Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Tecnologia - FT
Programa de Pós-Graduação em Ciências Mecânicas
Transferência de Calor Avançada

Formulação Integral da Camada Limite

Considere as equações da Camada Limite sobre uma placa-plana, em regime permanente, e sem gradiente de pressão dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(uu) + \dfrac{\partial}{\partial y}(uv) = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(uT) + \dfrac{\partial}{\partial y}(vT) = \alpha \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \dfrac{\nu}{c}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \end{cases} \tag{1}$$

Faça o que se pede.

1. Use a formulação integral da equação do momento linear na direção x e admita que o perfil de velocidade horizontal adimensional, $m(n) = u/U$ em que $n = y/\delta$, seja dado por $m(n) = (n/2)(3 - n^2)$ para mostrar que

$$\frac{\delta}{x} = \left(\frac{280}{13}\right)^{1/2} Re_x^{-1/2}. \tag{2}$$

2. Ignore o termo de dissipação viscosa e integre a equação da energia ao longo da coordenada y desde a superfície sólida até a borda da camada limite térmica e mostre que

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta_T} u\,(T - T_\infty)\,dy = -\alpha \frac{\partial T}{\partial y}(0). \tag{3}$$

3. Assumindo agora que o perfil adimensional de diferença de temperatura seja igual ao perfil adimensional de velocidade horizontal, tal que

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_\infty} = 1 - \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = m(p),$$

em que $p = y/\delta_T$, mostre que

$$\frac{(14 - \Delta^2)\Delta^3}{13\,Pr} = 1.$$

4. Para considerar a dissipação viscosa é preciso somar a parcela

$$\frac{\nu}{c}\int_0^{\delta_T} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$$

na forma integral dada pela Eq. 3. Usando a versão com dissipação da equação da energia e assumindo o perfil cúbico para a velocidade e também para a diferença adimensional de temperatura, mostre que

$$\frac{(14-\Delta^2)\Delta^3 Pr}{13} = 1 + \frac{3}{2} Pr\, Ec\, \Delta^2 \left(1 - \frac{3}{2}\Delta^2 + \frac{1}{5}\Delta^4\right), \tag{4}$$

em que $Ec = U^2/(c(Tw - T_\infty))$ é o número de Eckert do problema. Observe que Ec pode assumir valores positivos ou negativos. O que significa $Ec < 0$? Observe também que essa formulação é válida apenas para $Pr > 1$ (por que?).

5. A Eq.(4) define implicitamente Δ em função de Pr e Ec. Implemente um procedimento numérico que determine Δ em função desses parâmetros. Usando esse procedimento, elabore um gráfico de $\Delta \times Pr$, com três curvas referentes a $Ec = \{-1, 0, 1\}$. Considere um intervalo de Pr entre 1 e 10^3, faça gráficos bi-*log* com as três curvas no mesmo sistema de eixo. Inclua uma linha de referência $\Delta = Pr^{-1/3}$.

6. Sabendo que o balanço de energia na superfície é tal que

$$-\kappa \frac{\partial T}{\partial y}(0) = h(T_w - T_\infty),$$

use a expressão para o perfil de diferença de temperatura adimensional e verifique que

$$Nu_x = \frac{hx}{\kappa} = \frac{3}{2}\frac{x}{\delta_T},$$

que pode ser rescrita como

$$Nu_x = \frac{3}{2\Delta}\frac{x}{\delta}.$$

Finalmente, utilize a expressão para δ/x e mostre que

$$Nu_x = \left(\frac{117}{1120}\right)^{1/2} \frac{Re_x^{1/2}}{\Delta(Pr, Ec)}. \tag{5}$$

Nesse estudo dirigido, partimos das equações da camada limite térmica e chegamos em uma formulação que permite determinar o coeficiente de transferência de calor por convecção local, h, pelo cálculo do número de Nusselt, dado pela Eq.6. Essa formulação fornece valores muito aceitáveis para Nu_x (com erros menos do que 2% em relação à solução exata), e permite considerar efeitos da dissipação viscosa. Lindão!