
- Qin, Y. and Chadam, J., 1995. "A nonlinear stability problem for ferromagnetic fluids in a porous medium". *Applied Mathematics Letters*, Vol. 8, No. 2, pp. 25–29.
- Rinaldi, C., Chaves, A., Elborai, S., He, X.T. and Zahn, M., 2005. "Magnetic fluid rheology and flows". *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, Vol. 10, No. 3, pp. 141–157.
- Rosensweig, R., Zahn, M. and Vogler, T., 1978. "Stabilization of fluid penetration through a porous medium using magnetizable fluid". In *Thermomechanics of Magnetic Fluids: Theory and applications*. Vol. 1, pp. 195–211.
- Rosensweig, R.E., 2013. *Ferrohydrodynamics*. Courier Corporation.
- Saffman, P.G. and Taylor, G., 1958. "The penetration of a fluid into a porous medium or hele–shaw cell containing a more viscous liquid". In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. The Royal Society, Vol. 245, pp. 312–329.
- Scheidegger, A.E., 1998. "Hydrodynamics: Porous media". In *Hydrology and Lakes*, Springer, pp. 360–361.
- Siegel, M. and Tanveer, S., 1996. "Singular perturbation of smoothly evolving hele–shaw solutions". *Physical review letters*, Vol. 76, No. 3, p. 419.
- Tanveer, S., 2000. "Surprises in viscous fingering". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 409, pp. 273–308.